Differentialgeometrische Analyse der Kegelhelix

Vollständige Darstellung von Krümmung, Torsion, Frenet-Rahmen, Bogenlänge und geometrischen Eigenschaften

Dogan Balban

February 21, 2026

DOI: 10.5281/zenodo.18725185

Abstract

Diese Arbeit präsentiert eine vollständige differentialgeometrische Analyse der Kegelhelix, definiert durch die Parametrisierung

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{\pi^2}\theta\cos(\theta) \\ \dfrac{6}{\pi^2}\theta\sin(\theta) \\ -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{\pi}\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \geq 0.$$

Die Kurve vereint die Eigenschaften einer Archimedischen Spirale (in der xy-Projektion) mit einer linearen Höhenzunahme und liegt vollständig auf der Kegelfläche $z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$. Es werden Tangentialvektor, Normalenvektor, Binormalvektor (Frenet-Rahmen), Krümmung, Torsion, Bogenlänge, Steigungswinkel sowie asymptotische Eigenschaften vollständig berechnet und analysiert.

Contents

1 Einleitung und Grundlagen

1.1 Die Kegelhelix

Eine *Helix* ist eine Raumkurve, die sich spiralförmig um eine Achse windet [4, 5]. Im klassischen Fall der *zylindrischen Helix* bleibt der Radius konstant und Krümmung sowie Torsion sind konstant. Die hier betrachtete Kurve ist eine wesentliche Verallgemeinerung: der Radius wächst linear mit dem Winkel (Archimedische Spirale), während die Höhe ebenfalls linear zunimmt. Die Kurve windet sich daher auf einem *Kegel* und wird als **Kegelhelix** bezeichnet [3]. Die arithmetisch-zahlentheoretische Herleitung dieser Parametrisierung aus der quadratischen Folge $k(n) = \frac{1}{6}(2n^2 + 3n + 1)$ ist in [3] ausführlich dargestellt; die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die differentialgeometrische Analyse der Kurve.

Definition 1.1 (Kegelhelix)**.** Die Kegelhelix ist die Raumkurve $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch:

$$\boxed{\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{\pi^2}\,\theta\cos(\theta) \\ \dfrac{6}{\pi^2}\,\theta\sin(\theta) \\ -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{\pi}\,\theta \end{pmatrix}} \tag{1}$$

mit den Strukturkonstanten:

$$a := \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}607927101854027, \qquad b := \frac{3}{\pi} \approx 0{,}954929658551372. \tag{2}$$

Bemerkung 1.1 (Strukturkonstanten). Die Spiralkonstante $a = \frac{6}{\pi^2}$ ist der Kehrwert der berühmten Euler-Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basler Problem, L. Euler, 1734/1740) [16, 17]. Das Verhältnis der Konstanten ist bemerkenswert:

$$\frac{b}{a} = \frac{3/\pi}{6/\pi^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wird, ist dieses Verhältnis identisch mit der Kegelsteigung.

1.2 Komponentendarstellung

In Komponentenform lautet Gl. (1):

$$x(\theta) = a\theta\cos(\theta), \tag{4}$$
$$y(\theta) = a\theta\sin(\theta), \tag{5}$$
$$z(\theta) = -\tfrac{3}{4} + b\theta. \tag{6}$$

Die xy-Projektion von γ ist die *Archimedische Spirale* $r(\theta) = a\theta$ [15, 14, 1], während $z(\theta)$ linear von θ abhängt.

1.3 Regularität

Proposition 1.2 (Regularität)**.** *Die Kurve γ ist für alle $\theta > 0$ regulär, d.h. $\dot{\gamma}(\theta) \neq \mathbf{0}$.*

Proof. Es gilt $\dot{z}(\theta) = b = \frac{3}{\pi} > 0$ für alle θ. Daher ist die dritte Komponente des Tangentialvektors stets von null verschieden, womit $\dot{\gamma} \neq \mathbf{0}$. □

2 Lage auf dem Kegel

Satz 2.1 (Kegelgleichung). *Die Kegelhelix γ liegt vollständig auf der Kegelfläche*

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \right\}. \tag{7}$$

Proof. Der Abstand eines Kurvenpunkts von der z-Achse ist:

$$r(\theta) = \sqrt{x(\theta)^2 + y(\theta)^2} = \sqrt{a^2\theta^2 \cos^2\theta + a^2\theta^2 \sin^2\theta} = a\theta.$$

Einsetzen in die rechte Seite von Gl. (7):

$$-\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot a\theta = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6}{\pi^2}\theta = -\frac{3}{4} + \frac{3}{\pi}\theta = z(\theta).$$

□

Korollar 2.2 (Steigung des Kegels). *Die Steigung der Kegelmantellinie beträgt $\frac{\pi}{2}$, d.h. der Kegelwinkel (zur Horizontalen, also zur xy-Ebene) ist:*

$$\psi_{\mathcal{K}} = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 57{,}518°. \tag{8}$$

Bemerkung 2.1 (Zwei Kegelwinkel). Je nach Konvention werden in der Literatur zwei verschiedene Winkel zur Charakterisierung eines Kegels verwendet:

- Der *Steigungswinkel zur Horizontalen* (zur xy-Ebene): $\psi_{\mathcal{K}} = \arctan(\pi/2) \approx 57{,}52°$.
- Der *Öffnungswinkel zur Rotationsachse* (zur z-Achse): $\alpha = \arctan(2/\pi) \approx 32{,}48°$.

Beide Winkel sind komplementär: $\psi_{\mathcal{K}} + \alpha = 90°$. Sie sind daher konsistent und beschreiben denselben Kegel aus verschiedenen Bezugsrichtungen.

3 Tangentialvektor und Bogenlänge

3.1 Tangentialvektor

Proposition 3.1 (Tangentialvektor). *Der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(\theta)$ ist:*

$$\dot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a(\cos\theta - \theta\sin\theta) \\ a(\sin\theta + \theta\cos\theta) \\ b \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Proposition 3.2 (Betrag des Tangentialvektors).

$$|\dot{\gamma}(\theta)| = \sqrt{a^2(1 + \theta^2) + b^2}. \tag{10}$$

Proof.

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}|^2 &= a^2(\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + a^2(\sin\theta + \theta\cos\theta)^2 + b^2 \\ &= a^2\left[\cos^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\right] \\ &\quad + a^2\left[\sin^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\cos^2\theta\right] + b^2 \\ &= a^2\left[\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} + \theta^2\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1}\right] + b^2 \\ &= a^2(1 + \theta^2) + b^2. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.3 (Anfangsgeschwindigkeit). *Bei $\theta = 0$ gilt:*

$$|\dot\gamma(0)| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{36}{\pi^4}+\frac{9}{\pi^2}} = \frac{3}{\pi}\sqrt{\frac{4}{\pi^2}+1} \approx 1{,}13202.$$

Korollar 3.4 (Asymptotische Geschwindigkeit). *Für $\theta \to \infty$ gilt:*

$$|\dot\gamma(\theta)| \sim a\theta = \frac{6}{\pi^2}\theta.$$

3.2 Zweite und dritte Ableitung

Proposition 3.5 (Zweite Ableitung).

$$\ddot\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} a(-2\sin\theta - \theta\cos\theta) \\ a(2\cos\theta - \theta\sin\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Proposition 3.6 (Dritte Ableitung).

$$\dddot\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} a(-3\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ a(-3\sin\theta - \theta\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

3.3 Bogenlänge

Satz 3.7 (Bogenlänge). *Die Bogenlänge der Kegelhelix von $\theta = 0$ bis $\theta = T$ ist:*

$$L(T) = \frac{a}{2}\left[T\sqrt{T^2+c^2} + c^2\,\operatorname{arcsinh}\left(\frac{T}{c}\right)\right], \tag{13}$$

wobei

$$c^2 := \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \frac{\pi^2}{4} \approx 3{,}4674, \qquad c \approx 1{,}8621. \tag{14}$$

Proof. Aus Satz 3.2 folgt:

$$L(T) = \int_0^T \sqrt{a^2(1+t^2)+b^2}\,dt = a\int_0^T \sqrt{t^2+\frac{a^2+b^2}{a^2}}\,dt = a\int_0^T \sqrt{t^2+c^2}\,dt.$$

Das Integral $\int \sqrt{t^2+c^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+c^2} + c^2\,\operatorname{arcsinh}(t/c)\right]$ ist ein Standardintegral [12, 13]. □

Bemerkung 3.1 (Bedeutung von c). Die Konstante $c = \sqrt{1+\pi^2/4}$ hängt direkt vom Verhältnis $b/a = \pi/2$ (vgl. Bemerkung 1.1) ab. Sie bestimmt das Langzeitverhalten der Bogenlänge.

Proposition 3.8 (Asymptotik der Bogenlänge). *Für $T \to \infty$ gilt:*

$$L(T) \sim \frac{a}{2}T^2 = \frac{3}{\pi^2}T^2. \tag{15}$$

Proof. Für $T \gg c$: $\sqrt{T^2+c^2} \approx T$ und $\operatorname{arcsinh}(T/c) \approx \ln(2T/c) \ll T^2$. □

Beispiel 3.1 (Bogenlänge pro Windung)**.** Die Bogenlänge der ersten fünf Windungen:

Table 1: Bogenlänge der Kegelhelix pro Windung

Windung n	θ: von	θ: bis	**Bogenlänge** L
1	0	2π	14,5507
2	2π	4π	36,7221
3	4π	6π	60,4258
4	6π	8π	84,3867
5	8π	10π	108,3747

Die Gesamtbogenlänge nach n vollen Umdrehungen:

Table 2: Gesamtbogenlänge nach n Windungen

Windungen n	$\theta_{\max}$	$r(\theta_{\max})$	**Bogenlänge** L
1	2π	3,820	14,5507
2	4π	7,639	51,2728
3	6π	11,459	111,6985
5	10π	19,099	304,2361
10	20π	38,197	1204,9663

4 Frenet-Serret-Rahmen

4.1 Überblick

Der *Frenet-Serret-Rahmen* (auch begleitendes Dreibein, vgl. [4, 8, 5]) ist ein orthonormales Koordinatensystem, das sich entlang der Kurve bewegt und die lokale Geometrie vollständig beschreibt. Er besteht aus drei Vektoren:

- $\boldsymbol{T}(\theta)$ – Tangenteneinheitsvektor (Bewegungsrichtung)
- $\boldsymbol{N}(\theta)$ – Hauptnormaleneinheitsvektor (Richtung der Krümmung)
- $\boldsymbol{B}(\theta)$ – Binormaleinheitsvektor ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$)

4.2 Tangentenvektor

Definition 4.1 (Tangenteneinheitsvektor)**.**

$$\boldsymbol{T}(\theta) = \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2(1+\theta^2)+b^2}} \begin{pmatrix} a(\cos\theta - \theta\sin\theta) \\ a(\sin\theta + \theta\cos\theta) \\ b \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Proposition 4.2 (Steigungswinkel des Tangentialvektors)**.** *Der Winkel $\psi(\theta)$ zwischen $\boldsymbol{T}$ und der xy-Ebene (Steigungswinkel) ist:*

$$\psi(\theta) = \arctan\left(\frac{b}{a\sqrt{1+\theta^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1+\theta^2}}\right). \tag{17}$$

Bemerkung 4.1. Für $\theta \to 0$ gilt $\psi(0) = \arctan(\pi/2) \approx 57{,}52°$ – identisch mit dem Kegelwinkel aus Abschnitt 2. Für $\theta \to \infty$ strebt $\psi \to 0°$: die Kurve wird zunehmend flacher.

Table 3: Steigungswinkel $\psi(\theta)$ der Kegelhelix

θ	$\psi(\theta)$ (rad)	$\psi(\theta)$ (Grad)
$\theta \to 0$	1,0039	57,517°
$\pi/2$	0,7007	40,150°
π	0,4446	25,475°
2π	0,2421	13,869°
4π	0,1240	7,103°
10π	0,0499	2,861°

4.3 Das Kreuzprodukt $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$

Lemma 4.3 (Kreuzprodukt)**.** *Das Kreuzprodukt $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$ hat die Komponenten:*

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_x = -ab(2\cos\theta - \theta\sin\theta), \tag{18}$$
$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_y = -ab(2\sin\theta + \theta\cos\theta), \tag{19}$$
$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_z = a^2(2+\theta^2). \tag{20}$$

Proof. Mit $\dot{\gamma}$ aus Gl. (9) und $\ddot{\gamma}$ aus Gl. (11):

$$\begin{aligned}
(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_z &= \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} \\
&= a(\cos\theta - \theta\sin\theta) \cdot a(2\cos\theta - \theta\sin\theta) \\
&\quad - a(\sin\theta + \theta\cos\theta) \cdot a(-2\sin\theta - \theta\cos\theta) \\
&= a^2\left[\cos^2\theta(2-\theta^2) + \sin^2\theta(2-\theta^2) + 2\theta^2\right] \\
&= a^2(2 - \theta^2 + 2\theta^2) = a^2(2+\theta^2).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.4 (Betrag des Kreuzprodukts)**.**

$$|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2 = a^2b^2(4+\theta^2) + a^4(2+\theta^2)^2. \tag{21}$$

Proof. Einsetzen von Gl. (18) to (20):

$$\begin{aligned}
|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2 &= a^2b^2(2\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + a^2b^2(2\sin\theta + \theta\cos\theta)^2 + a^4(2+\theta^2)^2 \\
&= a^2b^2\left[(2\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (2\sin\theta + \theta\cos\theta)^2\right] + a^4(2+\theta^2)^2 \\
&= a^2b^2(4+\theta^2) + a^4(2+\theta^2)^2.
\end{aligned}$$

□

5 Krümmung

Satz 5.1 (Krümmung der Kegelhelix). *Die Krümmung $\kappa(\theta)$ der Kegelhelix ist:*

$$\kappa(\theta) = \frac{\sqrt{a^2b^2(4+\theta^2) + a^4(2+\theta^2)^2}}{\left[a^2(1+\theta^2)+b^2\right]^{3/2}}. \tag{22}$$

Mit $b = \frac{\pi}{2}a$ vereinfacht sich dies zu:

$$\kappa(\theta) = \frac{a\sqrt{\frac{\pi^2}{4}(4+\theta^2) + (2+\theta^2)^2}}{\left[a^2\left(1+\theta^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\right]^{3/2}}. \tag{23}$$

Proof. Aus der Frenet-Formel $\kappa = |\dot\gamma \times \ddot\gamma| \;/\; |\dot\gamma|^3$ sowie Sätze 3.2 and 4.4. □

Proposition 5.2 (Anfangskrümmung). *Bei $\theta = 0$ gilt:*

$$\kappa(0) = \frac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{2a}{a^2+b^2}. \tag{24}$$

Numerisch: $\kappa(0) = \dfrac{2\cdot\frac{6}{\pi^2}}{\frac{36}{\pi^4}+\frac{9}{\pi^2}} = \dfrac{4\pi^2}{3(\pi^2+4)} \approx 0{,}948799.$

Proof. Für $\theta = 0$ vereinfacht sich der Zähler in Gl. (22):

$$\sqrt{a^2b^2(4+0)+a^4(2+0)^2} = \sqrt{4a^2b^2+4a^4} = 2a\sqrt{b^2+a^2}.$$

Der Nenner ist $(a^2\cdot 1 + b^2)^{3/2} = (a^2+b^2)^{3/2}$. Also:

$$\kappa(0) = \frac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{2a}{a^2+b^2}.$$ □

Proposition 5.3 (Asymptotische Krümmung). *Für $\theta \to \infty$ gilt:*

$$\kappa(\theta) \sim \frac{a}{\theta} = \frac{6}{\pi^2\theta}. \tag{25}$$

Proof. Für große θ: Zähler $\sim a^2(2+\theta^2) \sim a^2\theta^2$, Nenner $\sim (a^2\theta^2)^{3/2} = a^3\theta^3$. Also $\kappa \sim a^2\theta^2/(a^3\theta^3) = 1/(a\theta)$. □

Table 4: Krümmung und Krümmungsradius der Kegelhelix

θ	$\kappa(\theta)$	$\varrho = 1/\kappa$	$\lvert\dot\gamma(\theta)\rvert$
0	0,948799	1,054	1,1320
$\pi/2$	0,681835	1,467	1,4810
π	0,446906	2,238	2,2201
2π	0,249876	4,002	3,9839
4π	0,129307	7,734	7,7229
10π	0,052256	19,137	19,132

Bemerkung 5.1 (Vergleich mit zylindrischer Helix). Bei einer *zylindrischen* Helix mit Radius R und Steigung h sind Krümmung $\kappa = R/(R^2+h^2)$ und Torsion $\tau = h/(R^2+h^2)$ *konstant* [4, 5]. Bei der Kegelhelix nehmen beide wie $1/\theta$ bzw. $1/\theta^2$ ab – eine fundamentale geometrische Verallgemeinerung [7, 6, 18].

6 Torsion

Satz 6.1 (Torsion der Kegelhelix)**.** *Die Torsion $\tau(\theta)$ der Kegelhelix ist:*

$$\tau(\theta) = \frac{a^2 b(6+\theta^2)}{a^2b^2(4+\theta^2)+a^4(2+\theta^2)^2} = \frac{b(6+\theta^2)}{b^2(4+\theta^2)+a^2(2+\theta^2)^2}. \tag{26}$$

Proof. Aus der Frenet-Formel $\tau = (\dot\gamma \times \ddot\gamma)\cdot \dddot\gamma \,/\, |\dot\gamma\times\ddot\gamma|^2$.

Zähler: Mit $\dddot\gamma$ aus Gl. (12) und dem Kreuzprodukt aus Satz 4.3:

$$\begin{aligned}(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma &= -ab(2\cos\theta-\theta\sin\theta)\cdot a(-3\cos\theta+\theta\sin\theta)\\ &\quad + (-ab)(2\sin\theta+\theta\cos\theta)\cdot a(-3\sin\theta-\theta\cos\theta)+0\\ &= a^2b\big[(2\cos\theta-\theta\sin\theta)(3\cos\theta-\theta\sin\theta)\\ &\qquad + (2\sin\theta+\theta\cos\theta)(3\sin\theta+\theta\cos\theta)\big]\\ &= a^2b\big[6\cos^2\theta+6\sin^2\theta+\theta^2\cos^2\theta+\theta^2\sin^2\theta\big]\\ &= a^2b(6+\theta^2).\end{aligned}$$

Der Nenner folgt aus Satz 4.4. □

Proposition 6.2 (Asymptotische Torsion)**.** *Für $\theta\to\infty$ gilt:*

$$\tau(\theta) \sim \frac{b}{a^2\theta^2} = \frac{3/\pi}{(6/\pi^2)^2\theta^2} = \frac{\pi^3}{12\theta^2}. \tag{27}$$

Table 5: Torsion der Kegelhelix

θ	$\tau(\theta)$
$\theta\to 0$	1,11774
$\pi/2$	0,60917
π	0,23417
2π	0,06429
4π	0,01631
10π	0,00262

Proposition 6.3 (Verhältnis κ/τ)**.** *Das Verhältnis von Krümmung und Torsion ist:*

$$\frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)} = \frac{\sqrt{a^2b^2(4+\theta^2)+a^4(2+\theta^2)^2}}{a^2b(6+\theta^2)/(a^2b^2(4+\theta^2)+a^4(2+\theta^2)^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{a^2b^2(4+\theta^2)+a^4(2+\theta^2)^2}. \tag{28}$$

Für $\theta \to \infty$ gilt:

$$\frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)} \sim \frac{a\theta}{b} = \frac{2\theta}{\pi}. \tag{29}$$

7 Hauptnormale und Binormale

7.1 Hauptnormalenvektor

Definition 7.1 (Hauptnormalenvektor)**.** Der Hauptnormaleneinheitsvektor ist:

$$\boldsymbol{N}(\theta) = \frac{1}{\kappa(\theta)\,|\dot{\gamma}(\theta)|^2}\left(\ddot{\gamma}(\theta) - \frac{\dot{\gamma}(\theta)\cdot\ddot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|^2}\dot{\gamma}(\theta)\right). \tag{30}$$

Lemma 7.2 (Skalierprodukt $\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma}$)**.**

$$\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma} = a^2\theta. \tag{31}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma} = a(\cos\theta - \theta\sin\theta)\cdot a(-2\sin\theta - \theta\cos\theta)\\ + a(\sin\theta + \theta\cos\theta)\cdot a(2\cos\theta - \theta\sin\theta) + b\cdot 0.\end{aligned}$$

Wir entwickeln die beiden Produkte einzeln:

$$\begin{aligned}&a^2(\cos\theta - \theta\sin\theta)(-2\sin\theta - \theta\cos\theta)\\ &\quad = a^2\big[-2\sin\theta\cos\theta - \theta\cos^2\theta + 2\theta\sin^2\theta + \theta^2\sin\theta\cos\theta\big],\\ &a^2(\sin\theta + \theta\cos\theta)(2\cos\theta - \theta\sin\theta)\\ &\quad = a^2\big[2\sin\theta\cos\theta - \theta\sin^2\theta + 2\theta\cos^2\theta - \theta^2\sin\theta\cos\theta\big].\end{aligned}$$

Durch Addition heben sich die gemischten Terme $\pm 2\sin\theta\cos\theta$ und $\pm\theta^2\sin\theta\cos\theta$ auf:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma} &= a^2\big[-\theta\cos^2\theta + 2\theta\sin^2\theta - \theta\sin^2\theta + 2\theta\cos^2\theta\big]\\ &= a^2\big[\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\big] = a^2\theta.\end{aligned}$$

□

7.2 Binormalvektor

Definition 7.3 (Binormalvektor)**.** Der Binormaleinheitsvektor ist:

$$\boldsymbol{B}(\theta) = \boldsymbol{T}(\theta)\times\boldsymbol{N}(\theta) = \frac{\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}|}. \tag{32}$$

Beispiel 7.1 (Frenet-Rahmen bei $\theta = 2\pi$)**.** Bei $\theta = 2\pi$ ergibt sich numerisch:

$$\boldsymbol{T}(2\pi) = \begin{pmatrix}0{,}15259\\0{,}95878\\0{,}23970\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{N}(2\pi) = \begin{pmatrix}-0{,}98555\\0{,}16566\\-0{,}03523\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(2\pi) = \begin{pmatrix}-0{,}07348\\-0{,}23086\\0{,}97021\end{pmatrix}.$$

Man überprüft: $|\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{B}| = 1$ und $\boldsymbol{T}\perp\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{T}\perp\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{B}$.

8 Frenet-Serret-Formeln

Satz 8.1 (Frenet-Serret-Formeln [9, 10]). *Bezüglich der natürlichen Parametrisierung (Bogenlänge s) gelten:*

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa\,\boldsymbol{N}, \qquad \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = -\kappa\,\boldsymbol{T} + \tau\,\boldsymbol{B}, \qquad \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -\tau\,\boldsymbol{N}. \tag{33}$$

Bemerkung 8.1. Die Frenet-Formeln zeigen, wie sich das Dreibein $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ entlang der Kurve dreht. Die Krümmung κ steuert die Drehung in der $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N})$-Ebene (Schmiegebene), die Torsion τ die Drehung um die $\boldsymbol{T}$-Achse (Verwindung der Kurve). Nach dem Theorem von Lancret [11, 6] ist eine Raumkurve genau dann eine (verallgemeinerte) Helix, wenn $\kappa/\tau = \text{const}$ gilt. Da für die Kegelhelix $\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi \to \infty$, ist sie in diesem Sinn keine Helix – sondern eine geometrisch reichere Verallgemeinerung.

9 Schmieg-, Normal- und Rektifizierebene

Definition 9.1 (Ebenen des Frenet-Rahmens). In jedem regulären Kurvenpunkt $\gamma(\theta)$ definiert der Frenet-Rahmen drei ausgezeichnete Ebenen:

- **Schmiegebene**: aufgespannt von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$; enthält die Tangente und die Hauptnormale.
- **Normalebene**: aufgespannt von $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$; steht senkrecht auf der Tangente.
- **Rektifizierebene**: aufgespannt von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{B}$; enthält Tangente und Binormale.

Proposition 9.2 (Normalebenengleichung). *Die Normalebene im Punkt $\gamma(\theta_0)$ hat die Gleichung:*

$$\boldsymbol{T}(\theta_0) \cdot \big((x, y, z) - \gamma(\theta_0)\big) = 0. \tag{34}$$

10 Asymptotisches Verhalten und Grenzwerte

Satz 10.1 (Asymptotisches Verhalten). *Für $\theta \to \infty$ gelten die folgenden Näherungen:*

$$|\dot{\gamma}(\theta)| \sim a\theta, \tag{35}$$

$$L(\theta) \sim \frac{a}{2}\theta^2, \tag{36}$$

$$\kappa(\theta) \sim \frac{1}{a\theta} = \frac{\pi^2}{6\theta}, \tag{37}$$

$$\tau(\theta) \sim \frac{b}{a^2\theta^2} = \frac{\pi^3}{12\theta^2}, \tag{38}$$

$$\psi(\theta) \sim \frac{b}{a\theta} = \frac{\pi}{2\theta}. \tag{39}$$

Korollar 10.2 (Verhältnisse). *Für $\theta \to \infty$:*

$$\frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)} \sim \frac{2\theta}{\pi}, \qquad \frac{\kappa(\theta)}{\psi(\theta)} \sim \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\theta}. \tag{40}$$

Bemerkung 10.1 (Geometrische Deutung). Die Kurve nähert sich asymptotisch einer flachen Spirale in der xy-Ebene, da $\psi(\theta) \to 0$ und $\kappa(\theta) \to 0$. Gleichzeitig wächst der Radius $r = a\theta \to \infty$: die Kurve entfernt sich unbeschränkt vom Ursprung.

11 Numerische Kurvenpunkte

Table 6: Ausgewählte Kurvenpunkte der Kegelhelix

θ	$x(\theta)$	$y(\theta)$	$z(\theta)$	$r(\theta)$	$\kappa(\theta)$	$\tau(\theta)$
0	0	0	$-0{,}750$	0	0,9488	1,1177
π	$-1{,}905$	0	2,250	1,905	0,4469	0,2342
2π	3,810	0	5,250	3,810	0,2499	0,0643
3π	$-5{,}715$	0	8,250	5,715	0,1680	0,0286
4π	7,620	0	11,250	7,620	0,1293	0,0163
5π	$-9{,}524$	0	14,250	9,524	0,1037	0,0104

12 Übersicht aller Formeln

Table 7: Formelübersicht Teil 1: Parametrisierung, Ableitungen und Bogenlänge

Eigenschaft	**Formel**
Parametrisierung	
Konstanten	$a = \dfrac{6}{\pi^2}, \quad b = \dfrac{3}{\pi}, \quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{\pi}{2}$
Kurve $\gamma(\theta)$	$\big(a\theta\cos\theta,\ a\theta\sin\theta,\ -\frac{3}{4} + b\theta\big)$
Kegelgleichung	$z = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\pi}{2} r$
Ableitungen	
$\dot\gamma(\theta)$	$(a(\cos\theta - \theta\sin\theta),\ a(\sin\theta + \theta\cos\theta),\ b)$
$\ddot\gamma(\theta)$	$(a(-2\sin\theta - \theta\cos\theta),\ a(2\cos\theta - \theta\sin\theta),\ 0)$
$\lvert\dot\gamma(\theta)\rvert$	$\sqrt{a^2(1+\theta^2) + b^2}$
Bogenlänge	
$L(T)$	$\dfrac{a}{2}\left[T\sqrt{T^2+c^2} + c^2 \operatorname{arcsinh}\left(\dfrac{T}{c}\right)\right]$
c^2	$1 + \dfrac{\pi^2}{4} \approx 3{,}467$
Asymptotik	$L(T) \sim \dfrac{a}{2} T^2$

Table 8: Formelübersicht Teil 2: Frenet-Größen und Identitäten

Eigenschaft	**Formel**
Frenet-Größen	
Krümmung $\kappa(\theta)$	$\dfrac{\sqrt{a^2b^2(4+\theta^2)+a^4(2+\theta^2)^2}}{[a^2(1+\theta^2)+b^2]^{3/2}}$
Asymp. Krümmung	$\kappa \sim \dfrac{6}{\pi^2\theta}$
Torsion $\tau(\theta)$	$\dfrac{b(6+\theta^2)}{b^2(4+\theta^2)+a^2(2+\theta^2)^2}$
Asymp. Torsion	$\tau \sim \dfrac{\pi^3}{12\theta^2}$
Steigungswinkel	$\psi = \arctan\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{1+\theta^2}}\right)$
Identitäten	
	$\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = a^2\theta$
	$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma} = a^2b(6+\theta^2)$
	$\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi$

13 Fazit

Diese Arbeit hat eine vollständige differentialgeometrische Analyse der Kegelhelix $\gamma(\theta) = \left(a\theta\cos\theta,\ a\theta\sin\theta,\ -\frac{3}{4}+b\theta\right)^T$ präsentiert. Die wichtigsten Ergebnisse lauten:

1. Die Kurve liegt auf dem Kegel $z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$ (vgl. Satz 2.1), da $b/a = \pi/2$ die Kegelsteigung liefert.

2. Tangentialvektor und Bogenlänge sind explizit berechenbar; die Bogenlänge wächst asymptotisch wie θ^2 (vgl. Sätze 3.7 and 3.8).

3. Krümmung $\kappa \sim 1/\theta$ und Torsion $\tau \sim 1/\theta^2$ nehmen beide ab – im Gegensatz zur zylindrischen Helix mit konstanten Werten (vgl. Sätze 5.1 and 6.1).

4. Das Kreuzprodukt $(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma} = a^2b(6+\theta^2)$ liefert eine elegante geschlossene Form für die Torsion (vgl. Satz 6.1).

5. Der Frenet-Rahmen ist vollständig bestimmt; die Frenet-Serret-Formeln Satz 8.1 beschreiben seine Entwicklung entlang der Kurve.

6. Die Spiralkonstante $a = 6/\pi^2$, der Kehrwert der Euler-Summe, verleiht der Kurve eine tiefe zahlentheoretische Verbindung (vgl. Bemerkung 1.1).

References

[1] D. Balban, *Differentialgeometrische Analyse der Archimedischen Spirale $r(\theta) = \frac{6}{\pi^2}\theta$: Krümmung, Bogenlänge, äquidistante Parametrisierung und Beziehung zum Goldenen Schnitt*, Eigenständige mathematische Publikation, 2025.

[2] D. Balban, *Mathematische Analyse der Kegelfläche $z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$: Parametrisierung, Flächeninhalt, Volumen, Krümmung und entwickelbare Flächen*, Eigenständige mathematische Publikation, 2025.

[3] D. Balban, *Von der quadratischen Folge zur Kegelhelix: Geometrische Transformation diophantischer Strukturen und Einbettung der Primzahlen im dreidimensionalen Raum*, Eigenständige mathematische Publikation, 2026.

[4] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised ed. Dover Publications, Mineola, NY, 2016.
Standardwerk. Kapitel 1 behandelt reguläre Kurven, Bogenlängenparametrisierung, Frenet-Serret-Formeln (Abschnitt 1.5) sowie den Fundamentalsatz der Kurventheorie. Direkt relevant für Abschnitte 3–7 dieser Arbeit.

[5] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, 2nd ed. Springer, London, 2010.
Einführung mit vielen expliziten Berechnungsbeispielen. Abschnitte 2.2–2.4 behandeln Frenet-Rahmen, Krümmung und Torsion allgemeiner Raumkurven; Abschnitt 2.4 diskutiert zylindrische Helices als Spezialfall konstanter κ und τ, von dem die Kegelhelix wesentlich abweicht.

[6] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nd ed. Dover Publications, New York, 1988.
Klassisches Referenzwerk. Abschnitt 1-7 behandelt Helices und ihre Charakterisierung durch konstantes κ/τ-Verhältnis (Lancret-Theorem). Die Kegelhelix besitzt nicht-konstantes $\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi$, was ihre Eigenschaft als verallgemeinerte Helix im Sinne von Struik illustriert.

[7] A. Gray, E. Abbena und S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 3rd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
Umfassende Behandlung von Kurven und Flächen mit expliziten Berechnungen. Kapitel 3 behandelt Frenet-Rahmen und Krümmungsformeln in allgemeiner Form; Abschnitt 5.3 diskutiert Spiralen auf Kegeln und deren geodätische Eigenschaften.

[8] E. Kreyszig, *Differential Geometry*. Dover Publications, New York, 1991 (Nachdruck der Ausgabe von 1959).
Gründliche klassische Behandlung. Abschnitte 11–14 entwickeln die Theorie der Kurven zweiter Art (Torsion), die Frenet-Formeln und deren Anwendung auf Helices und Kurven auf Rotationsflächen, einschließlich Kegeln.

[9] J. F. Frenet, *Sur les courbes à double courbure*, Thèse, Toulouse, 1847; auch in: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Bd. 17, S. 437–447, 1852.

Erste systematische Entwicklung der nach Frenet benannten Formeln für Raumkurven. Die Arbeit führt den Tangentenvektor $\mathbf{T}$*, den Hauptnormalenvektor* $\mathbf{N}$ *und die Krümmungsformel* $\kappa = |\ddot{\gamma}|/|\dot{\gamma}|^2$ *ein.*

[10] J. A. Serret, *Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Bd. 16, S. 193–207, 1851.
Serret entwickelte unabhängig und zeitgleich die Torsionsformel und die vollständigen Differentialgleichungen des begleitenden Dreibeins. Die Frenet-Serret-Formeln in Satz 8.1 tragen den Namen beider Autoren.

[11] M. A. Lancret, *Mémoire sur les courbes à double courbure*, *Mémoires présentés à l'Institut par divers savants*, Bd. 1, S. 416–454, 1806.
Lancret bewies den nach ihm benannten Satz: Eine Kurve ist genau dann eine (verallgemeinerte) Helix, wenn das Verhältnis κ/τ *konstant ist. Da für die Kegelhelix* $\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi$ *nicht konstant ist, ist sie* keine *Helix im Lancretschen Sinn – eine Tatsache, die ihren besonderen geometrischen Charakter unterstreicht.*

[12] M. Abramowitz und I. A. Stegun (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10th ed. National Bureau of Standards, Washington, DC, 1972; Dover Publications, New York, 1992.
Die geschlossene Formel für das Bogenlängenintegral in Satz 3.7 verwendet das Standardintegral $\int \sqrt{t^2+c^2}\,dt = \frac{1}{2}[t\sqrt{t^2+c^2} + c^2 \operatorname{arcsinh}(t/c)]$*; vgl. Formel 3.3.30 und die Tabellen der hyperbolischen Funktionen in Kapitel 4.*

[13] F. W. J. Olver et al. (Hrsg.), *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Release 1.2.1, 2024, `https://dlmf.nist.gov`.
Online-Referenz für Standardformeln. Abschnitt 4.37 enthält die vollständige Formelsammlung für den Arkussinus Hyperbolicus arcsinh*, der in der Bogenlängenformel Gl. (13) dieser Arbeit auftritt.*

[14] J. D. Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, New York, 1972.
Abschnitt 2.3 behandelt die archimedische Spirale $r = a\theta$ *ausführlich, einschließlich Bogenlänge (mit* arcsinh*-Formel, S. 186), Krümmung und Evolute. Die* xy*-Projektion der in dieser Arbeit untersuchten Kegelhelix ist genau diese Spirale mit* $a = 6/\pi^2$*.*

[15] Archimedes von Syrakus, *Über Spiralen* (*De Spiralibus*), ca. 225 v. Chr.; deutsche Übersetzung und Kommentar in: A. Czwalina (Hrsg.), *Archimedes: Werke*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1967.
Historische Quelle der archimedischen Spirale. Archimedes definiert die Spirale als Ortskurve eines Punktes, der sich gleichförmig auf einem um den Ursprung rotierenden Strahl bewegt – äquivalent zur Polardarstellung $r = a\theta$*.*

[16] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Bd. 7, S. 123–134, 1740 (vorgelegt 1735).
Eulers Beweis der Formel $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ *(Baseler Problem). Die Spiralkonstante* $a = 6/\pi^2 = 1/\zeta(2)$ *dieser Arbeit ist der Kehrwert dieser berühmten Summe (vgl. Bemerkung 1.1).*

[17] G. H. Hardy und E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed. Oxford University Press, Oxford, 2008.

Standardwerk der Zahlentheorie. Abschnitt 17.6 enthält einen elementaren Beweis der Formel $\zeta(2) = \pi^2/6$; Kapitel 17 behandelt Erzeugende Funktionen und Dirichlet-Reihen im weiteren Kontext.

[18] S. Izumiya und N. Takeuchi, *New Special Curves and Developable Surfaces*, *Turkish Journal of Mathematics*, Bd. 28, Nr. 2, S. 153–163, 2004.
Einführung des Begriffs der slope lines *auf Rotationsflächen, zu denen die Kegelhelix gehört. Die Arbeit zeigt, dass Kurven auf entwickelbaren Flächen mit konstantem Steigungswinkel zur Mantellinie eine natürliche Verallgemeinerung von Helices auf Zylindern bilden.*

[19] A. T. Ali, *Position Vectors of Curves in the Galilean Space G_3*, *Matematički Vesnik*, Bd. 64, Nr. 3, S. 200–210, 2012.
Enthält allgemeine Formeln für Krümmung und Torsion von Kurven auf Rotationsflächen; die Resultate sind direkt mit den Ausdrücken für $\kappa(\theta)$ und $\tau(\theta)$ in Sätze 5.1 and 6.1 dieser Arbeit vergleichbar.