

# Differentialgeometrische Analyse der Kegelhelix

Vollständige Darstellung von Krümmung, Torsion, Frenet-Rahmen, Bogenlänge und geometrischen Eigenschaften

Dogan Balban

February 21, 2026

## Abstract

Diese Arbeit präsentiert eine vollständige differentialgeometrische Analyse der Kegelhelix, definiert durch die Parametrisierung

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\pi^2} \theta \cos(\theta) \\ \frac{6}{\pi^2} \theta \sin(\theta) \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \geq 0.$$

Die Kurve vereint die Eigenschaften einer Archimedisches Spirale (in der  $xy$ -Projektion) mit einer linearen Höhenzunahme und liegt vollständig auf der Kegelfläche  $z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$ . Es werden Tangentialvektor, Normalenvektor, Binormalvektor (Frenet-Rahmen), Krümmung, Torsion, Bogenlänge, Steigungswinkel sowie asymptotische Eigenschaften vollständig berechnet und analysiert.

## Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung und Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Die Kegelhelix . . . . .	3
1.2	Komponentendarstellung . . . . .	3
1.3	Regularität . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Lage auf dem Kegel</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Tangentialvektor und Bogenlänge</b>	<b>4</b>
3.1	Tangentialvektor . . . . .	4
3.2	Zweite und dritte Ableitung . . . . .	5
3.3	Bogenlänge . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Frenet-Serret-Rahmen</b>	<b>6</b>
4.1	Überblick . . . . .	6
4.2	Tangentenvektor . . . . .	6
4.3	Das Kreuzprodukt $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$ . . . . .	7

<b>5</b>	<b>Krümmung</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Torsion</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Hauptnormale und Binormale</b>	<b>10</b>
7.1	Hauptnormalenvektor . . . . .	10
7.2	Binormalvektor . . . . .	10
<b>8</b>	<b>Frenet-Serret-Formeln</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Schmiege-, Normal- und Rektifizierebene</b>	<b>11</b>
<b>10</b>	<b>Asymptotisches Verhalten und Grenzwerte</b>	<b>11</b>
<b>11</b>	<b>Numerische Kurvenpunkte</b>	<b>12</b>
<b>12</b>	<b>Übersicht aller Formeln</b>	<b>13</b>
<b>13</b>	<b>Fazit</b>	<b>14</b>

# 1 Einleitung und Grundlagen

## 1.1 Die Kegelhelix

Eine *Helix* ist eine Raumkurve, die sich spiralförmig um eine Achse windet [4, 5]. Im klassischen Fall der *zylindrischen Helix* bleibt der Radius konstant und Krümmung sowie Torsion sind konstant. Die hier betrachtete Kurve ist eine wesentliche Verallgemeinerung: der Radius wächst linear mit dem Winkel (Archimedische Spirale), während die Höhe ebenfalls linear zunimmt. Die Kurve windet sich daher auf einem *Kegel* und wird als **Kegelhelix** bezeichnet [3]. Die arithmetisch-zahlentheoretische Herleitung dieser Parametrisierung aus der quadratischen Folge  $k(n) = \frac{1}{6}(2n^2 + 3n + 1)$  ist in [3] ausführlich dargestellt; die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die differentialgeometrische Analyse der Kurve.

**Definition 1.1** (Kegelhelix). Die Kegelhelix ist die Raumkurve  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gegeben durch:

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\pi^2} \theta \cos(\theta) \\ \frac{6}{\pi^2} \theta \sin(\theta) \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} \theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den Strukturkonstanten:

$$a := \frac{6}{\pi^2} \approx 0,607927101854027, \quad b := \frac{3}{\pi} \approx 0,954929658551372. \quad (2)$$

*Bemerkung 1.1* (Strukturkonstanten). Die Spiralkonstante  $a = \frac{6}{\pi^2}$  ist der Kehrwert der berühmten Euler-Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (Basler Problem, L. Euler, 1734/1740) [16, 17]. Das Verhältnis der Konstanten ist bemerkenswert:

$$\frac{b}{a} = \frac{3/\pi}{6/\pi^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wird, ist dieses Verhältnis identisch mit der Kegelsteigung.

## 1.2 Komponentendarstellung

In Komponentenform lautet Gl. (1):

$$x(\theta) = a\theta \cos(\theta), \quad (4)$$

$$y(\theta) = a\theta \sin(\theta), \quad (5)$$

$$z(\theta) = -\frac{3}{4} + b\theta. \quad (6)$$

Die  $xy$ -Projektion von  $\gamma$  ist die *Archimedische Spirale*  $r(\theta) = a\theta$  [15, 14, 1], während  $z(\theta)$  linear von  $\theta$  abhängt.

## 1.3 Regularität

**Proposition 1.2** (Regularität). Die Kurve  $\gamma$  ist für alle  $\theta > 0$  regulär, d.h.  $\dot{\gamma}(\theta) \neq \mathbf{0}$ .

*Proof.* Es gilt  $\dot{z}(\theta) = b = \frac{3}{\pi} > 0$  für alle  $\theta$ . Daher ist die dritte Komponente des Tangentialvektors stets von null verschieden, womit  $\dot{\gamma} \neq \mathbf{0}$ .  $\square$

## 2 Lage auf dem Kegel

**Satz 2.1** (Kegelgleichung). *Die Kegelhelix  $\gamma$  liegt vollständig auf der Kegelfläche*

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \right\}. \quad (7)$$

*Proof.* Der Abstand eines Kurvenpunkts von der  $z$ -Achse ist:

$$r(\theta) = \sqrt{x(\theta)^2 + y(\theta)^2} = \sqrt{a^2 \theta^2 \cos^2 \theta + a^2 \theta^2 \sin^2 \theta} = a\theta.$$

Einsetzen in die rechte Seite von Gl. (7):

$$-\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot a\theta = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6}{\pi^2} \theta = -\frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} \theta = z(\theta).$$

□

**Korollar 2.2** (Steigung des Kegels). *Die Steigung der Kegelmantellinie beträgt  $\frac{\pi}{2}$ , d.h. der Kegelwinkel (zur Horizontalen, also zur  $xy$ -Ebene) ist:*

$$\psi_{\mathcal{K}} = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 57,518^\circ. \quad (8)$$

*Bemerkung 2.1* (Zwei Kegelwinkel). Je nach Konvention werden in der Literatur zwei verschiedene Winkel zur Charakterisierung eines Kegels verwendet:

- Der *Steigungswinkel zur Horizontalen* (zur  $xy$ -Ebene):  $\psi_{\mathcal{K}} = \arctan(\pi/2) \approx 57,52^\circ$ .
- Der *Öffnungswinkel zur Rotationsachse* (zur  $z$ -Achse):  $\alpha = \arctan(2/\pi) \approx 32,48^\circ$ .

Beide Winkel sind komplementär:  $\psi_{\mathcal{K}} + \alpha = 90^\circ$ . Sie sind daher konsistent und beschreiben denselben Kegel aus verschiedenen Bezugsrichtungen.

## 3 Tangentialvektor und Bogenlänge

### 3.1 Tangentialvektor

**Proposition 3.1** (Tangentialvektor). *Der Tangentialvektor  $\dot{\gamma}(\theta)$  ist:*

$$\dot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a(\cos \theta - \theta \sin \theta) \\ a(\sin \theta + \theta \cos \theta) \\ b \end{pmatrix}. \quad (9)$$

**Proposition 3.2** (Betrag des Tangentialvektors).

$$|\dot{\gamma}(\theta)| = \sqrt{a^2(1 + \theta^2) + b^2}. \quad (10)$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}|^2 &= a^2(\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + a^2(\sin \theta + \theta \cos \theta)^2 + b^2 \\ &= a^2 [\cos^2 \theta - 2\theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 \sin^2 \theta] \\ &\quad + a^2 [\sin^2 \theta + 2\theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 \cos^2 \theta] + b^2 \\ &= a^2 \left[ \underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1} + \theta^2 \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_{=1} \right] + b^2 \\ &= a^2(1 + \theta^2) + b^2. \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.3** (Anfangsgeschwindigkeit). *Bei  $\theta = 0$  gilt:*

$$|\dot{\gamma}(0)| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{36}{\pi^4} + \frac{9}{\pi^2}} = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{4}{\pi^2} + 1} \approx 1,13202.$$

**Korollar 3.4** (Asymptotische Geschwindigkeit). *Für  $\theta \rightarrow \infty$  gilt:*

$$|\dot{\gamma}(\theta)| \sim a\theta = \frac{6}{\pi^2}\theta.$$

## 3.2 Zweite und dritte Ableitung

**Proposition 3.5** (Zweite Ableitung).

$$\ddot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a(-2 \sin \theta - \theta \cos \theta) \\ a(2 \cos \theta - \theta \sin \theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

**Proposition 3.6** (Dritte Ableitung).

$$\ddot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a(-3 \cos \theta + \theta \sin \theta) \\ a(-3 \sin \theta - \theta \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

## 3.3 Bogenlänge

**Satz 3.7** (Bogenlänge). *Die Bogenlänge der Kegelhelix von  $\theta = 0$  bis  $\theta = T$  ist:*

$$L(T) = \frac{a}{2} \left[ T \sqrt{T^2 + c^2} + c^2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{T}{c} \right) \right], \quad (13)$$

wobei

$$c^2 := \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{\pi^2}{4} \approx 3,4674, \quad c \approx 1,8621. \quad (14)$$

*Proof.* Aus Satz 3.2 folgt:

$$L(T) = \int_0^T \sqrt{a^2(1+t^2) + b^2} dt = a \int_0^T \sqrt{t^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}} dt = a \int_0^T \sqrt{t^2 + c^2} dt.$$

Das Integral  $\int \sqrt{t^2 + c^2} dt = \frac{1}{2} [t\sqrt{t^2 + c^2} + c^2 \operatorname{arcsinh}(t/c)]$  ist ein Standardintegral [12, 13].  $\square$

**Bemerkung 3.1** (Bedeutung von  $c$ ). Die Konstante  $c = \sqrt{1 + \pi^2/4}$  hängt direkt vom Verhältnis  $b/a = \pi/2$  (vgl. Bemerkung 1.1) ab. Sie bestimmt das Langzeitverhalten der Bogenlänge.

**Proposition 3.8** (Asymptotik der Bogenlänge). *Für  $T \rightarrow \infty$  gilt:*

$$L(T) \sim \frac{a}{2} T^2 = \frac{3}{\pi^2} T^2. \quad (15)$$

*Proof.* Für  $T \gg c$ :  $\sqrt{T^2 + c^2} \approx T$  und  $\operatorname{arcsinh}(T/c) \approx \ln(2T/c) \ll T^2$ .  $\square$

**Beispiel 3.1** (Bogenlänge pro Windung). Die Bogenlänge der ersten fünf Windungen:

Table 1: Bogenlänge der Kegelhelix pro Windung

Windung $n$	$\theta$ : von	$\theta$ : bis	Bogenlänge $L$
1	0	$2\pi$	14,5507
2	$2\pi$	$4\pi$	36,7221
3	$4\pi$	$6\pi$	60,4258
4	$6\pi$	$8\pi$	84,3867
5	$8\pi$	$10\pi$	108,3747

Die Gesamtbogenlänge nach  $n$  vollen Umdrehungen:

Table 2: Gesamtbogenlänge nach  $n$  Windungen

Windungen $n$	$\theta_{\max}$	$r(\theta_{\max})$	Bogenlänge $L$
1	$2\pi$	3,820	14,5507
2	$4\pi$	7,639	51,2728
3	$6\pi$	11,459	111,6985
5	$10\pi$	19,099	304,2361
10	$20\pi$	38,197	1204,9663

## 4 Frenet-Serret-Rahmen

### 4.1 Überblick

Der *Frenet-Serret-Rahmen* (auch begleitendes Dreibein, vgl. [4, 8, 5]) ist ein orthonormales Koordinatensystem, das sich entlang der Kurve bewegt und die lokale Geometrie vollständig beschreibt. Er besteht aus drei Vektoren:

- $\mathbf{T}(\theta)$  – Tangenteneinheitsvektor (Bewegungsrichtung)
- $\mathbf{N}(\theta)$  – Hauptnormaleneinheitsvektor (Richtung der Krümmung)
- $\mathbf{B}(\theta)$  – Binormaleinheitsvektor ( $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ )

### 4.2 Tangentenvektor

**Definition 4.1** (Tangenteneinheitsvektor).

$$\mathbf{T}(\theta) = \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2(1+\theta^2)+b^2}} \begin{pmatrix} a(\cos \theta - \theta \sin \theta) \\ a(\sin \theta + \theta \cos \theta) \\ b \end{pmatrix}. \quad (16)$$

**Proposition 4.2** (Steigungswinkel des Tangentialvektors). *Der Winkel  $\psi(\theta)$  zwischen  $\mathbf{T}$  und der  $xy$ -Ebene (Steigungswinkel) ist:*

$$\psi(\theta) = \arctan\left(\frac{b}{a\sqrt{1+\theta^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1+\theta^2}}\right). \quad (17)$$

*Bemerkung 4.1.* Für  $\theta \rightarrow 0$  gilt  $\psi(0) = \arctan(\pi/2) \approx 57,52^\circ$  – identisch mit dem Kegelwinkel aus Abschnitt 2. Für  $\theta \rightarrow \infty$  strebt  $\psi \rightarrow 0^\circ$ : die Kurve wird zunehmend flacher.

Table 3: Steigungswinkel  $\psi(\theta)$  der Kegelhelix

$\theta$	$\psi(\theta)$ (rad)	$\psi(\theta)$ (Grad)
$\theta \rightarrow 0$	1,0039	$57,517^\circ$
$\pi/2$	0,7007	$40,150^\circ$
$\pi$	0,4446	$25,475^\circ$
$2\pi$	0,2421	$13,869^\circ$
$4\pi$	0,1240	$7,103^\circ$
$10\pi$	0,0499	$2,861^\circ$

### 4.3 Das Kreuzprodukt $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$

**Lemma 4.3** (Kreuzprodukt). *Das Kreuzprodukt  $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$  hat die Komponenten:*

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_x = -ab(2 \cos \theta - \theta \sin \theta), \quad (18)$$

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_y = -ab(2 \sin \theta + \theta \cos \theta), \quad (19)$$

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_z = a^2(2 + \theta^2). \quad (20)$$

*Proof.* Mit  $\dot{\gamma}$  aus Gl. (9) und  $\ddot{\gamma}$  aus Gl. (11):

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})_z &= \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} \\ &= a(\cos \theta - \theta \sin \theta) \cdot a(2 \cos \theta - \theta \sin \theta) \\ &\quad - a(\sin \theta + \theta \cos \theta) \cdot a(-2 \sin \theta - \theta \cos \theta) \\ &= a^2[\cos^2 \theta(2 - \theta^2) + \sin^2 \theta(2 - \theta^2) + 2\theta^2] \\ &= a^2(2 - \theta^2 + 2\theta^2) = a^2(2 + \theta^2). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 4.4** (Betrag des Kreuzprodukts).

$$|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2 = a^2b^2(4 + \theta^2) + a^4(2 + \theta^2)^2. \quad (21)$$

*Proof.* Einsetzen von Gl. (18) to (20):

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2 &= a^2b^2(2 \cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + a^2b^2(2 \sin \theta + \theta \cos \theta)^2 + a^4(2 + \theta^2)^2 \\ &= a^2b^2[(2 \cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (2 \sin \theta + \theta \cos \theta)^2] + a^4(2 + \theta^2)^2 \\ &= a^2b^2(4 + \theta^2) + a^4(2 + \theta^2)^2. \end{aligned} \quad \square$$

## 5 Krümmung

**Satz 5.1** (Krümmung der Kegelhelix). *Die Krümmung  $\kappa(\theta)$  der Kegelhelix ist:*

$$\kappa(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 b^2 (4 + \theta^2) + a^4 (2 + \theta^2)^2}}{[a^2 (1 + \theta^2) + b^2]^{3/2}}. \quad (22)$$

Mit  $b = \frac{\pi}{2}a$  vereinfacht sich dies zu:

$$\kappa(\theta) = \frac{a \sqrt{\frac{\pi^2}{4} (4 + \theta^2) + (2 + \theta^2)^2}}{[a^2 (1 + \theta^2 + \frac{\pi^2}{4})]^{3/2}}. \quad (23)$$

*Proof.* Aus der Frenet-Formel  $\kappa = |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}| / |\dot{\gamma}|^3$  sowie Sätze 3.2 and 4.4.  $\square$

**Proposition 5.2** (Anfangskrümmung). *Bei  $\theta = 0$  gilt:*

$$\kappa(0) = \frac{2a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2a}{a^2 + b^2}. \quad (24)$$

*Numerisch:*  $\kappa(0) = \frac{2 \cdot \frac{6}{\pi^2}}{\frac{36}{\pi^4} + \frac{9}{\pi^2}} = \frac{4\pi^2}{3(\pi^2 + 4)} \approx 0,948799.$

*Proof.* Für  $\theta = 0$  vereinfacht sich der Zähler in Gl. (22):

$$\sqrt{a^2 b^2 (4 + 0) + a^4 (2 + 0)^2} = \sqrt{4a^2 b^2 + 4a^4} = 2a\sqrt{b^2 + a^2}.$$

Der Nenner ist  $(a^2 \cdot 1 + b^2)^{3/2} = (a^2 + b^2)^{3/2}$ . Also:

$$\kappa(0) = \frac{2a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2a}{a^2 + b^2}. \quad \square$$

**Proposition 5.3** (Asymptotische Krümmung). *Für  $\theta \rightarrow \infty$  gilt:*

$$\kappa(\theta) \sim \frac{a}{\theta} = \frac{6}{\pi^2 \theta}. \quad (25)$$

*Proof.* Für große  $\theta$ : Zähler  $\sim a^2(2 + \theta^2) \sim a^2\theta^2$ , Nenner  $\sim (a^2\theta^2)^{3/2} = a^3\theta^3$ . Also  $\kappa \sim a^2\theta^2/(a^3\theta^3) = 1/(a\theta)$ .  $\square$

Table 4: Krümmung und Krümmungsradius der Kegelhelix

$\theta$	$\kappa(\theta)$	$\varrho = 1/\kappa$	$ \dot{\gamma}(\theta) $
0	0,948799	1,054	1,1320
$\pi/2$	0,681835	1,467	1,4810
$\pi$	0,446906	2,238	2,2201
$2\pi$	0,249876	4,002	3,9839
$4\pi$	0,129307	7,734	7,7229
$10\pi$	0,052256	19,137	19,132



*Bemerkung 5.1* (Vergleich mit zylindrischer Helix). Bei einer *zylindrischen* Helix mit Radius  $R$  und Steigung  $h$  sind Krümmung  $\kappa = R/(R^2 + h^2)$  und Torsion  $\tau = h/(R^2 + h^2)$  konstant [4, 5]. Bei der Kegelhelix nehmen beide wie  $1/\theta$  bzw.  $1/\theta^2$  ab – eine fundamentale geometrische Verallgemeinerung [7, 6, 18].

## 6 Torsion

**Satz 6.1** (Torsion der Kegelhelix). *Die Torsion  $\tau(\theta)$  der Kegelhelix ist:*

$$\tau(\theta) = \frac{a^2 b(6 + \theta^2)}{a^2 b^2(4 + \theta^2) + a^4(2 + \theta^2)^2} = \frac{b(6 + \theta^2)}{b^2(4 + \theta^2) + a^2(2 + \theta^2)^2}. \quad (26)$$

*Proof.* Aus der Frenet-Formel  $\tau = (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} / |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2$ .

**Zähler:** Mit  $\ddot{\gamma}$  aus Gl. (12) und dem Kreuzprodukt aus Satz 4.3:

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} &= -ab(2 \cos \theta - \theta \sin \theta) \cdot a(-3 \cos \theta + \theta \sin \theta) \\ &\quad + (-ab)(2 \sin \theta + \theta \cos \theta) \cdot a(-3 \sin \theta - \theta \cos \theta) + 0 \\ &= a^2 b [(2 \cos \theta - \theta \sin \theta)(3 \cos \theta - \theta \sin \theta) \\ &\quad + (2 \sin \theta + \theta \cos \theta)(3 \sin \theta + \theta \cos \theta)] \\ &= a^2 b [6 \cos^2 \theta + 6 \sin^2 \theta + \theta^2 \cos^2 \theta + \theta^2 \sin^2 \theta] \\ &= a^2 b(6 + \theta^2). \end{aligned}$$

Der Nenner folgt aus Satz 4.4. □

**Proposition 6.2** (Asymptotische Torsion). *Für  $\theta \rightarrow \infty$  gilt:*

$$\tau(\theta) \sim \frac{b}{a^2 \theta^2} = \frac{3/\pi}{(6/\pi^2)^2 \theta^2} = \frac{\pi^3}{12 \theta^2}. \quad (27)$$

Table 5: Torsion der Kegelhelix

$\theta$	$\tau(\theta)$
$\theta \rightarrow 0$	1,11774
$\pi/2$	0,60917
$\pi$	0,23417
$2\pi$	0,06429
$4\pi$	0,01631
$10\pi$	0,00262

**Proposition 6.3** (Verhältnis  $\kappa/\tau$ ). *Das Verhältnis von Krümmung und Torsion ist:*

$$\frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)} = \frac{\sqrt{a^2 b^2(4 + \theta^2) + a^4(2 + \theta^2)^2}}{a^2 b(6 + \theta^2)/(a^2 b^2(4 + \theta^2) + a^4(2 + \theta^2)^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{a^2 b^2(4 + \theta^2) + a^4(2 + \theta^2)^2}. \quad (28)$$

Für  $\theta \rightarrow \infty$  gilt:

$$\frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)} \sim \frac{a\theta}{b} = \frac{2\theta}{\pi}. \quad (29)$$

## 7 Hauptnormale und Binormale

### 7.1 Hauptnormalenvektor

**Definition 7.1** (Hauptnormalenvektor). Der Hauptnormaleneinheitsvektor ist:

$$\mathbf{N}(\theta) = \frac{1}{\kappa(\theta) |\dot{\gamma}(\theta)|^2} \left( \ddot{\gamma}(\theta) - \frac{\dot{\gamma}(\theta) \cdot \ddot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|^2} \dot{\gamma}(\theta) \right). \quad (30)$$

**Lemma 7.2** (Skalierprodukt  $\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}$ ).

$$\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = a^2 \theta. \quad (31)$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} &= a(\cos \theta - \theta \sin \theta) \cdot a(-2 \sin \theta - \theta \cos \theta) \\ &\quad + a(\sin \theta + \theta \cos \theta) \cdot a(2 \cos \theta - \theta \sin \theta) + b \cdot 0. \end{aligned}$$

Wir entwickeln die beiden Produkte einzeln:

$$\begin{aligned} &a^2(\cos \theta - \theta \sin \theta)(-2 \sin \theta - \theta \cos \theta) \\ &= a^2[-2 \sin \theta \cos \theta - \theta \cos^2 \theta + 2\theta \sin^2 \theta + \theta^2 \sin \theta \cos \theta], \\ &a^2(\sin \theta + \theta \cos \theta)(2 \cos \theta - \theta \sin \theta) \\ &= a^2[2 \sin \theta \cos \theta - \theta \sin^2 \theta + 2\theta \cos^2 \theta - \theta^2 \sin \theta \cos \theta]. \end{aligned}$$

Durch Addition heben sich die gemischten Terme  $\pm 2 \sin \theta \cos \theta$  und  $\pm \theta^2 \sin \theta \cos \theta$  auf:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} &= a^2[-\theta \cos^2 \theta + 2\theta \sin^2 \theta - \theta \sin^2 \theta + 2\theta \cos^2 \theta] \\ &= a^2[\theta(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] = a^2 \theta. \end{aligned} \quad \square$$

### 7.2 Binormalvektor

**Definition 7.3** (Binormalvektor). Der Binormaleinheitsvektor ist:

$$\mathbf{B}(\theta) = \mathbf{T}(\theta) \times \mathbf{N}(\theta) = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|}. \quad (32)$$

**Beispiel 7.1** (Frenet-Rahmen bei  $\theta = 2\pi$ ). Bei  $\theta = 2\pi$  ergibt sich numerisch:

$$\mathbf{T}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0,15259 \\ 0,95878 \\ 0,23970 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}(2\pi) = \begin{pmatrix} -0,98555 \\ 0,16566 \\ -0,03523 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(2\pi) = \begin{pmatrix} -0,07348 \\ -0,23086 \\ 0,97021 \end{pmatrix}.$$

Man überprüft:  $|\mathbf{T}| = |\mathbf{N}| = |\mathbf{B}| = 1$  und  $\mathbf{T} \perp \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T} \perp \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{N} \perp \mathbf{B}$ .

## 8 Frenet-Serret-Formeln

**Satz 8.1** (Frenet-Serret-Formeln [9, 10]). *Bezüglich der natürlichen Parametrisierung (Bogenlänge  $s$ ) gelten:*

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}. \quad (33)$$

*Bemerkung 8.1.* Die Frenet-Formeln zeigen, wie sich das Dreibein  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  entlang der Kurve dreht. Die Krümmung  $\kappa$  steuert die Drehung in der  $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ -Ebene (Schmiegeebene), die Torsion  $\tau$  die Drehung um die  $\mathbf{T}$ -Achse (Verwindung der Kurve). Nach dem Theorem von Lancret [11, 6] ist eine Raumkurve genau dann eine (verallgemeinerte) Helix, wenn  $\kappa/\tau = \text{const}$  gilt. Da für die Kegelhelix  $\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi \rightarrow \infty$ , ist sie in diesem Sinn keine Helix – sondern eine geometrisch reichere Verallgemeinerung.

## 9 Schmiege-, Normal- und Rektifizierebene

**Definition 9.1** (Ebenen des Frenet-Rahmens). In jedem regulären Kurvenpunkt  $\gamma(\theta)$  definiert der Frenet-Rahmen drei ausgezeichnete Ebenen:

- **Schmiegeebene:** aufgespannt von  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{N}$ ; enthält die Tangente und die Hauptnormale.
- **Normalebene:** aufgespannt von  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{B}$ ; steht senkrecht auf der Tangente.
- **Rektifizierebene:** aufgespannt von  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{B}$ ; enthält Tangente und Binormale.

**Proposition 9.2** (Normalebengleichung). *Die Normalebene im Punkt  $\gamma(\theta_0)$  hat die Gleichung:*

$$\mathbf{T}(\theta_0) \cdot ((x, y, z) - \gamma(\theta_0)) = 0. \quad (34)$$

## 10 Asymptotisches Verhalten und Grenzwerte

**Satz 10.1** (Asymptotisches Verhalten). *Für  $\theta \rightarrow \infty$  gelten die folgenden Näherungen:*

$$|\dot{\gamma}(\theta)| \sim a\theta, \quad (35)$$

$$L(\theta) \sim \frac{a}{2}\theta^2, \quad (36)$$

$$\kappa(\theta) \sim \frac{1}{a\theta} = \frac{\pi^2}{6\theta}, \quad (37)$$

$$\tau(\theta) \sim \frac{b}{a^2\theta^2} = \frac{\pi^3}{12\theta^2}, \quad (38)$$

$$\psi(\theta) \sim \frac{b}{a\theta} = \frac{\pi}{2\theta}. \quad (39)$$

**Korollar 10.2** (Verhältnisse). *Für  $\theta \rightarrow \infty$ :*

$$\frac{\kappa(\theta)}{\tau(\theta)} \sim \frac{2\theta}{\pi}, \quad \frac{\kappa(\theta)}{\psi(\theta)} \sim \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\theta}. \quad (40)$$

*Bemerkung 10.1* (Geometrische Deutung). Die Kurve nähert sich asymptotisch einer flachen Spirale in der  $xy$ -Ebene, da  $\psi(\theta) \rightarrow 0$  und  $\kappa(\theta) \rightarrow 0$ . Gleichzeitig wächst der Radius  $r = a\theta \rightarrow \infty$ : die Kurve entfernt sich unbeschränkt vom Ursprung.

## 11 Numerische Kurvenpunkte

Table 6: Ausgewählte Kurvenpunkte der Kegelhelix

$\theta$	$x(\theta)$	$y(\theta)$	$z(\theta)$	$r(\theta)$	$\kappa(\theta)$	$\tau(\theta)$
0	0	0	-0,750	0	0,9488	1,1177
$\pi$	-1,905	0	2,250	1,905	0,4469	0,2342
$2\pi$	3,810	0	5,250	3,810	0,2499	0,0643
$3\pi$	-5,715	0	8,250	5,715	0,1680	0,0286
$4\pi$	7,620	0	11,250	7,620	0,1293	0,0163
$5\pi$	-9,524	0	14,250	9,524	0,1037	0,0104

## 12 Übersicht aller Formeln

Table 7: Formelübersicht Teil 1: Parametrisierung, Ableitungen und Bogenlänge

Eigenschaft	Formel
<i>Parametrisierung</i>	
Konstanten	$a = \frac{6}{\pi^2}, \quad b = \frac{3}{\pi}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$
Kurve $\gamma(\theta)$	$(a\theta \cos \theta, a\theta \sin \theta, -\frac{3}{4} + b\theta)$
Kegelgleichung	$z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$
<i>Ableitungen</i>	
$\dot{\gamma}(\theta)$	$(a(\cos \theta - \theta \sin \theta), a(\sin \theta + \theta \cos \theta), b)$
$\ddot{\gamma}(\theta)$	$(a(-2 \sin \theta - \theta \cos \theta), a(2 \cos \theta - \theta \sin \theta), 0)$
$ \dot{\gamma}(\theta) $	$\sqrt{a^2(1 + \theta^2) + b^2}$
<i>Bogenlänge</i>	
$L(T)$	$\frac{a}{2} \left[ T \sqrt{T^2 + c^2} + c^2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{T}{c} \right) \right]$
$c^2$	$1 + \frac{\pi^2}{4} \approx 3,467$
Asymptotik	$L(T) \sim \frac{a}{2} T^2$

Table 8: Formelübersicht Teil 2: Frenet-Größen und Identitäten

Eigenschaft	Formel
<i>Frenet-Größen</i>	
Krümmung $\kappa(\theta)$	$\frac{\sqrt{a^2 b^2 (4 + \theta^2) + a^4 (2 + \theta^2)^2}}{[a^2 (1 + \theta^2) + b^2]^{3/2}}$
Asymp. Krümmung	$\kappa \sim \frac{6}{\pi^2 \theta}$
Torsion $\tau(\theta)$	$\frac{b(6 + \theta^2)}{b^2 (4 + \theta^2) + a^2 (2 + \theta^2)^2}$
Asymp. Torsion	$\tau \sim \frac{\pi^3}{12 \theta^2}$
Steigungswinkel	$\psi = \arctan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1 + \theta^2}}\right)$
<i>Identitäten</i>	
	$\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = a^2 \theta$
	$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} = a^2 b (6 + \theta^2)$
	$\kappa / \tau \sim 2\theta / \pi$

## 13 Fazit

Diese Arbeit hat eine vollständige differentialgeometrische Analyse der Kegelhelix  $\gamma(\theta) = (a\theta \cos \theta, a\theta \sin \theta, -\frac{3}{4} + b\theta)^T$  präsentiert. Die wichtigsten Ergebnisse lauten:

1. Die Kurve liegt auf dem Kegel  $z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$  (vgl. Satz 2.1), da  $b/a = \pi/2$  die Kegelsteigung liefert.
2. Tangentialvektor und Bogenlänge sind explizit berechenbar; die Bogenlänge wächst asymptotisch wie  $\theta^2$  (vgl. Sätze 3.7 and 3.8).
3. Krümmung  $\kappa \sim 1/\theta$  und Torsion  $\tau \sim 1/\theta^2$  nehmen beide ab – im Gegensatz zur zylindrischen Helix mit konstanten Werten (vgl. Sätze 5.1 and 6.1).
4. Das Kreuzprodukt  $(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} = a^2 b (6 + \theta^2)$  liefert eine elegante geschlossene Form für die Torsion (vgl. Satz 6.1).
5. Der Frenet-Rahmen ist vollständig bestimmt; die Frenet-Serret-Formeln Satz 8.1 beschreiben seine Entwicklung entlang der Kurve.

6. Die Spiralkonstante  $a = 6/\pi^2$ , der Kehrwert der Euler-Summe, verleiht der Kurve eine tiefe zahlentheoretische Verbindung (vgl. Bemerkung 1.1).

## References

- [1] D. Balban, *Differentialgeometrische Analyse der Archimedischen Spirale  $r(\theta) = \frac{6}{\pi^2}\theta$ : Krümmung, Bogenlänge, äquidistante Parametrisierung und Beziehung zum Goldenen Schnitt*, Eigenständige mathematische Publikation, 2025.
- [2] D. Balban, *Mathematische Analyse der Kegelfläche  $z = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}r$ : Parametrisierung, Flächeninhalt, Volumen, Krümmung und entwickelbare Flächen*, Eigenständige mathematische Publikation, 2025.
- [3] D. Balban, *Von der quadratischen Folge zur Kegelhelix: Geometrische Transformation diophantischer Strukturen und Einbettung der Primzahlen im dreidimensionalen Raum*, Eigenständige mathematische Publikation, 2026.
- [4] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised ed. Dover Publications, Mineola, NY, 2016.  
*Standardwerk. Kapitel 1 behandelt reguläre Kurven, Bogenlängenparametrisierung, Frenet-Serret-Formeln (Abschnitt 1.5) sowie den Fundamentalsatz der Kurventheorie. Direkt relevant für Abschnitte 3–7 dieser Arbeit.*
- [5] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, 2nd ed. Springer, London, 2010.  
*Einführung mit vielen expliziten Berechnungsbeispielen. Abschnitte 2.2–2.4 behandeln Frenet-Rahmen, Krümmung und Torsion allgemeiner Raumkurven; Abschnitt 2.4 diskutiert zylindrische Helices als Spezialfall konstanter  $\kappa$  und  $\tau$ , von dem die Kegelhelix wesentlich abweicht.*
- [6] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nd ed. Dover Publications, New York, 1988.  
*Klassisches Referenzwerk. Abschnitt 1-7 behandelt Helices und ihre Charakterisierung durch konstantes  $\kappa/\tau$ -Verhältnis (Lancret-Theorem). Die Kegelhelix besitzt nicht-konstantes  $\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi$ , was ihre Eigenschaft als verallgemeinerte Helix im Sinne von Struik illustriert.*
- [7] A. Gray, E. Abbena und S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 3rd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.  
*Umfassende Behandlung von Kurven und Flächen mit expliziten Berechnungen. Kapitel 3 behandelt Frenet-Rahmen und Krümmungsformeln in allgemeiner Form; Abschnitt 5.3 diskutiert Spiralen auf Kegeln und deren geodätische Eigenschaften.*
- [8] E. Kreyszig, *Differential Geometry*. Dover Publications, New York, 1991 (Nachdruck der Ausgabe von 1959).  
*Gründliche klassische Behandlung. Abschnitte 11–14 entwickeln die Theorie der Kurven zweiter Art (Torsion), die Frenet-Formeln und deren Anwendung auf Helices und Kurven auf Rotationsflächen, einschließlich Kegeln.*
- [9] J. F. Frenet, *Sur les courbes à double courbure*, Thèse, Toulouse, 1847; auch in: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Bd. 17, S. 437–447, 1852.

*Erste systematische Entwicklung der nach Frenet benannten Formeln für Raumkurven. Die Arbeit führt den Tangentenvektor  $\mathbf{T}$ , den Hauptnormalenvektor  $\mathbf{N}$  und die Krümmungsformel  $\kappa = |\ddot{\gamma}|/|\dot{\gamma}|^2$  ein.*

- [10] J. A. Serret, *Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Bd. 16, S. 193–207, 1851.  
*Serret entwickelte unabhängig und zeitgleich die Torsionsformel und die vollständigen Differentialgleichungen des begleitenden Dreibeins. Die Frenet-Serret-Formeln in Satz 8.1 tragen den Namen beider Autoren.*
- [11] M. A. Lancret, *Mémoire sur les courbes à double courbure*, *Mémoires présentés à l'Institut par divers savants*, Bd. 1, S. 416–454, 1806.  
*Lancret bewies den nach ihm benannten Satz: Eine Kurve ist genau dann eine (verallgemeinerte) Helix, wenn das Verhältnis  $\kappa/\tau$  konstant ist. Da für die Kegelhelix  $\kappa/\tau \sim 2\theta/\pi$  nicht konstant ist, ist sie keine Helix im Lancretschen Sinn – eine Tatsache, die ihren besonderen geometrischen Charakter unterstreicht.*
- [12] M. Abramowitz und I. A. Stegun (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10th ed. National Bureau of Standards, Washington, DC, 1972; Dover Publications, New York, 1992.  
*Die geschlossene Formel für das Bogenlängenintegral in Satz 3.7 verwendet das Standardintegral  $\int \sqrt{t^2 + c^2} dt = \frac{1}{2}[t\sqrt{t^2 + c^2} + c^2 \operatorname{arcsinh}(t/c)]$ ; vgl. Formel 3.3.30 und die Tabellen der hyperbolischen Funktionen in Kapitel 4.*
- [13] F. W. J. Olver et al. (Hrsg.), *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Release 1.2.1, 2024, <https://dlmf.nist.gov>.  
*Online-Referenz für Standardformeln. Abschnitt 4.37 enthält die vollständige Formelsammlung für den Arkussinus Hyperbolicus  $\operatorname{arcsinh}$ , der in der Bogenlängenformel Gl. (13) dieser Arbeit auftritt.*
- [14] J. D. Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, New York, 1972.  
*Abschnitt 2.3 behandelt die archimedische Spirale  $r = a\theta$  ausführlich, einschließlich Bogenlänge (mit  $\operatorname{arcsinh}$ -Formel, S. 186), Krümmung und Evolute. Die  $xy$ -Projektion der in dieser Arbeit untersuchten Kegelhelix ist genau diese Spirale mit  $a = 6/\pi^2$ .*
- [15] Archimedes von Syrakus, *Über Spiralen (De Spiralibus)*, ca. 225 v. Chr.; deutsche Übersetzung und Kommentar in: A. Czwilina (Hrsg.), *Archimedes: Werke*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1967.  
*Historische Quelle der archimedischen Spirale. Archimedes definiert die Spirale als Ortskurve eines Punktes, der sich gleichförmig auf einem um den Ursprung rotierenden Strahl bewegt – äquivalent zur Polardarstellung  $r = a\theta$ .*
- [16] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Bd. 7, S. 123–134, 1740 (vorgelegt 1735).  
*Eulers Beweis der Formel  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$  (Baseler Problem). Die Spiralkonstante  $a = 6/\pi^2 = 1/\zeta(2)$  dieser Arbeit ist der Kehrwert dieser berühmten Summe (vgl. Bemerkung 1.1).*
- [17] G. H. Hardy und E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed. Oxford University Press, Oxford, 2008.



*Standardwerk der Zahlentheorie. Abschnitt 17.6 enthält einen elementaren Beweis der Formel  $\zeta(2) = \pi^2/6$ ; Kapitel 17 behandelt Erzeugende Funktionen und Dirichlet-Reihen im weiteren Kontext.*

- [18] S. Izumiya und N. Takeuchi, *New Special Curves and Developable Surfaces*, *Turkish Journal of Mathematics*, Bd. 28, Nr. 2, S. 153–163, 2004.  
*Einführung des Begriffs der slope lines auf Rotationsflächen, zu denen die Kegelhelix gehört. Die Arbeit zeigt, dass Kurven auf entwickelbaren Flächen mit konstantem Steigungswinkel zur Mantellinie eine natürliche Verallgemeinerung von Helices auf Zylindern bilden.*
- [19] A. T. Ali, *Position Vectors of Curves in the Galilean Space  $G_3$* , *Matematički Vesnik*, Bd. 64, Nr. 3, S. 200–210, 2012.  
*Enthält allgemeine Formeln für Krümmung und Torsion von Kurven auf Rotationsflächen; die Resultate sind direkt mit den Ausdrücken für  $\kappa(\theta)$  und  $\tau(\theta)$  in Sätze [5.1](#) and [6.1](#) dieser Arbeit vergleichbar.*