高数复习-导数与微分

导数与微分

2.1 导数

定义

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

可导一定连续，连续不一定可导。

2.1.1 导数的运算

- 加减
  - $d(f\pm g)=f'\pm g'$
- 乘
  - $d(f\cdot g)=f'g+fg'$
- 除
  - $d(\frac{f}{g})=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
- 链式法则
  - $df(g(x))=f'(g(x))g'(x)$
- 反函数
  - $[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}$

2.1.2 常用导数

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x\ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a(x)$	$1/x\ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\tan x$
$\csc x$	$-\csc x\cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2.1.3 莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{u}^{(n-2)} v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k} u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \\ = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} u^{(n-k)}v^{(k)}$$

2.1.4 隐函数求导以及参数方程

- 对数求导法
  - 两边取对数再求导
- 参数方程求导法
  - $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

2.2 微分

$$\text{微分：} dy = f'(x)\Delta x \\ \text{增量：} \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x = dy + o(dy)$$

导数也称为**微商。**

可微性⇔可导性

2.2.1 使用微分近似求函数值

$$\Delta y = f(x + x_0) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \\ f(x + x_0) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

作代换$x + x_0 \to x$：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2.2.2 微分中值定理

1. 费马引理（极值点（驻点）导数为0）
2. 罗尔定理（拉格朗日中值定理的特殊形式）
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理（拉格朗日中值定理的参数方程情形）

2.3 洛必达法则

洛必达法则运用条件：

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=0(\infty),\lim_{x\to x_0} F(x)=0(\infty)$;
2. 在点x_0的某一去心邻域内，$f'(x)$和$F'(x)$都存在，且$F'(x)\neq 0$;
3. 极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在或为无穷大

在求极限的过程中，对于上面的第三条条件，我们在求出极限之前也不知道极限是否存在。但习惯上我们仍然使用洛必达法则，直到求出来的极限的确不存在时，我们就把之前的等号划去。

2.4 泰勒公式

泰勒公式是使用多项式近似函数在某点附近的表达式的方法。

根据：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

只要我们不断提高$o(x-x_0)$的精度，我们便可以得到更精确的$f(x)$函数近似。

使用待定系数法求得多项式每项系数的值，得到泰勒多项式：

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$f(x)=p(x)+R(x)$$

2.4.1 泰勒中值定理

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

注意：$f(x)$要求有$n+1$阶导数。

2.4.2 拉格朗日型余项

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\xi\in(x,x_0)$$

2.4.3 皮亚诺型余项

对ξ进行代换：

$$\xi=x+\theta(x+x_0)$$

得到：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

以上即是**皮亚诺型余项**。

2.4.4 麦克劳林公式

麦克劳林公式是泰勒公式当$x_0=0$时的特殊形式。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^n(0)}{k!}x^n+o(x^n)$$

2.4.5 常见的函数的麦克劳林公式

$$
\begin{gathered}
e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \\
\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}) \\
\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)
\end{gathered}
$$

2.4.6 泰勒公式常见用法

- 求函数近似值
- 求极限
- 不等式证
- 。。。