积分与微分方程

积分

不定积分

不定积分的三种求法

- 第一换元法（凑微分法）

$$\int g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\psi(x)}$$

- 第二换元法
  令 $x = \psi(t)$

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int g(\psi(x))\,\mathrm{d}\psi(x) = \int g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x$$

- 分部积分法

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int v'\,\mathrm{d}u$$

几种可积的初等函数

有理函数

有理三角函数

简单无理函数

定积分

变上限积分

反常积分与 Γ 函数

微分方程

可分离变量的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y \to \frac{\mathrm{d}y}{y} = P(x)\,\mathrm{d}x \to \ln y = \int P(x)\,\mathrm{d}x \to y = Ce^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \phi(\frac{y}{x}) \xRightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \phi(u) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u-\phi(u)} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln x = \int \frac{1}{u-\phi(u)}\,\mathrm{d}u \Rightarrow x = Ce^{\int \frac{1}{u-\phi(u)}\,\mathrm{d}u}, u = \frac{y}{x}$$

可化为齐次的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x=b_2y+c_2}\xrightarrow{x=X+k_1,y=Y+k_2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\xrightarrow{u=\frac{Y}{X}}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{b_1u+a_1}{b_2u+a_2}$$

上述 k_1,k_2 的取值能够将常数项 c_1,c_2 化为0，接下来的步骤和齐次线性方程的解法一致了。

一阶线性微分方程

有以下一阶线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

令 $Q(x)=0$ 得到**非齐次微分方程对应的齐次方程**：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-P(x)y$$

齐次方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

常数变易法解出非**齐次微分方程**的通解：

令 $y=ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)-P(x)y=P(x)-Q(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\Longrightarrow$$

伯努利方程

高阶微分方程