

$$1. \frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-z) f_2(z) dz \quad \textcircled{1}$$

由于  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  在  $\mathbb{R}$  上均连续可导，故  $\textcircled{1}$  式等于下式：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} [f_1(t-z)] \cdot f_2(z) \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [f_1(t-z)] \cdot f_2(z) dz = \frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t). \end{aligned}$$

另一等号由  $\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} [f_2(t) * f_1(t)]$ ，做类似推理可知成立。

$$2. \int_{-\infty}^t f_1 * f_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda-z) f_2(z) dz \right] d\lambda \quad \textcircled{1}$$

由  $f_1$  与  $f_2$  在  $\mathbb{R}$  上均连续可导，故有

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\lambda-z) f_2(z) d\lambda \right] dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\lambda-z) d\lambda \right] f_2(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{t-z} f_1(m) dm \right] f_2(z) dz = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) d\lambda \right) * f_2(t) \end{aligned}$$

另一等号由  $\int_{-\infty}^t f_1 * f_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f_2 * f_1(\lambda) d\lambda$ ，做类似推理可知成立。