清华大学 Tsinghua University

数学作业纸

班级 计71 姓名 张程远 编号 2017011429 科目 离散 第 页

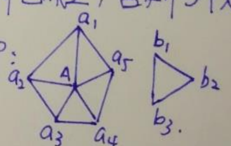
T6 考虑两个人认识连红线，不认识连蓝线，下证9人聚会要么4人彼此认识，要么有3人彼此均不认识。

考虑主人A与另8人的关系，由抽屉原理，至少有4条同色，不妨设为红色。

1° 只有4条红色，则余下4个人必两两连红线，否则任一对连蓝线的人可与主人A构成蓝色三角形。

2° 有6条以上（≥6）条红线，由Ramsey定理，6人中要么存在3人相互不认识，要么存在3人相互认识。若存在3人相互认识，则可与A构成四人彼此认识。若存在3人相互不认识则已成立。

3° 5条红线，若这5人中含红色三角形则已成立，否则5个人只能构成五边形。且余下3人必须两两连红线，即：



五边形外界的任一顶点都必须与 b_1 b_2 b_3 相连红边，例如 a_1，若 a_1 与 b_k 无红边，则 a_1 a_3 b_k 构成蓝色三角形。因此五边形顶点与 b_1、b_2、b_3 构成四人彼此认识。

综上，9人聚会，要么4人彼此认识，要么3人彼此不认识。

T_{13}：对所有边权排序

a_{23}	a_{35}	a_{15}	a_{13}	a_{34}	a_{45}	a_{24}	a_{12}	a_{25}	a_{14}
26	27	29	33	34	35	38	42	49	52

$d_{(1)} = (a_{23}\ a_{35}\ a_{15}\ a_{24}\ a_{14}) = 172$

$d_2 = (a_{23}\ a_{35}\ a_{45}\ a_{24}\ a_{25}) > 172$

$d_3 = (a_{23}\ a_{35}\ a_{24}\ a_{12}\ a_{25}) > 172$

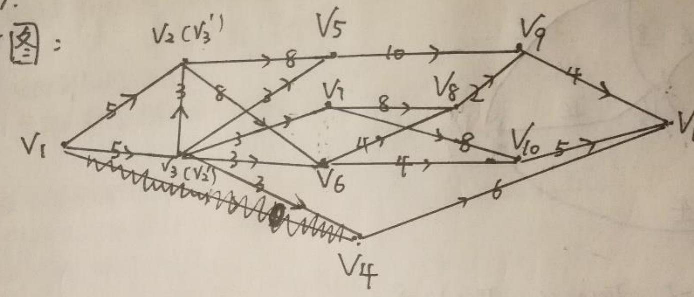
$d_4 = (a_{23}\ a_{15}\ a_{13}\ a_{45}\ a_{24}) = 161$

End

$\therefore$ Ans $= 161$

T_{17} (1).

PT图：



将V_2与V_3调整为(V_3')与(V_2')

$\pi(1)=0$ $\pi(2')=5$ $\pi(3')=8$ $\pi(4)=8$ $\pi(5)=16$ $\pi(6)=16$.

$\pi(7)=8$ $\pi(8)=20$ $\pi(9)=26$ $\pi(10)=20$ $\pi(11)=30$.

$\tau(11)=30$ $\tau(10)=25$ $\tau(9)=26$ $\tau(8)=24$ $\tau(7)=16$ $\tau(6)=20$.

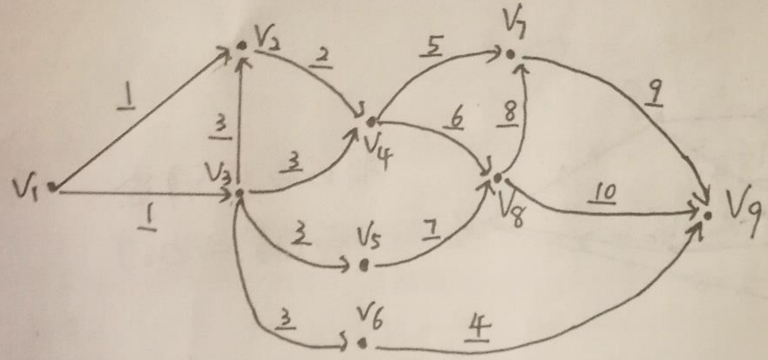
$\tau(5)=16$ $\tau(4)=24$ $\tau(3')=8$ $\tau(2')=5$ $\tau(1)=0$.

$\therefore$ 关键路径 $V_1 \to V_3 \to V_2 \to V_5 \to V_9 \to V_{11}$

$t_3=0$. $t_5=0$, $t_{10}=5$.

(2) PERT图：一个顶点发出多条边时，考虑最小的 $t(v_i, v_j)$.

建立PERT图：



$$\begin{cases} \pi(1)=0 \quad \pi(2)=8 \quad \pi(3)=5 \quad \pi(4)=16 \quad \pi(5)=8 \\ \pi(6)=8 \quad \pi(7)=26 \quad \pi(8)=20 \quad \pi(9)=30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau(9)=30 \quad \tau(8)=24, \quad \tau(7)=26 \quad \tau(6)=24 \quad \tau(5)=16 \\ \tau(4)=16 \quad \tau(3)=5 \quad \tau(2)=8 \quad \tau(1)=0. \end{cases}$$

$t_1=0$, $t_2=0$, $t_3=0$, $t_4=16$, $t_5=0$, $t_6=4$

$t_7=8$, $t_8=4$, $t_9=0$, $t_{10}=5$.

关键路径 V_1, V_3, V_2 V_5 V_9

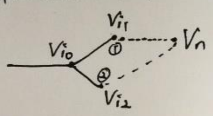
正确性：

先证若 $L(V_n)$ 是 V_i 到 V_n 最短路，且 $V_i \in L(V_n)$，则 $L(V_i)$ 是 V_i 到 V_i 最短路。①

若 $\exists L_0(V_i) < L(V_i)$，则 $L_0(V_i) + L(V_{i+1}, V_n) < L(V_i) + L(V_{i+1}, V_n)$.

与 $L(V_n)$ 为最短路矛盾。故①成立。

考虑算法固定的永久结点。如果出现下面这种情况



即 $\underbrace{L(V_{i0}, V_{i1}) + L(V_{i1}, V_n)}_{\text{(①号路线)}} < \underbrace{L(V_{i0}, V_{i2}) + L(V_{i2}, V_n)}_{\text{(②号路线)}}$

但算法先固定了 V_{i2} 为永久结点。

由于①号路径总长比②号路径短，可以保证 $\exists V_m$，V_m 在 V_{i2} 与 V_n 之间（包括 V_n）满足 $L(V_m) > L(V_{i1})$，此时算法会固定①中的 V_{i1} 结点为永久结点，亦即重新选择①号路径，直到找到 $V_p \in L(V_{i1}, V_n)$ 满足 $L(V_p) > L(V_m)$.

但①号路径总长比②号短，故最终在②中的 V_n 的前继 V_{n2} 被固定之后，算法会一直选择①号路径。（由于 $\forall V_i \in L(V_{i1}, V_n)$ 有 $L(V_i) + L(V_i, V_{i+1}) < L(V_{n2}) + L(V_{n2}, V_n)$）

故 Dijsktra 算法能保证找到 V_i 至 V_n 的最短路径所包含的结点序列。