清華大学 Tsinghua University　数学作业纸

班级 计71　姓名 张程远　编号 2017011429　科目 离散　第

T1 反设每个域边界均 ≥ 5.

故有 $\begin{cases} 5d \leq 2m \\ 3n \leq 2m \\ n-m+d=2. \end{cases} \Rightarrow d \leq \frac{2}{5}m.\ n \leq \frac{2}{3}m.$

$\therefore 2 = n-m+d \leq \frac{2}{5}m + \frac{2}{3}m - m = \frac{1}{15}m \quad m \geq 30.$

而 $d = 2-n+m < 12 \Rightarrow m-n < 10 \Rightarrow n > m-10.$ 而 $n \leq \frac{2}{3}m.$

$\therefore m-10 < \frac{2}{3}m. \Rightarrow m < 30.$ 矛盾. 故反设不成立.

T3: 若 G 与 $\bar{G}$ 均为简单平面图

则有 $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n-6+3n-6 \Leftrightarrow n^2-13n+24 \leq 0.$

故 $n \leq 10$. 与 $n > 10$ 矛盾. 反设不成立.

T5. 不妨设为正S边形，每个顶点度数为d_0

有 $\begin{cases} 2m = nd_0 = d\cdot S \\ n-m+d=2 \end{cases}$

$\therefore n = \dfrac{2}{1-\frac{d_0}{2}+\frac{d_0}{S}}$ ， $m = \dfrac{d_0}{1-\frac{d_0}{2}+\frac{d_0}{S}}$ $d = \dfrac{2d_0}{S-\frac{d_0}{2}S+d_0}$

则 $1-\frac{d_0}{2}+\frac{d_0}{S}>0 \Rightarrow d_0 < \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{S}}$. 而 $d_0 \geq 3$. 故 $\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{S}} > 3$ ， $\frac{1}{S} > \frac{1}{6}$, $S<6$.

$S=5$时 $n = \dfrac{20}{10-3d_0}$. 故 d_0 只可为3 $n=20$.

$S=4$时 $n = \dfrac{8}{4-d_0}$ 故 $d_0 = 3$ $n=8$

$S=3$时 $n = \dfrac{12}{6-d_0}$ 故 $d_0 = 3, 4, 5$， $n = 4, 6, 12$.

故有 正四面体 正八面体 正六面体 正十二面体 正二十面体.

T7.

考虑做其对偶图 G_0. 若题设成立, 则 G_0 为 K_5.

但 K_5 非平面图, 矛盾. 故不存在.

T8: 反设, 有3个结点度数小于5.

则 $(n-3)$ 个结点度数至少为6. $\sum d(i) \geq 6n-18$.

但 G 为简单平面图, $m \leq 3n-6$ $\sum d(i) \leq 6n-12$.

$\sum d(i)$ 为偶数, $\sum d(i) = 6n-18$, $6n-16$, $6n-14$, $6n-12$.

1° $\sum d(i) = 6n-18$, 另3个点 $d=0$. 余下 $(n-3)$ 个点构成度全 ≥ 6 的简单平面图
矛盾.

2° $\sum d(i) = 6n-16$. 另3个点度数和为2. 故可删去度数为0的一个点

此时 $m \leq 3(n-1)-6 = 3n-9$. $\sum d(i) \leq 6n-18$. 矛盾.

3° $\sum d(i) = 6n-14$. 另3点度数和为4. 保证有一个点度数 ≤ 1. 若为0已证. 若为1, 删去

此时 $\sum d(i) = 6n-16$. $m \leq 3n-9$ 矛盾.

4° $\sum d(i) = 6n-12$ 且另3点度数均为2 此时为极大平面图 $(m=3n-6)$.

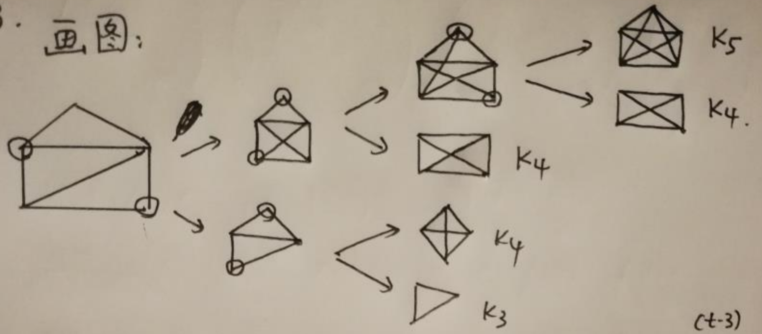
下证 极大平面图, $d_i \geq 3$. 删去度为2的结点,

$\sum d(i) = 6n-16$, $m = 3n-8$. 但简单平面图 $m \leq 3(n-1)-6 = 3n-9$

矛盾.

证毕.

T13. 画图：



$\chi(G)=3$. $f(G,t)=t(t-1)(t-2)+3(t-1)(t-2)(t-3)t+t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$

$=t(t-1)(t-2)^3$

T14 色数：若n-1为奇则为4，n-1为偶则为3.

n-1为偶则外围可染A.B色，交替染色；n-1为奇则外围需用3色.

中心点使用的颜色不能在外圈出现.

色数多项式：考虑引理：n个结点回路色数多项式.

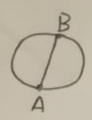
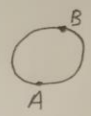
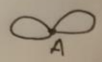
记为 $f(G_n,t)$. 易知 $f(G_n,t)+f(G_{n-1},t)=t(t-1)^{n-1}$

$\Rightarrow f(G_n,t)=(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$

考虑W_n. 给W_n染色分两步：①给中心选色；② 用余下t-1色染(n-1)结点回路.

$\therefore f(W_n,t)=t\left[(t-1-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(t-1-1)\right]$

$=t\left[(t-2)^{n-1}+(-1)^{n-1}(t-2)\right]$

T16. $G=$  $C=$  $C'=$ 

$f(C,t)=f(G,t)+f(C',t)$. 一共 $m+n-2$ 个结点.

$f(C,t)=(t-1)^{m+n-2}+(-1)^{m+n-2}\cdot(t-1)$

$f(C',t)=f(C_{m-1},t)\times f(C_{n-1},t)\times\frac{1}{t}$ (因 A 对于两个回路要同色)

$=\frac{1}{t}\left[\left((t-1)^{m-1}+(-1)^{m-1}(t-1)\right)\cdot\left((t-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(t-1)\right)\right]$

$\therefore f(G,t)=(t-1)^{m+n-2}+(-1)^{m+n-2}\cdot(t-1)-\frac{1}{t}\left[(t-1)^{m+n-2}+(-1)^{m-1}(t-1)^{n}+(-1)^{n-1}(t-1)^{m}+(-1)^{m+n-2}(t-1)^{2}\right]$

色数：当 m. n 均偶 色数为 2

否则色数为 3