班级 计71 姓名 张程远 编号 2017011429 科目 离散. 第 页

T13

由 $x \in G$ 且 H 是 G 的子群，群有乘法运算封闭性知

H_1 也为 G 的子集. 由 H_1 中元素定义知

$\forall h_1, h_2 \in H$, $x^{-1}h_1x \in H_1$ 且 $x^{-1}h_2x \in H_1$. 故 $(x^{-1}h_2x)^{-1} = x^{-1}h_2^{-1} \cdot x \in H_1$

而 $(x^{-1}h_1x) \cdot (x^{-1}h_2^{-1} \cdot x) = x^{-1}(h_1 \cdot h_2^{-1}) \cdot x$. 由定理8.2.7, $(h_1 \cdot h_2^{-1}) \in H$.

故 $x^{-1} \cdot (h_1 \cdot h_2^{-1}) \cdot x \in H_1$.

故 H_1 中任意两元素 a, b 都有 $ab^{-1} \in H_1$. 故 H_1 为 G 的子群. 证毕.

T14

多个子群交 $\Rightarrow$ 任两个子群交得子群. 故考虑任两个子群 H_1, H_2.

若 $H_1 \cap H_2 = e$. 则命题成立.

若 $\exists a \in H_1 \cap H_2$ 且 $a \neq e$, 则 $a \in H_1$ 且 $a \in H_2 \Rightarrow a^{-1} \in H_1$ 且 $a^{-1} \in H_2$.

故 $a^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

若 $\exists b \in H_1 \cap H_2$, 且 $b \neq a$ 且 $b \neq e$. 则 $b \in H_1$ 且 $b \in H_2 \Rightarrow ab \in H_1$ 且 $ab \in H_2$

故 $ab \in H_1 \cap H_2$. 故 $H_1 \cap H_2$ 也为子群. 证毕.

班级 姓名 编号 科目

T21

$$\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} = (1,3)\cdot(2,4)\cdot(5,6)\cdot(5,6)$$

$$\tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1,6)\cdot(2,5)\cdot(3,4)\cdot(3,4).$$

$$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = (1,5,3,2,6,4)$$

$$= (5,3)\cdot(3,2)\cdot(2,6)\cdot(6,4)\cdot(4,1)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1,5)\cdot(2,6)\cdot(3,4)$$

T_{25} 考虑群的阶数 $2k$. $k\in N^{+}$. 则生成元的 $2k$次方为 e.

群为集合, 无重复元素 $\Rightarrow$ $a^{k}\neq e$.

故存在元素 a^{k} 满足要求.

T_{27} 左陪集

$\langle a\rangle=\{e,(1,3,2,4),(1,2)\cdot(3,4),(1,4,2,3)\}$ $\quad e\langle a\rangle=ea=a$

$(1,2)\cdot\langle a\rangle=\{(1,2),(1,3)\cdot(2,4),(3,4),(1,4)\cdot(2,3)\}.$

$(1,3)\cdot\langle a\rangle=\{(1,3),(2,4,3),(1,2,3,4),(1,4,2)\}.$

$(2,4)\langle a\rangle=\{(2,4),(1,3,4),(1,4,3,2),(1,2,3)\}.$

$(1,4)\langle a\rangle=\{(1,4),(1,3,2),(1,2,4,3),(2,3,4)\}.$

$(2,3)\langle a\rangle=\{(2,3),(1,2,4),(1,3,4,2),(1,4,3)\}.$

$\langle a\rangle(1,2)=\{(1,2),\ (1,4)\cdot(2,3),\ (3,4),\ (1,3)\cdot(2,4)\}$

$\langle a\rangle(1,3)=\{(1,3),\ (1,2,4),\ (1,4,3,2),\ (2,3,4)\}$.

$\langle a\rangle(2,4)=\{(2,4),\ (1,3,2),\ (1,2,3,4),\ (1,4,3)\}$

$\langle a\rangle(1,4)=\{(1,4),\ (2,4,3),\ (1,3,4,2),\ (1,2,3)\}$

$\langle a\rangle(2,3)=\{(2,3),\ (1,3,4),\ (1,2,4,3),\ (1,4,2)\}$

$\langle a\rangle e=\{e,\ (1,3,2,4),\ (1,2)\cdot(3,4),\ (1,4,2,3)\}$

右陪集

T_{30}:

先证B是A的子群. 由题. A、B是群. 且$B\subseteq A$.

$\forall a,b\in B$. 有 $a^{-1}\in B$、$b^{-1}\in B$. 而乘法封闭$\to ab^{-1}\in B$.

故B为A子群.

对G用 Lagrange定理: $|G|=[G:A]\cdot|A|=[G:B]\cdot|B|$

对A用定理: $|A|=[A:B]\cdot|B|$ 代入整理即有

$[G:B]=[G:A][A:B]$ 证毕.