清華大學 Tsinghua University 数学作业纸

班级 计71 姓名 张程远 编号 2017011429 科目 离散. 第

T3 S是交换半群. 则 $(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=a\cdot(b\cdot a)\cdot b=a\cdot a\cdot b\cdot b=a^2b^2$

若 $(ab)^2=a^2b^2$, 即 $(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=(a\cdot a)(b\cdot b)$. 由消去律得

$b\cdot a\cdot b=a\cdot b\cdot b$. $\Rightarrow$ $b\cdot a=a\cdot b$ 故S是交换半群.

T6 由同构定义知. 映射为 σ. 则 $\forall m\in(S;\cdot)$. 由 $e\cdot m=m$.

有 $\sigma(e\cdot m)=\sigma(m)$. 而 $\sigma(e\cdot m)=\sigma(e)*\sigma(m)$

故 $\sigma(e)*\sigma(m)=\sigma(m)$.

由m任意性知 $\sigma(e)$ 为 $(T,*)$ 的单位元.

T7: $\forall m\cdot n\in G$, 有 $(m\cdot m)=(n\cdot n)=e$.

$\therefore$ $(m\cdot m\cdot n\cdot n)=(n\cdot n\cdot m\cdot m)=e\cdot e=e$.

$m\cdot m\cdot n\cdot n=m\cdot n\cdot n=m\cdot n$; $n\cdot n\cdot m\cdot m=n\cdot m\cdot m=n\cdot m$

故 $m\cdot n=n\cdot m$. 故G是交换群.

T10. 由群定义. 任何元素 $m\in G$, 则存在其逆元 $m^{-1}\in G$, $m\cdot m^{-1}=m^{-1}\cdot m=e$,

若存在 x_0. y_0 为解. 则 $\begin{cases} x_0ax_0ba=x_0bc & ① \\ y_0ay_0ba=y_0bc & ② \end{cases}$

对① 左乘 x_0^{-1} 有 $ax_0ba=bc$. 左乘 a^{-1}. 右乘 a^{-1}、b^{-1}. 得 $x_0=a^{-1}bcb^{-1}a^{-1}$

对②式 y_0 也做同样操作有 $y_0=x_0=a^{-1}bcb^{-1}a^{-1}$. 又由逆的唯一性

得若方程有解则唯一. 而 $x=a^{-1}bcb^{-1}a^{-1}$ 明显代入后使方程成立

故方程有解

综上, 方程有且有唯一解.

T12:

a有可逆元b ⇒ $aba = ea = a$; $a\cdot b\cdot b\cdot a = e\cdot e = e$

若 $aba = a$, $ab^2a = e$, 则有 $(a\cdot b)\cdot(b\cdot a) = e$.

$\therefore\ b\cdot a\cdot a\cdot b = e$

$\therefore\ a\cdot b\cdot b\cdot \underbrace{a\cdot b\cdot a}\cdot a\cdot b = e$

$\Rightarrow\ \underbrace{a\cdot b\cdot b\cdot a}\cdot a\cdot b = e$

$\Rightarrow\ a\cdot b = e$. 证毕.

T11: 应为 $(a,b)\cdot(c,d) = (ac,\ ad+b)$.

1° 由 $a\cdot c \neq 0$, 故 $ac \neq 0$. $(ac,\ ad+b) \in G$. 封闭性成立

$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) = (ac,\ ad+b)(e,f)$

$= (ace,\ acf+ad+b)$.

而 $(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] = (a,b)\cdot[(ce,\ cf+d)]$

$= (ace,\ acf+ad+b)$ 结合律成立

故是半群;

有幺元. $(a,b)(1,0) = (a,\ a\cdot 0+b) = (a,b)$.

有逆元. $(a,b)\cdot(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (1,\ a\cdot(-\frac{b}{a})+b) = (1,0)$

且 $\forall (a,b)$, 逆元 $(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a})$ 唯一

综上 G是群.