信原第三次作业

计 71 张程远 2017011429

1.
$$F_n=\begin{cases}\frac{a_n-jb_n}{2}, & n>0;\\ a_0, & n=0;\\ \frac{a_{-n}+jb_{-n}}{2}, & n<0.\end{cases}$$

故
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{-1}|F_n|^2+||a_0||^2+\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2$$
$$=||a_0||^2+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{||a_{-n}||^2+||b_{-n}||^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{||a_n||^2+||b_n||^2}{4}$$
$$=||a_0||^2+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{||a_n||^2+||b_n||^2}{4}=||a_0||^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{||a_n||^2+||b_n||^2}{2}.$$

2. $f(t)+f(-t)=0$. 故 $a_n=0$. $n\in N$. 考虑 b_n.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\cos 2t\sin nt+5\cos 3t\sin 4t\sin nt\,dt.$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\sin 3t-\sin t)\sin nt+\frac{5}{2}(\sin 7t+\sin t)\sin nt\,dt.$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}[\cos(3-n)t-\cos(3+n)t-\cos(1-n)t+\cos(1+n)t]+\frac{5}{4}[\cos(7-n)t-\cos(7+n)t+\cos(1-n)t-\cos(1-n)t]\,dt.$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(1-n)t-\cos(1+n)t+\frac{1}{4}\cos(3-n)t-\frac{1}{4}\cos(3+n)t+\frac{5}{4}\cos(7-n)t-\frac{5}{4}\cos(7+n)t\,dt.$$

故
$$b_n=\begin{cases}2, & n=1;\\ \frac{1}{2}, & n=3;\\ \frac{5}{2}, & n=7;\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$$

综上, $f(t)=2\sin t+\frac{1}{2}\sin 3t+\frac{5}{2}\sin 7t$.