

Для того, чтобы сделать функцию факториала более широкой и использовать не только среди целых неотрицательных чисел, придумали Рi-функцию, которая обладает всеми свойствами, которыми обладает привычный нам факториал:

$$\Pi(x) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

Проверим следующие свойства, характерные для факториала:

$$f(1) = 1$$

$$f(n) = n \cdot f(n-1)$$

$$\Pi(1) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt = t \cdot e^{-t} - e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t+\ln t} + 1 = 1 + \exp(\lim_{t \rightarrow \infty} (-t + \ln t)) = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = 1$$

$$\Pi(n) = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-t} dt = t^n \cdot e^{-t} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t} dt = 0 + n \int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \Pi(n) = n \cdot \Pi(n-1)$$

Проверим $\Pi(3)$:

$$\Pi(3) = \int_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-t} dt$$

$$\Pi(3) = 3 \cdot \Pi(2) = 3 \cdot 2 \cdot \Pi(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$$

Таким образом, $n! = \Pi(n)$

Существует Гамма-функция, которая похожа на Пи-функцию:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{\Pi(x)}{x} = \frac{x!}{x} = (x-1)!$$

Таким образом, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) = \Pi(x) = x!$

$$\Pi(0) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} + 1 = 1 = 0!$$

Теперь можно попробовать найти факториал нецелых чисел:

$$\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt = \left[\begin{matrix} u = \sqrt{t} \\ dt = du \cdot 2\sqrt{t} \end{matrix} \right] = 2 \int_0^{\infty} u \cdot u \cdot e^{-u^2} du = \begin{bmatrix} D & I \\ +u & u \cdot e^{-u^2} \\ -1 & \frac{1}{2} e^{-u^2} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{-u}{2} e^{-u^2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u^2} du \right) = -u e^{-u^2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$1) -u e^{-u^2} \Big|_0^{\infty} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-u}{e^{u^2}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{e^{u^2}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-1}{2u \cdot e^{u^2}} - \frac{0}{1} = 0$$

Гауссов интеграл, который понадобится далее: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$$2) \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Таким образом, } \Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)!$$

Теперь можно вывести $\Pi\left(\frac{2n+1}{2}\right) \forall n \in \mathbb{N}$, например $\Pi\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$\Pi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Pi\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$