Для того, чтобы сделать функцию факториала более широкой и использовать не только среди целых чисел, придумали Pi-функцию, которая обладает всеми свойствами, которыми обладает привычный нам факториал:

$\Pi(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$

Проверим следующие свойства, характерные для факториала:

$f(1) = 1$

$f(n) = n \cdot f(n-1)$

$\Pi(1) = \int_0^\infty t \cdot e^{-t} dt = t \cdot e^{-t} - e^{-t}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} e^{-t+\ln t} + 1 = 1 + \exp(\lim_{t\to\infty} -t + \ln t) = 1 + \lim_{t\to\infty} \exp(-t) = 1$

$\Pi(n) = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} dt = t^n \cdot e^{-t}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} dt = 0 + n\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$

$\Rightarrow \Pi(n) = n \cdot \Pi(n-1)$

Проверим $\Pi(3)$:

$\Pi(3) = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-t} dt$

$\Pi(3) = 3 \cdot \Pi(2) = 3 \cdot 2 \cdot \Pi(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$

Таким образом, $n! = \Pi(n)$

Существует Гамма-функция, которая подозрительно похоже на Пи-функцию:

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{\Pi(x)}{x} = \frac{x!}{x} = (x-1)!$

Таким образом, $\Gamma(x+1) = \Pi(x) = x!$

$\Pi(0) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} -e^{-t} + 1 = 1 = 0!$

Теперь можно попробовать найти факториал нецелых чисел:

$$\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt = \begin{bmatrix} u = \sqrt{t} \\ dt = du \cdot 2\sqrt{t} \end{bmatrix} = 2\int_0^\infty u \cdot u \cdot e^{-u^2} du = \begin{bmatrix} D & I \\ +u & u \cdot e^{-u^2} \\ -1 & \frac{1}{2} e^{-u^2} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{-u}{2} e^{-u^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-u^2} du \right) = -ue^{-u^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

1) $-ue^{-u^2}\Big|_0^\infty = \lim_{u\to\infty} \frac{-u}{e^{u^2}} - \lim_{u\to 0} \frac{-u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{-1}{2u \cdot e^{u^2}} - \frac{0}{1} = 0$

Гауссов интеграл, который понадобится далее: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

2) $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Таким образом, $\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}!$

Теперь можно вывести и $\Pi\left(\frac{3}{2}\right)$:

$\Pi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Pi\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$