

## Énoncé des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

(18 ►) Soit  $f \in C_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$

### PROPRIÉTÉS

(1) **Linéarité** :  $\left| \begin{smallmatrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{[a,b]} f \end{smallmatrix} \right|$  est linéaire.

(2) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\int_{[a,b]} (\Re f) + i \int_{[a,b]} (\Im f)$

(3) Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , pour  $f$  et  $g \in C_{pm}^0$  sur  $[a, b]$  (rappel) :

(a) **positivité** : si  $f$  est à valeurs positives sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f \geq 0$

(b) **croissance** : si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$

(c) **Critère de nullité** : « si  $f$  continue et à valeurs positives sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f = 0$  si, et seulement si,  $f$  est nulle sur  $[a, b]$  »

(4) **Inégalité de la moyenne** :  $\left| \int_{[a,b]} f = 0 \right| \leq \left| \int_{[a,b]} |f| \right| \leq |b - a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

(5) **Relation de Chasles** : pour  $c \in ]a, b[$ ,  $f \in C_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$  si, et seulement si, ( $f \in C_{pm}^0([a, c], \mathbb{K})$  et  $f \in C_{pm}^0([c, b], \mathbb{K})$ ) et alors  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

## Théorème de prolongement

(27 ►)

### THÉORÈME DE PROLONGEMENT :

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et de classe  $C^1$  sur  $]a, b]$ . On suppose que  $f'$  admet une limite  $l$  en  $a$ . Alors  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et  $f'(a) = l$

### PREUVE :

Soit  $\varepsilon > 0$ , par hypothèse il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $|f'(x) - l| \leq \varepsilon$ .

On applique l'inégalité des AF à  $g : x \mapsto f(x) - f(a) - (x - a)l$ , qui est  $C^0$  sur  $[a, b]$  et  $C^1$  sur  $]a, b[$  par théorème d'opération.

$g$  vérifie  $|g'(x)| = |f'(x) - l| \leq \varepsilon$  pour  $x \in ]a, b[$ . On obtient alors, pour  $x \in [a, b]$  :

$$|g(x) - g(a)| = |f(x) - f(a) - (x - a)l| \leq \varepsilon |x - a|.$$

Ce qui montre bien que  $f$  est dérivable en  $a$  de dérivée  $l = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  et qui assure la continuité de  $f'$  sur  $[a, b]$ .

## Énoncés des trois formules de Taylor.

28 ►

### FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

Soit  $f$  de classe  $C^{k+1}$  sur  $I$ , et soit  $a$  un point de  $I$ . Pour tout  $x$  de  $I$  :

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{k(x)} \text{ avec } R_{k(x)} = \frac{1}{k!} \int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt$$

29 ►

### INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit  $f$  de classe  $C^{k+1}$  sur  $I$ , telle que  $\forall x \in I, |f^{(k+1)}(x)| \leq M_{k+1}$ . Pour tout  $x \in I$  :

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| = |R_k(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} |x-a|^{k+1}$$

30 ►

### FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Toute fonction  $f \in C^k(I, \mathbb{K})$  admet en tout point  $a \in I$  un développement limité à l'ordre  $k$  :

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + o_{x \rightarrow a} (x-a)^k$$

## Formulaire de développements limités

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$