

## Questions de cours

### Forme canonique et relations coefficients-racines pour un trinôme de degré 2

#### FORME CANONIQUE

Soit  $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$  un trinôme du second degré.

On factorise d'abord par  $a$  :

$$p(x) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Puis, pour mettre sous la forme canonique, on fait apparaître le début d'un carré :

$$p(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \right) = a \left( \left( x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \right) \right)$$

en posant  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$ , on obtient la forme canonique d'un trinôme du second degré :  $p(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

*On sait alors que  $p$  admet un extremum en  $\alpha$ , avec  $f(\alpha) = \beta$ .*

#### RELATIONS COEFFICIENT-RACINE

Soit  $p : x \mapsto ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$  dont on suppose qu'il possède deux racines réelles  $x_1$  et  $x_2$ .

alors  $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Donc

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Ainsi, par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

D'où les relations coefficients-racines d'un trinôme du second degré.

## Somme géométrique de raison $q$

Soit  $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m \leq n$ .

- Si  $q \neq 1$  :

$$(1 - q) \sum_{k=m}^n q^k = \sum_{k=m}^n q^k - \sum_{k=m}^n q^{k+1} = \sum_{k=m}^n (q^k - q^{k+1}) = q^m \sum_{k=0}^{n-m} (q^k - q^{k+1}) \text{ (décalage)}$$

C'est une somme télescopique, donc au final :

$$(1 - q) \sum_{k=m}^n q^k = q^m (1 - q^{n-m+1}) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}}$$

- Si  $q = 1$  le résultat est immédiat, c'est  $\boxed{n - m + 1}$ .

## Formule du triangle de Pascal et formule efficace

FORMULE DU TRIANGLE DE PASCAL

### Énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

### Preuve

On passe par la forme factorielle, puis on met tout au même dénominateur (qui est  $(k+1)!(n-k)!$ ) :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{(n)!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \boxed{\binom{n+1}{k+1}} \end{aligned}$$

FORMULE EFFICACE

### Énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

### Preuve

Toujours en passant par la forme factorielle :

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)(k!(n-k)!)} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

D'où le résultat.

## Formule du binôme de Newton

### Énoncé

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### Preuve

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $H(n)$  la propriété demandée :

Initialisation : Pour  $n = 0$ ,  $(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$  donc  $H(0)$  vérifiée.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $H(n)$  vraie.

Alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b_1^n + \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} = \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}} \end{aligned}$$

(À l'aide du triangle de pascal, et du fait que  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$  et  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ )

D'où l'hérédité.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, puisque  $H$  est initialisée en 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Théorèmes à énoncer

### Définition et symétrie des coefficients binômiaux

\* *Définition :*

$$\text{Pour } n \text{ et } k \text{ naturels, } \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

\* *Symétrie :*

$$\text{Pour tout } (n, k) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### Factorisation de $a^n - b^n$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b) \sum_{p+q=n-1} a^p b^q$$

### Valeurs de $\sum_{k=0}^n k^p$ pour $p = 1, 2, 3$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = n(n+1) \frac{2n+1}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$