Questions de cours

Forme canonique et relations coefficients-racines pour un trinôme de degré 2

Forme canonique

Soit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.
On factorise d'abord par a :

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Puis, pour mettre sous la forme canonique, on fait apparaître le début d'un carré :

$$p(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right) = a\left(\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right)\right)$$

en posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$, on obtient la forme canonique d'un trinôme du second degré : $p(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

On sait alors que p admet un extremum en α, avec $f(\alpha) = \beta$.

Relations coefficient-racine

Soit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ dont on suppose qu'il possède deux racines réelles x_1 et x_2.
alors $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Donc

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Ainsi, par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

D'où les relations coefficients-racines d'un trinôme du second degré.

Somme géométrique de raison q

Soit $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$.

- Si $q \neq 1$:

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} q^k - \sum_{k=m}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=m}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right) = q^m \sum_{k=0}^{n-m}\left(q^k - q^{k+1}\right) \text{ (décalage)}$$

C'est une somme télescopique, donc au final :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m\left(1-q^{n-m+1}\right) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}}$$

- Si $q = 1$ le résultat est immédiat, c'est $\boxed{n-m+1}$.

Formule du triangle de Pascal et formule efficace

Formule du triangle de Pascal

Énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Preuve

On passe par la forme factorielle, puis on met tout au même dénôminateur (qui est $(k+1)!(n-k)!$) :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{(n)!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \boxed{\binom{n+1}{k+1}}$$

Formule efficace

Énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Preuve

Toujours en passant par la forme factorielle :

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)(k!(n-k)!)}$$

D'où le résultat.

Formule du binôme de Newton

Énoncé

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, notons $H(n)$ la propriété demandée :

Initialisation : Pour n = 0, $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ donc $H(0)$ vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ vraie.

Alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b_1^n + \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} = \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}}$$

(À l'aide du triangle de pascal, et du fait que $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$)

D'où l'hérédité.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, puisque H est initialisée en 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorèmes à énoncer

Définition et symétrie des coefficients binômiaux

> ∗ *Définition :*
>
> *Pour* n *et* k *naturels,* $\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
>
> ∗ *Symétrie :*
>
> *Pour tout* $(n, k) \in \mathbb{N}^2$*,* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Factorisation de $a^n - b^n$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{p+q=n-1} a^p b^q$$

Valeurs de $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour p = 1, 2, 3

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)\frac{2n+1}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$