Questions de cours

L'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et cas d'égalité

Énoncé

> *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
> $$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Preuve

Puisque $|x+y|$ et $|x|+|y|$ sont positifs, par croissance de $x \mapsto x^2$, on va montrer que $|x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$ ce qui donnera le résultat.
$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x|+|y|)$
Il y a égalité si, et seulement si : $xy = |x||y|$. C'est-à-dire lorsque x et y sont de même signe.

Théorème de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Énoncé

> ∗ *A admet b pour borne supérieure si et seulement si b majore A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b.*
> ∗ *A admet b pour borne inférieure si et seulement si b minore A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b.*

Preuve

La caractérisation en épsilon n'est pas demandée, mais puisque l'on demande l'équivalence avec la caractérisation en ε, il est plus sûr de la connaître..

Énoncé de la caractérisation en ε :

Soit A une partie non-vide de R.

* A admet b pour borne supérieure si : $\begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b - \varepsilon < a \leqslant b \end{cases}$

* A admet b pour borne supérieure si : $\begin{cases} \forall a \in A, a \geqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \leqslant a < b + \varepsilon \end{cases}$

Preuve de la caractérisation séquentielle :

Montrons l'équivalence entre les deux caractérisations pour le cas : b borne supérieure de A.

La condition « b majorant » est presque littéralement dans les deux caractérisations. On va alors simplement prouver l'équivalence entre la seconde condition de chacune des caractérisations :

<u>$\varepsilon \Rightarrow$ séquentielle :</u> Supposons : $\forall \varepsilon, \exists a \in A, b - \varepsilon < a \leqslant b$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons $\varepsilon = 1/n$, on obtient un élément $a_n \in A$ tel que $b - 1/n < a_n \leqslant b$. On a ainsi construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A qui converge vers b. D'où l'implication.

<u>séquentielle $\Rightarrow \varepsilon$:</u> Réciproquement, supposons qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, suite d'éléments de A telle que (a_n) converge vers b. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leqslant b$. Comme, de plus, $(b - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $|a_{n_0} - b| < \varepsilon$, c'est-à-dire : $b - \varepsilon < a_{n_0} < b + \varepsilon$, soit finalement : $b - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant b$. D'où la réciproque vérifiée.

Finalement, on a bien l'équivalence.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Énoncé

> *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ se traduit par les deux propositions, qui sont équivalentes :*
> $*$ *Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel.*
> $*$ *Tout réel est limite d'une suite de rationnels.*
>
> *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ se traduit par les deux propositions, qui sont équivalentes :*
> $*$ *Entre deux réels distincts quelconques, il existe un nombre irrationnel.*
> $*$ *Tout réel est limite d'une suite de rationnels.*

Preuve

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$:
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $(d_n^+) = \left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ suite de rationnels qui converge bien vers x. Donc on a la première assertion.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. Alors puisque (d_n^+) converge par valeurs strictement supérieures à x en décroissant, pour n assez grand, on a $x < d_n^+ < y$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$:
Pour $x \in \mathbb{R}$, $x - \sqrt{2}$ est aussi réel, limite d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, la suite $\left(q_n + \sqrt{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'irrationnels qui converge vers x. D'où la deuxième assertion.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, alors on adapte la preuve pour $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ en utilisant $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$.

Bornes supérieures et inférieures, max et min de $A = \left\{ \frac{t^2-1}{1+t^2} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ (pratique 4 et 5)

$$\text{Soit } A = \left\{ \frac{t^2-1}{t^2+1} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

* Inf et Min : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} > -1 \iff 2t^2 \geqslant 0$, qui est vrai pour tout t. Donc $\operatorname{Inf} A = -1$. De plus, pour $t = 0$, on a : $\dfrac{0-1}{0+1} = -1$. Donc $-1 \in A$, c'est-à-dire que $\operatorname{Min} A = \operatorname{Inf} A = -1$.
* Sup et Max : pour tout $t \in \mathbb{R}$, vérifions :

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} \leqslant 1 \iff 2t^2 \leqslant 0, \text{qui est vrai, quelque soit } t$$

. Donc $\operatorname{Sup} A \leqslant 1$. Posons maintenant $(a_n) = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1} \right)$ à valeurs dans A. Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Donc (a_n) converge vers 1. D'après la caractérisation séquentielle, $\operatorname{Sup} A = 1$. En revanche, $1 \notin A$. Car l'équation : $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} = 1$ est équivalente à : $1 = -1$. Donc finalement $\operatorname{Sup} A = 1$ et $\operatorname{Max} A$ n'existe pas.

Théorèmes à citer

Inégalité de Cauchy-Schwarz

> *Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de réels. Alors :*
>
> $$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$
>
> *(Ps : On peut le voir comme : $|(x_i \mid y_i)| \leqslant \|x_i\| \|y_i\|$ avec $(. \mid .)$ le produit scalaire canonique et $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$)*

Deuxième inégalité triangulaire

> *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors : $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y|$*
>
> *on encore : $|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z)$*

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

> * *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*
> * *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Théorème-Définition de la partie entière.

> *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
> * *L'ensemble des entiers relatifs inférieurs ou égaux à x forme une partie de $\mathbb{R}$ non-vide majorée. Son plus grand élément s'appelle « partie entière de x » et se note $\lfloor x \rfloor = \mathrm{Max}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$*
> * *$\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$*