Questions de cours

Ensemble des points d'affixes z tels que $M(z), M(z^2), M(z^3)$ forment un triangle rectangle en $M(z)$.

En utilisant la condition d'orthogonalité :
La condition est réalisée lorsque :

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z + 1 \text{ est un imaginaire pur}$$

L'ensemble des points recherchés est donc la droite verticale passant par $(-1, 0)$ privée de ce point.

$A(a)$ et $B(b)$ sont deux points distincts du plan complexe. Ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z-a}{z-b}$ soit réel, puis imaginaire.

Rapport réel : le point B est une solution, les autres sont tels que A, B et M soient distincts et alignés, c'est donc finalement la droite (AB) privée du point (A).
Rapport imaginaire pur : le point B est encore solution, les autres sont tels que $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux, c'est donc finalement le cercle de diamètre AB privé du point A. (On peut aussi le retrouver en posant $z = \alpha + i\beta$ avec α, β réels.)

Théorème de réduction d'une similitude directe

Énoncé

> *Une similitude directe $z \mapsto az + b$ est :*
> *1) soit une translation si $a = 1$*
> *2) soit admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, et c'est alors une composée commutative de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie de centre Ω, de rapport $|a|$*

Preuve

Si $a = 1$, pas de question.
Sinon : Supposons donc $a \neq 1$. L'équation $z = az + b$ admet une unique solution, la transformation géométriqque associée transforme donc un unique point en lui-même, on dit que c'est son unique point fixe, d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

On peut alors déduire de : $\begin{cases} \omega = a\omega + b \\ z' = az + b \end{cases}$
Que : $(z' - \omega) = a(z - \omega) \iff z' = |a|e^{i\arg(a)}(z - \omega) + \omega$.

C'est donc bien la composée :
$*$ d'une rotation $(z \mapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega))$
$*$ et d'une homothétie $(z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega),\ \ \lambda \in \mathbb{R})$
Le vecteur $\overrightarrow{\Omega(\omega)M(z)}$ est donc transformé en $\overrightarrow{\Omega(\omega)M(z')}$

Théorèmes à citer

Théorème pour l'exponentielle complexe

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. L'ensemble des solutions de l'équation : $\exp(z) = a$ d'inconnue z est : $\{\ln(|a|) + i\arg(a) + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Formules de Moivre et Euler

Soit $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$

Moivre :

$$e^{i\theta n} = \left(e^{i\theta}\right)^n, \text{ ou encore } (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Théorème de description des racines n-ièmes d'un complexe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ un complexe non-nul.

* *0 admet une unique racine n-ième qui est 0.*
* *z possède n racines n-ièmes distinctes deux-à-deux : $\sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$*

En particulier : l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Alignement et Orthogonalité

Alignement :

Soit trois points distincts A, B et C du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c.

Ces trois points sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel.

Orthogonalité :

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives u et v.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, $u\overline{v}$ est imaginaire pur.

En particulier, soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan complexe :

Alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ssi : $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Théorème de réduction d'une similitude

La réduction d'une similitude directe est déjà dans la partie questions de cours

Une similitude directe $z \mapsto az + b$ est :

1) soit une translation et une symétrie axiale sur l'axe des abscisses si $a = 1$

2) soit admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, et c'est alors une composée commutative de la symétrie axiale sur l'axe des abscisses de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie de centre Ω, de rapport $|a|$