

Inégalités de Schwarz & Minkowski

3 ►

Schwarz

ÉNONCÉ

$$\left| \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2 \quad |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \\ \text{avec égalité si, et seulement si, } (x, y) \text{ est lié} \end{array} \right|$$

PREUVE

On a : $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}, (\lambda x + y | \lambda x + y) = \|\lambda x + y\|^2 \geq 0$

On développe par bilinéarité et symétrie :

$(\lambda x + y | \lambda x + y) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \|y\|^2 \geq 0$. Si $x = 0$, vérifié avec égalité.

Si $x \neq 0$: On a un trinôme du second degré en λ à signe fixe. Donc $\Delta \leq 0$. Ainsi :

$$4(x | y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x | y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

D'où le résultat pour le cas (x, y) libre

Cas d'égalité

\Rightarrow : Si $\Delta = 0$, on a une racine double λ_0 , donc $\|\lambda_0 x + y\| = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Leftrightarrow y = -\lambda_0 x$ d'où (x, y) liée.

\Leftarrow : Supposons (x, y) liée.

* Soit $x = 0$ et $(x | y) = 0 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, vérifié.

* Soit il existe $\lambda_0 \geq 0$ tel que $y = \lambda_0 x$, dans ce cas on a $|(x | y)| = |\lambda_0| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$

Minkowski

ÉNONCÉ

$$\left| \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \text{avec inégalité si, et seulement si, } x = 0 \text{ ou } y = \lambda x \text{ pour un } \lambda \geq 0 \end{array} \right|$$

PREUVE

Soit $(x, y) \in E^2$ $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$

Inégalité de Schwarz : $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

D'où le résultat, puisque les normes sont toujours positives.

Cela nous donne l'égalité si, et seulement si, $(x | y) = \|x\| \cdot \|y\|$

\Rightarrow : C'est un cas particulier de l'égalité dans Schwarz, donc (x, y) lié.

* Si $x = 0$, on a bien $(0 | y) = \|0\| \cdot \|y\| = 0$

* Sinon, il existe λ_0 tel que $y = \lambda_0 x$, alors on a : $\lambda_0(x | x) = \lambda_0 \|x\|^2 = \|\lambda_0\| \cdot \|x\| \cdot \|x\|$, donc $\lambda_0 \geq 0$

\Leftarrow : Si $y = \lambda_0 x$ avec $\lambda_0 \geq 0$, on obtient bien $(x | y) = \|x\| \cdot \|y\|$ donc égalité.

Formule de restitution et identité du Parallélogramme

4 ►

ÉNONCÉ

Pour tout $(x, y) \in E^2$:

Formule de Restitution :

$$(x | y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Identité du Parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

PREUVE

$\|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$ par symétrie du produit scalaire

$$\Leftrightarrow (x | y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

D'où la formule de restitution. En changeant y en $-y$, on a :

$$\begin{cases} \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2 \\ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \end{cases}$$

En sommant, on obtient donc :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

D'où l'identité du parallélogramme.

Description du procédé de Schimdt

12 ►

THÉORÈME :

Soit $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille libre et $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ Il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de F telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(u_1, \dots, u_j) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$$

Il y a unicité de cette base si l'on impose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_i | u_i) > 0$

* En particulier, tout espace Euclidien possède des bases orthonormées, et le drapeau est conservé (Pour tout i , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$).

PROCÉDÉ :

Le vecteur e_j s'obtient en soustrayant à u_j le vecteur $\sum_{k=1}^{j-1} (e_k | u_j) e_k$

(on remarquera q'il s'agit du projeté orthogonal de u_j sur $F_{j-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$)

Il n'y a plus qu'à l'orthonormaliser.

Ainsi, on a :

$$v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} (e_k | u_j) e_k \text{ puis : } e_j = \frac{1}{\|v_j\|} v_j$$

Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

17 ►

ÉNONCÉ

Soit F un sev de dimension finie de E et $x \in E$.

La distance de x à F , notée $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$, est bien définie.

De plus, il existe un unique y_0 de F tel que:

$d(x, F) = \|x - y_0\|$, et $y_0 = p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F .

Enfin : $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$

PREUVE

L'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ forme une partie non-vide de \mathbb{R} et admet donc bien une borne inf, ce qui assure l'existence de $d(x, F)$

Pour tout y , on a :

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2$$

On a : $x - p_F(x) \in \text{Ker } p_F$ et $p_F(x) - y \in \text{Im } p_F$. Donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

On en déduit $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi $y = p_F(x)$

Donc finalement on a bien $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$

De même, avec Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

D'où la seconde égalité.

Distance d'un espace Euclidien à un hyperplan vectoriel ou affine donné par une équation cartésienne

22 ►/25 ►

ÉNONCÉ

Soit E un espace euclidien de dimension n , de base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$,

$\mathcal{H} = A + H$ avec H un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n u_i x_i = 0$ et $A \in E$

Alors :

Soit $M \in \mathcal{H}$ si $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ est un vecteur unitaire orthogonal à H , alors :

$$d(M, \mathcal{H}) = |(\overrightarrow{AM} | u)| = \left| \sum_{i=1}^n u_i (x_i - a_i) \right|$$

La distance à H est simplement obtenue pour $A = 0_E$

PREUVE

Par analogie avec la distance d'un point à un sous-espace vectoriel :

$$\begin{aligned} d(M, A + H) &= \inf_{h \in H} \|M - (A + h)\| = \inf_{h \in H} \|(M - A) - h\| = \inf_{h \in H} \|\overrightarrow{AM} - h\| \\ &= \|\overrightarrow{AM} - p_H(\overrightarrow{AM})\| = \|p_{H^\perp}(\overrightarrow{AM})\| = |(\overrightarrow{AM} | u)| \end{aligned}$$

(car u est de norme 1)

D'où la formule annoncée pour un hyperplan vectoriel, en remplaçant A par O .

Théorèmes à énoncer

Théorèmes de Pythagore

PREMIÈRE VERSION

- (1) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si, et seulement si, $(x | y) = 0$
 (2) Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système orthogonal, $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$ (Le sens n'est pas réciproque)

DEUXIÈME VERSION

Soit $x \in \bigoplus_{i=1}^n F_i$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in F_i$

Sommes directes orthogonales

Si F et G sont orthogonaux, ils sont en somme directe :

$$F \perp G \Rightarrow F \oplus G \text{ (on note } F \oplus G)$$

Expression analytique d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit $F \subset E$ un sev de dimension finie.

$$\text{Alors } E = F \oplus F^\perp$$

Et pour toute base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de F ,

$$p_F : x \mapsto \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$$

est la projection orthogonale sur F (parallèlement à F^\perp)

Caractérisation des bases orthonormées par la matrice associée au produit scalaire

Soit (u) une base de E ,

alors (u) est orthonormée si, et seulement si, sa matrice associée au produit scalaire $\mathcal{G}_{(u)}$ est la matrice identité.