Questions de cours

L'implication : définition, table de vérité, négation, contraposée

Définition

> *Soient P et Q deux propositions.*
>
> *La proposition $P \Longrightarrow Q$ (« P implique Q ») est fausse si P est vraie et si Q est fausse, vraie sinon.*
>
> *Autrement dit:* $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

négation

$$(\neg(P \Rightarrow Q)) \Longleftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q)) \overset{\text{De Morgan}}{\Longleftrightarrow} (\neg\neg P \wedge \neg Q) \overset{\text{double négation}}{\Longleftrightarrow} \boxed{(P \wedge \neg Q)}$$

Contraposée

> **Énoncé :** $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$
>
> **Preuve :**
>
> $$(\neg Q \Longrightarrow \neg P) \Longleftrightarrow (\neg\neg Q \vee \neg P) \underset{\text{commutativité de } \vee}{\overset{\text{double négation}}{\Longleftrightarrow}} (\neg P \vee Q) \Longleftrightarrow \boxed{(P \Longrightarrow Q)}$$

Preuve par récurrence sur n de : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : $P(0) : 0 = \frac{0\times 1}{2} = 0$ Vrai. Donc P est initialisée.
Héredité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vérifiée. Montrons $P(n+1)$:

$$n+1+\sum_{k=0}^{n} k = n+1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{2n+2+n^2+n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

En factorisant en haut par $n+1$, on obtient bien :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $P(n+1)$ vérifiée, ainsi P est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, puisque P est initialisée au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (Notes chap. 1, point 14)

Procédons par Analyse-Synthèse :

Analyse :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et supposons qu'elle puisse s'écrire $p+i$ avec p paire et i impaire. Alors, on a :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) & \textit{(1)} \\ f(-x) = p(x) - i(x) & \textit{(2)} \end{cases}$$

avec $\frac{1}{2}((1)+(2))$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

avec $\frac{1}{2}((1)-(2))$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

On peut vérifier que p est bien paire et que i est bien impaire.
L'analyse nous a donné une piste pour la question de l'existence, et nous a donné l'unicité de la décomposition annoncée.
Synthèse :
Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et p, i telles que

$$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

p est bien paire, et i est bien impaire, et $f = p + i$, ce qui montre l'existence de la décomposition annoncée.
<u>On a bien l'existence et l'unicité de notre décomposition.</u>
Un exemple vu plus tard dans l'année (si le colleur en demande un) :

$$e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$$

avec ch et sh respectivement « cosinus hyperbolique » et « sinus hyperbolique » :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Forme canonique et relations coefficients-racines pour un trinôme de degré 2

Forme canonique

Soit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.
On factorise d'abord par a :

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Puis, pour mettre sous la forme canonique, on fait apparaître le début d'un carré :

$$p(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right) = a\left(\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right)\right)$$

en posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$, on obtient la forme canonique d'un trinôme du second degré : $p(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

On sait alors que p admet un extremum en α, avec $f(\alpha) = \beta$.

Relations coefficient-racine

Soit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ dont on suppose qu'il possède deux racines réelles x_1 et x_2.
alors $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Donc

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Ainsi, par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

D'où les relations coefficients-racines d'un trinôme du second degré.

Somme géométrique de raison q

Soit $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$.

- Si $q \neq 1$:

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} q^k - \sum_{k=m}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=m}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right) = q^m \sum_{k=0}^{n-m}\left(q^k - q^{k+1}\right) \text{ (décalage)}$$

C'est une somme télescopique, donc au final :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m\left(1 - q^{n-m+1}\right) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}}$$

- Si $q = 1$ le résultat est immédiat, c'est $\boxed{n - m + 1}$.

Théorèmes à citer

Posons P et Q deux propositions.

Double négation

> *la proposition $\neg\neg P$ est équivalente à P*

Lois de De Morgan

> *Les lois de De Morgan sont les suivantes :*
>
> $$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$
> $$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

Principe de contraposition

> *La proposition $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.*
>
> *Ainsi, on peut appliquer ce principe à un énoncé de la forme « $P \Longrightarrow Q$ » en « $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ », ce qui est parfois plus facile.*

Principe de double implication

> *La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est équivalente à $P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow P$.*
>
> *Ainsi, pour prouver $P \Longleftrightarrow Q$, on peut prouver séparément $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$*

Négation et quantificateurs

> *Soit P un prédicat à une variable sur E.*
>
> *La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \neg P(x)$ »*
>
> *La négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \neg P(x)$ »*
>
> *Autrement dit, pour nier une proposition, on doit changer les $\exists$ en $\forall$, et les $\forall$ en $\exists$.*

Principe de récurrence

> *Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose :*
>
> $$P(0) \text{ vraie} \qquad \textit{(initialisation)}$$
> $$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1) \qquad \textit{(hérédité)}$$
>
> *Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ ($P(n)$ est vraie pour tout naturel n)*