Une boule ouverte est voisinage de chacun de ses points

Énoncé

> *Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si, et seulement si, $\mathcal{O}$ est « Voisinage de chacun de ses points »*
>
> *C'est-à-dire :*
>
> $$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(x,r) \subset \mathcal{O}$$

Démonstration

Par double implication :
$*$ $\underline{\Rightarrow}$: Soit $\mathcal{O}$ un ouvert, si $\mathcal{O} = \varnothing$, on a le resultat.
Sinon, c'est une réunion de boules ouvertes. Soit un point $x \in \mathcal{O}$, alors x est dans une boule $B(a,r)$ incluse dans $\mathcal{O}$. Ainsi, il reste à montrer qu'une boule ouverte est voisinage de chacuns de ses points.
Graphiquement, on voit qu'on peut espérer $B(x, r - \|x-a\|) \subset B(a,r)$.
Soit donc $y \in B(x,r')$, avec $r' = r - \|x-a\|$ note que $r' > 0$ puisque $x \subset B(a,r)$ Alors :

$$\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \leqslant r' + \|x-a\| = r$$

Ce qui donne bien $B(x, r - \|x-a\|) \subset B(a,r)$. $\mathcal{O}$ est donc bien voisinage de x
$*$ $\underline{\Leftarrow}$: Soit $\mathcal{O}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ voisinage de chacun de ses points.
Cela signifie que pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe un rayon strictement positif r_x tel que $B(x,r_x) \subset \mathcal{O}$.
En posant $\mathcal{O}' = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x,r_x)$, on a $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ par construction, et clairement $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ puisque tout $x \in \mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}'$, donc finalement $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ ce qui montre bien que O est une réunion de boules ouvertes.
D'après le principe de double implication, on a l'équivalence.

6 ▶

Définition de la continuité ; les applications linéaires sont continues

Continuité

DÉFINITION

> *$f : D \subset \mathbb{R}^2$ où D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, est continue en $a \in D$, si f admet $f(a)$ pour limite en en a:*
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Les applications linéaires (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) sont continues

DÉMONSTRATION

On a déjà vu dans le deuxième chapitre d'applications linéaires que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ prend la forme : $(x_1, x_2) \mapsto \lambda x_1 + \mu x_2$, où λ, μ sont deux éléments de la matrice représentative de l'application sur la base canonique, ou encore ses coordonnées sur la base des formes coordonnées relativement à la base canonique.
Pour $a = a_1e_1 + a_2e_2$ et $x = x_1e_1 + x_2e_2$ dans $\mathbb{R}^2$, il vient :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| = |\lambda(x_1 - a_1) + \mu(x_2 - a_2)| &\leqslant \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\ \|x - a\| \\ &\leqslant \mathrm{Max}(|\lambda|, |\mu|)\sqrt{2}\|x - a\| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec $u = (\lambda, \mu), v = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)$).
Ainsi f est k-lipschitzienne donc (uniformément) continue

* en particulier les formes coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

11 ▶

Énoncé des définitions des dérivées partielles et dérivée partielle suivant un vecteur, théorème-définition du gradient

DÉFINITIONS

Dérivées partielles :

∗ *En un point* $a = (a_1, a_2)$

Première dérivée partielle de f *en* a *:*

c'est la dérivée, si elle existe, de $f_{a,1}$ *en* a_1 *autrement dit, si la limite existe :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \partial_1 f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a)}{h}$$

de même pour f_2 *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \partial_2 f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a)}{h}$$

∗ *En un vecteur* v

Soit v *un vecteur non-nul de* $\mathbb{R}^2$

f *admet en* $a \in D$ *une dérivée partielle suivant le vecteur* v*, noté* $\partial_v f(a)$*, quand la limite suivante existe :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \partial_v f(a)$$

Gradient :

Soit f *de classe* C^1 *sur* D*. En tout point* a *de* D *et pour tout* $h = (h_1, h_2)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^2}}{\mathrm{o}}(\|h\|) \\ &= f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \underset{x \to 0_{\mathbb{R}^2}}{\mathrm{o}}(\|h\|) \end{aligned}$$

Où on note $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$ *l'unique vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant cette relation, appelé* **gradient** *de* f *en* a

$\| \ \|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, mais pas sur $\mathbb{R}^2$, gradient

DÉMONSTRATIONS

Posons $f : x \mapsto \|x\|$ définie sur $\mathbb{R}^2$,
en tout point (x_1, x_2) distinct de $(0, 0)$, $\partial_1 f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\|x\|}$ et $\partial_2 f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{\|x\|}$
ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, par théorème d'opérations, donc f y est de classe C^1. En $0_{\mathbb{R}^2}$, f est nulle et il n'y a pas de dérivée première partielle : les limites à gauche et à droite en 0 des rapports de définition sont distinctes (-1 à gauche, 1 à droite). Dont f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Pour le gradient, on prend ce que l'on a trouvé dans la démonstration :

$$\nabla(\| \ \|)(a) = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{\|a\|} \\ \frac{a_1}{\|a\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|a\|} a$$

(▸ **Pratiques 2 et 3**)

Énoncé du théorème d'opérations sur les fonctions C^1 (gradients d'une somme, d'un produit, d'une composée si définis, dont règle de la chaîne)

THÉORÈME D'OPÉRATIONS

a) *L'ensemble $C^1(D, \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur D ouvert de $\mathbb{R}^2$, muni de la somme et de la multiplication externe par un réel, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ stable par produit*

b) *Soit f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant $f(U)$ (et à valeurs réelles).*

Alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U et pour tout a dans U : $\nabla(g \circ f)(a) = g'(f(a))\nabla f(a)$

c) RÈGLE DE LA CHAÎNE *: Si u et v sont de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ et g sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant $(u, v)(U)$ alors $h : t \mapsto g(u(t), v(t))$ est de classe C^1 sur U et pour tout a de U :*

$$h'(a) = \partial_1 g(u(a), v(a)).u'(a) + \partial_2 g(u(a), v(a)).v'((a)) = \left(\nabla g(u(a), v(a)) \middle| \begin{pmatrix} u'(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} \right)$$

(On peut le voir comme : $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$ évaluée en $t = a$, on voit bien d'où vient le nom « règle de la chaîne »)