Lois usuelles au choix du colleur : schéma, loi, espérance et variance.

Loi uniforme

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ (Schéma : Équiprobabilité)
- $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
- Loi : $P(X = k) = \frac{1}{n}$
- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernoulli

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (Schéma : Succès d'un critère)
- $X(\Omega) = \{0; 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$
- $E(X) = p$
- $V(X) = pq$

Loi Binomiale

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (Schéma : n répétitions indépendantes de $\mathcal{B}(p)$)
- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Énoncé des propriétés de l'espérance (dont théorème de transfert).

1) **Linéarité de l'espérance** : pour tout scalaire a, $E(aX + Y) = a\,E(X) + E(Y)$.
2) Si $X(\Omega) \subset [a, b]$, alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.
3) Positivité et croissance de l'espérance.
4) **Théorème de transfert** : soit f définie sur $X(\Omega)$ à valeurs réelles, alors :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

5) Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)\,E(Y)$; la réciproque est fausse.

Énoncé des propriétés de la variance (et covariance) (dont variance d'une somme).

Propriété de la variance

a) Si $V(X) = 0$, X est « presque sûrement » constante.
b) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (formule de Kœnig-Huygens)
c) $V(aX + b) = a^2\, V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Variance d'une somme et propriétés de la covariance

En posant $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

(Cov est la « Covariance » de X et Y)

a) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
b)
$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)$$
c) Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$
d) Si les X_i sont deux-à-deux indépendantes, $\mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) = 0$ pour $i \neq j$ et :
$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Inégalités de Markov et BT.

ÉNONCÉS

> ***Markov :***
>
> *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini.*
>
> *Alors pour tout q naturel et $a > 0$:*
>
> $$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|^q)}{a^q}$$
>
> ***Bienaymé-Tchebychev :*** Dans le même cadre d'hypothèses :
>
> $$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

DÉMONSTRATIONS

Markov :

Par le théorème de transfert :

$$E(|X|^q) = \sum_{x \in X(\Omega),\ |x|\ \geqslant a} |x|^q\ P(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega),\ |x| < a} |x|^q\ P(X = x)$$

ces sommes étant bien définies puisque finies et positives.

On en déduit :

$$E(|X|^p) \geqslant \sum_{x \in X(\Omega),\ |x|\ \geqslant a} |x|^q\ P(X = x) \geqslant a^q P(X \geqslant a)$$

$$\Leftrightarrow P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|^p)}{a^p}$$

Puisque $P(X \geqslant a) \leqslant P(|X| \geqslant a)$, on a aussi le résultat sans la valeur absolue sur X

Bienaymé-Tchébychev :

C'est l'inégalité de Markov avec $q = 2$ et $X - E(X)$

Théorèmes à citer

Théorème-Définition loi d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire X sur un ensemble probabilisable $(\Omega, P(\Omega))$ fini est une application de Ω dans un ensemble E

Si $E \subset \mathbb{R}$ c'est une variable aléatoire réelle. L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ des valeurs prises par X sur l'univers Ω supposé fini.

Pour toute partie U de E, on note « $X \in U$ » l'ensemble fini $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\}$

En particulier :
∗ si $U = \{u\}$ un singleton, on note « $X = u$ » l'événement $X^{-1}(\{u\})$
∗ Si X est réel, $X \leqslant u$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant u\}$

Proposition fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini. la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$F_X : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Théorème-Définition couples de variables

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Le couple (X, Y) est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Sa loi, dite loi conjointe de X et Y, est définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est complètement déterminée par la donnée des $P((X = x_i) \cap (Y = y_j) = P((X, Y) = (x_i, y_j))$.

*Où $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_q\}$ Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y) et s'en déduisent :*

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^{q} P(X = x \cap Y = y_i) \text{ et } P(Y = y) = \sum_{i=1}^{p} P(X = x_i \cap Y = y)$$

Lemme des coalitions

Soit f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)^p$ et $X(\Omega)^{n-p}$ respectivement.

Si $(X_1, ..., X_n)$ sont mutuellement indépendantes et que les expressions suivantes ont un sens : $f(X_1, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.

Théorème-Définition Espérance et théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1; ...; x_n\}$ (x_i distincts deux-à-deux)

On appelle espérance de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

En particulier si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$: $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$

* *Interprétation : $E(X)$ donne une moyenne (ou barycentre) des valeurs x_i prises par X pondérée par les coefficients P(X = x_i)*

Théorème-Définition Variance et formule de Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

On pose $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ (x_i distincts deux-à-deux)

* *On appelle **variance** de X :*

$$\begin{aligned} V(X) &= E(((X) - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{(Kœnig-Huygens)} \\ &= \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \end{aligned}$$

* *On appelle **écart type** de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$*
* *Interprétation : $V(X)$ mesure la moyenne (au sens de l'espérance) des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et son espérance*