

## Inégalités de Schwarz & Minkowski

3 ►

### Schwarz

#### ÉNONCÉ

$$\left| \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2 \quad |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \\ \text{avec égalité si, et seulement si, } (x, y) \text{ est lié} \end{array} \right|$$

#### PREUVE

On a :  $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}, (\lambda x + y | \lambda x + y) = \|\lambda x + y\|^2 \geq 0$

On développe par bilinéarité et symétrie :

$(\lambda x + y | \lambda x + y) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \|y\|^2 \geq 0$ . Si  $x = 0$ , vérifié avec égalité.

Si  $x \neq 0$  : On a un trinôme du second degré en  $\lambda$  à signe fixe. Donc  $\Delta \leq 0$ . Ainsi :

$$4(x | y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x | y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

D'où le résultat pour le cas  $(x, y)$  libre

#### Cas d'égalité

$\Rightarrow$  : Si  $\Delta = 0$ , on a une racine double  $\lambda_0$ , donc  $\|\lambda_0 x + y\| = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Leftrightarrow y = -\lambda_0 x$  d'où  $(x, y)$  liée.

$\Leftarrow$  : Supposons  $(x, y)$  liée.

\* Soit  $x = 0$  et  $(x | y) = 0 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ , vérifié.

\* Soit il existe  $\lambda_0 \geq 0$  tel que  $y = \lambda_0 x$ , dans ce cas on a  $|(x | y)| = |\lambda_0| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$

### Minkowski

#### ÉNONCÉ

$$\left| \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \text{avec inégalité si, et seulement si, } x = 0 \text{ ou } y = \lambda x \text{ pour un } \lambda \geq 0 \end{array} \right|$$

#### PREUVE

Soit  $(x, y) \in E^2$   $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$

Inégalité de Schwarz :  $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ .

D'où le résultat, puisque les normes sont toujours positives.

Cela nous donne l'égalité si, et seulement si,  $(x | y) = \|x\| \cdot \|y\|$

$\Rightarrow$  : C'est un cas particulier de l'égalité dans Schwarz, donc  $(x, y)$  lié.

\* Si  $x = 0$ , on a bien  $(0 | y) = \|0\| \cdot \|y\| = 0$

\* Sinon, il existe  $\lambda_0$  tel que  $y = \lambda_0 x$ , alors on a :  $\lambda_0(x | x) = \lambda_0 \|x\|^2 = \|\lambda_0\| \cdot \|x\| \cdot \|x\|$ , donc  $\lambda_0 \geq 0$

$\Leftarrow$  : Si  $y = \lambda_0 x$  avec  $\lambda_0 \geq 0$ , on obtient bien  $(x | y) = \|x\| \cdot \|y\|$  donc égalité.

## Formule de restitution et identité du Parallélogramme

4 ►

### ÉNONCÉ

Pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

**Formule de Restitution :**

$$(x | y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

**Identité du Parallélogramme :**  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

### PREUVE

$\|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$  par symétrie du produit scalaire

$$\Leftrightarrow (x | y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

D'où la formule de restitution. En changeant  $y$  en  $-y$ , on a :

$$\begin{cases} \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2 \\ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \end{cases}$$

En sommant, on obtient donc :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

D'où l'identité du parallélogramme.

## Description du procédé de Schimdt

12 ►

*THÉORÈME :*

Soit  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille libre et  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  Il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $F$  telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(u_1, \dots, u_j) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$$

Il y a unicité de cette base si l'on impose que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(e_i | u_i) > 0$

\* En particulier, tout espace Euclidien possède des bases orthonormées, et le drapeau est conservé (Pour tout  $i$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$ ).

*PROCÉDÉ :*

Le vecteur  $e_j$  s'obtient en soustrayant à  $u_j$  le vecteur  $\sum_{k=1}^{j-1} (e_k | u_j) e_k$

(on remarquera q'il s'agit du projeté orthogonal de  $u_j$  sur  $F_{j-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$ )

Il n'y a plus qu'à l'orthonormaliser.

Ainsi, on a :

$$v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} (e_k | u_j) e_k \text{ puis : } e_j = \frac{1}{\|v_j\|} v_j$$

## Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

17 ►

### ÉNONCÉ

Soit  $F$  un sev de dimension finie de  $E$  et  $x \in E$ .

La distance de  $x$  à  $F$ , notée  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ , est bien définie.

De plus, il existe un unique  $y_0$  de  $F$  tel que:

$d(x, F) = \|x - y_0\|$ , et  $y_0 = p_F(x)$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ .

Enfin :  $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$

### PREUVE

L'ensemble  $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$  forme une partie non-vide de  $\mathbb{R}$  et admet donc bien une borne inf, ce qui assure l'existence de  $d(x, F)$

Pour tout  $y$ , on a :

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2$$

On a :  $x - p_F(x) \in \text{Ker } p_F$  et  $p_F(x) - y \in \text{Im } p_F$ . Donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

On en déduit  $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$  avec égalité ssi  $y = p_F(x)$

Donc finalement on a bien  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$

De même, avec Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

D'où la seconde égalité.

## Distance d'un espace Euclidien à un hyperplan vectoriel ou affine donné par une équation cartésienne

22 ►/25 ►

### ÉNONCÉ

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , de base  $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ ,

$\mathcal{H} = A + H$  avec  $H$  un hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^n u_i x_i = 0$  et  $A \in E$

Alors :

Soit  $M \in \mathcal{H}$  si  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $H$ , alors :

$$d(M, \mathcal{H}) = |(\overrightarrow{AM} | u)| = \left| \sum_{i=1}^n u_i (x_i - a_i) \right|$$

La distance à  $H$  est simplement obtenue pour  $A = 0_E$

### PREUVE

Par analogie avec la distance d'un point à un sous-espace vectoriel :

$$\begin{aligned} d(M, A + H) &= \inf_{h \in H} \|M - (A + h)\| = \inf_{h \in H} \|(M - A) - h\| = \inf_{h \in H} \|\overrightarrow{AM} - h\| \\ &= \|\overrightarrow{AM} - p_H(\overrightarrow{AM})\| = \|p_{H^\perp}(\overrightarrow{AM})\| = |(\overrightarrow{AM} | u)| \end{aligned}$$

(car  $u$  est de norme 1)

D'où la formule annoncée pour un hyperplan vectoriel, en remplaçant  $A$  par  $O$ .

## Théorèmes à énoncer

### Théorèmes de Pythagore

#### PREMIÈRE VERSION

- (1)  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  si, et seulement si,  $(x | y) = 0$   
 (2) Si  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système orthogonal,  $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$  (Le sens n'est pas réciproque)

#### DEUXIÈME VERSION

Soit  $x \in \bigoplus_{i=1}^n F_i$  s'écrivant  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  avec  $x_i \in F_i$

### Sommes directes orthogonales

Si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, ils sont en somme directe :

$$F \perp G \Rightarrow F \oplus G \text{ (on note } F \oplus G)$$

### Expression analytique d'une projection orthogonales sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit  $F \subset E$  un sev de dimension finie.

$$\text{Alors } E = F \oplus F^\perp$$

Et pour toute base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $F$ ,

$$p_F : x \mapsto \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$$

est la projection orthogonale sur  $F$  (parallèlement à  $F^\perp$ )

### Caractérisation des bases orthonormées par la matrice associée au produit scalaire

Soit  $(u)$  une base de  $E$ ,

alors  $(u)$  est orthonormée si, et seulement si, sa matrice associée au produit scalaire  $\mathcal{G}_{(u)}$  est la matrice identité.