Inégalités de Schwarz & Minkowski

3 ▶

Schwarz

Énoncé

> $\forall (x,y) \in E^2 \ |(x \mid y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$
>
> *avec égalité si, et seulement si,* (x,y) *est lié*

Preuve

On a : $\forall (x,y,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}, (\lambda x + y \mid \lambda x + y) = \|\lambda x + y\|^2 \geqslant 0$
On développe par bilinéarité et symétrie :
$(\lambda x + y \mid \lambda x + y) = \lambda^2 \ \|x\|^2 + 2\lambda (x \mid y) + \|y\|^2 > 0$. Si $x = 0$, vérifié avec égalité.
Si $x \neq 0$: On a un trinôme du second degré en λ à signe fixe. Donc $\Delta \leqslant 0$. Ainsi : $4(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2.\|y\|^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x|y)^2 \leqslant \|x\|^2.\|y\|^2$
D'où le résultat pour le cas (x,y) libre

<u>Cas d'égalité</u>
<u>$\Rightarrow$</u> : Si $\Delta = 0$, on a une racine double λ_0, donc $\|\lambda_0 x + y\| = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Leftrightarrow y = -\lambda_0 x$ d'où (x,y) liée.
<u>$\Leftarrow$</u> : Supposons (x,y) liée.

* Soit $x = 0$ et $(x \mid y) = 0 = \|x\|^2.\|y\|^2$, vérifié.
* Soit il existe $\lambda_0 \geqslant 0$ tel que $y = \lambda_0 x$, dans ce cas on a $|(x \mid y)| = |\lambda_0|.\|y\|^2 = \|x\|.\|y\|$

Minkowski

Énoncé

> $\forall (x,y) \in E^2, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
>
> *avec inégalité si, et seulement si,* $x = 0$ *ou* $y = \lambda x$ *pour un* $\lambda \geqslant 0$

Preuve

Soit $(x,y) \in E^2$ $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$
Inégalité de Schwarz : $\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.
D'où le résultat, puisque les normes sont toujours positives.
Cela nous donne l'égalité si, et seulement si, $(x \mid y) = \|x\|.\|y\|$
<u>$\Rightarrow$</u>: C'est un cas particulier de l'égalité dans Schwarz, donc (x,y) lié.

* Si $x = 0$, on a bien $(0 \mid y) = \|0\|.\|y\| = 0$
* Sinon, il existe λ_0 tel que $y = \lambda_0 x$, alors on a : $\lambda_0 (x \mid x) = \lambda_0 \ \|x\|^2 = \|\lambda_0\|.\|x\|.\|x\|$, donc $\lambda_0 \geqslant 0$

<u>$\Leftarrow$</u>: Si $y = \lambda_0 x$ avec $\lambda_0 \geqslant 0$, on obtient bien $(x \mid y) = \|x\|.\|y\|$ donc égalité.

Formule de restitution et identité du Parallélogramme

4 ▶

Énoncé

> *Pour tout* $(x, y) \in E^2$ *:*
>
> ***Formule de Restitution :***
>
> $$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
>
> ***Identité du Parallélogramme :*** $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Preuve

$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$ par symétrie du produit scalaire

$$\Leftrightarrow (x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

D'où la formule de restitution. En changeant y en $-y$, on a :

$$\begin{cases} \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2 \\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \end{cases}$$

En sommant, on obtient donc :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

D'où l'identité du parallélogramme.

Description du procédé de Schimdt

12 ▶

Théorème :

Soit $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *une famille libre et* $F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$ *Il existe une base orthonormée* $(e_1, ..., e_n)$ *de* F *telle que :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_j) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_j)$$

Il y a unicité de cette base si l'on impose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i \mid u_i) > 0$

* *En particulier, tout espace Euclidien possède des bases orthonormées, et le drapeau est conservé (Pour tout* i, $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_j)$*).*

Procédé :

Le vecteur e_j *s'obtient en soustrayant à* u_j *le vecteur* $\sum_{k=1}^{j-1}(e_k \mid u_j)e_k$
(on remarquera q'il s'agit du projeté orthogonal de u_j *sur* $F_{j-1} = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{j-1})$*)*
Il n'y a plus qu'à l'orthonormaliser.
Ainsi, on a :

$$v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1}(e_k \mid u_j)e_k \text{ puis : } e_j = \frac{1}{\|v_j\|}v_j$$

Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

17 ▶

Énoncé

> *Soit F un sev de dimension finie de E et $x \in E$.*
>
> *La distance de x à F, notée $d(x,F) = \underset{y \in F}{\operatorname{Inf}} \|x-y\|$, est bien définie.*
>
> *De plus, il existe un unique y_0 de F tel que:*
>
> *$d(x,F) = \|x-y_0\|$, et $y_0 = p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.*
>
> *Enfin : $d(x,F)^2 = \|x-p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$*

Preuve

L'ensemble $\{\|x-y\| \mid y \in F\}$ forme une partie non-vide de $\mathbb{R}$ et admet donc bien une borne inf, ce qui asssure l'existence de $d(x,F)$
Pour tout y, on a :

$$\|x-y\|^2 = \|(x-p_F(x)) + (p_F(x)-y)\|^2$$

On a : $x - p_F(x) \in \operatorname{Ker} p_F$ et $p_F(x) - y \in \operatorname{Im} p_F$. Donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2$$

On en déduit $\|x-y\| \geqslant \|x-p_F(x)\|$ avec égalité ssi $y = p_F(x)$
Donc finalement on a bien $d(x,F) = \underset{y \in F}{\operatorname{Inf}} \|x-y\| = \|x-p_F(x)\|^2$
De même, avec Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x-p_F(x)+p_{F(x)}\|^2 = \|x^2-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x-p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

D'où la seconde égalité.

Distance d'un espace Euclidien à un hyperplan vectoriel ou affine donné par une équation cartésienne

22 ▶/25 ▶

Énoncé

> *Soit E un espace euclidien de dimension n, de base $(e) = (e_1, ..., e_n)$,*
>
> *$\mathcal{H} = A + H$ avec H un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0$ et $A \in E$*
>
> *Alors :*
>
> *Soit $M \in \mathcal{H}$ si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ est un vecteur unitaire orthogonal à H, alors :*
>
> *$d(M, \mathcal{H}) = \left| \left(\overrightarrow{AM} \,\middle|\, u \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} u_i (x_i - a_i) \right|$*
>
> *La distance à H est simplement obtenue pour $A = 0_E$*

Preuve

Par analogie avec la distance d'un point à un sous-espace vectoriel :

$$\begin{aligned} d(M.A+H) &= \operatorname*{Inf}_{h\in H} \|M - (A+H)\| = \operatorname*{Inf}_{h\in H} \|(M-A) - h\| = \operatorname*{Inf}_{h\in H} \|\overrightarrow{AM} - h\| \\ &= \|\overrightarrow{AM} - p_H\left(\overrightarrow{AM}\right)\| = \|p_{H^\perp}\left(\overrightarrow{AM}\right)\| = \left| \left(\overrightarrow{AM} \,\middle|\, u \right) \right| \end{aligned}$$

(car u est de norme 1)

D'où la formule annoncée pour un hyperplan vectoriel, en remplaçant A par O.

Théorèmes à énoncer

Théorèmes de Pythagore

Première version

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *si, et seulement si,* $(x \mid y) = 0$

(2) Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est un système orthogonal,* $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$ *(Le sens n'est pas réciproque)*

Deuxième version

Soit $x \in \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ *s'écrivant* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ *avec* $x_i \in F_i$

Sommes directes orthogonales

Si F *et* G *sont orthogonaux, ils sont en somme directe :*

$F \perp G \Rightarrow F \oplus G$ *(on note* $F \oplus G$*)*

Expression analytique d'une projection orthogonales sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit $F \subset E$ *un sev de dimension finie.*

Alors $E = F \oplus F^{\perp}$

Et pour toute base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ *de* F,

$$p_F : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$$

est la projection orthogonale sur F *(parallèlement à* $F^{\perp}$*)*

Caracterisation des bases orthonormées par la matrice associée au produit scalaire

Soit (u) *une base de* E,

alors (u) *est orthonormée si, et seulement si, sa matrice associée au produit scalaire* $\mathcal{G}_{(u)}$ *est la matrice identité.*