Énoncé des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

(18 ▶) Soit $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$

Propriétés

(1) **Linéarité** : $\left|\begin{smallmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f\mapsto\int_{[a,b]} f\end{smallmatrix}\right.$ est linéaire.

(2) Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}, \int_{[a,b]}(\Re f)+i\int_{[a,b]}(\Im f)$

(3) Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R},$ pour f et $g\, C^0_{pm}$ sur $[a,b]$ (rappel) :

   (a) **positivité** : si f est à valeurs positives sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

   (b) **croissance** : si $f \leqslant g$ sur [a,b], alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

   (c) **Critere de nullité** :« si f continue et à valeurs positives sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f = 0$ si, et seulement si, f est nulle sur $[a,b]$

(4) **Inégalité de la moyenne** : $\left|\int_{[a,b]} f = 0\right| \leqslant \left|\int_{[a,b]}|f|\right| \leqslant |b-a| \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]}|f(x)|$

(5) **Relation de Chasles** : pour $c \in]a,b[, f\in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ si, et seulement si, $(f\in C^0_{pm}([a,c],\mathbb{K})$ et $f\in C^0_{pm}([c,b],\mathbb{K}))$ et alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

Théorème de prolongement

(27 ▶)

Théorème de prolongement :

> *Soit f continue sur $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b]$ On suppose que f' admet une limite l en a. Alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $f'(a)=l$*

Preuve :

Soit $\varepsilon>0$, par hypothèse il existe un voisinage de a sur lequel $|f'(x)-l|\leqslant\varepsilon$.
On applique l'inégalité des AF à $g : x\mapsto f(x)-f(a)-(x-a)l$, qui est C^0 sur $[a,b]$ et C^1 sur $]a,b[$ par théorème d'opération.
g vérifie $|g'(x)|=|f'(x)-l|\leqslant\varepsilon$ pour $x\in]a,b[$. On obtient alors, pour $x\in[a,b]$:
$|g(x)-g(a)|=|f(x)-f(a)-(x-a)l|\leqslant\varepsilon\;|x-a|$.
Ce qui montre bien que f est dérivable en a de dérivée $l=\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ et qui assure la continuité de f' sur $[a,b[$.

Énoncés des trois formules de Taylor.

28 ▶

Formule de Taylor avec reste intégral

> *Soit f de classe C^{k+1} sur I, et soit a un point de I. Pour tout x de I :*
>
> $$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{k(x)} \text{ avec } R_{k(x)} = \frac{1}{k!} \int_a^x (x-t)^k f^{k+1}(t)\mathrm{d}t$$

29 ▶

Inégalité de Taylor-Lagrange

> *Soit f de classe C^{k+1} sur I, telle que $\forall x \in I, |f^{k+1}(x)| \leqslant M_{k+1}$. Pour tout« $x \in I$:*
>
> $$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| = |R_k(x)| \leqslant \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} |x-a|^{k+1}$$

30 ▶

Formule de Taylor-Young

> *Toute fonction $f \in C^k(I, \mathbb{K})$ admet en tout point $a \in I$ un développement limité à l'ordre k :*
>
> $$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}} (x-a)^k$$

Formulaire de développements limités

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$$

$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$