

Lois usuelles au choix du colleur : schéma, loi, espérance et variance.

Loi uniforme

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ (Schéma : Équiprobabilité)
- $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
- Loi : $P(X = k) = \frac{1}{n}$
- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernoulli

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (Schéma : Succès d'un critère)
- $X(\Omega) = \{0; 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$
- $E(X) = p$
- $V(X) = pq$

Loi Binomiale

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (Schéma : n répétitions indépendantes de $\mathcal{B}(p)$)
- $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Énoncé des propriétés de l'espérance (dont théorème de transfert).

- 1) **Linéarité de l'espérance** : pour tout scalaire a , $E(aX + Y) = a E(X) + E(Y)$.
- 2) Si $X(\Omega) \subset [a, b]$, alors $a \leq E(X) \leq b$.
- 3) Positivité et croissance de l'espérance.
- 4) **Théorème de transfert** : soit f définie sur $X(\Omega)$ à valeurs réelles, alors :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

- 5) Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) E(Y)$; la réciproque est fausse.

Énoncé des propriétés de la variance (et covariance) (dont variance d'une somme).

PROPRIÉTÉ DE LA VARIANCE

- a) Si $V(X) = 0$, X est « presque sûrement » constante.
- b) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (formule de Kœnig-Huygens)
- c) $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

VARIANCE D'UNE SOMME ET PROPRIÉTÉS DE LA COVARIANCE

En posant $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

(Cov est la « Covariance » de X et Y)

- a) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ et $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)$
- b)
$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$
- c) Si X et Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$
- d) Si les X_i sont deux-à-deux indépendantes, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$ et :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Inégalités de Markov et BT.

ÉNONCÉS

Markov :

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini.

Alors pour tout q naturel et $a > 0$:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^q)}{a^q}$$

Bienaymé-Tchebychev : Dans le même cadre d'hypothèses :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

DÉMONSTRATIONS

Markov :

Par le théorème de transfert :

$$E(|X|^q) = \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} |x|^q P(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega), |x| < a} |x|^q P(X = x)$$

ces sommes étant bien définies puisque finies et positives.

On en déduit :

$$E(|X|^q) \geq \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} |x|^q P(X = x) \geq a^q P(X \geq a)$$

$$\Leftrightarrow P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^q)}{a^q}$$

Puisque $P(X \geq a) \leq P(|X| \geq a)$, on a aussi le résultat sans la valeur absolue sur X

Bienaymé-Tchébychev :

C'est l'inégalité de Markov avec $q = 2$ et $X - E(X)$

Théorèmes à citer

Théorème-Définition loi d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire X sur un ensemble probabilisable $(\Omega, P(\Omega))$ fini est une application de Ω dans un ensemble E

Si $E \subset \mathbb{R}$ c'est une variable aléatoire réelle. L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ des valeurs prises par X sur l'univers Ω supposé fini.

Pour toute partie U de E , on note « $X \in U$ » l'ensemble fini $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\}$

En particulier :

* si $U = \{u\}$ un singleton, on note « $X = u$ » l'événement $X^{-1}(\{u\})$

* Si X est réel, $X \leq u$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq u\}$

Proposition fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini. la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$$

Théorème-Définition couples de variables

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Le couple (X, Y) est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Sa loi, dite loi conjointe de X et Y , est définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est complètement déterminée par la donnée des $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P((X, Y) = (x_i, y_j))$.

Où $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$ Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y) et s'en déduisent :

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^q P(X = x \cap Y = y_i) \text{ et } P(Y = y) = \sum_{i=1}^p P(X = x_i \cap Y = y)$$

Lemme des coalitions

Soit f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)^p$ et $X(\Omega)^{n-p}$ respectivement.

Si (X_1, \dots, X_n) sont mutuellement indépendantes et que les expressions suivantes ont un sens : $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Théorème-Définition Espérance et théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ (x_i distincts deux-à-deux)

On appelle espérance de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

En particulier si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$: $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

* Interprétation : $E(X)$ donne une moyenne (ou barycentre) des valeurs x_i prises par X pondérée par les coefficients $P(X = x_i)$

Théorème-Définition Variance et formule de Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

On pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (x_i distincts deux-à-deux)

* On appelle **variance** de X :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (\text{Kœnig-Huygens}) \\ &= \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \end{aligned}$$

* On appelle **écart type** de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

* Interprétation : $V(X)$ mesure la moyenne (au sens de l'espérance) des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et son espérance