

## Questions de cours

### L'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et cas d'égalité

#### ÉNONCÉ

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

#### PREUVE

Puisque  $|x + y|$  et  $|x| + |y|$  sont positifs, par croissance de  $x \mapsto x^2$ , on va montrer que  $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$  ce qui donnera le résultat.

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2$$

Il y a égalité si, et seulement si :  $xy = |x||y|$ . C'est-à-dire lorsque  $x$  et  $y$  sont de même signe.

## Théorème de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure

### ÉNONCÉ

- \*  $A$  admet  $b$  pour borne supérieure si et seulement si  $b$  majore  $A$  et il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $b$ .
- \*  $A$  admet  $b$  pour borne inférieure si et seulement si  $b$  minore  $A$  et il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $b$ .

### PREUVE

La caractérisation en  $\varepsilon$  n'est pas demandée, mais puisque l'on demande l'équivalence avec la caractérisation en  $\varepsilon$ , il est plus sûr de la connaître..

*Énoncé de la caractérisation en  $\varepsilon$  :*

Soit  $A$  une partie non-vide de  $\mathbb{R}$ .

- \*  $A$  admet  $b$  pour borne supérieure si :  $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b - \varepsilon < a \leq b \end{cases}$
- \*  $A$  admet  $b$  pour borne inférieure si :  $\begin{cases} \forall a \in A, a \geq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \leq a < b + \varepsilon \end{cases}$

*Preuve de la caractérisation séquentielle :*

Montrons l'équivalence entre les deux caractérisations pour le cas :  $b$  borne supérieure de  $A$ .

La condition «  $b$  majorant » est presque littéralement dans les deux caractérisations. On va alors simplement prouver l'équivalence entre la seconde condition de chacune des caractérisations :

$\varepsilon \Rightarrow$  séquentielle : Supposons :  $\forall \varepsilon, \exists a \in A, b - \varepsilon < a \leq b$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , choisissons  $\varepsilon = 1/n$ , on obtient un élément  $a_n \in A$  tel que  $b - 1/n < a_n \leq b$ . On a ainsi construit une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $b$ . D'où l'implication.

séquentielle  $\Rightarrow \varepsilon$  : Réciproquement, supposons qu'il existe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , suite d'éléments de  $A$  telle que  $(a_n)$  converge vers  $b$ . On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq b$ . Comme, de plus,  $(b - a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 0 : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0$  tel que  $|a_{n_0} - b| < \varepsilon$ , c'est-à-dire :  $b - \varepsilon < a_{n_0} < b + \varepsilon$ , soit finalement :  $b - \varepsilon < a_{n_0} \leq b$ . D'où la réciproque vérifiée.

*Finalement, on a bien l'équivalence.*

## $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

### ÉNONCÉ

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  se traduit par les deux propositions, qui sont équivalentes :

- \* Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel.
- \* Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  se traduit par les deux propositions, qui sont équivalentes :

- \* Entre deux réels distincts quelconques, il existe un nombre irrationnel.
- \* Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

### PREUVE

$\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$  :

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $(d_n^+) = \left( \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right)$  suite de rationnels qui converge bien vers  $x$ . Donc on a la première assertion.

Soit  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $x < y$ . Alors puisque  $(d_n^+)$  converge par valeurs strictement supérieures à  $x$  en décroissant, pour  $n$  assez grand, on a  $x < d_n^+ < y$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$  :

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - \sqrt{2}$  est aussi réel, limite d'une suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'après la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la suite  $(q_n + \sqrt{2})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'irrationnels qui converge vers  $x$ . D'où la deuxième assertion.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x < y$ , alors on adapte la preuve pour  $\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$  en utilisant  $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$ .

**Bornes supérieures et inférieures, max et min de  $A = \left\{ \frac{t^2-1}{1+t^2} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$  (pratique 4 et 5)**

$$\text{Soit } A = \left\{ \frac{t^2-1}{t^2+1} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

\* Inf et Min : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{t^2-1}{t^2+1} > -1 \iff 2t^2 \geq 0$ , qui est vrai pour tout  $t$ . Donc  $\inf A = -1$ . De plus, pour  $t = 0$ , on a :  $\frac{0-1}{0+1} = -1$ . Donc  $-1 \in A$ , c'est-à-dire que  $\min A = \inf A = -1$ .

\* Sup et Max : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , vérifions :

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} \leq 1 \iff 2t^2 \leq 0, \text{ qui est vrai, quelque soit } t$$

. Donc  $\sup A \leq 1$ . Posons maintenant  $(a_n) = \left( \frac{n^2-1}{n^2+1} \right)$  à valeurs dans  $A$ . Pour tout

$n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$ . Donc  $(a_n)$  converge vers 1. D'après la caractérisation séquentielle,

$\sup A = 1$ . En revanche,  $1 \notin A$ . Car l'équation :  $\frac{t^2-1}{t^2+1} = 1$  est équivalente à :  $1 = -1$ .

Donc finalement  $\sup A = 1$  et  $\max A$  n'existe pas.

## Théorèmes à citer

### Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux familles de réels. Alors :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

(Ps : On peut le voir comme :  $|(x_i | y_i)| \leq \|x_i\| \|y_i\|$  avec  $(. | .)$  le produit scalaire canonique et  $\|.\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ )

### Deuxième inégalité triangulaire

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors :  $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$

on encore :  $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$

### Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

- \* Toute partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée admet une borne supérieure.
- \* Toute partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée admet une borne inférieure.

### Théorème-Définition de la partie entière.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- \* L'ensemble des entiers relatifs inférieurs ou égaux à  $x$  forme une partie de  $\mathbb{R}$  non-vide majorée. Son plus grand élément s'appelle « partie entière de  $x$  » et se note  $\lfloor x \rfloor = \text{Max}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$
- \*  $\lfloor x \rfloor$  est l'unique entier relatif tel que :  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$