

Questions de cours

L'inégalité triangulaire sur \mathbb{R} et cas d'égalité

ÉNONCÉ

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

PREUVE

Puisque $|x + y|$ et $|x| + |y|$ sont positifs, par croissance de $x \mapsto x^2$, on va montrer que $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ ce qui donnera le résultat.

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2$$

Il y a égalité si, et seulement si : $xy = |x||y|$. C'est-à-dire lorsque x et y sont de même signe.

Théorème de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure

ÉNONCÉ

- * A admet b pour borne supérieure si et seulement si b majore A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b .
- * A admet b pour borne inférieure si et seulement si b minore A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b .

PREUVE

La caractérisation en ε n'est pas demandée, mais puisque l'on demande l'équivalence avec la caractérisation en ε , il est plus sûr de la connaître..

Énoncé de la caractérisation en ε :

Soit A une partie non-vide de \mathbb{R} .

- * A admet b pour borne supérieure si : $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b - \varepsilon < a \leq b \end{cases}$
- * A admet b pour borne inférieure si : $\begin{cases} \forall a \in A, a \geq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \leq a < b + \varepsilon \end{cases}$

Preuve de la caractérisation séquentielle :

Montrons l'équivalence entre les deux caractérisations pour le cas : b borne supérieure de A .

La condition « b majorant » est presque littéralement dans les deux caractérisations. On va alors simplement prouver l'équivalence entre la seconde condition de chacune des caractérisations :

$\varepsilon \Rightarrow$ séquentielle : Supposons : $\forall \varepsilon, \exists a \in A, b - \varepsilon < a \leq b$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons $\varepsilon = 1/n$, on obtient un élément $a_n \in A$ tel que $b - 1/n < a_n \leq b$. On a ainsi construit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A qui converge vers b . D'où l'implication.

séquentielle $\Rightarrow \varepsilon$: Réciproquement, supposons qu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suite d'éléments de A telle que (a_n) converge vers b . On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq b$. Comme, de plus, $(b - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $|a_{n_0} - b| < \varepsilon$, c'est-à-dire : $b - \varepsilon < a_{n_0} < b + \varepsilon$, soit finalement : $b - \varepsilon < a_{n_0} \leq b$. D'où la réciproque vérifiée.

Finalement, on a bien l'équivalence.

\mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R}

ÉNONCÉ

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} se traduit par les deux propositions, qui sont équivalentes :

- * Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel.
- * Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} se traduit par les deux propositions, qui sont équivalentes :

- * Entre deux réels distincts quelconques, il existe un nombre irrationnel.
- * Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

PREUVE

\mathbb{Q} dense dans \mathbb{R} :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $(d_n^+) = \left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right)$ suite de rationnels qui converge bien vers x . Donc on a la première assertion.

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. Alors puisque (d_n^+) converge par valeurs strictement supérieures à x en décroissant, pour n assez grand, on a $x < d_n^+ < y$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans \mathbb{R} :

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x - \sqrt{2}$ est aussi réel, limite d'une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'après la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . Ainsi, la suite $(q_n + \sqrt{2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'irrationnels qui converge vers x . D'où la deuxième assertion.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, alors on adapte la preuve pour \mathbb{Q} dense dans \mathbb{R} en utilisant $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$.

Bornes supérieures et inférieures, max et min de $A = \left\{ \frac{t^2-1}{1+t^2} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ (pratique 4 et 5)

$$\text{Soit } A = \left\{ \frac{t^2-1}{t^2+1} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

* Inf et Min : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t^2-1}{t^2+1} > -1 \iff 2t^2 \geq 0$, qui est vrai pour tout t . Donc $\inf A = -1$. De plus, pour $t = 0$, on a : $\frac{0-1}{0+1} = -1$. Donc $-1 \in A$, c'est-à-dire que $\min A = \inf A = -1$.

* Sup et Max : pour tout $t \in \mathbb{R}$, vérifions :

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} \leq 1 \iff 2t^2 \leq 0, \text{ qui est vrai, quelque soit } t$$

. Donc $\sup A \leq 1$. Posons maintenant $(a_n) = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)$ à valeurs dans A . Pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$. Donc (a_n) converge vers 1. D'après la caractérisation séquentielle,

$\sup A = 1$. En revanche, $1 \notin A$. Car l'équation : $\frac{t^2-1}{t^2+1} = 1$ est équivalente à : $1 = -1$.

Donc finalement $\sup A = 1$ et $\max A$ n'existe pas.

Théorèmes à citer

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels. Alors :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

(Ps : On peut le voir comme : $|(x_i | y_i)| \leq \|x_i\| \|y_i\|$ avec $(. | .)$ le produit scalaire canonique et $\|.\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n)

Deuxième inégalité triangulaire

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors : $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$

on encore : $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$

Propriété fondamentale de \mathbb{R}

- * Toute partie de \mathbb{R} non vide et majorée admet une borne supérieure.
- * Toute partie de \mathbb{R} non vide et minorée admet une borne inférieure.

Théorème-Définition de la partie entière.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- * L'ensemble des entiers relatifs inférieurs ou égaux à x forme une partie de \mathbb{R} non-vide majorée. Son plus grand élément s'appelle « partie entière de x » et se note $\lfloor x \rfloor = \text{Max}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$
- * $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$