

Questions de cours

L'implication : définition, table de vérité, négation, contraposée

DÉFINITION

Soient P et Q deux propositions.

La proposition $P \Rightarrow Q$ (« P implique Q ») est fausse si P est vraie et si Q est fausse, vraie sinon.

Autrement dit: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$

TABLE DE VÉRITÉ

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

NÉGATION

$$\begin{aligned}
 (\neg(P \Rightarrow Q)) &\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q)) \stackrel{\text{De Morgan}}{\Leftrightarrow} (\neg\neg P \wedge \neg Q) \\
 &\stackrel{\text{double négation}}{\Leftrightarrow} \boxed{(P \wedge \neg Q)}
 \end{aligned}$$

CONTRAPOSÉE

Énoncé : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Preuve :

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (\neg\neg Q \vee \neg P) \stackrel{\text{double négation}}{\Leftrightarrow} (\neg P \vee Q) \stackrel{\text{commutativité de } \vee}{\Leftrightarrow} \boxed{(P \Rightarrow Q)}$$

Preuve par récurrence sur n de : $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : $P(0) : 0 = \frac{0 \times 1}{2} = 0$ Vrai. Donc P est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vérifiée. Montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} n+1 + \sum_{k=0}^n k &= n+1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k &= \frac{2n+2+n^2+n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} \end{aligned}$$

En factorisant en haut par $n+1$, on obtient bien :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $P(n+1)$ vérifiée, ainsi P est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, puisque P est initialisée au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (Notes chap. 1, point 14)

Procédons par Analyse-Synthèse :

Analyse :

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et supposons qu'elle puisse s'écrire $p + i$ avec p paire et i impaire. Alors, on a :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) & (1) \\ f(-x) = p(x) - i(x) & (2) \end{cases}$$

avec $\frac{1}{2}((1) + (2))$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

avec $\frac{1}{2}((1) - (2))$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

On peut vérifier que p est bien paire et que i est bien impaire.

L'analyse nous a donné une piste pour la question de l'existence, et nous a donné l'unicité de la décomposition annoncée.

Synthèse :

Soit f fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et p, i telles que

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

p est bien paire, et i est bien impaire, et $f = p + i$, ce qui montre l'existence de la décomposition annoncée.

On a bien l'existence et l'unicité de notre décomposition.

Un exemple vu plus tard dans l'année (si le colleur en demande un) :

$$e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$$

avec ch et sh respectivement « cosinus hyperbolique » et « sinus hyperbolique » :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Forme canonique et relations coefficients-racines pour un trinôme de degré 2

FORME CANONIQUE

Soit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

On factorise d'abord par a :

$$p(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Puis, pour mettre sous la forme canonique, on fait apparaître le début d'un carré :

$$p(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \right) = a \left(\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \right) \right)$$

en posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, on obtient la forme canonique d'un trinôme du second degré : $p(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

On sait alors que p admet un extremum en α , avec $p(\alpha) = \beta$.

RELATIONS COEFFICIENT-RACINE

Soit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$ dont on suppose qu'il possède deux racines réelles x_1 et x_2 .

alors $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Donc

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Ainsi, par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

D'où les relations coefficients-racines d'un trinôme du second degré.

Somme géométrique de raison q

Soit $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$.

- Si $q \neq 1$:

$$(1 - q) \sum_{k=m}^n q^k = \sum_{k=m}^n q^k - \sum_{k=m}^n q^{k+1} = \sum_{k=m}^n (q^k - q^{k+1}) = q^m \sum_{k=0}^{n-m} (q^k - q^{k+1}) \text{ (décalage)}$$

C'est une somme télescopique, donc au final :

$$(1 - q) \sum_{k=m}^n q^k = q^m (1 - q^{n-m+1}) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}}$$

- Si $q = 1$ le résultat est immédiat, c'est $\boxed{n - m + 1}$.

Théorèmes à citer

Posons P et Q deux propositions.

Double négation

la proposition $\neg\neg P$ est équivalente à P

Lois de De Morgan

Les lois de De Morgan sont les suivantes :

$$\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$$

Principe de contraposition

La proposition $P \implies Q$ est équivalente à $\neg Q \implies \neg P$.

Ainsi, on peut appliquer ce principe à un énoncé de la forme « $P \implies Q$ » en « $\neg Q \implies \neg P$ », ce qui est parfois plus facile.

Principe de double implication

La proposition $P \iff Q$ est équivalente à $P \implies Q \wedge Q \implies P$.

Ainsi, pour prouver $P \iff Q$, on peut prouver séparément $P \implies Q$ et $Q \implies P$

Négation et quantificateurs

Soit P un prédicat à une variable sur E .

La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \neg P(x)$ »

La négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \neg P(x)$ »

Autrement dit, pour nier une proposition, on doit changer les \exists en \forall , et les \forall en \exists .

Principe de récurrence

Soit P un prédicat sur \mathbb{N} . On suppose :

$$P(0) \text{ vraie} \quad (\text{initialisation})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1) \quad (\text{hérédité})$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ ($P(n)$ est vraie pour tout naturel n)