Calcul : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

D'un côté :

$$(1+t)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m}\binom{n+m}{p}t^p$$

De l'autre :

$$(1+t)^{n+m} = (1+t)^n(1+t)^m$$

$$\begin{aligned}(1+t)^n(1+t)^m &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}t^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{j}t^{k+j}\end{aligned}$$

Posons $p = k + j$. (Alors $j = p - k$)

On regroupe les termes en t^p :

$$(1+t)^n(1+t)^m = \sum_{p=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}t^p = (1+t)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m}\binom{n+m}{p}t^p$$

Ainsi, par identification, on a le résultat.

10 ▶

Définitions : Probabilité et probabilité conditionnelle

Probabilité

Une probabilité sur Ω, univers fini associé à une expérience aléatoire, est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que :

1. *$P(\Omega) = 1$*
2. *Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini.

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est dit espace probabilisable. Pour toute partie A de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ est la probabilité de l'évènement A.

15 ▶

Probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, la probabilité de A sachant B est :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

20 ▶

Énonce des différentes formules

PROBABILITÉS TOTALES

Soit $(A_1, ..., A_n)$ un système complet d'événements. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i)$$

20 ▶

PROBABILITÉS COMPOSÉES

Soit $(A_1, ..., A_n)$ une famille finie d'événements. Alors :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap ... \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1|A_2 \cap ... \cap A_n)P(A_2|A_3 \cap ... \cap A_n)...P(A_{n-1}|A_n)P(A_n) \end{aligned}$$

Plus synthétiquement :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\prod_{i=2}^{n} P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right) = \prod_{i=1}^{n-1} P\left(A_i | \bigcap_{j=i+1}^{n} A_j\right)P(A_n)$$

20 ▶

FORMULE DE BAYES

Soit $(A_1, ..., A_n)$ un système complet d'événement. Alors :

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)} = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A|A_k)P(A_k)}$$

22 ▶

Théorèmes à énoncer

Définition du langage des probabilité

- **Expérience (ou épreuve) aléatoire**

lancer un dé, prendre une boule dans une urne, etc.

- **Issue / éventualité**

résultat possible d'une expérience aléatoire

- **Univers** (Noté Ω)

ensemble des résultats possibles (ou issues)

- **Événement**

Sous-ensemble de résultats d'expériences (d'issues), c'est une partie de Ω

- **Événement certain**

Représenté par Ω

- **Événement impossible**

Représenté par $\varnothing$

- **Événement contraire de $\boldsymbol{A}$**

Noté $\overline{A}$ ou $\complement_\Omega A$

- **probabilité** : *Dans les questions de cours*