Questions de cours

Complémentaire d'une intersection, d'une réunion, double complémentaire

COMPLÉMENTAIRE

Énoncé

> *Soit A_i des parties d'un ensemble E, pour i parcourant un ensemble I, et B un ensemble. alors :*
>
> $$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_E A_i$$
>
> $$\complement_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement_E A_i$$

Démonstration : (avec des arguments ensemblistes)

Pour le complémentaire d'une union :
Dire que x n'appartient pas à $\bigcup_{i\in I} A_i$, c'est dire que x n'appartient à aucun des A. Donc il appartient au complémentaire de tous les A_i. C'est à dire que x appartient à $\bigcap_{i\in I} \complement_E A_i$, et réciproquement.
Pour le complémentaire d'une intersection :
Dire que x n'appartient pas à $\bigcap_{i\in I} A_i$, c'est dire que x n'appartient pas à au moins un A_i. Donc il appartient à son complémentaire. Ainsi, x appartient à $\bigcup_{i\in I} \complement_E A_i$ et réciproquement.

DOUBLE COMPLÉMENTARITÉ

Énoncé

> *Soit E un ensemble et $B \subset E$. Alors $\complement_E(\complement_E B) = B$*

Démonstration

Dire que x appartient à B, c'est dire qu'il n'appartient pas au complémentaire de B. C'est-à-dire que $x \in \complement_E(\complement_E B)$ et réciproquement.

Injectivité et composition

Définition

> *soit $f : E \to F$ f est* **injective** *si tout élément de F a au plus un antécédent dans E par f.*
>
> *Ainsi, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnu x a au plus une solution dans E.*

Composition

La composée de deux injections est injective
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ injectives. Soit $z \in G$, et supposons x_1, x_2 tels que $z = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Par injectivité de g, on obtient $f(x_1) = f(x_2)$ et par injectivité de f, on obtient $x_1 = x_2$.
Donc $g \circ f$ est injective.

Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
Supposons $g \circ f$ injective, et soit $y \in F$ tel qu'il existe x_1 et x_2 dans E tels que : $y = f(x_1) = f(x_2)$. On en déduit que : $g(y) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Par injectivité de $g \circ f$, $x_1 = x_2$.
Donc f est injective.

Surjectivité et composition

Définition

> *soit $f : E \to F$ f est* **surjective** *si tout élément de F a au moins un antécédent dans E par f.*
>
> *Ainsi, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a au moins une solution dans E.*

Composition

La composée de deux surjections est une surjection
Supposons $f : E \to F$ et $g : F \to G$ surjectives.
Alors $f(E) = F$ donc $g(f(E)) = g(F) = G$. Donc $g \circ f$ est surjective.

Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Supposons $g \circ f$ surjective (avec le même cadre que la démo d'avant)
Alors $f(E) \subset F$ donc $g(f(E)) = G \subset g(F) \subset G$
On en déduit que $g(F) = G$. Donc que g est surjective.

Définitions : majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum d'une partie

Théorème Définition

Soit F une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$.

- *F est* **majorée** *s'il existe a dans E tel que : $\forall x \in F, x \leqslant a$*
- *F est* **minorée** *s'il existe a dans E tel que : $\forall x \in F, x \geqslant a$*
- *F est* **bornée** *si F est majorée et minorée*
- *F admet un* **maximum** *s'il existe un majorant de F qui appartient à F.*

Il est alors unique, noté $\max F$.

- *F admet un* **minimum** *s'il existe un minorant de F qui appartient à F.*

Il est alors unique, noté $\min F$.

- *F admet une* **borne supérieure** *si l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément de F, noté $\sup F$. Si $\max F$ existe, alors $\max F = \sup F$*
- *F admet une* **borne inférieure** *si l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément de F, noté $\inf F$. Si $\min F$ existe, alors $\min F = \inf F$*

Théorèmes à citer

Injection, Surjection

Voir questions de cours

Bijection

* Caractérisation : *une application est* **bijective** *si elle est injective et surjective. Ainsi, soit $f : E \to F$ bijective, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$*
* *la composée de deux bijections est une bijection*
* *la composée de deux bijections est une bijection. Dans ce cas : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*
* *Si $g \circ f$ est bijective, alors f est bijective et g est surjective.*
* *Soit $f : E \to F, g : F \to E$. Alors si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ alors f et g sont bijectives, $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$. On retrouve aussi que si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi.*

Théorème des classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ forme une partition de E :

a) aucune classe d'équivalence n'est vide

b) deux classes d'équivalence sont disjointes ou égales

c) leur réunion est égale à E.

Ainsi, chaque élément x d'une classe d'équivalence C en est un représentant : $C = Cl(x)$