Questions de cours

Ensemble des points d'affixes z tels que $M(z), M(z^2), M(z^3)$ forment un triangle rectangle en $M(z)$.

En utilisant la condition d'orthogonalité :
La condition est réalisée lorsque :

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

L'ensemble des points recherchés est donc la droite verticale passant par $(-1, 0)$ privée de ce point.

$A(a)$ et $B(b)$ sont deux points distincts du plan complexe. Ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z-a}{z-b}$ soit réel, puis imaginaire.

Rapport réel : le point B est une solution, les autres sont tels que A, B et M soient distincts et alignés, c'est donc finalement la droite (AB) privée du point (A).
Rapport imaginaire pur : le point B est encore solution, les autres sont tels que $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux, c'est donc finalement le cercle de diamètre AB privé du point A. On peut aussi le retrouver en posant $z = \alpha + i\beta$ avec α, β réels.

Théorème de réduction d'une similitude directe

Théorèmes à citer

Théorème pour l'exponentielle complexe

> *Soit* $a \in \mathbb{C}^*$*. L'ensemble des solutions de l'équation :* $\exp(z) = a$ *d'inconnue* z *est :* $\{\ln(|a|) + i\arg(a) + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Formules de Moivre et Euler

> *Soit* $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$
>
> **Moivre :**
>
> $$e^{i\theta n} = \left(e^{i\theta}\right)^n, \text{ ou encore } (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
>
> **Euler :**
>
> $$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Théorème de description des racines n-ièmes d'un complexe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $z = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho > 0$ *un complexe non-nul.*

$*$ 0 *admet une unique racine n-ième qui est 0.*

$*$ z *possède* n *racines* n*-ièmes distinctes deux-à-deux :* $\sqrt[n]{\rho}\exp\big(i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\big)$ *pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$

En particulier : l'ensemble des racines n*-ièmes de l'unité est :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Alignement et Orthogonalité

Théorème de réduction d'une similitude

La réduction d'une similitude directe est déjà dans la partie questions de cours

Pour la similitude indirecte :