

Énoncé des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

(18 ►) Soit $f \in C_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$

PROPRIÉTÉS

(1) **Linéarité** : $\left| \begin{smallmatrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{[a,b]} f \end{smallmatrix} \right|$ est linéaire.

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\int_{[a,b]} (\Re f) + i \int_{[a,b]} (\Im f)$

(3) Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour f et $g \in C_{pm}^0$ sur $[a, b]$ (rappel) :

(a) **positivité** : si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$

(b) **croissance** : si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$

(c) **Critère de nullité** : « si f continue et à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f = 0$ si, et seulement si, f est nulle sur $[a, b]$ »

(4) **Inégalité de la moyenne** : $\left| \int_{[a,b]} f = 0 \right| \leq \left| \int_{[a,b]} |f| \right| \leq |b - a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

(5) **Relation de Chasles** : pour $c \in]a, b[$, $f \in C_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ si, et seulement si, ($f \in C_{pm}^0([a, c], \mathbb{K})$ et $f \in C_{pm}^0([c, b], \mathbb{K})$) et alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

Théorème de prolongement

(27 ►)

THÉORÈME DE PROLONGEMENT :

Soit f continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b]$. On suppose que f' admet une limite l en a . Alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $f'(a) = l$

PREUVE :

Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse il existe un voisinage de a sur lequel $|f'(x) - l| \leq \varepsilon$.

On applique l'inégalité des AF à $g : x \mapsto f(x) - f(a) - (x - a)l$, qui est C^0 sur $[a, b]$ et C^1 sur $]a, b[$ par théorème d'opération.

g vérifie $|g'(x)| = |f'(x) - l| \leq \varepsilon$ pour $x \in]a, b[$. On obtient alors, pour $x \in [a, b]$:

$$|g(x) - g(a)| = |f(x) - f(a) - (x - a)l| \leq \varepsilon |x - a|.$$

Ce qui montre bien que f est dérivable en a de dérivée $l = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ et qui assure la continuité de f' sur $[a, b]$.

Énoncés des trois formules de Taylor.

28 ►

FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

Soit f de classe C^{k+1} sur I , et soit a un point de I . Pour tout x de I :

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{k(x)} \text{ avec } R_{k(x)} = \frac{1}{k!} \int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt$$

29 ►

INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit f de classe C^{k+1} sur I , telle que $\forall x \in I, |f^{(k+1)}(x)| \leq M_{k+1}$. Pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| = |R_k(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} |x-a|^{k+1}$$

30 ►

FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Toute fonction $f \in C^k(I, \mathbb{K})$ admet en tout point $a \in I$ un développement limité à l'ordre k :

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + o_{x \rightarrow a} (x-a)^k$$

Formulaire de développements limités

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$