

Une boule ouverte est voisinage de chacun de ses points

ÉNONCÉ

Une partie \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 est ouverte si, et seulement si, \mathcal{O} est « Voisinage de chacun de ses points »

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{O}$$

DÉMONSTRATION

Par double implication :

* \Rightarrow : Soit \mathcal{O} un ouvert, si $\mathcal{O} = \emptyset$, on a le résultat.

Sinon, c'est une réunion de boules ouvertes. Soit un point $x \in \mathcal{O}$, alors x est dans une boule $B(a, r)$ incluse dans \mathcal{O} . Ainsi, il reste à montrer qu'une boule ouverte est voisinage de chacun de ses points.

Graphiquement, on voit qu'on peut espérer $B(x, r - \|x - a\|) \subset B(a, r)$.

Soit donc $y \in B(x, r')$, avec $r' = r - \|x - a\|$ note que $r' > 0$ puisque $x \in B(a, r)$ Alors :

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq r' + \|x - a\| = r$$

Ce qui donne bien $B(x, r - \|x - a\|) \subset B(a, r)$. \mathcal{O} est donc bien voisinage de x

* \Leftarrow : Soit \mathcal{O} une partie de \mathbb{R}^2 voisinage de chacun de ses points.

Cela signifie que pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe un rayon strictement positif r_x tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$.

En posant $\mathcal{O}' = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x)$, on a $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ par construction, et clairement $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ puisque tout $x \in \mathcal{O}$ appartient à \mathcal{O}' , donc finalement $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ ce qui montre bien que \mathcal{O} est une réunion de boules ouvertes.

D'après le principe de double implication, on a l'équivalence.

6 ►

Définition de la continuité ; les applications linéaires sont continues

Continuité

DÉFINITION

$f : D \subset \mathbb{R}^2$ où D est un ouvert de \mathbb{R}^2 , est continue en $a \in D$, si f admet $f(a)$ pour limite en a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Les applications linéaires (de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}) sont continues

DÉMONSTRATION

On a déjà vu dans le deuxième chapitre d'applications linéaires que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ prend la forme : $(x_1, x_2) \mapsto \lambda x_1 + \mu x_2$, où λ, μ sont deux éléments de la matrice représentative de l'application sur la base canonique, ou encore ses coordonnées sur la base des formes coordonnées relativement à la base canonique.

Pour $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ et $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ dans \mathbb{R}^2 , il vient :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |\lambda(x_1 - a_1) + \mu(x_2 - a_2)| \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \|x - a\| \\ &\leq \text{Max}(|\lambda|, |\mu|) \sqrt{2} \|x - a\| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec $u = (\lambda, \mu), v = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)$).

Ainsi f est k -lipschitzienne donc (uniformément) continue

* en particulier les formes coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

11 ►

Énoncé des définitions des dérivées partielles et dérivée partielle suivant un vecteur, théorème-définition du gradient

DÉFINITIONS

Dérivées partielles :

* En un point $a = (a_1, a_2)$

Première dérivée partielle de f en a :

c'est la dérivée, si elle existe, de $f_{a,1}$ en a_1 autrement dit, si la limite existe :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \partial_1 f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a)}{h}$$

de même pour f_2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \partial_2 f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a)}{h}$$

* En un vecteur v

Soit v un vecteur non-nul de \mathbb{R}^2

f admet en $a \in D$ une dérivée partielle suivant le vecteur v , noté $\partial_v f(a)$, quand la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \partial_v f(a)$$

Gradient :

Soit f de classe C^1 sur D . En tout point a de D et pour tout $h = (h_1, h_2)$ dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + o_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}}(\|h\|) \\ &= f(a) + (\nabla f(a) | h) + o_{x \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}}(\|h\|) \end{aligned}$$

Où on note $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$ l'unique vecteur de \mathbb{R}^2 vérifiant cette relation, appelé **gradient** de f en a

$\| \cdot \|$ est C^1 sur \mathbb{R}^2 privé de l'origine, mais pas sur \mathbb{R}^2 , gradient
DÉMONSTRATIONS

Posons $f : x \mapsto \|x\|$ définie sur \mathbb{R}^2 ,

en tout point (x_1, x_2) distinct de $(0, 0)$, $\partial_1 f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\|x\|}$ et $\partial_2 f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\|x\|}$

ces deux fonctions sont continues sur \mathbb{R}^2 privé de l'origine, par théorème d'opérations, donc f y est de classe C^1 . En $0_{\mathbb{R}^2}$, f est nulle et il n'y a pas de dérivée première partielle : les limites à gauche et à droite en 0 des rapports de définition sont distinctes (-1 à gauche, 1 à droite). Donc f n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Pour le gradient, on prend ce que l'on a trouvé dans la démonstration :

$$\nabla(\| \cdot \|)(a) = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{\|a\|} \\ \frac{a_1}{\|a\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|a\|} a$$

(► **Pratiques 2 et 3**)

Énoncé du théorème d'opérations sur les fonctions C^1 (gradients d'une somme, d'un produit, d'une composée si définis, dont règle de la chaîne)

THÉORÈME D'OPÉRATIONS

a) L'ensemble $C^1(D, \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur D ouvert de \mathbb{R}^2 , muni de la somme et de la multiplication externe par un réel, forme un espace vectoriel sur \mathbb{R} stable par produit

b) Soit f de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} et g de classe C^1 sur un ouvert V de \mathbb{R} contenant $f(U)$ (et à valeurs réelles).

Alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U et pour tout a dans U : $\nabla(g \circ f)(a) = g'(f(a))\nabla f(a)$

c) **RÈGLE DE LA CHAÎNE** : Si u et v sont de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R} et g sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 contenant $(u, v)(U)$ alors $h : t \mapsto g(u(t), v(t))$ est de classe C^1 sur U et pour tout a de U :

$$h'(a) = \partial_1 g(u(a), v(a)) \cdot u'(a) + \partial_2 g(u(a), v(a)) \cdot v'(a) = \left(\nabla g(u(a), v(a)) \mid \begin{pmatrix} u'(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} \right)$$

(On peut le voir comme : $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{dv}{dt}$ évaluée en $t = a$, on voit bien d'où vient le nom « règle de la chaîne »)