Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 12 - Grafos y árboles

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Soluciones

Ejercicio 1

Demuestre por inducción fuerte que todo árbol $T = (V, E)$ es 2-coloreable.

Vamos a realizar inducción sobre la cantidad de vertices en $|V|$ en el árbol.

Caso base: El árbol de un vertice es trivialmente coloreable. Solo elegimos un color cualquiera para el único nodo que tiene.

Hipótesis Inductiva: Asumimos que todo árbol de tamaño $|V| \leq n$ es 2-coloreable.

Tésis Inductiva: Tomamos un árbol cualquiera $T = (V, E)$ de tamaño $|V| = n + 1$.

- Todos los hijos van a reprentar raices de árboles de tamaño menor, ya que tienen por lo menos un vertice menos. Además, estos arboles van a estar desconectados, ya que en otro caso se formaria un ciclo en el arbol original.
- Gracias a la HI, los sub-árboles tienen una 2-coloración y, debido a que son árboles separados, podemos alternar sus coloraciones para que todas sus raices tenga la misma coloracion.
- Finalmente, podemos colorear la raíz original de color opuesto a sus hijos y obtenemos una 2-coloracion para el árbol original.

Ejercicio 2

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $|V| = |E|$. Demuestre que si ningún vértice de G tiene grado 0 o 1, entonces todos los vértices de G tienen grado 2.

b) Sea $n \geq 1$. Un n-*cubo* es un grafo $G_n = (V_n, E_n)$ donde:

- $V_n = \{0, 1\}^n$; vale decir, cada vértice es una n-tupla de 0s y 1s.

  Note que cada n-tupla posible es un vértice de G_n.

- Dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada.

Demuestre que G_n es Euleriano si y solo si n es par.

Solución:

a) Sea G un grafo tal que $|V| = |E| = n$ y supongamos que ningún vértice de G tiene grado 0 o 1, es decir:

$$\forall v \in V,\ \delta(v) \geq 2 \tag{1}$$

Por contradicción, supongamos que todos los vértices tienen grado 2 excepto un $v_i \in V$. Por (1), debe cumplirse que

$$\delta(v_i) = 2 + k, \quad k > 0$$

Si sumamos los grados de todos los vértices en V:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = \delta(v_1) + \ldots + \delta(v_i) + \ldots + \delta(v_n) = 2 + \ldots + (2 + k) + \ldots + 2 = 2n + k$$

Pero por el *handshaking lemma* sabemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| = 2n < 2n + k$$

lo que es una contradicción.

Concluimos entonces que todos los vértices en G tienen grado 2.

b) Por definición, tenemos que para un n-*cubo* $G_n = (V_n, E_n)$, su conjunto de vértices V_n corresponde a todas las n-tuplas de 0s y 1s. Si tomamos una n-tupla cualquiera $(a_1, \ldots, a_n)$, la cantidad de n-tuplas con las que difiere en exactamente una coordenada es n: podemos tomar cada a_i y dar vuelta su valor. Luego, todos los vértices de V_n tienen grado n. Formalmente, demostraremos por inducción simple sobre n que todos los vértices de un n-*cubo* tienen grado n:

BI: Para G_1 tenemos que $V_1 = \{0, 1\}$. Estos dos vértices son adyacentes, pues difieren en su única coordenada, y luego todos los vértices de G_1 tienen grado 1.

HI: Supongamos que todos los vértices de G_n tienen grado n.

TI: Por demostrar que todos los vértices de $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$ tienen grado $n + 1$.

Sabemos que todos los vértices de V_{n+1} terminan en 0 o en 1. Tomemos los vértices que terminan en 0:

$$V_{n+1}^0 = \{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in V_{n+1} \mid a_{n+1} = 0\}$$

Sea $G_{n+1}^0 \subseteq G_{n+1}$ el subgrafo de G_{n+1} inducido por V_{n+1}^0. Es claro que G_{n+1}^0 es isomorfo a G_n (pues podemos obviar la última coordenada), y luego por HI los vértices en G_{n+1}^0 tienen grado n. Cada uno de estos vértices tiene exactamente un vecino más en G_{n+1} (la misma tupla terminada en 1), y por lo tanto todos los vértices en V_{n+1}^0 tienen grado $n + 1$.

Análogamente podemos demostrar el mismo resultado para V_{n+1}^1, con lo que concluimos que todos los vértices en G_{n+1} tienen grado $n + 1$.

Finalmente, como sabemos que un grafo es Euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par, concluimos que un *n-cubo* G_n es Euleriano si y sólo si n es par.

Ejercicio 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v, denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v, mientras que el ancho de G, denotado como $A(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices. Demuestre que si $A(G) \geq 4$ entonces $A(\bar{G}) \leq 2$.

Solución

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $A(G) \geq 4$. Denotaremos por $d(x, y)$ a la distancia entre los vértices x e y en G y $\bar{d}(x, y)$ a la distancia entre x e y en $\bar{G}$.

Sean u, v los vértices de inicio y fin del camino que representa al ancho de G. Demostraremos que para todo par de vértices $x, y \in V$ se tiene que $\bar{d}(x, y) \leq 2$.

Consideremos $x, y \in V$ dos vértices cualquiera. En primer lugar notemos que ni x ni y pueden ser adyacentes con u y v a la vez, ya que formarían un camino de largo 2 (por ejemplo $u - x - v$) y disminuirían el ancho de G. Ahora tenemos los siguientes casos: - $xy \notin E$: Por definición de complemento $xy \in \bar{E}$ y por lo tanto $\bar{d}(x, y) = 1$. - $xy \in E$: Dado que existe una arista $x - y$, no puede darse el caso en que x e y sean adyacentes a u y a v por separado. Esto porque se generaría un ciclo y por ende un camino $u - x - y - v$ de largo 3 , con lo que disminuiría el ancho de G. Ahora tenemos 2 casos: - u y v no son adyacentes ni a x ni a y en G : Dado que $xu, yu \notin E$, en $\bar{G}$ obtenemos el camino $x - u - y$, por ende $\bar{d}(x, y) = 2$. - Solo u es adyacente a x o y en G. En este caso $vx, vy \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - v - y$ en $\bar{G}$ de largo 2 . - Solo v es adyacente a x o y en G. En este caso $ux, uy \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - u - y$ en $\bar{G}$ de largo 2 .

Como no tenemos más casos posibles, y cada caso demostramos que $\bar{d}(x, y) \leq 2$, concluimos que $A(\bar{G}) \leq 2$.