Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 11 - Complejidad Computacional

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Ejercicios

Ejercicio 1: Complejidad y ecuaciones de recursividad

Considere el siguiente algoritmo,

Algorithm 1 PowerAlgorithm

Data: x, n
Result: x^n
if $n = 1$ **then**
  return x
end if
$n_{\text{half}} \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
$Powhalf \leftarrow \text{PowerAlgorithm}(x, n_{\text{half}})$
$Finalpow \leftarrow Powhalf \times Powhalf$
if $n \bmod 2 = 1$ **then**
  return $Finalpow \times x$
else
  return $Finalpow$
end if

Determine su ecuación de recurrencia y complejidad.

Solución: Vamos a analizar la cantidad de multiplicaciones para plantear la ecuación de recurrencia. Como se puede observar, a raíz de n surgen tres casos posibles, los que se resumen en la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Para analizar la complejidad del algoritmo, podemos observar que el mejor caso viene dado cuando n es par, i.e., $n = 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Desarrollando la ecuación de recurrencia,

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 \\ T(2^k) &= T(2^{k-1}) + 1 \\ T(2^k) &= T(2^{k-2}) + 2 \\ T(2^k) &= T(2^{k-3}) + 3 \\ &\vdots \\ T(2^k) &= T(2^{k-k}) + k \\ T(2^k) &= T(1) + k \\ T(2^k) &= k \end{aligned}$$

Luego, como $T(2^k) = k$ y $k = \log_2(n)$ obtenemos que $T(n) = \log_2(n)$.

Para el peor caso tenemos que $n = 2^k - 1$ con $k \in \{2, 3, \dots\}$. Por lo cual, realizando el mismo procedimiento de antes tenemos que,

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2 \\ T(2^k - 1) &= T(2^{k-1} - 1) + 2 \\ T(2^k - 1) &= T(2^{k-2} - 1) + 4 \\ T(2^k - 1) &= T(2^{k-3} - 1) + 6 \\ &\vdots \\ T(2^k - 1) &= T(2^{k-(k-1)} - 1) + 2(k-1) \\ T(2^k - 1) &= T(1) + 2(k-1) \end{aligned}$$

Luego, como $n = 2^k - 1$ tenemos que $k = \log_2(n+1)$, obteniendo así que $T(n) = 2\log_2(n + 1) - 2$. Luego, en el peor caso tenemos que,

$$T(n) = 2\log_2(n+1) - 2$$

Y como $\log_2$ es creciente, para $n \geq 3$, $\log_2(n+1) \leq \log_2(n+n) = \log_2(2n) = 1 + \log_2(n)$. Obteniendo así del peor caso que,

$$T(n) \leq 2(1 + \log_2(n)) - 2 = 2\log_2(n)$$

Ahora, también demostraremos que $T(n) \geq \log_2(n)$ para todo $n \geq 3$. Planteamos la desigualdad:

$$2\log_2(n+1) - 2 \geq \log_2(n)$$

Reuniendo todos los términos en un solo lado, obtenemos:

$$2\log_2(n+1) - \log_2(n) \geq 2$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se puede reescribir la desigualdad como:

$$\log_2\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right) \geq 2$$

$$\log_2\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right) \geq \log_2(2^2)$$

Como $\log_2$ es creciente, tenemos que:

$$\frac{(n+1)^2}{n} \geq 2^2 = 4$$

Desarrollando el numerador:

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{n} = n + 2 + \frac{1}{n}$$

Entonces, la desigualdad queda como:

$$n + 2 + \frac{1}{n} \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad n + \frac{1}{n} \geq 2$$

La desigualdad $n + \frac{1}{n} \geq 2$ es válida para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, tambbién es válida para todo $n \geq 3$

Por lo tanto, se concluye que:

$$T(n) = 2\log_2(n+1) - 2 \geq \log_2(n) \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

Con esto, ya que tenemos $T(n)$ acotado por ambos lados, utilizando la definición de Θ, considerando $a = 1$, $b = 2$, $n_0 = 3$, obtenemos que para todo $n \geq n_0$,

$$a\log_2(n) \leq T(n) \leq b\log_2(n)$$

Por lo tanto,

$$T(n) \in \Theta(\log(n))$$

Ejercicio 2: ecuación de recurrencia

Por definición de O asintótica, tenemos que $g \in O(f)$ si y solo si:

$$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \leq c \cdot f(n))$$

Demostraremos por inducción que $T(n) \in O(n^2(\log n)^2)$. Usaremos logaritmo en base 2, pues es el que aparece en la ecuación de recurrencia. Debemos encontrar $c \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que:

$$T(n) \leq c \cdot n^2(\log_2(n))^2$$

Vamos a inspeccionar los primeros valores de $T(n)$, y de esta forma trataremos de inferir ambas constantes. Reemplazando en la ecuación de recurrencia y comparando con los valores de $n^2(\log_2(n))^2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&T(1) = 1 && 1^2(\log_2(1))^2 = 0 \\
&T(2) = 4 \cdot T(1) + 2^2 \cdot \log_2(2) = 4 + 4 \cdot 1 = 8 && 2^2(\log_2(2))^2 = 4 \\
&T(3) = 4 \cdot T(1) + 3^2 \cdot \log_2(3) \approx 4 + 9 \cdot 1{,}6 = 18{,}4 && 3^2(\log_2(3))^2 \approx 22{,}6 \\
&T(4) = 4 \cdot T(2) + 4^2 \cdot \log_2(4) = 4 \cdot 8 + 16 \cdot 2 = 64 && 4^2(\log_2(4))^2 = 64 \\
&T(5) = 4 \cdot T(2) + 5^2 \cdot \log_2(5) \approx 4 \cdot 8 + 25 \cdot 2{,}3 = 89{,}5 && 5^2(\log_2(5))^2 \approx 134 \\
&T(6) = 4 \cdot T(3) + 6^2 \cdot \log_2(6) \approx 4 \cdot 18{,}4 + 36 \cdot 2{,}6 = 167{,}2 && 6^2(\log_2(6))^2 \approx 240
\end{aligned}$$

Para $n \geq 3$ se cumple que si $c = 1$, entonces $T(n) \leq c \cdot n^2(\log_2(n))^2$. Demostraremos entonces por inducción fuerte que:

$$T(n) \leq n^2(\log_2(n))^2 \quad \forall n \geq 3$$

Prueba por inducción fuerte

Base de inducción (BI): Como la propiedad no se cumple para $T(1)$ y $T(2)$, todos los casos que involucren estos subcasos en la ecuación de recurrencia serán casos base. Dado lo anterior, los casos base son $n \in \{3, 4, 5\}$. Como vimos antes, para estos valores se cumple la propiedad.

Hipótesis de inducción (HI): Supongamos que para todo $k \in \{3, ..., n-1\}$ se cumple la propiedad.

Paso inductivo (TI): Demostrar que $T(n) \leq n^2(\log_2(n))^2$ para $n \geq 6$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 \log_2(n) \\
&\leq 4 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \cdot (\log_2(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor))^2 + n^2 \log_2(n) \quad \text{(por HI)} \\
&\leq 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 + n^2 \log_2(n) \\
&= n^2 \left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 + n^2 \log_2(n) \\
&= n^2 \left((\log_2(n) - \log_2(2))^2 + \log_2(n)\right) \\
&= n^2 \left((\log_2(n) - 1)^2 + \log_2(n)\right) \\
&= n^2 \left(\log_2(n)^2 - 2\log_2(n) + 1 + \log_2(n)\right) \\
&= n^2 \left(\log_2(n)^2 - \log_2(n) + 1\right) \\
&\leq n^2(\log_2(n))^2 \quad \text{ya que } -\log_2(n) + 1 \leq 0 \text{ para } n \geq 3
\end{aligned}
$$

Con esto hemos demostrado que para todo $n \geq 3$ se cumple que $T(n) \leq n^2(\log_2(n))^2$, por lo que:

$$T(n) \in O(n^2(\log n)^2)$$

Observación

Este ejercicio también se podía demostrar utilizando otro c y su n_0 correspondiente, pero el procedimiento de la inducción es análogo al caso anterior. Lo importante es fijar el c y el n_0 antes de empezar la inducción.

Ejercico 3

Demostraremos por inducción fuerte que para todo $n \geq 3$, se cumple $T(n) \leq 3n\log(n-1)$. Notar que esto implica que para todo $n \geq 3$, se cumple $T(n) \leq 3n\log(n)$ (ya que la función log es no decreciente), y luego esto demuestra que $T \in O(n \log n)$ donde las constantes en la definición de O serían $n_0 = 3$ y $c = 3$.

CB: Los casos bases son $n \in \{3, 4, 5\}$, ya que en esos casos la recurrencia depende de $T(1)$ y $T(2)$. - Para $n = 3$, tenemos $T(3) = T(1) + T(2) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \log(2) = 9$. - Para $n = 4$, tenemos $T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \leq 3 \cdot 4 \cdot \log(3) \approx 19,019$. - Para $n = 5$, tenemos $T(5) = T(2) + T(3) + 5 = 4 + 8 + 5 = 17 \leq 3 \cdot 5 \cdot \log(4) = 30$.

HI: Sea $n \geq 6$. Para todo $k \in \{3, \ldots, n-1\}$, entonces $T(k) \leq 3k \log(k-1)$.

TI: Hay que demostrar que $T(n) \leq 3n \log(n-1)$. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \\
&\leq 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) + 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \log\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + n \quad (\text{ HI }) \\
&\leq 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \log\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + n \quad \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ y log es no decreciente }\right) \\
&= 3n \log\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + n \quad \left(\text{ factorizamos y } n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \\
&\leq 3n \log\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) + n \quad \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \text{ y log no decreciente }\right) \\
&= 3n \log\left(\frac{n-1}{2}\right) + n \\
&= 3n(\log(n-1) - \log(2)) + n \\
&= 3n \log(n-1) - 2n \\
&\leq 3n \log(n-1)
\end{aligned}
$$