Algoritmos

Clase 18

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Definiendo los algoritmos

Algoritmos iterativos

Algoritmos recursivos

Introducción a la complejidad

Epílogo

Hacia la noción de algoritmo

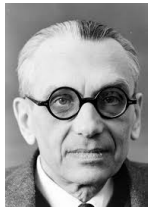
Queremos formalizar la noción de **algoritmo** (¿por qué?)

Nos interesa la idea de **computación efectiva**

- En el sentido de que *efectivamente puede realizarse*

¿Podemos definir formalmente esta noción?

Intentos de formalización: S. XX



Funciones parcialmente recursivas
por K. Gödel, J. Herbrand, S. Kleene.

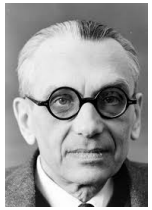
λ-calculus
por Alonzo Church.

Sistemas de Post
por Emil Post.

Máquinas de Turing
por Alan Turing.

. . .

Intentos de formalización: S. XX



Funciones parcialmente recursivas
por K. Gödel, J. Herbrand, S. Kleene.

λ-calculus
por Alonzo Church.

Sistemas de Post
por Emil Post.

Máquinas de Turing
por Alan Turing.

. . .

Spoiler: Todos estos métodos sirven y son equivalentes

¿Qué es un algoritmo?

Estos métodos capturan estas nociones “intuitivas”

¿Qué es un algoritmo?

Estos métodos capturan estas nociones "intuitivas"

- Algoritmos como secuencias de pasos
- Con precondiciones
- Condiciones de término

Esencialmente, un **algoritmo** es un conjunto de pasos que resuelven un **problema**

Para este curso nos basta con esta intuición

Algoritmos

Diremos entonces que un **algoritmo** es un método para convertir un **INPUT** válido en un **OUTPUT**. A estos métodos les exigiremos ciertas propiedades:

- **Finitud**: el algoritmo está compuesto por un conjunto finito de instrucciones.
- **Precisión**: cada instrucción debe ser planteada de forma precisa y no ambigua.
- **Determinismo**: cada instrucción tiene un único comportamiento que depende sólo del input.


VEGAN
CHICKPEAS CURRY

Algoritmos

El análisis de algoritmos es una disciplina de la Ciencia de la Computación que tiene dos objetivos:

- Estudiar cuándo y por qué los algoritmos son **correctos** (es decir, hacen lo que dicen que hacen).
- Estimar la cantidad de **recursos** computacionales que un algoritmo necesita para su ejecución.

De esta manera, podemos, por ejemplo:

- Entender bien los algoritmos, para luego reutilizarlos total o parcialmente.
- Determinar qué mejorar de un algoritmo para que sea más eficiente.

Algoritmos

Usaremos pseudo-código para escribir algoritmos.

- Instrucciones usuales como **if**, **while**, **return**...
- Notaciones cómodas para arreglos, conjuntos, propiedades lógicas, etc.

Consideraremos que los algoritmos tienen:

- **Precondiciones:** representan el input del programa.
- **Postcondiciones:** representan el output del programa, lo que hace el algoritmo con el input.

Correctitud de algoritmos

Queremos determinar cuándo un algoritmo es correcto; es decir, que hace lo que dice que hace.

Definición

Un algoritmo es **correcto** si para todo INPUT válido, el algoritmo **se detiene** y produce un **OUTPUT correcto**.

Correctitud de algoritmos

Queremos determinar cuándo un algoritmo es correcto; es decir, que hace lo que dice que hace.

Definición

Un algoritmo es **correcto** si para todo INPUT válido, el algoritmo **se detiene** y produce un **OUTPUT correcto**.

Entonces, ¿cuándo es incorrecto?

Definición

Un algoritmo es **incorrecto** si existe un INPUT válido para el cual el algoritmo **no se detiene** o produce un **OUTPUT incorrecto**.

Outline

Definiendo los algoritmos

Algoritmos iterativos

Algoritmos recursivos

Introducción a la complejidad

Epílogo

Algoritmos iterativos

Debemos demostrar dos cosas:

- **Corrección parcial:** si el algoritmo se detiene, se cumplen las postcondiciones.
- **Terminación:** el algoritmo se detiene.

Algoritmos iterativos

Debemos demostrar dos cosas:

- **Corrección parcial:** si el algoritmo se detiene, se cumplen las postcondiciones.
- **Terminación:** el algoritmo se detiene.

Nos preocupamos sólo de los *loops* de los algoritmos (¿por qué?).

Algoritmos iterativos

Debemos demostrar dos cosas:

- **Corrección parcial:** si el algoritmo se detiene, se cumplen las postcondiciones.
- **Terminación:** el algoritmo se detiene.

Nos preocupamos sólo de los *loops* de los algoritmos (¿por qué?).

Estos loops tienen una condición G que determina si se siguen ejecutando:

while(G)

...

end

Algoritmos iterativos

Para demostrar corrección parcial, buscamos un **invariante** $\mathcal{I}(k)$ para los loops:

- Una propiedad $\mathcal{I}$ que sea verdadera en cada paso k de la iteración.
- Debe relacionar a las variables presentes en el algoritmo.
- Al finalizar la ejecución, debe asegurar que las postcondiciones se cumplan.

Algoritmos iterativos

Una vez que encontramos un invariante, demostramos la corrección del loop inductivamente:

- **Base:** las precondiciones deben implicar que $\mathcal{I}(0)$ es verdadero.
- **Inducción:** para todo natural $k > 0$, si G e $\mathcal{I}(k)$ son verdaderos antes de la iteración, entonces $\mathcal{I}(k+1)$ es verdadero después de la iteración.
- **Corrección:** inmediatamente después de terminado el loop (i.e. cuando G es falso), si $k = N$ e $\mathcal{I}(N)$ es verdadero, entonces la postcondiciones se cumplen.

Y para demostrar terminación, debemos mostrar que existe un k para el cual G es falso.

Algoritmos iterativos

Ejercicio

Escriba un algoritmo que multiplique dos números naturales (sin usar la multiplicación):

- **Pre:** $n, m \in \mathbb{N}$.
- **Post:** $p = n \cdot m$.

Demuestre que su algoritmo es correcto.

(Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 3.1.1, Teorema 3.1.1, páginas 97 a 99.)

Algoritmos iterativos

Demostración

Proponemos el siguiente algoritmo iterativo

input : $n, m \in \mathbb{N}$
output: $p = n \cdot m$

`Multipy`(n, m)**:**

```
1  z ← 0
2  w ← m
3  while w ≠ 0 do
4      z ← z + n
5      w ← w − 1
6  return z
```

Ahora debemos determinar un invariante para el bloque **while**.

Algoritmos iterativos

Demostración

input : $n, m \in \mathbb{N}$
output: $p = n \cdot m$

`Multipy`(n, m)**:**

1 $z \leftarrow 0$
2 $w \leftarrow m$
3 **while** $w \neq 0$ **do**
4 $z \leftarrow z + n$
5 $w \leftarrow w - 1$
6 **return** z

Si $n = a$ y $m = b$, luego de la iteración i se cumple

i	n	m	z	w
0	a	b	0	b
1	a	b	a	$b-1$
2	a	b	$2a$	$b-2$
3	a	b	$3a$	$b-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b	a	b	$b \cdot a$	0

Observemos que

- Existen en total b iteraciones
- Al término de cada una se cumple

$$z_i = n \cdot (m - w_i)$$

Algoritmos iterativos

Demostración

Demostraremos la **corrección parcial del algoritmo** con el siguiente invariante:

$$P(i) \quad := \quad \text{Al término de la iteración } i\text{, se cumple } z_i = n \cdot (m - w_i)$$

Usamos inducción simple sobre el número de iteraciones.

- **CB:** $P(0)$ corresponde al estado previo a la primera iteración. Se tiene

$$z_0 = 0 = n(m - m) = n(m - w_0)$$

- **HI:** Supongamos que $P(i)$ es cierta.
- **TI:** Demostraremos que $P(i+1)$ es cierta.

Algoritmos iterativos

Demostración

- **TI:** Demostraremos que $P(i+1)$ es cierta.

  Tenemos que

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + n && \text{(línea 4 de } \texttt{Multiply}\text{)} \\ &= n \cdot (m - w_i) + n && \text{(hipótesis inductiva)} \\ &= n \cdot (m - w_i + 1) && \text{(factorización)} \\ &= n \cdot (m - (w_i - 1)) && \text{(factorización)} \\ &= n \cdot (m - w_{i+1}) && \text{(línea 5 de } \texttt{Multiply}\text{)} \end{aligned}$$

Esto demuestra que $P(i)$ es cierta para cada iteración, por lo que `Multiply` cumple corrección parcial.

Ahora debemos probar que `Multiply` termina.

Algoritmos iterativos

Demostración

Observemos que el bloque **while** termina cuando $w = 0$. En la iteración 0, $w = m$ natural y en cada iteración se reduce en 1. Es decir, los valores de w forman una sucesión decreciente de naturales, que en m iteraciones llega a $w = 0$. Por lo tanto, el algoritmo termina.

A partir de estos resultados, `Multiply` es correcto. □

Outline

Definiendo los algoritmos

Algoritmos iterativos

Algoritmos recursivos

Introducción a la complejidad

Epílogo

Algoritmos recursivos

En el caso de los algoritmos recursivos, no necesitamos dividir la demostración en corrección parcial y terminación (¿por qué?).

- Basta demostrar por inducción la propiedad (corrección) deseada.
- En general, la inducción se realiza sobre el tamaño del input.

Ejercicio

Escriba un algoritmo recursivo que encuentre el máximo elemento de un arreglo:

- **Pre:** un arreglo $A = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$, y un natural n (largo del arreglo).
- **Post:** $m = \max(A)$.

Demuestre que el algoritmo es correcto.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 3.1.1, página 101.

Algoritmos recursivos

Demostración

Proponemos el siguiente algoritmo recursivo

input : Arreglo $A = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$ y largo $n \geq 1$
output: $m = \max(A)$

`RecMax`(A, n)**:**

```
1    if n = 1 then
2        return a_0
3    else
4        k ← RecMax(A, n − 1)
5        if a_{n−1} ≥ k then
6            return a_{n−1}
7        else
8            return k
```

Observemos que el llamado `RecMax`(A, i) solo toma en cuenta los primeros i elementos de A, es decir, el tramo $[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]$.

Algoritmos recursivos

Demostración

Demostraremos la **corrección del algoritmo** con el siguiente invariante sobre número de elementos considerados:

$$P(i) \quad := \quad \text{El valor retornado por } \texttt{RecMax}(A, i) \text{ cumple } \texttt{RecMax}(A, i) \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$$

Usamos inducción simple sobre el número de elementos considerados.

- **CB:** $P(1)$ considera solo el tramo $[a_0]$ y su retorno cumple $a_0 \geq a_0$.
- **HI:** Supongamos que $P(i)$ es cierta, i.e.

$$\texttt{RecMax}(A, i) \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$$

- **TI:** Demostraremos que $P(i+1)$ es cierta, i.e.

$$\texttt{RecMax}(A, i+1) \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$$

Algoritmos recursivos

Demostración

- **TI:** Demostraremos que $P(i+1)$ es cierta, i.e.

$$\texttt{RecMax}(A, i+1) \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$$

Supongamos que se ejecutó $\texttt{RecMax}(A, i+1)$. Dado que el número de elementos es estrictamente mayor a 1, no estamos en el caso base y se hace un llamado a $\texttt{RecMax}(A, i)$.

Por **HI** dicho llamado es correcto y queda guardado en k, i.e.

$$k \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$$

Este valor puede cumplir uno de dos casos en el **if** de la línea 5:

- Cumple $a_i \geq k$. Luego, por transitividad, $a_i \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$ y $\texttt{RecMax}(A, i+1)$ sería el máximo de $[a_0, ..., a_i]$.
- Cumple $a_i < k$. En tal caso, $k \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$ y el retorno $\texttt{RecMax}(A, i+1)$ sería el máximo de $[a_0, ..., a_i]$.

Por inducción, queda demostrado que $\texttt{RecMax}(A, n)$ es correcto. □

Outline

Definiendo los algoritmos

Algoritmos iterativos

Algoritmos recursivos

Introducción a la complejidad

Epílogo

Outline

Definiendo los algoritmos

Algoritmos iterativos

Algoritmos recursivos

Introducción a la complejidad

Epílogo

Objetivos de la clase

- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor
- Comprender concepto de algoritmo
- Identificar las componentes del análisis de algoritmos
- Demostrar correctitud de algoritmos