Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Extra Examen

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Pregunta 1: Relaciones y Funciones

Sean A y B conjuntos y $(B, \preceq)$ un orden parcial. Considere el siguiente conjunto:

$$\phi(A, B) = \{f \mid f : A \to B\}$$

Además definimos la relación binaria $\preceq_\phi$ sobre $\phi(A, B)$ como:

$$f \preceq_\phi g \text{ si y solo si } f(a) \preceq g(a) \quad \forall a \in A$$

Demuestre que $(\phi(A, B), \preceq_\phi)$ es un orden parcial.

Pregunta 2: Teoría de Números

1. Demuestre que un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus digitos es divisible por 3.
2. Demuestre que para cada número primo $p \geq 6$, se cumple que $p^2 - 1$ o $p^2 + 1$ es multiplo de 10.

Pregunta 3: Algoritmos y grafos

a) El número de operaciones de un algoritmo viene dado por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n-1) + n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Resuelva la ecuación y determine la complejidad del algoritmo.

b) Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que un grafo $G' = (V', E')$ es subgrafo isomorfo de G si y solo si se cumple que existe un grafo $H = (V_H, E_H)$ tal que:

- H es subgrafo de G, es decir, $V_H \subseteq V$, $E_H \subseteq E$ y $E_H \subseteq V_H \times V_H$.
- H es isomorfo a G'.

Demuestre que si G_1 es subgrafo isomorfo de G_2 y G_2 es subgrafo isomorfo de G_1, entonces $G_1 \cong G_2$.

Pregtunta 4: Logica de Predicados

a) (3 ptos.) En clases vimos que

$$\forall x(Q(x) \vee P(x)) \not\equiv \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

¿Es cierta la siguiente afirmación?

$$\forall x \forall y(Q(x) \vee P(y)) \equiv \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

Demuestre o dé un contraejemplo. b) (**3** ptos.) Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es satisfacible si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es inconsistente. Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$