Teorema de Cantor

Clase 17

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Introducción

Conjuntos no enumerables

Teorema de Cantor

Epílogo

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Anteriormente, mostramos la existencia de varios conjuntos infinitos enumerables:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{P}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathcal{L}(P)$
- $\mathbb{N}^n$
- $\ldots$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Anteriormente, mostramos la existencia de varios conjuntos infinitos enumerables:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{P}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathcal{L}(P)$
- $\mathbb{N}^n$
- ...

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Objetivos de la clase

- Demostrar la existencia de conjuntos no enumerables
- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor

Outline

Introducción

Conjuntos no enumerables

Teorema de Cantor

Epílogo

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Teorema

El intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Demostración. Por contradicción, supongamos que $(0,1)$ es enumerable.

Entonces existe una lista infinita de los reales en $(0,1)$:

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

donde cada real en $(0,1)$ aparece exactamente una vez.

Notemos que cada r_i es un número decimal de la forma

$$r_i = 0, d_{i0} d_{i1} d_{i2} d_{i3} \ldots, \text{ con } d_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	$\boxed{d_{00}}$	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	$\boxed{d_{11}}$	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	$\boxed{d_{22}}$	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	$\boxed{d_{33}}$	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	$\boxed{d_{44}}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Para cada $i \geq 0$, definimos $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Para cada $i \geq 0$, definimos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} \neq 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$

¿Aparece r en la lista?

- ¿$r = r_0$? No, porque difieren en el primer dígito decimal.
- ¿$r = r_1$? No, porque difieren en el segundo dígito decimal.
- ...
- ¿$r = r_i$? No, porque el i-ésimo digito de r es distinto al de r_i:

$$d_i \neq d_{ii}$$

Por lo tanto, r no aparece en la lista $\rightarrow\leftarrow$

Como $(0, 1)$ no puede ponerse en una lista, no es enumerable. $\square$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?
- Es clave para establecer muchos resultados en matemáticas y computación.

> Usando estas ideas se puede demostrar que un computador
> no puede resolver todo problema

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Qué otros conjuntos tienen la misma cardinalidad que $(0,1)$?

Teorema

$(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Outline

Introducción

Conjuntos no enumerables

Teorema de Cantor

Epílogo

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{R}$?

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \preceq B$ (A **no es más grande** que B) si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

¿Es $\preceq$ una relación de orden?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{R}$?

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \leq B$ (A **no es más grande** que B) si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

¿Es $\leq$ una relación de orden?

Si $A \leq B$, diremos que $|A| \leq |B|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \prec B$ (A es **menos numeroso** que B) si $A \preceq B$ pero $A \not\approx B$.

¿Cómo se define esta noción usando funciones?

- Existe función inyectiva $f : A \to B$...
- ... pero no existe función biyectiva $g : A \to B$.

Si $A \prec B$, diremos que $|A| < |B|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Corolario

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Corolario

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Demostramos algo parecido para el caso finito...
veremos que aplica para **todo conjunto**

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto A (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto A (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

¡Podemos repetir este proceso *ad eternum*!

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))| < \cdots$$

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración. Primero, es claro que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Basta tomar

$$f : A \to \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración. Primero, es claro que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Basta tomar

$$f : A \to \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

Ahora mostraremos que no existe una función biyectiva entre A y $\mathcal{P}(A)$.

Por contradicción, supongamos que sí existe una biyección f entre A y $\mathcal{P}(A)$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$. Considere ahora los siguientes casos:

- Si $x \in f(x)$, entonces $x \in \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \notin f(x)$.
- Si $x \notin f(x)$, entonces $x \notin \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \in f(x)$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$. Considere ahora los siguientes casos:

- Si $x \in f(x)$, entonces $x \in \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \notin f(x)$.
- Si $x \notin f(x)$, entonces $x \notin \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \in f(x)$.

Luego, $x \in f(x)$ si y sólo si $x \notin f(x)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe una biyección entre A y $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos “infinitos” existen?

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$?

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$? ???

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$? ???

Hipótesis del continuo

No existe conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

¿Por qué se llama hipótesis?

Reflexiones finales

- ¿Qué implica todo lo anterior para la computación?
  - ¿Qué cosas es capaz de hacer un computador?
  - ¿Qué cosas **no** es capaz de hacer?
  - ¿Existen problemas computacionales para los cuales no existan algoritmos que los resuelvan?
  - Respuesta: IIC2213 :)

Outline

Introducción

Conjuntos no enumerables

Teorema de Cantor

Epílogo

Objetivos de la clase

- Demostrar la existencia de conjuntos no enumerables
- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor