Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Ayudantía 8 - Elementos extremos, funciones y cardinalidad

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

## Soluciones

## Pregunta 1

En esta pregunta se pedía demostrar que si $\forall a, b \in \mathbb{N}.\ f(a+b) = f(a) + f(b)$, entonces $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva si, y solo si, $f(1) \neq 0$. Para hacer esto asumimos que $\forall a, b \in \mathbb{N}.\ f(a+b) = f(a) + f(b)$ y demostraremos la doble implicancia.

**( $\Longrightarrow$ )** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva tal que $f(1) = 0$. Como $f(1) = f(1+0)$ tendremos $f(1) = f(1) + f(0)$, es decir, $f(0) = 0$. Tendríamos, por lo tanto, $f(0) = f(1)$, que contradice la inyectividad de $f$. Por lo tanto, si $f$ es inyectiva implica que $f(1) \neq 0$ (3).

**( $\Longleftarrow$ )** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1) \neq 0$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$ (1). Como $f(n) = f\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}\right)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
f(n) &= f\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}\right) \\
&= f(1) + \cdots + f(1) \\
&= \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{n \text{ veces}} \\
&= nf(1)
\end{aligned}$$

Por el mismo argumento, $f(m) = mf(1)$. Como $f(1) \neq 0$, podemos dividir ambos términos para obtener:

$$\frac{f(n)}{f(1)} = n \quad \text{y} \quad \frac{f(m)}{f(1)} = m$$

Luego como $n \neq m$, tenemos

$$\frac{f(n)}{f(1)} \neq \frac{f(m)}{f(1)}$$

Y por lo tanto, $f(n) \neq f(m)$. Como $n$ y $m$ eran números naturales cualesquiera, tenemos que $\forall x, y \in \mathbb{N}.\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, es decir, $f$ es inyectiva. Por lo tanto, $f(1) \neq 0$ implica que $f$ es inyectiva.

# Pregunta 2

Sean $A, B$ conjuntos no vacíos con al menos dos elementos cada uno. Determine la inyectividad y la sobreyectividad de las siguientes funciones. En caso de que sean biyectivas, determine la inversa.

**Solución:**

1. En primer lugar, $\pi$ no es inyectiva pues si $b, c$ son dos elementos distintos de $B$, entonces $\pi(a, b) = \pi(a, c)$ pero $(a, b) \neq (a, c)$. Por otro lado, veamos que $\pi$ es sobreyectiva. En efecto, tomemos un $a \in A$. Queremos probar que existe un par $(x, y) \in A \times B$ de modo que $\pi(x, y) = a$. Notemos que si tomamos el par $(a, b) \in A \times B$, donde $b \in B$, entonces $\pi(a, b) = a$, y por lo tanto $\pi$ es sobreyectiva.

2. Veamos que $f$ es inyectiva. Sean $(a, b), (c, d) \in A \times B$ de modo que $f(a, b) = f(c, d)$. Por definición de $f$, esto equivale a que $(b, a) = (d, c)$, de donde $b = d$ y $a = c$. Esto implica que $(a, b) = (c, d)$, y por lo tanto $f$ es inyectiva. Veamos ahora que $f$ es sobreyectiva. Sea $(b, a) \in B \times A$. En tal caso, notamos que $(a, b) \in A \times B$ cumple que $f(a, b) = (b, a)$ y por lo tanto $f$ es sobreyectiva. Finalmente, definamos $g : B \times A \to A \times B$ dada por $g(b, a) = (a, b)$. Afirmamos que $g$ es la inversa de $f$. En efecto,

   $$g \circ f(a, b) = g(f(a, b)) = g(b, a) = (a, b) = \mathrm{id}_{A \times B}(a, b),$$

   y

   $$f \circ g(b, a) = f(g(b, a)) = f(a, b) = (b, a) = \mathrm{id}_{B \times A}(b, a).$$

# Pregunta 3

Demuestre que el conjunto de los numeros complejos es equinumeroso con los numeros reales.

**Solución:**

Una posible solución para demostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son equinumerosos es mostrar que existen dos funciones $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, ambas inyectivas:

- Es fácil ver que $f_1(a) = a + 0i$ es una inyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.
- Para la inyección de vuelta crearemos una función de la siguiente forma. Lo que necesitamos es un mapeo uno a uno (inyectivo) desde el conjunto $\mathbb{C}$ hacia $\mathbb{R}$, para esto, utilizaremos una función inyectiva $f_{aux}$ auxiliar que mapeará desde el conjunto $\mathbb{R}$ hasta $(0, 1)$. La función que utilizaremos que cumple con esto será $f_{aux}(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$. Se puede observar que esta función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y su conjunto de llegada es $(0, 1)$. Para demostrar que es inyectiva, sean $x_1, x_2 \in (0, 1)$, supongamos que:

  $$f_{aux}(x_1) = f_{aux}(x_2)$$

  Trataremos de demostrar a partir de lo anterior que $x_1 = x_2$, lo que por definición nos permite concluir que la función es inyectiva. Desarrollando

  $$\begin{aligned} f_{aux}(x_1) &= f_{aux}(x_2) \\ \frac{1}{1-e^{-x_1}} &= \frac{1}{1-e^{-x_2}} \\ \\ 1-e^{-x_1} &= 1-e^{-x_2} \\ e^{-x_1} &= e^{-x_2} \end{aligned}$$

  Aplicando $ln()$ en la igualdad

  $$\begin{aligned} -x_1 &= -x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

  Por lo tanto $f_{aux}$ es inyectiva (también se puede probar que es sobreeyectiva, y por lo tanto, biyectiva). Con $f_{aux}$ se definirá la función inyectiva $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

  $$f_2(a + bi) = 0.a_1b_1a_2b_2$$

donde

$$f_{\text{aux}}(a) = 0.a_1 a_2 a_3 \dots \quad f_{\text{aux}}(b) = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$$

Como resumen de la idea de esta función, la función $f_{aux}$ gracias a su inyectividad nos da un mapeo único para cada coeficiente real de un número complejo hacia un número real perteneciente a $(0, 1)$, luego podemos intercalar el mapeo único de la parte real e imaginaria hacia un único número real perteneciente a $(0, 1)$, como $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Demostremos ahora que $f_2$ es inyectiva o uno a uno. Sean $a+bi, c+d_i \in \mathbb{C}$, supongamos que

$$f_2(a + bi) = f(c + di) = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 ...$$

por definición de $f_2$ lo anterior implica que

$$f_{aux}(a) = f_{aux}(c) = 0.a_1 a_2 a_3 ...$$
$$f_{aux}(b) = f_{aux}(d) = 0.b_1 b_2 b_3 ...$$

Como ya demostramos que $f_{aux}$ es inyectiva, podemos extraer de las ecuaciones anteriores que $a = c$ y que $b = d$, y de esto, al ser las partes reales e imaginarias iguales entre ambos números, se puede concluir que $a+bi = c+di$, obteniendo así que $f_2$ es inyectiva.

Como $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ son inyectivas, por teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, queda demostrado que $\mathbb{C}$ es equinumeroso con $\mathbb{R}$.

**Nota:** En la ayudantía presencial probablemente se vió una solución distinta a esta, donde la función $f_2$ mapeaba directamente la parte real e imaginaria hacia un número decimal, el problema de esta función es que no estaba definida en los casos donde la parte real o imaginaria eran negativas, no abarcando todo el dominio $\mathbb{C}$ y por lo tanto, no siendo una función de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, además había casos donde no era inyectiva.

Por lo anteriormente descrito, se utilizó esta nueva solución donde se utiliza una función inyectiva auxiliar $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$, que nos permite seguir utilizando la idea de la solución original de utilizar decimales para mapear la parte real e imaginaria (gracias a que su conjunto de llegada es $(0, 1)$) y luego intercalarlos en un único decimal, pero solucionando el tema de tener números negativos en la parte real o imaginaria del número complejo.