

Teoría de grafos

Clase 20

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Obertura

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

Epílogo

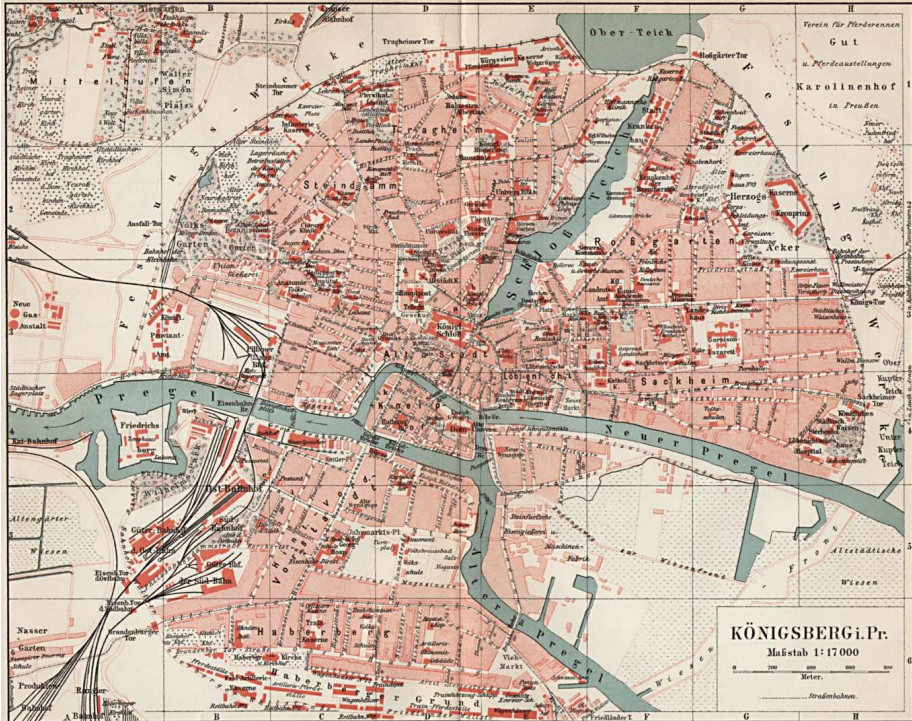
Tercer Acto: Aplicaciones

Algoritmos, grafos y números

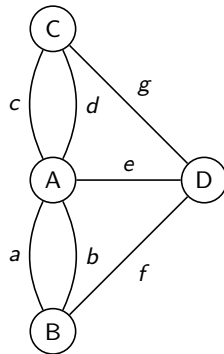
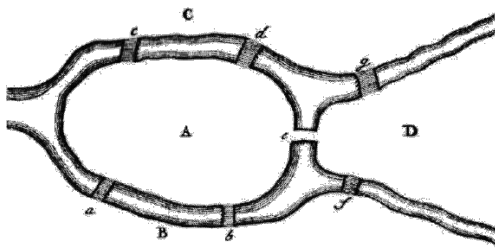


¿Por qué aprender grafos?

- Problemas de conectividad
- Optimización
- Bases de datos
- Redes sociales
- Manejo de concurrencia
- En general, **todo lo que se representa con relaciones binarias!**



Redes



Motivación

Una línea aérea tiene una lista de vuelos entre ciudades del mundo, y desea saber cuáles son los posibles viajes que se pueden realizar combinando vuelos. La lista de vuelos es la siguiente:

Origen	Destino
Stgo	BsAs
Stgo	Miami
Stgo	Londres
BsAs	Stgo
Miami	Stgo
Miami	Londres
Londres	Stgo
Londres	Paris
Frankfurt	Paris
Frankfurt	Moscu
Paris	Moscu
Moscu	Frankfurt

Objetivos de la clase

- Conocer definiciones básicas de grafos.
- Aplicar nociones básicas de isomorfismo y subgrafos.

Outline

Obertura

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

Epílogo

Grafos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos **vértices** o **nodos**, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos **aristas**.

Esta definición es bastante general.

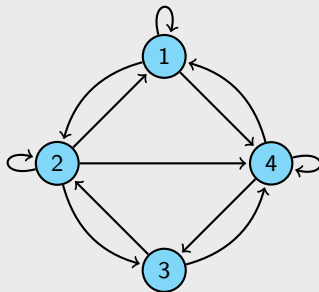
- Los grafos así definidos son llamados **grafos dirigidos**.

Si un grafo es dirigido, las aristas se dibujan con flechas.

Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$.

Definición

Un **rufo** (o *loop*) es una arista $(x, y) \in E$ tal que $x = y$. Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

Definición

Dos aristas $(x, y) \in E$ y $(z, w) \in E$ son **paralelas** si $x = w$ e $y = z$. Es decir, si conectan a los mismos vértices.

El ejemplo anterior tiene rulos y aristas paralelas.

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E ?

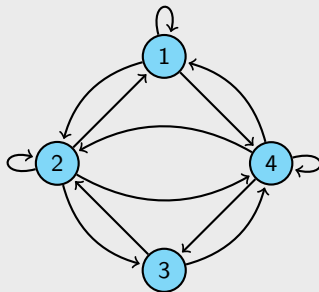
Definición (alternativa)

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si E es simétrica.

Si un grafo es no dirigido, se dibuja con trazos en lugar de flechas.

Ejemplo

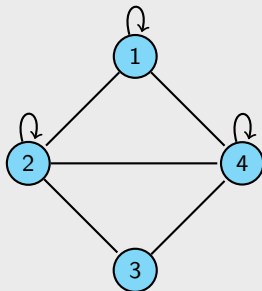
$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si no tiene rulos.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E ?

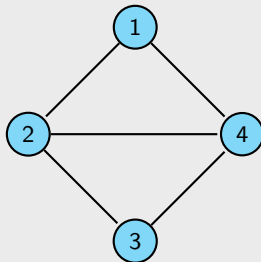
Definición (alternativa)

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si E es irrefleja.

Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.



Grafos

De ahora en adelante (a menos que se explicita otra cosa), cuando hablemos de grafos estaremos refiriéndonos a grafos simples, no dirigidos, no vacíos y finitos.

- $V \neq \emptyset$ y $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.
- E es simétrica e irrefleja.

Si los vértices son finitos, entonces las aristas también.

Una pequeña definición:

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, dos vértices $x, y \in V$ son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$.

Outline

Obertura

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

Epílogo

Isomorfismo

Definición

Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.

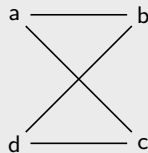
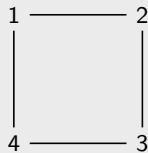
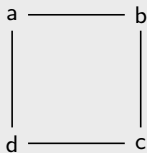
En tal caso:

- Diremos que f es un **isomorfismo** entre G_1 y G_2 .
- Escribiremos $G_1 \cong G_2$.

Dos grafos son isomorfos cuando tienen “*la misma forma*”.

Isomorfismo

Ejemplo



Isomorfismo

Teorema

\cong es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Isomorfismo

Teorema

\cong es una relación de equivalencia.

Demostración:

- **Refleja:** Sea $G(V, E)$ tomemos la función $f : V \rightarrow V$ dada por $f(x) = x$. Luego, de manera trivial podemos inferir que $G \cong G$.
- **Simétrica:** Sean $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ tales que $G_1 \cong G_2$. Por definición existe $f : V_1 \rightarrow V_2$ biyectiva tal que (i) todo $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$. Además, como f es biyectiva, sabemos que es invertible. Ahora mostraremos que f^{-1} cumple la definición de isomorfismo.
 - (\Rightarrow) Sea $(u_2, v_2) \in E_2$ como f es biyectiva podemos expresarlo como $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego, por (i) obtenemos $(u_1, v_1) \in E_1$. Como f^{-1} es inversa obtenemos que $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$.
 - (\Leftarrow) Sea $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$, podemos reescribirlo como $(u_1, v_1) \in E_1$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego por (i) obtenemos $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ lo que es equivalente a $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$

Isomorfismo

Teorema

\cong es una relación de equivalencia.

- **Transitiva:** Sean $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ y $G_3(V_3, E_3)$ tales que $G_1 \cong G_2$ y $G_2 \cong G_3$. Por definición, sabemos que existen $f : V_1 \rightarrow V_2$ y $g : V_2 \rightarrow V_3$ biyectivas tales que

$$(u_1, v_1) \in E_1 \text{ si y sólo si } (f(u_1), f(v_1)) \in E_2 \text{ (i)}$$

$$(u_2, v_2) \in E_2 \text{ si y sólo si } (g(u_2), g(v_2)) \in E_3 \text{ (ii)}$$

Sea $u_1, v_1 \in V_1$ tales que $(u_1, v_1) \in E_1$, por (i) sabemos que $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$. Luego, si aplicamos (ii) obtenemos $(g(f(u_1)), g(f(v_1))) \in E_3$. Por lo tanto, podemos utilizar $g \circ f$ como función biyectiva y dado que (i) y (ii) son doble implicancia; concluimos que $G_1 \cong G_3$.

Isomorfismo

El concepto de isomorfismo nos permite concentrarnos en la estructura subyacente de los grafos.

- Podemos independizarnos de los nombres de los vértices.
- No importa cómo dibujemos los grafos.

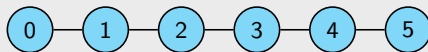
Definiremos familias de grafos a partir de isomorfismos.

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **camino** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en una línea tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en la línea.

Ejemplo



Clases de grafos

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^P = (V_n^P, E_n^P)$, donde $V_n^P = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E_n^P = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \dots, n-1\} \wedge j = i+1\}$.

Un **camino** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^P .

Llamaremos P_n a la clase de equivalencia $[G_n^P]_{\cong}$.
Los caminos con n vértices.

Observación:

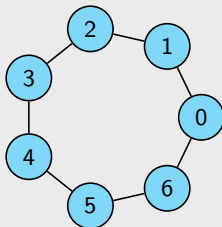
- Asumimos que G_n^P es no dirigido, a pesar de su definición.

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **ciclo** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en un círculo tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en él.

Ejemplo



Clases de grafos

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^C = (V_n^C, E_n^C)$, donde $V_n^C = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E_n^C = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \dots, n-1\} \wedge j = i+1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$.

Un **ciclo** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^C .

Llamaremos C_n a la clase de equivalencia $[G_n^C]_{\cong}$.
Los ciclos con n vértices.

Observación:

- Asumimos que G_n^C es no dirigido, a pesar de su definición.

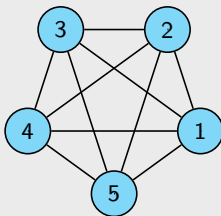
Clases de grafos

Definición

Un **grafo completo** es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.

Llamaremos K_n a la clase de equivalencia de los grafos completos de n vértices.

Ejemplo



Clases de grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si V se puede particionar en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tales que para toda arista $(x, y) \in E$:

(i) $x \in V_1, y \in V_2$ o (ii) $x \in V_2, y \in V_1$.

Es decir:

- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- Cada arista une a dos vértices en conjuntos distintos de la partición.

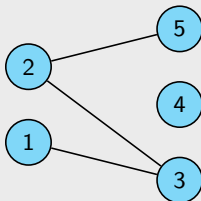
Clases de grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si V se puede particionar en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tales que para toda arista $(x, y) \in E$:

(i) $x \in V_1, y \in V_2$ o (ii) $x \in V_2, y \in V_1$.

Ejemplo



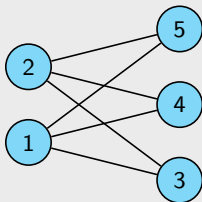
Clases de grafos

Definición

Un **grafo bipartito completo** es un grafo bipartito en que cada vértice es adyacente a todos los de la otra partición.

Llamaremos $K_{n,m}$ a la clase de los grafos bipartitos completos, donde n y m son los tamaños de las particiones.

Ejemplo



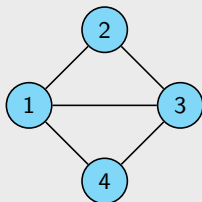
Más definiciones

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$:

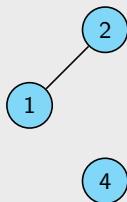
Definición

Un grafo $H = (V_H, E_H)$ es un **subgrafo** de G (denotado como $H \subseteq G$) si $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ y $E_H \subseteq V_H \times V_H$ (contiene aristas entre vértices de V_H).

Ejemplo



G



$H \subseteq G$

Más definiciones

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$:

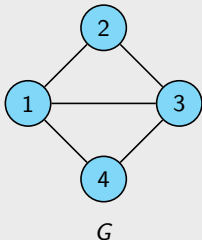
Definición

Un **clique** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall u, v \in K. (u, v) \in E_G$.

Definición

Un **conjunto independiente** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall u, v \in K. (u, v) \notin E_G$.

Ejemplo



$K = \{1, 2, 3\}$ es **clique** en G

$K' = \{2, 4\}$ es un **conj. indep.** en G

Más definiciones

Definición

El **complemento** de G es el grafo $\overline{G} = (V_G, \overline{E}_G)$, donde $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (u, v) \notin \overline{E}_G$.

Definición

Un grafo G se dice **autocomplementario** si $G \cong \overline{G}$.

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en \overline{G} .

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en \overline{G} .

Demostración:

- (\Rightarrow) Sea $V' \subseteq V$ un clique en G . Por definición sabemos que para todo par de vértices $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \in E$. Por otro lado, por definición de \overline{G} sabemos que para todo $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \notin \overline{E}$, y por lo tanto V' es un conjunto independiente en \overline{G} .
- (\Leftarrow) Sea $V' \subseteq V$ un conjunto independiente en \overline{G} . Por definición sabemos que para todo par de vértices $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \notin \overline{E}$. Por otro lado, por definición de \overline{G} sabemos que para todo $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \in E$, y por lo tanto V' es un clique en G .

Más definiciones

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

Demostración:

Sea $G(V, E)$ con $|V| = 6$, buscamos demostrar que G tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3. Por el teorema anterior, esto es equivalente a mostrar que G tiene un clique o que \overline{G} lo tiene. Por contradicción, suponemos que ni G ni \overline{G} tiene el clique. Sea $v \in V$ tenemos 2 casos:

- **v tiene por lo menos 3 vecinos:** Sean $x, y, z \in V$ los vecinos de v tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \in E$. Una observación importante es que no pueden existir aristas entre x, y, z dado que de otra manera de generaría un clique de tamaño 3, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego, x, y, z forman un conjunto independiente en G y por el teorema anterior estos vértices mismos forman un clique en \overline{G} .

Más definiciones

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

- **v tiene menos de 3 vecinos:** En este caso v no es adyacente con por lo menos 3 vertices de G . Sean x, y, z estos vértices tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \notin E$. Luego, x, y, z son vecinos de v en \overline{G} y podemos aplicar el mismo razonamiento del caso anterior para concluir que x, y, z forman un clique de tamaño 3 en G .

Como en ambos casos llegamos a que G o \overline{G} cuentan con un clique, esto contradice nuestra hipótesis y por ende G debe ser tal que tiene un clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3.

Outline

Obertura

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

Epílogo

Objetivos de la clase

- Conocer definiciones básicas de grafos.
- Aplicar nociones básicas de isomorfismo y subgrafos.