Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6 - Relaciones

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Soluciones

Pregunta 1 (Ross, 9.1, p49)

Dado un conjunto de n elementos, indique cuantas relaciones posibles existen de los siguientes tipos:

1. simetricas
2. antisimetricas
3. asimetricas
4. irreflejas
5. reflejas y simetricas
6. ni relejas ni irreflejas

Propuesto: transitivas, con $n = 1, 2$ y 3

Solución:

1. Simétricas:

   Tomemos $\mathcal{R}_{sim}$ como el conjunto de todas las relaciones simetricas. Dada $R \in \mathcal{R}_{sim}$ cualquiera, veamos las restricciones que la simetria pone sobre esta relacion.

   Separamos todos los pares de la relación R en dos tipos:

   - (a, a): Tenemos n de estas conexiones. La simetria no las restringe, ya que si usamos la definición $(a, a) \implies (a, a)$. Podemos elegir libremente si pertenezen o no a R
   - $(a, b), a \neq b$: Tenemos $n(n-1)$ de este tipo de conexiones. Sin embargo, por simetria $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$, por lo que estamos restringidos a tomar

(b, a). Debido a que las conexiones siempre viene de a 2, solo podemos elegir el estado de $\frac{n(n-1)}{2}$ parejas independientemente.

Luego llegamos que:

$$|\mathcal{R}_{sim}| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

2. Antisimétricas:

   Separamos nuevamente en parejas:

   - (a, a): Si vemos la definicion de antisimetria, estas relaciones nuevamente no se ven restringidas.
   - $(a, b), a \neq b$: Veamos cualquier pareja de valores a, b, tal que $a \neq b$. Tenemos $\frac{n(n-1)}{2}$ de estos posibles pares y existen 3 posibilidades:

     a) $(a, b) \in R \ \wedge (b, a) \notin R$

     b) $(b, a) \in R \ \wedge (a, b) \notin R$

     c) $(a, b) \notin R \ \wedge (b, a) \notin R$

   Dado esto podemos llegar a que:

$$|\mathcal{R}_{ant}| = 3^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n$$

3. Asimétricas: Analogo a caso $\mathcal{R}_{ant}$, a exepción de que no incluye relaciones de la forma (a, a).

$$|R| = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

4. Irreflejas: En estas relaciones, $(a, a) \notin R$. Si nos fijamos en los casos (a, b) donde $a \neq b$, podemos ver que tenemos $n(n-1)$ posibles intersecciones independientes. Por lo tanto:

$$|\mathcal{R}_{ir}| = 2^{n(n-1)}$$

5. Simétrica y refleja: Analogo al caso $\mathcal{R}_{sim}$, pero tenemos la restriccion de que $(a, a) \in R$. Por lo tanto:

$$|\mathcal{R}_{sim,r}| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

6. Ni reflejas ni irreflejas:

   Como no hay interseccion entre las relaciones reflejas e irreflejas podemos simplemente restarla de todas las relaciones posibles. Si no tenemos ninguna restricción, tenemos n^2 posibles conexiones y por lo tanto:

$$|\mathcal{R}| = 2^{n^2}$$

Además las relaciones reflejas e irreflejas ambas restringen solamente los autoloops, por lo que:

$$|\mathcal{R}_r| = 2^{n(n-1)} = |\mathcal{R}_{ir}|$$

Finalmente, tenemos que:

$$|\mathcal{R}_{nir,nr}| = |\mathcal{R}| - |\mathcal{R}_{ir}| - |\mathcal{R}_r|$$

$$= 2^{n^2} - 2^{n(n-1)} - 2^{n(n-1)} = 2^{n^2} - 2^{n(n-1)+1}$$

Propuestos:

No existe una formula explicita para $|\mathcal{R}_{trn}|$, pero para $n = 1, n = 2, n = 3$, toma los respectivos valores de $2, 13, 171$.

Pregunta 2

Sea $\{0,1\}^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$ el conjunto de todas las palabras (strings) binarias y sea $u \cdot v$ la concatenación de dos palabras $u, v \in \{0,1\}^*$ (ej. $00 \cdot 101 = 00101$). Se define la relación $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$:

$(w_1, w_2) \in R$ si, y solo si, existen palabras u y v tal que $w_1 = u \cdot v$ y $w_2 = v \cdot u$.

1. Demuestre que R es una relación de equivalencia sobre $\{0,1\}^*$.

   Solución:

   La solución consiste en demostrar que la relación presentada sobre palabras en Σ^* es una relación de equivalencia. Luego, es necesario mostrar que la relación es refleja, simétrica y transitiva.

   - **Reflexividad:** Sale de la idea que para toda palabra w es posible definir la división como $u = w$ y $v = \varepsilon$ ya que $w = w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w$. Luego, $(w, w) \in R$.
   - **Simetría:** Al tener par $(a, b) \in R$, luego existen u y v tal que $a = u \cdot v$ y $b = v \cdot u$. Es claro notar que al escoger $u' = v$ y $v' = u$, podemos mostrar que se cumple para el lado contrario. Luego $(b, a) \in R$.
   - **Transitividad:** Si se tienen palabras $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ luego existen divisiones entre a y b y entre b y c. Nótese que podemos conectar mediante estas divisiones a a y c. Sin embargo, es necesario revisar los casos en que estas divisiones son de distinto largo y como formar la división que conecta a a y c. Sin pérdida de generalidad es posible solo ver el caso en que una las porciones de la división entre a y b es más larga que una entre b y c. Subdividiendo más aún estas divisiones, teniendo en cuenta lo anterior, es posible construir la división buscada para mostrar que $(a, c) \in R$.

2. Interprete en palabras a qué corresponden las clases de equivalencia de R.

   Solución:

   La solución consiste en analizar, más allá de la definición de R, que describen las clases de equivalencia de R. Podemos notar que la clase de equivalencia de una palabra w son todas las palabras obtenidas a partir de al "girarla", es decir, si $w = a_1 \ldots a_n$, entonces $a_j \ldots a_n a_1 \ldots a_{j-1} \in [w]_R$. Podemos pensar de toda palabra como un ciclo, luego todas las palabras que pueden formar ese mismo ciclo son parte de su clase de equivalencia.

Pregunta 3

Solución

(a) Notemos que $\sim$ es simétrica, por lo que para todo $(a, b) \in\sim$, se tiene que $(b, a) \in\sim$, y por definición de relación inversa, que $(a, b) \in\sim^{-1}$. Luego todos los elementos de $\sim$ están en $\sim^{-1}$, es decir, $\sim\subseteq\sim^{-1}$. Del mismo modo, $\sim= (\sim^{-1})^{-1}$ por definición de inversa, por lo que el mismo argumento se puede utilizar para decir que $\sim^{-1}\subseteq\sim$. Concluimos que $\sim^{-1}=\sim$, por lo que $\sim^{-1}$ es una relación de equivalencia.

(b)
- Sea $(x, x) \in I_A$. Luego, $x \in A$ por definición de I_A. Como $\sim$ es una relación de equivalencia, en particular es refleja, por lo que $(x, x) \in\sim$. Como se tomó (x, x) arbitrario, se cumple que para todo $(x, x) \in I_A$, $(x, x) \in\sim$, por lo que $I_A \subseteq\sim$.
- Notemos que $\sim$ es finito, por lo que $|\sim \setminus I_A| \leq |\sim|$ debe ser un natural mayor o igual a 0. Notemos además que si $I_A \subsetneq\sim$, entonces existe al menos un elemento en $\sim \setminus I_A$. Sea (a, b) este elemento. Dado que $(a, b) \notin I_A$, por definición de diferencia de conjuntos, tenemos que $a \neq b$. Además, como $(a, b) \in\sim$, por definición de diferencia de conjuntos, y como $\sim$ es simétrica por ser relación de equivalencia, tenemos además que $(b, a) \in\sim$. Luego, tenemos que (a, b) y (b, a) pertenecen a $\sim \setminus I_A$. Finalmente, como $a \neq b$, se tiene que los pares ordenados también son distintos, esto es que $(a, b) \neq (b, a)$. Concluimos que $\sim \setminus I_A$ tiene al menos dos elementos, es decir, $|\sim \setminus I_A| \geq 2$.