



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 8 - Elementos extremos, funciones y cardinalidad

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irrázaval

Resumen

Conteo

- Regla del producto: $|A \times B| = |A| * |B|$
- Regla de la suma: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Principio del Palomar

$f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$

- Si $m > n$, f no puede ser inyectiva
- Si $m < n$, f no puede ser sobreyectiva
- Si f biyectiva, $m = n$

Permutaciones y combinaciones

Dado $|A| = n$

- Permutación: arreglo ordenado de r elementos. $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Combinación: subconjunto de tamaño r . $C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)}$

No numerabilidad

Si queremos demostrar que un conjunto no es numerable, tenemos las siguientes opciones:

- Asumir que tenemos una lista que lo numera y llegar a una contradicción. Normalmente definimos un elemento que no puede estar en la lista usando esta misma \implies Diagonalización

-
- Llegamos a una biyección con un conjunto no numerable.
 - Demostramos que un subconjunto de este no es numerable.

Teo de Cantor

- $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ no es numerable
- $(0, 1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $A < \mathcal{P}(A)$

Ejercicios

Pregunta 1 (Ross)

Tomemos un conjunto de puntos $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ con $i = 1, 2, \dots, 9$ y coordenadas enteras. Demuestre, usando el principio del palomar, que existe al menos una línea entre dos de estos puntos tal que el punto medio también tiene coordenadas enteras.

Pregunta 2

- a) Demuestre que el intervalo abierto $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ no es enumerable.
- b) Sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto potencia de \mathbb{N} , ¿Es el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ enumerable? Demuestre su afirmación

Pregunta 3

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ inyectiva}\}$

Demuestre que el conjunto \mathcal{F} es no numerable.