Conteo y Combinatoria

Clase 15

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

¿Por qué estudiar conteo y combinatoria?

- A menudo subestimamos lo complejo que puede ser **contar**.
- Muchas decisiones y problemas reales involucran combinaciones

- **Criptografía**: ¿Cuántas contraseñas posibles hay de 8 caracteres que solo usan números?
- **Análisis de algoritmos**: ¿Cuántos caminos de largo 3 permiten llegar desde un punto a otro en un grafo?
- **Probabilidad**: ¿Qué tan probable es ganar algún premio de la lotería?

Objetivos de la clase

- Comprender las reglas de la suma y del producto
- Comprender y aplicar conceptos de permutaciones y combinaciones

Outline

Principios básicos de conteo

Regla de la suma (2 conjuntos disjuntos)

Sean $A \cap B = \varnothing$, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Principios básicos de conteo

Regla de la suma (2 conjuntos disjuntos)

Sean $A \cap B = \varnothing$, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Regla de la suma (n conjuntos disjuntos)

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, entonces:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Principios básicos de conteo

Regla de la suma (2 conjuntos disjuntos)

Sean $A \cap B = \varnothing$, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Regla de la suma (n conjuntos disjuntos)

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, entonces:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Regla de la suma generalizada (2 conjuntos)

Sean A y B dos conjuntos, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Principios básicos de conteo

Regla de la suma

En una cafetería se puede comprar café o té. El café se puede pedir de tres maneras: Espresso, americano o con leche de soya. El té se puede pedir como té verde o té negro. ¿Cuántas bebidas diferentes se pueden pedir?

Principios básicos de conteo

Regla del producto (2 conjuntos)

Sean A y B conjuntos finitos. Entonces,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Principios básicos de conteo

Regla del producto (2 conjuntos)

Sean A y B conjuntos finitos. Entonces,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Regla del producto (n conjuntos)

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Principios básicos de conteo

Regla de la suma

En una local de bubble tea, se pueden pedir tres tipos de tés: Té rojo, té verde o té negro; con o sin leche vegetal; de 7 sabores distintos: sandía, melón, manzana verde, maracuyá, mango, frutilla y uva; y con 3 tipos de toppings: tapioca, aloe vera o pops de lichi; y se puede pedir con azúcar, con stevia o sin endulzar. ¿Cuántoas bubble teasebidas distintoas ofrece el local?

Outline

Factorial y combinatoria

Factorial

La función **factorial** $n!$ se define inductivamente como:

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{para } n \geq 0$$

Combinatoria

Para $0 \leq k \leq n$, la **combinatoria de n sobre k** se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propiedad simétrica: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Permutaciones

Definición

Dada una tupla de n elementos $(a_1, \ldots, a_n)$, diremos que una **permutación** de sus elementos es una tupla $(b_1, \ldots, b_n)$ con los mismos elementos, posiblemente en otro orden, es decir, $b_i \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ para todo i.
Si la permutación solo considera tuplas de tamaño $r \leq n$, diremos que es una ***r*-permutación**.

Si A es un conjunto de n elementos, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ podremos hablar indistintamente de las permutaciones de A como las n-tuplas con todos los elementos de A.

Permutaciones

Teorema

Sea A un conjunto tal que $A = n$. Entonces,

1. La cantidad de permutaciones de A está dada por $P(n) = n!$
2. La cantidad de r-permutaciones de A está dada por $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ejercicio ($\bigstar$)

Demuestre inductivamente utilizando la regla del producto y la definición de factorial

Ejemplo aplicado: Permutaciones

Ejercicio

¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar usando 8 caracteres numéricos? ¿Cuántas usando 12 caracteres alfanuméricos? ¿Cuántas si además permitimos los símbolos **!”$%&/()=?**?

Permutaciones

¿Qué ocurre cuando tenemos elementos repetidos?

Teorema

Sea $A = (a_1, \ldots, a_r)$ y sea $b = (b_1, ..., b_n) \in A^n$ con $r \leq n$, de manera que cada elemento $a_i \in A$ aparece k_i veces. Entonces, la cantidad de permutaciones de b está dada por

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$$

Ejercicio (★)

Demuestre el teorema

Ejercicio

¿Cuántas formas distintas hay de reordenar las letras de la palabra **BANANA**?

Combinaciones

Definición

Dado un conjunto A tal que $A = n$, diremos que una ***r*-combinación** de sus elementos es un subconjunto de A de tamaño r.

Teorema

Sea A un conjunto tal que $A = n$. La cantidad de r-combinaciones de A está dada por $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r)} = \binom{n}{r}$

Ejercicio (★)

Demuestre usando la regla del producto y la definición de combinatoria

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender las reglas de la suma y del producto
- Comprender y aplicar conceptos de permutaciones y combinaciones