Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6 - Relaciones

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Resumen

Clase de equivalencia

Dado $x \in A$, la clase de equivalencia de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

Conjunto cuociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El conjunto cuociente de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\!\sim = \{[x] \mid x \in A\}$$

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.

2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Ínfimo y supremo

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un ínfimo de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior.

Análogamente se define el supremo de un conjunto.

Ejercicios

Pregunta 1

(a) Sea $\prec$ una relación sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida de la siguiente forma. Para cada $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se tiene que $(a,b)\prec(c,d)$ si y solo si $a\leq c$ y $b\leq d$, donde $<$ es la relación de orden usual sobre los naturales. Demuestre que $\prec$ es un orden parcial pero no un orden total sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

(b) Sea $\preceq$ una relación sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida de la siguiente forma. Para cada $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se tiene que $(a,b)\preceq(c,d)$ si y solo si $(a<c)$ o $(a=c$ y $b\leq d)$, donde $<$ es la relación de orden usual sobre los naturales. Demuestre que $\preceq$ es un orden total sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

(c) Generalice la definición de la relación $\preceq$ definida en (b) para el caso $\mathbb{N}^k$, con $k\geq 3$. Demuestre que la relación resultante es un orden total sobre $\mathbb{N}^k$.

Pregunta 2

Sea A un conjunto. Una relación binaria $\prec$ sobre A se dice *orden estricto* si es asimétrica y transitiva.

(a) Demuestre que si $\prec$ es un orden estricto, entonces $\prec^{-1}$ es un orden estricto.

(b) Definimos

$$\preceq := \prec \cup I_A, \qquad \succeq := \prec^{-1} \cup I_A, \qquad I_A = \{\,(x,x)\mid x\in A\}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones (asumiendo que $\prec$ es también conexo):

(I) $\prec^{-1}\subsetneq\succeq$.

(II) $\preceq\cap\succeq = I_A$.

(III) $\prec\cup\prec^{-1} = (A\times A)\setminus I_A$.

Pregunta 3

1. Sea $(A,\preceq)$ un orden total, y $S\subseteq A$ tal que S es finito y no vacío. Demuestre que $\sup(S)$ e $\inf(S)$ existen y pertenecen a S. Hint: use inducción.

2. Sea $(A,\preceq)$ un orden total, y $S_1\subseteq A$ tal que tiene supremo. Suponga ahora que existe $S_2\subsetneq S_1$ tal que para todo $x\in S_1$ existe $y\in S_2$ tal que $x\preceq y$. Demuestre que S_2 tiene supremo, y que $\sup(S_2)=\sup(S_1)$.