Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 4

08 de mayo de 2025

1º semestre 2025 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - P. Barceló

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 15 de mayo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `.pdf` correspondiente a su solución, junto con un `.zip`, que contenga un archivo `.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Dado un dominio A y relación de equivalencia $\sim$, se define el conjunto cuociente

$$A/\sim\, = \{[x]_\sim \mid x \in A\}.$$

El índice del conjunto cuociente se define como la cantidad de clases de equivalencia de éste. Considere la relación de equivalencia

$$x \equiv_n y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x - y| = k \cdot n.$$

Sea P el conjunto

$$\{3^i + j \cdot 5 \mid \forall i, j \in \mathbb{N}\}.$$

1. Determine el índice de $P/\equiv_5$ justificando su respuesta.
2. Determine el índice de $P/\equiv_3$ justificando su respuesta.

Sea $\simeq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$n \simeq m \leftrightarrow n \text{ encierra la misma cantidad de regiones que } m,$$

considerando a los naturales escritos en decimal. Por ejemplo, $0 \simeq 6$ porque ambos dividen el papel en dos regiones cuando son escritos y $2 \simeq 11$ porque no forman regiones encerradas.

3. Muestre al menos 4 clases de equivalencias de $\mathbb{N}/\simeq$. Explique por qué el índice no es finito y por qué cada clase no tiene finitos elementos.
4. Muestre un dominio y una relación de equivalencia con índice finito en el que cada clase tiene infinitos elementos. Muestre un dominio y una relación de equivalencia con índice infinito en el que cada clase tiene finitos elementos. Muestre un dominio y una relación de equivalencia con índice infinito en el que algunas clases son finitas y otras infinitas.

Pregunta 2

Considere un orden parcial de la forma $(A, \preceq)$. Dos elementos $a, b \in A$ son *comparables*, si $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Una *cadena* en $(A, \preceq)$ es un conjunto S de elementos que son mutuamente comparables. Una *anticadena* en $(A, \preceq)$ es un conjunto S de elementos que son mutuamente incomparables.

Suponga que existen k cadenas $S_1, \ldots, S_k$ en $(A, \preceq)$ que satisfacen $S_1 \cup \cdots \cup S_k = A$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$, para cada $1 \leq i, j \leq k$. Se le pide demostrar lo siguiente:

1. Suponga que S es una anticadena en $(A, \preceq)$ con k elementos. Entonces $S \cap S_i \neq \emptyset$, para cada $1 \leq i \leq k$.
2. Sea x_i el máximo de los elementos en S_i que pertenecen a alguna anticadena de $(A, \preceq)$ con k elementos. Note que puede pasar que otro $x \in S_i$ es el máximo (y por ello $x_i \preceq x$), pero no necesariamente x pertenece a una anticadena de k elementos. Demuestre que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es una anticadena en $(A, \preceq)$.