# Conteo y combinatoria

Clase 15

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

# Outline

# Segundo Acto: Conteo

## Conjuntos, relaciones y funciones

# Objetivos de la clase

- Comprender reglas de la suma y producto.
- Comprender el principio del palomar y aplicaciones.
- Comprender concepto de permutaciones y combinaciones.

# Outline

# Regla del producto

### Regla del producto

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos. Entonces,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

### Regla del producto extendida

Sean $A_0$, $A_1$,... , $A_n$ conjuntos finitos. Entonces,

$$\left|A_0 \times A_1 \times ... \times A_n\right| = \prod_{i \in \{0,\ldots,n\}} |A_i|.$$

# Regla del producto

## Ejemplo

Sea $P$ un proceso que posee 2 tareas. La tarea 1 tiene $n$ formas de realizarse y la tarea 2 de $m$ formas. Entonces, las distintas formas de realizar el proceso $P$ entero es $n \cdot m$.

# Regla de la suma

### Regla de la suma

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces,

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

### Regla de la suma extendida

Sean $A_0$, $A_1$,... , $A_n$ conjuntos finitos tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(\forall\, i \neq j \in \{0, ..., n\})$. Entonces,

$$\Big| \bigcup_{i \in \{0,\ldots,n\}} A_i \Big| = \sum_{i \in \{0,\ldots,n\}} |A_i|.$$

# Regla de la suma

**Ejemplo**

Sea $T$ una tarea. La tarea tiene $n$ formas de realizarse, pero también existen otras $m$ formas distintas de realizarse (distintas de las primeras $n$). Entonces, el total de formas de realizar la tarea $T$ es $n + m$.

# Otras reglas

## Regla de la resta

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos. Entonces,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

## Regla de la división

Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ y $|A_i| = d$ $(\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\})$. Entonces,

$$\left| \bigcup_{i \in \{0, \ldots, n\}} A_i \right| = n \cdot d.$$

# Outline

# Principio del palomar

Una aplicación muy importante de las funciones es que nos permiten razonar sobre el tamaño de los conjuntos. Una propiedad interesante sobre los conjuntos finitos es la siguiente:

## Principio del palomar

Se tienen $m$ palomas y $n$ palomares, con $m > n$. Entonces, si se reparten las $m$ palomas en los $n$ palomares, necesariamente existirá un palomar con más de una paloma.

## Principio del palomar (para inyectividad)

Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m > n$, la función $f$ no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

# Principio del palomar

### Principio del palomar (para sobreyectividad)

Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m < n$, la función $f$ no puede ser sobreyectiva.

### Corolario

La única forma en que una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ sea biyectiva es que $m = n$.

# Principio del palomar

## Ejemplo

Si en una sala hay 8 personas, entonces este año necesariamente dos de ellas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

Las 8 personas las podemos modelar como el conjunto $P = \{0, \ldots, 7\}$ y los días de la semana como el conjunto $S = 0, \ldots, 6$. El día de la semana que se celebra el cumpleaños de cada una resulta ser una función de P en S, por el principio del palomar, esta función no puede ser inyectiva, luego al menos dos personas distintas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

# Outline

# Permutaciones

## Definición

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos inductivamente el operador $n!$ tal que

1. $0! = 1$.
2. $n! = n \cdot (n-1)!$

Dado $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq n$ se define

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La función $f(n) = n!$ crece extremadamente rápido, por ejemplo $f(20) = 2.432.902.008.176.640.000$.

# Permutaciones

## Definición

Dado un conjunto $A$ tal que $|A| = n$, diremos que una **permutación** de sus elementos es un arreglo ordenado de dichos elementos.

Si la permutación solo considera arreglos de tamaño $r \leq n$, diremos que es una $r$-permutación.

# Permutaciones

### Teorema

Sea $A$ un conjunto tal que $|A| = n$.

1. La cantidad de permutaciones de $A$ esta dada por $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.
2. La cantidad de $r$-permutaciones de $A$ esta dada por $P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.

### Ejercicio

Demuestre usando la regla del producto.

Corolario

Sea $A$ un conjunto tal que $|A| = n$.

1. La cantidad de permutaciones de $A$ esta dada por $P(n) = n!$.
2. La cantidad de $r$-permutaciones de $A$ esta dada por $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ejercicio

Demuestre usando la definición de $n!$.

# Combinaciones

### Definición

Dado un conjunto $A$ tal que $|A| = n$, diremos que una **$r$-combinación** de sus elementos es un subconjunto de $A$ de tamaño $r$.

### Teorema

Sea $A$ un conjunto tal que $|A| = n$.

La cantidad de $r$-combinaciones de $A$ esta dada por $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r)}$.

### Ejercicio

Demuestre usando la regla del producto.

# Combinaciones

### Corolario

Sea $A$ un conjunto tal que $|A| = n$.

La cantidad de $r$-combinaciones de $A$ esta dada por $C(n, r) = \binom{n}{r}$.

### Proposición

Para $0 \leq r \leq n$,

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

### Ejercicio

Demuestre de al menos 2 formas distintas la proposición.

# Combinaciones

## Proposición

Para $0 \leq r \leq n$,

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

1. $C(n, n - r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!(r)!} = C(n, r)$.
2. Sea $D$ un conjunto de $n$ elementos. Sea $R$ el conjunto de las combinaciones de tamaño $r$ de $D$ y $R'$ el de combinaciones de tamaño $n - r$. Existe la biyección $f : R \rightarrow R'$ tal que el elemento $A$ en $R$ es mapeado al elemento $D \backslash A$ en $R'$. Por lo tanto, $R \approx R'$.

Una *demostración combinatorial* de una afirmación utiliza conteo para probar que ambos lados de una identidad cuentan la misma cantidad, pero de diferentes formas. También es posible demostrar la afirmación mostrando la existencia de una biyección entre los conjuntos de elementos contados.

# Outline

# Objetivos de la clase

- Comprender reglas de la suma y producto.
- Comprender el principio del palomar y aplicaciones.
- Comprender concepto de permutaciones y combinaciones.