PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 4

08 de mayo de 2025

1º semestre 2025 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - P. Barceló

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 15 de mayo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
    - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
    - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
    - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
    - Los archivos que debe entregar son el archivo `.pdf` correspondiente a su solución, junto con un `.zip`, que contenga un archivo `.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Dado un dominio A y relación de equivalencia $\sim$, se define el conjunto cuociente

$$A/\sim\, = \{[x]_\sim \mid x \in A\}.$$

El índice del conjunto cuociente se define como la cantidad de clases de equivalencia de éste. Considere la relación de equivalencia

$$x \equiv_n y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x - y| = k \cdot n.$$

Sea P el conjunto

$$\{3^i + j \cdot 5 \mid \forall i, j \in \mathbb{N}\}.$$

1. Determine el índice de $P/\equiv_5$ justificando su respuesta.
2. Determine el índice de $P/\equiv_3$ justificando su respuesta.

Sea $\simeq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$n \simeq m \leftrightarrow n \text{ encierra la misma cantidad de regiones que } m,$$

considerando a los naturales escritos en decimal. Por ejemplo, $0 \simeq 6$ porque ambos dividen el papel en dos regiones cuando son escritos y $2 \simeq 11$ porque no forman regiones encerradas.

3. Muestre al menos 4 clases de equivalencias de $\mathbb{N}/\simeq$. Explique por qué el índice no es finito y por qué cada clase no tiene finitos elementos.
4. Muestre un dominio y una relación de equivalencia con índice finito en el que cada clase tiene infinitos elementos. Muestre un dominio y una relación de equivalencia con índice infinito en el que cada clase tiene finitos elementos. Muestre un dominio y una relación de equivalencia con índice infinito en el que algunas clases son finitas y otras infinitas.

Pauta (6 pts.)

(i) 1,5 pts. por ítem 1.

(ii) 1,5 pts. por ítem 2.

(iii) 1,5 pts. por ítem 3.

(iv) 1,5 pts. por ítem 4.

Solución

1. Sabemos que dada la relación $\equiv_5$, las clases de equivalencia que induce son a lo más 5 distintas $\{[0]_{\equiv_5}, [1]_{\equiv_5}, [2]_{\equiv_5}, [3]_{\equiv_5}, [4]_{\equiv_5}\}$. Por definición, $P/\equiv_5$ es $\{[p]_{\equiv_5} \mid p \in P\}$. Entonces, para determinar el índice basta encontrar un elemento en cada una de las clases. Considere $j = 0$. Si $i = 0$ se tiene que $1 \in P$ y $1 \in [1]_{\equiv_5}$. Si $i = 1$ se tiene que $3 \in P$ y $3 \in [3]_{\equiv_5}$. Si $i = 2$ se tiene que $9 \in P$ y $9 \in [4]_{\equiv_5}$. Si $i = 3$ se tiene que $27 \in P$ y $27 \in [2]_{\equiv_5}$.

   Faltaría encontrar un elemento en $[0]_{\equiv_5}$. Sin embargo, para cualquier i el número 3^i nunca será múltiplo de 5 (ya que ambos son primos). Incluso variando el valor de j manteniene el valor del resto en módulo 5. Por lo tanto, $P/\equiv_5$ tiene índice 4. $\square$

2. El procedimiento será el mismo que en el ítem anterior. Notamos que si $j = 0$, el resto módulo 3 de 3^i será 1 para $i = 0$ y 0 para cualquier $i > 0$. Considere $i = 1$. Si $j = 0$ se tiene que $0 \in [0]_{\equiv_3}$, si $j = 1$ se tiene que $5 \in [2]_{\equiv_3}$ y si $j = 2$ se tiene que $10 \in [1]_{\equiv_3}$. Por lo tanto, $P/\equiv_3$ tiene índice 3. $\square$

3. Esta la clase de $[1]_{\simeq}$ de números que encierran 0 regiones, la clase $[0]_{\simeq}$ que encierran 1, la clase $[8]_{\simeq}$ de los que encierran 2 y $[80]_{\simeq}$ de los que encierran 3. Son infinitas clases de equivalencia porque uno puede generar un número arbitrariamente grande tal que al escribirlo en decimal encierra la cantidad de regiones deseada, por ejemplo el número 10^i encierra i regiones (con $i \in \mathbb{N}$). Finalmente, cada clase es infinita ya que si $n \in [n]_{\simeq}$ el natural $n \cdot 10 + 1$ también pertenece a $[n]_{\simeq}$ porque añadir 1 al final no agrega regiones encerradas. Para cada número de la forma $m = n \cdot 10^i + \underbrace{1 \ldots 1}_{i \text{ veces}}$ se cumple que $m \in [n]_{\simeq}$.

4. Sobre $\mathbb{N}$, la relación que agrupa a todos los pares y todos los impares en 2 grupos tiene índice finito y cada clase infinitos elementos. Sobre $\mathbb{N}$, la relación que agrupa cada elemento consigo mismo tiene una clase por cada natural, pero cada clase tiene 1 elemento. Sobre $\mathbb{N}$, la relación que agrupa a los todos primos en un grupo y a cada coprimo en su propio grupo cumple lo pedido.

Pregunta 2

Considere un orden parcial de la forma $(A, \preceq)$. Dos elementos $a, b \in A$ son *comparables*, si $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Una *cadena* en $(A, \preceq)$ es un conjunto S de elementos que son mutuamente comparables. Una *anticadena* en $(A, \preceq)$ es un conjunto S de elementos que son mutuamente incomparables.

Suponga que existen k cadenas $S_1, \ldots, S_k$ en $(A, \preceq)$ que satisfacen $S_1 \cup \cdots \cup S_k = A$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$, para cada $1 \leq i, j \leq k$. Se le pide demostrar lo siguiente:

1. Suponga que S es una anticadena en $(A, \preceq)$ con k elementos. Entonces $S \cap S_i \neq \emptyset$, para cada $1 \leq i \leq k$.
2. Sea x_i el máximo de los elementos en S_i que pertenecen a alguna anticadena de $(A, \preceq)$ con k elementos. Note que puede pasar que otro $x \in S_i$ es el máximo (y por ello $x_i \preceq x$), pero no necesariamente x pertenece a una anticadena de k elementos. Demuestre que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es una anticadena en $(A, \preceq)$.

Pauta (6 pts.)

(i) 2 pts. por ítem 1.

(ii) 4 pts. por ítem 2.

Solución

1. Basta notar que no pueden existir dos elementos en la misma cadena S_i que sean parte de S. Esto es porque los elementos en S son incomparables entre si. Dado que S tiene k elementos, y dos elementos no pueden venir de la misma cadena, quiere decir que cada cadena S_i contribuye con exactamente un elemento a S. Concluímos que $S \cap S_i \neq \emptyset$, para cada $1 \leq i \leq k$. $\square$

2. Necesitamos demostrar que x_i y x_j son incomparables, para cada $1 \leq i < j \leq k$. Sea A_i una anticadena de tamaño k que contiene a x_i. Por ítem 1, sabemos que $A_i \cap S_j \neq \emptyset$. Sea $y \in A_i \cap S_j$. Luego, y pertenece a la anticadena A_i de tamaño k, $y \in S_j$ y x_j es el máximo elemento en S_j que pertenece a una anticadena de tamaño k; por lo tanto $y \leq x_j$. Asuma, por contradicción, que $x_j \preceq x_i$ (son comparables en este sentido). Luego, $y \preceq x_i$ por transitividad, lo que es una contradicción ya que x_i e y pertenecen a la anticadena A_i y por ello son incomparables. De la misma forma considerando la anticadena A_j con el elemento x_j y aplicando el ítem 1, es posible obtener una contradicción al hecho de que $x_i \preceq x_j$ (tampoco son comparables en el otro orden). Esto demuestra que x_i y x_j son incomparables. $\square$