Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía I2 - Repaso Interrogación 2

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Ejercicios

Pregunta 1 funciones

Para cada par de conjuntos A, B encuentre una biyección explícita entre ellos. Demuestre.

(a) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{n \mid n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$

(b) $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y $B = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Solución

a) Mapearemos los enteros positivos a las potencias de dos con exponente impar, y los enteros negativos (y el cero) a las potencias de dos con exponente par.

$f : \mathbb{Z} \to B$

$$f(a) = \begin{cases} 2^{-2a} & \text{si } a \leq 0 \\ 2^{2a-1} & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Para demostrar: Función es inyectiva:
Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$
P.D: $a_1 = a_2$
Casos:

- $a_1, a_2 \leq 0$
  $f(a_1) = 2^{-2a_1} = f(a_2) = 2^{-2a_2} \Rightarrow -2a_1 = -2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$
- $a_1, a_2 > 0$
  $f(a_1) = 2^{2a_1-1} = f(a_2) = 2^{2a_2-1} \Rightarrow 2a_1 - 1 = 2a_2 - 1 \Rightarrow a_1 = a_2$

- $a_1 \leq 0, a_2 > 0$
  $f(a_1) = 2^{-2a_1} = f(a_2) = 2^{2a_2-1} \Rightarrow -2a_1 = 2a_2 - 1$
  $\Rightarrow$ Contradicción pues un número par $(-2a_1)$ no puede ser igual a un número impar $(2a_2 - 1)$
- $a_1 > 0, a_2 \leq 0$: Completamente análogo al caso anterior.

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

Para demostrar: Función es sobreyectiva:
Sea $b \in B$
P.D: $\exists a \in \mathbb{Z}. f(a) = b$
Como $b \in B \Rightarrow b = 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$
Casos:

- b es una potencia de dos de exponente par:
  $b = 2^{2n_1}$ con $n_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow b = f(-n_1)$
- b es una potencia de dos de exponente impar:
  $b = 2^{2n_2-1}$ con $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow b = f(n_2)$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva
$\Rightarrow f$ es biyectiva $\square$

b) $f : B \to A$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } b = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } b \text{ es de la forma } \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ b & \text{si } b \text{ no es de la forma } \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

Por demostrar: Función es inyectiva:
Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$
P.D: $b_1 = b_2$
Casos:

- b_1 es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
  - $b_2 = 0$
    $f(b_1) = \frac{1}{n+2} = f(b_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0$
    $\Rightarrow$ Contradicción, pues $b_1 = \frac{1}{n}$
  - b_2 es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{n_1}, b_2 = \frac{1}{n_2}$
    $f(b_1) = \frac{1}{n_1+2} = f(b_2) = \frac{1}{n_2+2} \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

- $b_2 \neq 0$, $f(b_1) = \frac{1}{n+2} = f(b_2) = b_2 \Rightarrow$ Contradicción pues b_2 no es de la forma $\frac{1}{n}$

- $b_1 = 0$
  - $b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2$
  - $b_2 \neq 0 \wedge b_2$ no es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow f(b_1) = \frac{1}{2} = f(b_2) = b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Contradicción
- $b_1 \neq 0 \wedge b_1$ no es de la forma $\frac{1}{n}$
  - $b_2 \neq 0 \wedge b_2$ no es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow f(b_1) = b_1 = f(b_2) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

Por demostrar: Función es sobreyectiva:
Sea $a \in A$
P.D: $\exists b \in B.f(b) = a$
Casos:

- a es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$
  - $a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 0$
  - $a = \frac{1}{n+2}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a \Rightarrow b = \frac{1}{n}$
- a no es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow b = a$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva
$\Rightarrow f$ es biyectiva $\square$

Pregunta 2: Relaciones y Conjuntos

1. Demuestre que si $\mathcal{S}$ es una partición de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A

Solución

- Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.
- Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

- Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

2. Demuestre que existe un único conjunto vacío

   Solución: Por contradicción, supongamos que existen dos conjuntos vacíos distintos: $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$. Dado que todo conjunto tiene como subconjunto al vacío, y como $\varnothing_1$ y $\varnothing_2$ son conjuntos, tenemos que $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$, ya que estamos suponiendo que $\varnothing_1$ es vacío. Recíprocamente, se tiene que $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Entonces, tenemos que $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ y $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, de donde se concluye que $\varnothing_1 = \varnothing_2$, lo que contradice nuestra suposición incial de que existen dos conjuntos vacíos distintos.

3. Demuestre que para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$

   Solución: Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\varnothing \subseteq A$.

Pregunta 3

a) ¿Cuántas formas distintas hay de reordenar las letras de la palabra **ESTRELLA** si no se permite que las dos letras L estén juntas?

Solución:

Queremos determinar cuántas formas distintas existen de reordenar las letras de la palabra **ESTRELLA**, con la condición de que las dos letras "L" no estén juntas.

Podemos analizar las posibles palabras como tuplas de largo n (con n el número de letras de la palabra estrella), ya que importa el orden en que se ordenan estas letras. Debido a lo anterior, la cantidad de formas distintas de reordenar las letras sería el número de permutaciones de esta tupla. La palabra tiene 8 letras, entre las cuales hay dos repeticiones: la letra "E" aparece 2 veces y la letra "L" también aparece 2 veces. Por lo tanto, el total de permutaciones distintas sin restricciones es:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40320}{4} = 10080$$

Ahora, calculemos cuántas de estas permutaciones tienen las dos letras "L" juntas. Para ello, consideramos a ambas "L" como un solo elemento (ya que así aseguramos que siempre queden juntas), de modo que reducimos el problema a ordenar 7 elementos: "LL", E, S, T, R, A, E. Nótese que la letra "E" sigue repitiéndose, por lo que debemos dividir por 2!:

$$\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520$$

Finalmente, restamos del total las permutaciones donde las dos letras "L" están juntas, obteniendo así la cantidad de permutaciones en que las "L" están separadas:

$$10080 - 2520 = \boxed{7560}$$

Por lo tanto, hay $\boxed{7560}$ formas distintas de ordenar las letras de la palabra **ESTRELLA** sin que las dos letras "L" estén juntas.

b) Una empresa quiere asignar a 5 proyectos diferentes a 8 empleados, de modo que cada proyecto tenga exactamente un responsable, y ningún empleado pueda encargarse de más de un proyecto. Sin embargo, 3 de los empleados no están disponibles para trabajar en el proyecto 1.¿De cuántas formas se pueden asignar los 5 proyectos respetando esta restricción?

Solución:

Queremos determinar de cuántas formas es posible asignar 5 proyectos diferentes a 8 empleados, de modo que cada proyecto tenga exactamente un responsable distinto, y ningún empleado pueda encargarse de más de un proyecto. Sin embargo, existe una restricción: 3 de los empleados no están disponibles para trabajar en el proyecto 1.

En primer lugar, calculemos el total de asignaciones posibles sin restricciones. Para asignar 5 proyectos a 8 empleados, se deben seleccionar 5 empleados entre los 8 disponibles, es decir, un subconjunto del conjunto de empleados (combinación), y luego asignar a cada uno un proyecto distinto, lo que es equivalente a armar una tupla con los 5 empleados donde cada coordenada represente al proyecto asignado (permutación). Como el orden de asignación importa (cada proyecto es diferente), tenemos:

$$\binom{8}{5} \cdot 5! = 56 \cdot 120 = 6720$$

A continuación, debemos restar los casos en los que la asignación no cumple con la restricción: aquellos en los que uno de los 3 empleados no disponibles es asignado al proyecto 1.

Para contar estas asignaciones inválidas, elegimos primero a uno de los 3 empleados no disponibles para asignarlo al proyecto 1 (hay 3 formas de hacerlo). Luego, debemos elegir 4 empleados más de entre los 7 restantes (ya que uno fue asignado al proyecto 1), lo cual se puede hacer de:

$$\binom{7}{4} = 35$$

A estos 4 empleados los asignamos a los proyectos 2 al 5, lo que puede hacerse en $4! = 24$ formas. En total, el número de asignaciones inválidas es:

$$3 \cdot \binom{7}{4} \cdot 4! = 3 \cdot 35 \cdot 24 = 2520$$

Relacionando esto con lo visto en clases, es equivalente a fijar en la primera coordenada de la tupla a cualquiera de los 3 empleados no disponibles para el proyecto 1 y calcular las posibles combinaciones para las otras 4 coordenadas (calculamos los posibles subconjuntos de 4 empleados y las posibles formas de ordenarlos).
Finalmente, restamos las asignaciones inválidas del total, obteniendo la cantidad de formas válidas de asignar los proyectos respetando la restricción impuesta:

$$6720 - 2520 = \boxed{4200}$$

Por lo tanto, existen $\boxed{4200}$ formas válidas de asignar los 5 proyectos a los empleados, asegurando que ninguno de los 3 empleados no disponibles sea responsable del proyecto 1.

c) **Propuesto:** Cuantas contraseñas de 6 caracteres se pueden generar cumpliendo los siguientes requisitos:

- Usar solo letras mayúsculas del alfabeto inglés (26 letras).
- No se permiten letras repetidas.
- La contraseña debe contener al menos una vocal.
- La contraseña no puede comenzar con una vocal.

Solución:

Para obtener el total de contraseñas posibles que cumplan las restricciones ya descritas, utilizaremos la estrategia de primero calcular el total de posibles contraseñas sin ninguna restricción, para luego restar el número de contraseñas que no cumplen con las restricciones, obteniendo así el número de contraseñas válidas. Notemos que el número total de contraseñas posibles de 6 letras que utilicen el número de letras del alfabeto inglés, es igual a la cantidad de 6-permutaciones (recordar definición vista en clases) del conjunto de letras mayúsculas del alfabeto inglés (que tiene 26 elementos), esto viene dado por:

$$P(26,6) = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 165{,}765{,}600.$$

Ahora, debemos restarle a este total el número de contraseñas que no cumplen con las restricciones. Primero, contamos las contraseñas sin vocales. Hay 21 consonantes, y si se seleccionan 6 letras distintas de entre ellas:

$$P(21,6) = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 24{,}883{,}200.$$

Notar que lo que hicimos fue reducir en 5 el número de letras disponibles del alfabeto inglés al quitarle las vocales. Luego, contamos las contraseñas que comienzan con una vocal. Lo que haremos será fijar como primera letra de la contraseña una vocal (5 opciones) y luego multiplicamos este 5 por el número total de posibles combinaciones que tenemos para las otras 5 letras, lo que sería una 5-permutación de un conjunto de 25 elementos (ya que al fijar una vocal, nos quedan 25 letras disponibles de las 26 que teníamos originalmente):

$$5 \cdot P(25,5) = 5 \cdot (25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21) = 5 \cdot 1{,}275{,}120 = 31{,}878{,}000.$$

Un detalle a tener en cuenta en este problema es que debido a que existen dos restricciones (que entregan contraseñas inválidas), debemos fijarnos si la intersección de estas restricciones es o no vacía, ya que lo que estamos realizando en cierta forma es sumar la cantidad de elementos de dos conjuntos de contraseñas inválidas (cada uno generado por una restricción) para obtener el número total de elementos del conjunto de contraseñas inválidas, por lo que tenemos que aplicar regla de la suma generalizada para dos conjuntos. En este caso, es imposible que una contraseña no tenga vocales y a su vez empiece con una vocal, por lo que podemos concluir que la intersección entre estos dos conjuntos de contraseñas inválidas es vacía.

Ahora restándole el total de contraseñas inválidas al total de contraseñas, se obtiene el total de contraseñas válidas (nótese que se aplica la regla de la suma generalizada en el paréntesis, pero la intersección entre los dos conjuntos de contraseñas inválidas tiene 0 elementos):

$$165{,}765{,}600 - (24{,}883{,}200 + 31{,}878{,}000 - 0) = 108{,}004{,}400.$$

Por lo tanto, el número total de contraseñas que cumplen todas las condiciones es:

$$\boxed{108{,}004{,}400}.$$