Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Extra Examen

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Pregunta 1: Relaciones y Funciones

Sean A y B conjuntos y $(B, \preceq)$ un orden parcial. Considere el siguiente conjunto:

$$\phi(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$$

Además definimos la relación binaria $\preceq_\phi$ sobre $\phi(A, B)$ como:

$$f \preceq_\phi g \text{ si y solo si } f(a) \preceq g(a) \quad \forall a \in A$$

Demuestre que $(\phi(A, B), \preceq_\phi)$ es un orden parcial.

Solución

- Refleja: Como $\preceq$ es refleja, sabemos que:

$$f(a) \preceq f(a) \quad \forall a \in A \Rightarrow f \preceq_\phi f$$

- Antisimétrica:

  Suponemos que $f \preceq_\phi g$ y $g \preceq_\phi f$

$$\Rightarrow \forall a \in A(f(a) \preceq g(a)) \wedge \forall a \in A(g(a) \preceq f(a))$$
$$\Rightarrow \forall a \in A(f(a) \preceq g(a) \wedge g(a) \preceq f(a))$$

  Como $\preceq$ es antisimétrica:

$$\Rightarrow \forall a \in A(f(a) = g(a))$$
$$\Rightarrow f = g$$

- Transitiva:

  Suponemos que $f \preceq_\phi g$ y $g \preceq_\phi h$

  $$\Rightarrow \forall a \in A(f(a) \preceq g(a)) \land \forall a \in A(g(a) \preceq h(a))$$
  $$\Rightarrow \forall a \in A(f(a) \preceq g(a) \land g(a) \preceq h(a))$$

  Como $\preceq$ es transitiva:

  $$\Rightarrow \forall a \in A(f(a) \preceq h(a))$$
  $$\Rightarrow f \preceq_\phi h$$

Concluimos que $(\phi(A, B), \preceq_\phi)$ es un orden parcial.

Pregunta 2: Teoría de Números

1. Demuestre que un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus digitos es divisible por 3.

   ## Solucion

   Primero, descompongamos un número n en su expansion base 10:

   $$n = \sum_i 10^i a_i \quad a_i \in \{0, \ldots, 9\}$$

   Y veamos que la suma de sus dígitos tiene la siguiente forma:

   $$\sum_i a_i$$

   Ahora, la pregunta consiste en demostrar que:

   $$3 | \sum_i 10^i a_i \iff 3 | \sum_i a_i$$

   Notemos que:

   $$\sum_i 10^i a_i \bmod 3 = \sum_i (10^i a_i \bmod 3) \bmod 3 = \sum_i (10 \bmod 3)^i a_i \bmod 3 = \sum_i 1^i a_i \bmod 3$$

   Por lo tanto:

   $$3 | \sum_i 10^i a_i \iff \sum_i 10^i a_i \bmod 3 = 0 \iff \sum_i a_i \bmod 3 = 0 \iff 3 | \sum_i a_i$$

2. Demuestre que para cada número primo $p \geq 6$, se cumple que $p^2 - 1$ o $p^2 + 1$ es multiplo de 10.

Solucion

Notemos que para que $10|a$ debe ocurrir que $5|a$ y $2|a$.

Veamos que como p es primo, debe ser impar, por lo tanto:

$$p \bmod 2 = 1 \implies p^2 \bmod 2 = 1 \implies p^2 \pm 1 \bmod 2 = 0$$

Por lo tanto $2|p^2 \pm 1$

Como p primo ≥ 6, p no es divisible por 5, por lo tanto:

$$p \bmod 5 \neq 0 \implies p \bmod 5 \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Luego, si vemos el comportamiento de p^2:

$$p^2 \bmod 5 \in \{1^2 \bmod 5, 2^2 \bmod 5, 3^2 \bmod 5, 4^2 \bmod 5\} = \{1, 4\}$$

Ahora notemos dos casos:

- $$p^2 \bmod 5 = 1 \implies p^2 - 1 \bmod 5 = 0 \implies 5|p^2 - 1 \implies 10|p^2 - 1$$
- $$p^2 \bmod 5 = 4 \implies p^2 + 1 \bmod 5 = 0 \implies 5|p^2 + 1 \implies 10|p^2 + 1$$

Pregunta 3: Algoritmos y grafos

a) El número de operaciones de un algoritmo viene dado por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n-1) + n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Resuelva la ecuación y determine la complejidad del algoritmo.

b) Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que un grafo $G' = (V', E')$ es subgrafo isomorfo de G si y solo si se cumple que existe un grafo $H = (V_H, E_H)$ tal que:

- H es subgrafo de G, es decir, $V_H \subseteq V$, $E_H \subseteq E$ y $E_H \subseteq V_H \times V_H$.
- H es isomorfo a G'.

Demuestre que si G_1 es subgrafo isomorfo de G_2 y G_2 es subgrafo isomorfo de G_1, entonces $G_1 \cong G_2$.

Solución

a) Vamos a expandir el caso recursivo:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= (T(n-2) + n - 1) + n \\
&= T(n-2) + n + (n-1) \\
&= (T(n-3) + n - 2) + n + (n-1) \\
&= T(n-3) + n + (n-1) + (n-2) \\
&\vdots \\
&= T(n-i) + \sum_{k=1}^{i} (n-k+1)
\end{aligned}$$

Tomamos $i = n - 1$:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1) \\
&= T(1) + \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 1 + n \cdot (n-1) - \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) \\
&= 1 + n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \\
&= n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} + n \\
&= n^2 - \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{2n^2 - n(n-1)}{2} \\
&= \frac{2n^2 - n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

b) Sean G_1 y G_2 grafos tales que G_1 es subgrafo isomorfo de G_2 y G_2 es subgrafo isomorfo de G_1. Por simplicidad, en lo que sigue, si G es un grafo denotaremos por $V(G)$ a su conjunto de vértices y por $E(G)$ a su conjunto de aristas.

Dado que G_1 es subgrafo isomorfo de G_2, existe un subgrafo de G_2 tal que $G_1 \cong H_1$. Como H_1 es subgrafo de G_2, tenemos que $V(H_1) \subseteq V(G_2)$ y $E(H_1) \subseteq E(G_2)$. En particular, esto implica que:

$$|V(H_1)| \leq |V(G_2)| \tag{1}$$

y

$$|E(H_1)| \leq |E(G_2)| \tag{2}$$

Igualmente, como $G_1 \cong H_1$, tenemos que existe una función $f : V(G_1) \to V(H_1)$ biyectiva y tal que $(e_1, e_2) \in E(G_1)$ si y solo si $(f(e_1), f(e_2)) \in E(H_1)$.

Notemos entonces que dado que f es biyectiva, se tiene que:

$$|V(G_1)| = |V(H_1)| \tag{3}$$

Por lo demás, la propiedad de isomorfismo nos permite definir la biyección $h : E(G_1) \to E(H_1)$ definida por $h((e_1, e_2)) = (f(e_1), f(e_2))$, por lo que también se tiene que:

$$|E(G_1)| = |E(H_1)| \tag{4}$$

Juntando (1) y (3), obtenemos:

$$|V(G_1)| \leq |V(G_2)| \tag{5}$$

Por otra parte, juntando (2) y (4), obtenemos:

$$|E(G_1)| \leq |E(G_2)| \tag{6}$$

Por el mismo razonamiento, dado que G_2 también es subgrafo de G_1, tenemos que:

$$|V(G_2)| \leq |V(G_1)| \tag{7}$$

$$|E(G_2)| \leq |E(G_1)| \tag{8}$$

Luego, considerando lo anterior planteado:

$$(5) \land (7) \Rightarrow |V(G_1)| = |V(G_2)| \tag{9}$$

$$(6) \wedge (8) \Rightarrow |E(G_1)| = |E(G_2)| \tag{10}$$

Juntando ahora (3) y (9) obtenemos que $|V(H_1)| = |V(G_2)|$. Como además $V(H_1) \subseteq V(G_2)$, esto nos permite concluir que $V(H_1) = V(G_2)$.

Del mismo modo, juntando (4) y (10), obtenemos que $|E(H_1)| = |E(G_2)|$. Como también $E(H_1) \subseteq E(G_2)$, esto nos permite concluir que $E(H_1) = E(G_2)$.

Juntando ambas igualdades, obtenemos que $H_1 = G_2$, por lo que f, el isomorfismo entre G_1 y H_1, es de hecho un isomorfismo entre G_1 y G_2, por lo que $G_1 \cong G_2$.

Pregunta 4: Logica de Predicados

Solución

a) La afirmación es cierta, por lo que demostraremos que dada una interpretación $\mathcal{I}$, se tiene que

$$\mathcal{I} \models \forall x \forall y(Q(x) \vee P(y)) \text{ si y solo si } \mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{I} \models \forall x \forall y(Q(x) \vee P(y))$. Mostraremos que $\mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$. Consideremos dos casos: - $\mathcal{I} \models \forall x Q(x)$: en este caso es claro que $\mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$. - $\mathcal{I} \not\models \forall x Q(x)$: en este caso tenemos que existe $a \in \mathcal{I}(dom)$ tal que $\mathcal{I} \not\models Q(a)$. Como $\mathcal{I} \models \forall x \forall y(Q(x) \vee P(y))$, en particular se tiene que cumplir que $\mathcal{I} \models \forall y(Q(a) \vee P(y))$, y entonces necesariamente $\mathcal{I} \models \forall y P(y)$. Como y es una variable cuantificada, podemos cambiarla por x, por lo que $\mathcal{I} \models \forall x P(x)$, de donde concluimos que $\mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$. ($\Leftarrow$) Por contrapositivo, supongamos que $\mathcal{I} \not\models \forall x \forall y(Q(x) \vee P(y))$. Mostraremos que $\mathcal{I} \not\models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \not\models \forall x \forall y(Q(x) \vee P(y)) \\
\Leftrightarrow &\mathcal{I} \models \neg(\forall x \forall y(Q(x) \vee P(y))) \\
\Leftrightarrow &\mathcal{I} \models \exists x \exists y(\neg Q(x) \wedge \neg P(y))
\end{aligned}$$

Sabemos entonces que existen $a, b \in \mathcal{I}(\text{ dom })$ tales que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models \neg Q(a) \wedge \neg P(b) \\
\Leftrightarrow &\mathcal{I} \models \neg Q(a) \text{ y } \mathcal{I} \models \neg P(b)
\end{aligned}$$

y por generalización existencial:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models \exists x \neg Q(x) \text{ y } \mathcal{I} \models \exists x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow &\mathcal{I} \models \exists x \neg Q(x) \wedge \exists x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow &\mathcal{I} \not\models \neg(\exists x \neg Q(x) \wedge \exists x \neg P(x)) \\
\Leftrightarrow &\mathcal{I} \not\models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)
\end{aligned}$$

b) ($\Rightarrow$) Dado que $\Sigma \models \varphi$, demostraremos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Por contrapositivo, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible, y luego existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Esto implica que $\mathcal{I} \models \Sigma$ y que $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, y por lo tanto $\mathcal{I} \models \Sigma$ y $\mathcal{I} \not\models \varphi$, de donde concluimos que $\Sigma \not\models \varphi$. ($\Leftarrow$) Dado que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, demostraremos que $\Sigma \models \varphi$. Debemos demostrar que dada una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$, se tiene que $\mathcal{I} \models \varphi$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\mathcal{I} \models \Sigma$, necesariamente $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$, y luego $\mathcal{I} \models \varphi$. Concluimos entonces que $\Sigma \models \varphi$.