Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7 - Relaciones de orden

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Ejercicios

1. Pregunta 1

(a) Sea $\prec$ una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma. Para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) \prec (c, d)$ si y solo si $a \leq c$ y $b \leq d$, donde $<$ es la relación de orden usual sobre los naturales. Demuestre que $\prec$ es un orden parcial pero no un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Solución:

- **Reflexividad:** Para cualquier $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $a \leq a$ y $b \leq b$, por lo tanto, $(a, b) \prec (a, b)$.
- **Antisimetría:** Supongamos que $(a, b) \prec (c, d)$ y $(c, d) \prec (a, b)$. Entonces, $a \leq c$, $c \leq a$, $b \leq d$, y $d \leq b$. Esto implica $a = c$ y $b = d$.
- **Transitividad:** Si $(a, b) \prec (c, d)$ y $(c, d) \prec (e, f)$, entonces $a \leq c \leq e$ y $b \leq d \leq f$, por lo que $(a, b) \prec (e, f)$.

Para demostrar que no es un orden total, consideramos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. No se cumple ni $(1, 2) \prec (2, 1)$ ni $(2, 1) \prec (1, 2)$, mostrando que no todos los elementos son comparables.

(b) Sea $\preceq$ una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma. Para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) \preceq (c, d)$ si y solo si $(a < c)$ o $(a = c$ y $b \leq d)$, donde $<$ es la relación de orden usual sobre los naturales. Demuestre que $\preceq$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Solución:

Para probar que $\preceq$ es un orden total, necesitamos verificar la reflexividad, antisimetría, transitividad y totalidad:

- **Reflexividad:** Es directo.

- **Antisimetría:** Si $(a, b) \preceq (c, d)$ y $(c, d) \preceq (a, b)$, entonces $a = c$ y $b = d$.
- **Transitividad:** Es directo de la transitividad de $<$ y $\leq$.
- **Conexidad:** Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por tricotomía de los números naturales, necesariamente o $a < c$, o $c < a$ o $a = c$. Dado esto, se tiene que la relación es conexa.

(c) Generalice la definición de la relación $\preceq$ definida en (b) para el caso $\mathbb{N}^k$, con $k \geq 3$. Demuestre que la relación resultante es un orden total sobre $\mathbb{N}^k$.

Definimos la relación $\preceq$ sobre $\mathbb{N}^k$ por:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_k)$$

Solución:

si existe un índice $j \leq k$ tal que $a_i = b_i$ para todo $i < j$ y $a_j \leq b_j$. Analizamos las propiedades de esta relación:

- **Reflexividad:** Para cualquier $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$, siempre es cierto que $a_i = a_i$ para todo i, y por lo tanto, $(a_1, a_2, \dots, a_k) \preceq (a_1, a_2, \dots, a_k)$.
- **Antisimetría:** Supongamos que $(a_1, a_2, \dots, a_k) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_k)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_k) \preceq (a_1, a_2, \dots, a_k)$. Entonces debe existir un j tal que $a_i = b_i$ para todo $i < j$ y $a_j \leq b_j$, y un j' tal que $b_i = a_i$ para todo $i < j'$ y $b_{j'} \leq a_{j'}$. Como ambos son ciertos y se mantienen para todos los índices, esto implica que $a_i = b_i$ para todo i, demostrando la antisimetría.
- **Transitividad:** Si $(a_1, a_2, \dots, a_k) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_k)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_k) \preceq (c_1, c_2, \dots, c_k)$, entonces para algún j tenemos que $a_i = b_i$ para todo $i < j$ y $a_j \leq b_j$, y también para algún j' tenemos que $b_i = c_i$ para todo $i < j'$ y $b_{j'} \leq c_{j'}$. La transitividad se mantiene porque se preservan las igualdades y las desigualdades correspondientes se propagan, lo que implica que $(a_1, a_2, \dots, a_k) \preceq (c_1, c_2, \dots, c_k)$.
- **Conexidad:** Para cualquier par $(a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{N}^k$, la relación garantiza que siempre es posible establecer una comparación. Si en algún punto $a_i \neq b_i$, el orden se decide en el primer índice donde difieren; si son iguales en todas las dimensiones, son iguales bajo $\preceq$.

Pregunta 2

Sea A un conjunto. Una relación binaria $\prec$ sobre A se dice *orden estricto* si es asimétrica y transitiva.

(a) Demuestre que si $\prec$ es un orden estricto, entonces $\prec^{-1}$ es un orden estricto.

(b) Definimos

$$\preceq := \prec \cup I_A, \qquad \succeq := \prec^{-1} \cup I_A, \qquad I_A = \{\, (x,x) \mid x \in A\}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones (dado que $\prec$ es conexo):

(I) $\prec^{-1} \subsetneq \succeq$.

(II) $\preceq \cap \succeq = I_A$.

(III) $\prec \cup \prec^{-1} = (A \times A) \setminus I_A$.

(a) $\prec^{-1}$ es orden estricto.

Supongamos que $\prec$ es asimétrica y transitiva. Queremos ver que $\prec^{-1}$ también lo es.

Asimetría. Si $a \prec^{-1} b$, entonces por definición $b \prec a$. Como $\prec$ es asimétrica, de $b \prec a$ se sigue $\neg(a \prec b)$, y por tanto $\neg(b \prec^{-1} a)$. Concluimos que no hay pares (a,b) tales que $a \prec^{-1} b$ y $b \prec^{-1} a$.

Transitividad. Si $a \prec^{-1} b$ y $b \prec^{-1} c$, entonces $b \prec a$ y $c \prec b$. Por transitividad de $\prec$ se obtiene $c \prec a$, es decir $a \prec^{-1} c$. Así $\prec^{-1}$ es transitiva.

(b)

(I) $\prec^{-1} \subsetneq \succeq$:

Tomemos un $x \in A$, dada la definición de $\succeq$, $(x,x) \in \succeq$. Además, dado que $\prec^{-1}$ es asimetrico, $((x,x) \in \prec^{-1} \implies (x,x) \notin \prec^{-1})$, por lo que $(x,x) \notin \prec^{-1}$.

(II) $\preceq \cap \succeq = I_A$.

$$\preceq \cap \succeq = \prec \cup \preceq^{-1} \cup I_A$$

Pero, como $\prec$ es asimetrico:

$$a \prec b \implies b \not\prec a \implies a \not\prec^{-1} b \implies \prec \cup \preceq^{-1} = \emptyset$$

(III) $\prec \cup \prec^{-1} = (A \times A) \setminus I_A$.

Asumiendo que $\prec$ es orden estricto **total**:

$$\forall a, b \in A. a \prec b \vee b \prec a \implies \forall a, b \in A. a \prec b \vee a \prec^{-1} b$$

Pregunta 3

a) Sea $S \subseteq A$ con n elementos. Mostraremos que $\sup(S)$ e $\text{ínf}(S)$ existen y pertenecen a S por inducción simple sobre n.

BI: Sea $n = 1$. En este caso $S = \{s\}$, con $s \in A$. Por un lado, dado que $(A, \preceq)$ es un orden total, obtenemos que $s \preceq s$, y como s es el único elemento de S, se tiene que es cota inferior y superior. Por otro lado, dada una cota superior c, como $s \in S$ se tiene que $s \preceq c$ y por lo tanto $s = \sup(S)$. De manera análoga podemos concluir que $s = \text{ínf}(S)$.

HI: Suponemos que para todo $S \subseteq A$ con n elementos, tanto $\sup(S)$ como $\text{ínf}(S)$ existen y pertenecen a S.

TI: Sea $S \subseteq A$ con $n+1$ elementos: $A = \{s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}\}$. Sea $A' = \{s_1, \ldots, s_n\}$, el cual tiene n elementos. Por HI A' está acotado y $\sup(A'), \text{ínf}(A') \in A'$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\text{ínf}(A') = s_1$y $\sup(A') = s_n$. Tenemos 2 casos:

I) Si $s_n \preceq s_{n+1}$ entonces $s_i \preceq s_{n+1}$ para todo $i \in 1 \ldots n$ (dado que $s_n = \sup(A')$). Además, como $s_{n+1} \preceq s_{n+1}$ obtenemos que s_{n+1} es cota superior de A. Por otro lado, como $s_{n+1} \in A$ concluimos que $s_{n+1} = \sup(A)$.

II) Si $s_{n+1} \preceq s_n$ entonces $s_i \preceq s_n$ para todo $i \in 1 \ldots n+1$. Por lo tanto, s_n es cota superior de A y como $s_n \in A$ se tiene que $s_n = \sup(A)$.

De manera análoga se puede mostrar el resultado para el ínfimo de A.

b) Debemos mostrar que el supremo de S_1 es también supremo de S_2. Para esto mostraremos que $\sup(S_1)$ es cota superior de S_2 (I) y que para toda cota superior c de S_2 se tiene que $\sup(S_1) \preceq c$ (II).

I) Sea c una cota superior de S_1. Para todo $x \in S_1$ se cumple que $x \preceq c$. Como $S_2 \subsetneq S_1$, si $x' \in S_2$ entonces $x \in S_1$, y por lo tanto $x' \preceq c$. Luego, toda cota superior de S_1 es también una cota superior de S_2. En particular, $\sup(S_1)$ es una cota superior de S_1, y por ende también lo debe ser para S_2.

II) Por contradicción, sea c una cota superior de S_2 tal que $c \preceq \sup(S_1)$. Luego, c no puede ser cota superior de S_1 ya que es menor que su supremo. Entonces, debe existir un $x \in S_1$ tal que $c \preceq x$. Luego, por la propiedad del conjunto S_2, debe existir un $y \in S_2$ tal que $x \preceq y$. Finalmente, por transitividad obtenemos que $c \preceq y$ lo que contradice el hecho de que c es cota superior de S_2. Concluimos que $\sup(S_2) = \sup(S_1)$.