Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 13 - Grafos y árboles 2

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Soluciones

Problema 1 - La gira del caballo

El problema de la gira de caballo consiste en encontrar un ciclo de movimientos válidos tal que el caballo recorra el tablero $n \times m$ de ajedrez completo.

Demuestre los siguiente:

1. Si $G = (V, E)$ un grafo bipartito cualquiera y $|V|$ es impar, entonces G no tiene ciclo Hamiltoneano.
2. El tablero $n \times m$ no tiene gira de caballo si n y m son impares.

Solución

1. Si $G = (V, E)$ un grafo bipartito cualquiera y $|V|$ es impar, entonces G no tiene ciclo Hamiltoneano.

   Tomemos un grafo $G = (V, E), \quad |V| = 2n + 1$ Por contradicción, digamos que $v_0, \ldots, v_m$ es un ciclo hamiltoneano en G. Como es hamiltoneano, este camino pasa por todos los vértices y termina en v_0. Por lo tanto, el camino debe ser de largo $2n+2$, con $v_0 = v_{2n+1}$.

   Como el grafo es bipartito, podemos ver que la coloración de cada par de nodos cumple que $C(v_i) \neq C(v_{i+1})$. Sin perdida de generalidad, asumamos que $C(v_0) = 0$ y $C(v_1) = 1$. Luego, la coloración se va a alternar entre 1 y 0 y podemos ver que:

$$C(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{i es par} \\ 1 & \text{i es impar} \end{cases}$$

   Sin embargo, $C(v_0) = 0 \neq 1 = C(v_{2n+1})$, que se contradice con $v_0 = v_{2n+1}$. Por lo tanto, G no tiene un camino Hamiltoneano.

2. El tablero $n \times m$ no tiene gira de caballo si n y m son impares.

   Definamos un grafo $G = (V, E)$, donde V son todas las posiciones en el tablero y E son todos los movimientos que puede realizar el caballo. Notar que solo va a existir una gira de caballo si G tiene un camino hamiltoneano.

   Notemos que:

$$V = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$$
$$|V| = nm$$

   Y como n y m son impares, $|V|$ impar.

   Definamos la coloracion del tablero de la siguiete forma:

$$C((x, y)) = \begin{cases} 0 & x + y \text{ es par} \\ 1 & x + y \text{ es impar} \end{cases}$$

   Donde x, y son las coordenadas de la posicion del tablero. Esta coloracion del tablero es equivalente a los colores blanco y negro en un tablero de ajedrez. Veamos que esta es una 2-coloración válida: Cada vez que se mueve un caballo, este avanza 2 casillas en una dirección y 1 casilla en la otra, podemos ver que:

$$C(x, y) \neq C(x \pm 2, y \pm 1) = C(x \pm 1, y \pm 2)$$

   Esto es equivalente a ver que el caballo siempre se mueve de blanco a negro o viceversa. Esto comprueba que nuestra 2-coloración es válida y G es bipartito.

   Finalmente, ocupando el lema de la parte anterior, concluimos que G no tiene camino hamiltoneano.

Problema 2 - Arboles

Demuestre que un grafo T = (V, E) es un árbol, si y solo si es conexo y acíclico.

Solución: ($\Rightarrow$) Primero si T es un árbol es por definición conexo, nos falta demostrar entonces que un árbol no puede tener ciclos. Supongamos que T tuviese un ciclo, y sea C un ciclo en T que pasa por los vértices u y v. Supongamos que C parte (y termina) en u, entonces C es de la forma $(u, \dots, v, \dots, u)$, por lo que se puede dividir en dos porciones, una para ir de u a v, digamos p_1, y otra (distinta ya que un ciclo no repite aristas) para ir de v a u, digamos p_2. Resulta entonces que p_1 y p_2 son dos caminos distintos entre u y v en T, lo que contradice el hecho de que T es un árbol. Finalmente T no puede tener ciclos.

($\Leftarrow$) Como T es conexo, para cada par de vértices existe un camino que los une. Falta demostrar que ese camino es único. Supongamos entonces que T no tiene ciclos pero que sin embargo existe un par de vértices con dos caminos distintos uniéndolos en T. Sean u y v estos vértices y sean p_1 y p_2 los dos caminos distintos en T que unen a u con v. Dado que estos caminos son distintos entonces ambos tienen al menos tres vértices. Sea x el vértice anterior al primer vértice que diferencia a p_1 y p_2 (note que x está en p_1 y en p_2). Sea y el vértice siguiente a x que pertenece simultáneamente a p_1 y p_2. El camino entre x e y a través de p_1 junto con el camino entre x e y a través de p_2 forman un ciclo en T lo que contradice nuestra hipótesis de que T no tiene ciclos. Finalmente no pueden existir dos caminos distintos entre u y v, de donde concluimos que para todo par de vértices en T existe un único camino que los une y por lo tanto T es un árbol.

Problema 3

a) Un *camino Euleriano* en un grafo G es un camino no cerrado que contiene a todas las aristas y vértices de G. Recuerde que un camino no repite aristas. Suponga además que G puede tener más de una arista entre 2 vértices.

   Demuestre que un grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y tiene exactamente 2 vértices de grado impar.

b) Sea $T = (V, E)$ un árbol, y sea v su vértice con grado máximo, al que llamaremos d. Demuestre que T tiene al menos d hojas.

Soluciones

a) ($\Rightarrow$) Supongamos que un grafo G tiene un camino Euleriano que comienza en un vértice u y termina en un vértice v, a saber $P = (u, \ldots, v)$. Como P contiene a todos los vértices de G, es claro que G es conexo. Por otra parte, si agregamos una nueva arista e entre u y v obtenemos un grafo G' que contiene un ciclo Euleriano, el cual se forma al cerrar P con la nueva arista e. Sabemos también que un grafo sin loops es Euleriano si y solo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par. Entonces, todos los vértices de G' tienen grado par, lo que implica que los únicos vértices de grado impar en G son u y v.

   ($\Leftarrow$) Supongamos ahora que G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar. Sean u y v estos vértices. Si agregamos una arista e entre u y v, obtenemos un grafo G' tal que todos sus vértices tienen grado par, por lo que implica que G' tiene un ciclo Euleriano. Luego, G tiene un camino Euleriano formado por el ciclo Euleriano de G' al sacarle la arista e.

b) Sea v el vértice con grado máximo d en T. Por definición, cada arista del árbol es una arista de corte, por lo que toda arista incidente en v lo es. Entonces, si eliminamos v obtenemos un grafo con d componentes.

   Ahora bien, notemos que cada una de las d componentes resultantes es un árbol. Si alguna de ellas no lo fuera, contendría un ciclo que sería subgrafo de T, contradiciendo que este sea un árbol. Para demostrar que cada componente T' aporta al menos 1 hoja a T, notemos que:

- Si la componente T' tiene un nodo, dicho nodo tiene grado 1 en T y por lo tanto es hoja.
- Si la componente T' tiene al menos dos nodos, como no tiene ciclos, entonces deben existir al menos dos nodos con grado 1 en T'. Luego, al menos uno de ellos tiene grado 1 en T.

Concluimos que T tiene al menos d hojas.