Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 12 - Grafos y árboles

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Resumen

Grafos

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V)**:
  - Vertices adyacentes Dado un grafo G = (V, E), dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
  - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de aristas (E)**
  - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
  - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
  - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
  - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
  - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
  - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.

- Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
- Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
- Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
- Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes
- Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v: $N_G(v) = \{u|(v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
  - Handshaking lemma: $\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
  - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
  - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

Árboles

- **Árbol:** Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si para cada par de vértices $x, y \in V$ existe un único camino entre ellos. También existen defininciones equivalentes tales como:
  - Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si y solo si es conexo y acíclico.
  - Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si y solo si es conexo y todas sus aristas son de corte.
  - Un grafo $T = (V, E)$ con n vértices es un árbol si y solo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

  A partir de esto,

  - Llamaremos a uno de los vértices $r \in V$ como la raíz del árbol y a los vértices de grado menor o igual a 1 hojas.
- **Bosque:** Un grafo $T = (V, E)$ es un bosque si para cada par de vértices $x, y \in V$ si existe un camino entre ellos, este es único.

- **Teorema:** Todo árbol es un grafo bipartito.
- **Teorema:** Si T es un árbol y v es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ es un árbol.
- Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r y x un vértice cualquiera. Luego,
  - La profundidad de x es el largo del camino que lo une con r (r tiene profundidad 0).
  - La altura o profundidad del árbol es el máximo de las profundidades de sus vértices.
  - Los ancestros de x corresponden a los vértices que aparecen en el camino entre él y r (x es ancestro de sí mismo).
  - El padre de x es su ancestro (propio) con mayor profundidad. Se dice que x es hijo de su padre.
  - Dos vértices x e y con el mismo padre son hermanos.
- **Arbol Binario:** Un árbol con raíz se dice binario si todo vértice tiene grado a lo más 3 o equivalentemente si todo vértice tiene a lo más dos hijos.

Ejercicio 1

Demuestre por inducción fuerte que todo árbol $T = (V, E)$ es 2 coloreable.

Ejercicio 2

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $|V| = |E|$. Demuestre que si ningún vértice de G tiene grado 0 o 1, entonces todos los vértices de G tienen grado 2.

b) Sea $n \geq 1$. Un *n-cubo* es un grafo $G_n = (V_n, E_n)$ donde:

- $V_n = \{0, 1\}^n$; vale decir, cada vértice es una n-tupla de 0s y 1s.

  Note que cada n-tupla posible es un vértice de G_n.

- Dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada.

Demuestre que G_n es Euleriano si y solo si n es par.

Ejercicio 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v, denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v, mientras que el ancho de G, denotado como $A(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices. Demuestre que si $A(G) \geq 4$ entonces $A(\bar{G}) \leq 2$.