Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

22 de Mayo de 2025

Duración: 2:30 hrs.

Pregunta 1

Sea $m > 0$. Demuestre que en toda secuencia de m enteros existe uno o más términos consecutivos cuya suma es divisible por m.

Solución

Sea $a_1, \ldots, a_m$ una secuencia de enteros.

- Consideramos los valores $S_i = a_1 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq m$. Si alguna suma S_i es divisible por m, entonces estamos listos.
- En caso contrario, asuma que al dividir los S_i por m sólo obtenemos restos en $\{1, \ldots, m-1\}$.
- Dado definimos m sumas, el principio del palomar nos dice que deben existir S_i y S_j tal que al dividirlas por m obtenemos el mismo resto $k \in \{1, \ldots, m-1\}$.
- Concluímos que $S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$ es divisible por m.

Pauta (6 ptos)

- 1.0 puntos por mostrar una secuencia de sumas.
- 2.0 puntos por notar que los restos de las sumas pertenecen a $\{1, \ldots, m-1\}$.
- 2.0 puntos por usar el principio del palomar.
- 1.0 puntos por concluir una suma divisible por m.

Pregunta 2

Un *cuasi-orden* en un conjunto A es una relación binaria en A que es refleja y transitiva. Demuestre que si R es un cuasi-orden en A, entonces $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.

Solución

Debemos demostrar que $R \cap R^{-1}$ es refleja, simétrica y transitiva.

- Dado que R es refleja, $R \cap R^{-1}$ también lo es.
- Considere ahora un par $(a, b) \in R \cap R^{-1}$, por definición se cumple que (i) $(a, b) \in R$ y (ii) $(a, b) \in R^{-1}$. Por definición de (i) se tiene que $(b, a) \in R^{-1}$ y de (ii) que $(b, a) \in R$. Concluimos que $(b, a) \in R \cap R^{-1}$, y por lo tanto, que $R \cap R^{-1}$ es simétrica.
- Considere, por último, pares $(a, b), (b, c) \in R \cap R^{-1}$. Luego, $(a, b), (b, c) \in R$ y como R es transitiva se tiene que $(a, c) \in R$. Luego, $(a, b), (b, c) \in R^{-1}$ y por definición $(c, b), (b, a) \in R$. Además, $(c, a) \in R$ ya que R es transitiva, y entonces $(a, c) \in R^{-1}$. Como $(a, c) \in R \cap R^{-1}$, concluimos que $R \cap R^{-1}$ es transitiva.

Pauta (6 ptos)

- 2.0 puntos por reflexividad.
- 2.0 puntos por simetría.
- 2.0 puntos por transitividad.

Pregunta 3

Demuestre que si A, B son conjuntos enumerables, entonces $A \times B$ también lo es.

Solución

- Dado que A, B son enumerables, existen funciones biyectivas $f : A \to \mathbb{N}$ y $g : B \to \mathbb{N}$.
- Defina la función $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Entonces se cumple que $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una biyección.
- Por otro lado, sabemos de clases que hay biyección $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. La composición de h y t es una biyacción entre $A \times B$ y $\mathbb{N}$, lo que demuestra que $A \times B$ es enumerable.

Pauta (6 ptos)

- 2.0 puntos por asumir que existen biyecciones.
- 2.0 puntos por definir una nueva biyección correcta.
- 2.0 puntos por componer la nueva biyección con el resultado visto en clases.

Alternativa: 6.0 puntos si, debido a que A y B son enumerables, ordena las tuplas en una tabla y argumenta que recorriendo las diagonales se puede enlistar $A \times B$.

Pregunta 4

Una relación binaria sobre un conjunto A es de *equivalencia*, si es refleja, simétrica, y transitiva. Sea R una relación binaria cualquiera sobre un conjunto A. Definimos $R^{-1} = \{(c,d) \mid (d,c) \in R\}$ y $R_\sim$ como la "menor" relación de equivalencia que contiene a R.
Esto significa que (1) $R \subseteq R_\sim$, (2) $R_\sim$ es una relación de equivalencia, y (3) para toda relación de equivalencia S que satisface $R \subseteq S$ se cumple que $R_\sim \subseteq S$.
Demuestre que para todo $a, b \in A$ se tiene que $(a,b) \in R_\sim$ **si y solo si** para algún $n > 0$ existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ que cumplen lo siguiente: (1) $a_1 = a$, (2) $a_n = b$, y (3) $(a_i, a_{i+1}) \in R \cup R^{-1}$, para todo $1 \leq i < n$.

Solución

Defina R_n como el conjunto de pares $(a,b) \in A$ que cumplen lo siguiente: existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que (1) $a_1 = a$, (2) $a_n = b$, y (3) $(a_i, a_{i+1}) \in R \cup R^{-1}$, para todo $1 \leq i < n$. Queremos demostrar que $R_\sim = \bigcup_{n>0} R_n$.
$\Rightarrow$ Demostraremos que $R_\sim \subseteq \bigcup R_n$. Basta demostrar que $\bigcup R_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

- Para todo $a \in A$, $a_1 = a$ y $a_n = a$ cuando $n = 1$, entonces $(a,a) \in R_1$. Por lo tanto, $\bigcup R_n$ es refleja.
- Por otro lado, si $(a,b) \in R_n$ entonces la secuencia $a, \ldots, b$ se puede invertir para obtener $b, \ldots, a$ ya que cada (a_{i+1}, a_i) también está en $R \cup R^{-1}$. Como $(b,a) \in R_n$, se tiene que $\bigcup R_n$ es simétrica.
- Por último, si $(a,b) \in R_n$ y $(b,c) \in R_m$, se tienen las secuencias $a, \ldots, b$ de tamaño n y $b, \ldots, c$ de tamaño m. Por lo que existe la secuencia $a, \ldots, c$ de tamaño $n+m$. Como $(a,c) \in R_{n+m}$, concluimos que $\bigcup R_n$ es transitiva.

$\Leftarrow$ Demostramos que $R_n \subseteq R_\sim$ por inducción en n.

- **CB**: R_1 tenemos $a_1 = a_n = a = b$. Pero $(a,a) \in R_\sim$ ya que $R_\sim$ es refleja.
- **HI**: $R_n \subseteq R_\sim$.
- **TI**: Para el caso $n+1$, suponga $(a,c) \in R_{n+1}$. Existen elementos $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$ que cumplen lo siguiente: (1) $a_1 = a$, (2) $a_{n+1} = c$, y (3) $(a_i, a_{i+1}) \in R \cup R^{-1}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Suponga que $a_n = b$, la secuencia de tamaño $n+1$ se puede separar. De la secuencia $a, ..., b$ se ontiene que $(a,b) \in R_n$ y de la secuencia b, c que $(b,c) \in R_2$. Por **HI**, $(a,b) \in R_\sim$ y $(b,c) \in R_\sim$. Concluímos que $(a,c) \in R_\sim$ ya que $R_\sim$ es transitiva.

Pauta (6 ptos)

- 3.0 puntos por la primera dirección (1 punto por propiedad).
- 3.0 puntos por la segunda dirección (1 punto por cada parte de la inducción).