Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía I2 - Repaso Interrogación 2

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Ejercicios

Pregunta 1 funciones

Para cada par de conjuntos A, B encuentre una biyección explícita entre ellos. Demuestre.

(a) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{n \mid n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$

(b) $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ y $B = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

Solución

a) Mapearemos los enteros positivos a las potencias de dos con exponente impar, y los enteros negativos (y el cero) a las potencias de dos con exponente par.

$f : \mathbb{Z} \to B$

$$f(a) = \begin{cases} 2^{-2a} & \text{si } a \leq 0 \\ 2^{2a-1} & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Para demostrar: Función es inyectiva:
Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$
P.D: $a_1 = a_2$
Casos:

- $a_1, a_2 \leq 0$
  $f(a_1) = 2^{-2a_1} = f(a_2) = 2^{-2a_2} \Rightarrow -2a_1 = -2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$
- $a_1, a_2 > 0$
  $f(a_1) = 2^{2a_1-1} = f(a_2) = 2^{2a_2-1} \Rightarrow 2a_1 - 1 = 2a_2 - 1 \Rightarrow a_1 = a_2$

- $a_1 \leq 0, a_2 > 0$
  $f(a_1) = 2^{-2a_1} = f(a_2) = 2^{2a_2-1} \Rightarrow -2a_1 = 2a_2 - 1$
  $\Rightarrow$ Contradicción pues un número par $(-2a_1)$ no puede ser igual a un número impar $(2a_2 - 1)$

- $a_1 > 0, a_2 \leq 0$: Completamente análogo al caso anterior.

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

Para demostrar: Función es sobreyectiva:
Sea $b \in B$
P.D: $\exists a \in \mathbb{Z}. f(a) = b$
Como $b \in B \Rightarrow b = 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$
Casos:

- b es una potencia de dos de exponente par:
  $b = 2^{2n_1}$ con $n_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow b = f(-n_1)$

- b es una potencia de dos de exponente impar:
  $b = 2^{2n_2-1}$ con $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow b = f(n_2)$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva
$\Rightarrow f$ es biyectiva $\square$

b) $f : B \to A$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } b = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } b \text{ es de la forma } \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ b & \text{si } b \text{ no es de la forma } \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

Por demostrar: Función es inyectiva:
Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$
P.D: $b_1 = b_2$
Casos:

- b_1 es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
  - $b_2 = 0$
    $f(b_1) = \frac{1}{n+2} = f(b_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0$
    $\Rightarrow$ Contradicción, pues $b_1 = \frac{1}{n}$
  - b_2 es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{n_1}, b_2 = \frac{1}{n_2}$
    $f(b_1) = \frac{1}{n_1+2} = f(b_2) = \frac{1}{n_2+2} \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

- $b_2 \neq 0$, $f(b_1) = \frac{1}{n+2} = f(b_2) = b_2 \Rightarrow$ Contradicción pues b_2 no es de la forma $\frac{1}{n}$

- $b_1 = 0$
  - $b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2$
  - $b_2 \neq 0 \land b_2$ no es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow f(b_1) = \frac{1}{2} = f(b_2) = b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Contradicción

- $b_1 \neq 0 \land b_1$ no es de la forma $\frac{1}{n}$
  - $b_2 \neq 0 \land b_2$ no es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow f(b_1) = b_1 = f(b_2) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

Por demostrar: Función es sobreyectiva:
Sea $a \in A$
P.D: $\exists b \in B. f(b) = a$
Casos:

- a es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$
  - $a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 0$
  - $a = \frac{1}{n+2}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a \Rightarrow b = \frac{1}{n}$
- a no es de la forma $\frac{1}{n} \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow b = a$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva
$\Rightarrow f$ es biyectiva $\square$

Pregunta 2: Relaciones y Conjuntos

1. Demuestre que si $\mathcal{S}$ es una partición de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A

Solución

- Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.

- Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

- Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

2. Demuestre que existe un único conjunto vacío

   Solución: Por contradicción, supongamos que existen dos conjuntos vacíos distintos: $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$. Dado que todo conjunto tiene como subconjunto al vacío, y como $\varnothing_1$ y $\varnothing_2$ son conjuntos, tenemos que $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$, ya que estamos suponiendo que $\varnothing_1$ es vacío. Recíprocamente, se tiene que $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Entonces, tenemos que $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ y $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, de donde se concluye que $\varnothing_1 = \varnothing_2$, lo que contradice nuestra suposición incial de que existen dos conjuntos vacíos distintos.

3. Demuestre que para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$

   Solución: Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\varnothing \subseteq A$.

Pregunta 3

a) ¿Cuántas formas distintas hay de reordenar las letras de la palabra **ESTRELLA** si no se permite que las dos letras L estén juntas?

   Solución:

   Queremos determinar cuántas formas distintas existen de reordenar las letras de la palabra **ESTRELLA**, con la condición de que las dos letras "L" no estén juntas.

   Podemos analizar las posibles palabras como tuplas de largo n (con n el número de letras de la palabra estrella), ya que importa el orden en que se ordenan estas letras. Debido a lo anterior, la cantidad de formas distintas de reordenar las letras sería el número de permutaciones de esta tupla. La palabra tiene 8 letras, entre las cuales hay dos repeticiones: la letra "E" aparece 2 veces y la letra "L" también aparece 2 veces. Por lo tanto, el total de permutaciones distintas sin restricciones es:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40320}{4} = 10080$$

   Ahora, calculemos cuántas de estas permutaciones tienen las dos letras "L" juntas. Para ello, consideramos a ambas "L" como un solo elemento (ya que así aseguramos que siempre queden juntas), de modo que reducimos el problema a ordenar 7 elementos: "LL", E, S, T, R, A, E. Nótese que la letra "E" sigue repitiéndose, por lo que debemos dividir por 2!:

$$\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520$$

Finalmente, restamos del total las permutaciones donde las dos letras "L" están juntas, obteniendo así la cantidad de permutaciones en que las "L" están separadas:

$$10080 - 2520 = \boxed{7560}$$

Por lo tanto, hay $\boxed{7560}$ formas distintas de ordenar las letras de la palabra **ESTRELLA** sin que las dos letras "L" estén juntas.

b) Una empresa quiere asignar a 5 proyectos diferentes a 8 empleados, de modo que cada proyecto tenga exactamente un responsable, y ningún empleado pueda encargarse de más de un proyecto. Sin embargo, 3 de los empleados no están disponibles para trabajar en el proyecto 1.¿De cuántas formas se pueden asignar los 5 proyectos respetando esta restricción?

Solución:

Queremos determinar de cuántas formas es posible asignar 5 proyectos diferentes a 8 empleados, de modo que cada proyecto tenga exactamente un responsable distinto, y ningún empleado pueda encargarse de más de un proyecto. Sin embargo, existe una restricción: 3 de los empleados no están disponibles para trabajar en el proyecto 1.

En primer lugar, calculemos el total de asignaciones posibles sin restricciones. Para asignar 5 proyectos a 8 empleados, se deben seleccionar 5 empleados entre los 8 disponibles, es decir, un subconjunto del conjunto de empleados (combinación), y luego asignar a cada uno un proyecto distinto, lo que es equivalente a armar una tupla con los 5 empleados donde cada coordenada represente al proyecto asignado (permutación). Como el orden de asignación importa (cada proyecto es diferente), tenemos:

$$\binom{8}{5} \cdot 5! = 56 \cdot 120 = 6720$$

A continuación, debemos restar los casos en los que la asignación no cumple con la restricción: aquellos en los que uno de los 3 empleados no disponibles es asignado al proyecto 1.

Para contar estas asignaciones inválidas, elegimos primero a uno de los 3 empleados no disponibles para asignarlo al proyecto 1 (hay 3 formas de hacerlo). Luego, debemos elegir 4 empleados más de entre los 7 restantes (ya que uno fue asignado al proyecto 1), lo cual se puede hacer de:

$$\binom{7}{4} = 35$$

A estos 4 empleados los asignamos a los proyectos 2 al 5, lo que puede hacerse en $4! = 24$ formas. En total, el número de asignaciones inválidas es:

$$3 \cdot \binom{7}{4} \cdot 4! = 3 \cdot 35 \cdot 24 = 2520$$

Relacionando esto con lo visto en clases, es equivalente a fijar en la primera coordenada de la tupla a cualquiera de los 3 empleados no disponibles para el proyecto 1 y calcular las posibles combinaciones para las otras 4 coordenadas (calculamos los posibles subconjuntos de 4 empleados y las posibles formas de ordenarlos).
Finalmente, restamos las asignaciones inválidas del total, obteniendo la cantidad de formas válidas de asignar los proyectos respetando la restricción impuesta:

$$6720 - 2520 = \boxed{4200}$$

Por lo tanto, existen $\boxed{4200}$ formas válidas de asignar los 5 proyectos a los empleados, asegurando que ninguno de los 3 empleados no disponibles sea responsable del proyecto 1.