Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 9 - Teorema del palomar y diagonalización de Cantor

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Pregunta 1

Tomemos un conjunto de puntos $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ con $i = 1, 2, \ldots, 9$ y coordenadas enteras. Demustre, usando el principio del palomar, que existe al menos una linea entre dos de estos puntos tal que el punto medio tambien tiene coordenadas enteras.

Solución: Tomemos un conjunto de puntos $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ con $i = 1, 2, \ldots, 9$ y coordenadas enteras. Demustre, usando el principio del palomar, que existe al menos una linea entre dos de estos puntos tal que el punto medio tambien tiene coordenadas enteras.

El punto medio entre (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) es:

$$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

Por lo tanto, esto es equivalente a encontrar dos puntos donde, en cada coordenada, ambos números sean pares o ambos impares.

Definamos la paridad de un número entero de la siguiente manera:

$$par(n) = \begin{cases} 1 \text{ n es par} \\ 0 \text{ n es impar} \end{cases}$$

Y luego la paridad de en punto con coordenadas enteras:

$$par_3((x, y, z)) = (par(x), par(y), par(z))$$

Definamos $A = \{(x_i, y_i, z_i) | i \leq 9\}$ y notemos que, si dos puntos tienen la misma paridad, su punto medio va a tener coordenadas enteras.

Luego $par_3 : A \to \{0,1\}^3$. Veamos que:

$$|A| = 9 > 8 = 2^3 = |\{0,1\}^3|$$

Por lo tanto, por principio del palomar, par_3 no es inyectivo y debe exisitr (x_i, y_i, z_i) y (x_j, y_j, z_j) tal que:

$$par_3((x_i, y_i, z_i)) = par_3((x_j, y_j, z_j))$$

Pregunta 2

a) Demuestre que el intervalo abierto $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ no es enumerable.

Solución

Por contradicción, supongamos que $(0,1)$ es enumerable. Entonces, existe una lista infinita de los reales en $(0,1)$:

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

donde cada real en $(0,1)$ aparece exactamente una vez (estableciendo con esto una biyección con $\mathbb{N}$). Notemos que cada r_i es un número decimal de la forma

$$r_i = 0, d_{i0}d_{i1}d_{i2}d_{i3}\ldots, \quad \text{con } d_{ij} \in \{0,\ldots,9\}$$

La lista se vería así:

Reales	Representación decimal					
r_0	0,	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Considere ahora el siguiente número:

$$r = 0.d_0d_1d_2\ldots d_i\ldots, \quad \text{donde } d_i = (d_{ii}+1) \mod 10$$

Es decir, construimos r tomando la diagonal de la lista y sumando 1 a cada dígito:

Reales	Representación decimal					
r_0	0,	$\boxed{d_{00}}$	d_{01}	d_{02}	d_{03}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	$\boxed{d_{11}}$	d_{12}	d_{13}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	$\boxed{d_{22}}$	d_{23}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	$\boxed{d_{33}}$	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	$\boxed{d_{44}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Es claro que $r \in (0,1)$. Ahora, es fácil notar que $r \neq r_0$, pues difieren en el primer dígito decimal, y de la misma manera $r \neq r_1$, pues difieren en el segundo dígito decimal. En general, se cumple que $r \neq r_i$, pues difieren en el $(i+1)$-ésimo dígito decimal, y por lo tanto r es distinto a todos los números de la lista. Hemos encontrado un elemento del conjunto que no aparece en la lista, lo que contradice nuestra suposición inicial de que $(0,1)$ es enumerable. Concluimos entonces que $(0,1)$ no es enumerable.

b) Sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto potencia de $\mathbb{N}$, ¿Es el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ enumerable? Demuestre su afirmación

Solución: Supongamos, para obtener una contradicción, que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es numerable. Entonces, existe una enumeración de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

Definimos el subconjunto diagonal:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$$

Ahora, supongamos que $D = A_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Consideramos si $k \in D$:

- Si $k \in D$, entonces por definición de D, $k \notin A_k = D$. Contradicción.
- Si $k \notin D$, entonces por definición de D, $k \in A_k = D$. Contradicción.

En ambos casos se obtiene una contradicción. Por lo tanto, D no está en la enumeración, lo que contradice que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sea numerable.

Conclusión: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.

Pregunta 3

Sea

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \ N | f \text{ inyectiva}\}$$

Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}$ es no numerable.

Solución:

Supongamos que $\mathcal{F}$ es numerable.
Entonces existe una forma de listar los elementos de $\mathcal{F}$. Suponemos que ese orden es:

$$f_0, f_1, f_2, \ldots$$

con $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva para $i \geq 0$

Consideremos la siguiente tabla:

	0	1	2	3
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Definimos la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$g(i) = 1 + i + \sum_{k=0}^{i} f_k(k)$$

Para la demostración se debe probar que g es inyectiva:
Sean $i \neq j$ (sin pérdida de generalidad $i < j$)

$$g(j) = 1 + j + \sum_{k=0}^{j} f_k(k) = 1 + i + (j - i) + \sum_{k=0}^{i} f_k(k) + \sum_{k=i+1}^{j} f_k(k)$$

$$= g(i) + (j - i) + \sum_{k=i+1}^{j} f_k(k)$$

Como $j > i \Rightarrow j - i > 0$ y $g(j) > g(i)$
Entonces $g(j) \neq g(i)$. Esto prueba que g es inyectiva.

Como g es inyectiva, debe aparecer en la lista de F, i.e., en alguna fila de la tabla.
Supongamos que aparece en la fila m.

$$f_m(m) = g(m) = 1 + m + \sum_{k=0}^{m} f_k(k)$$

$$= 1 + m + \sum_{k=0}^{m-1} f_k(k) + f_m(m)$$

Como $g(m) \neq f_m(m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $g(m)$ no aparece en la lista. Como es función inyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, debería aparecer. Esto es una contradicción.

$\therefore$ F no es numerable.