Teoría de grafos

Clase 22

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline


haha

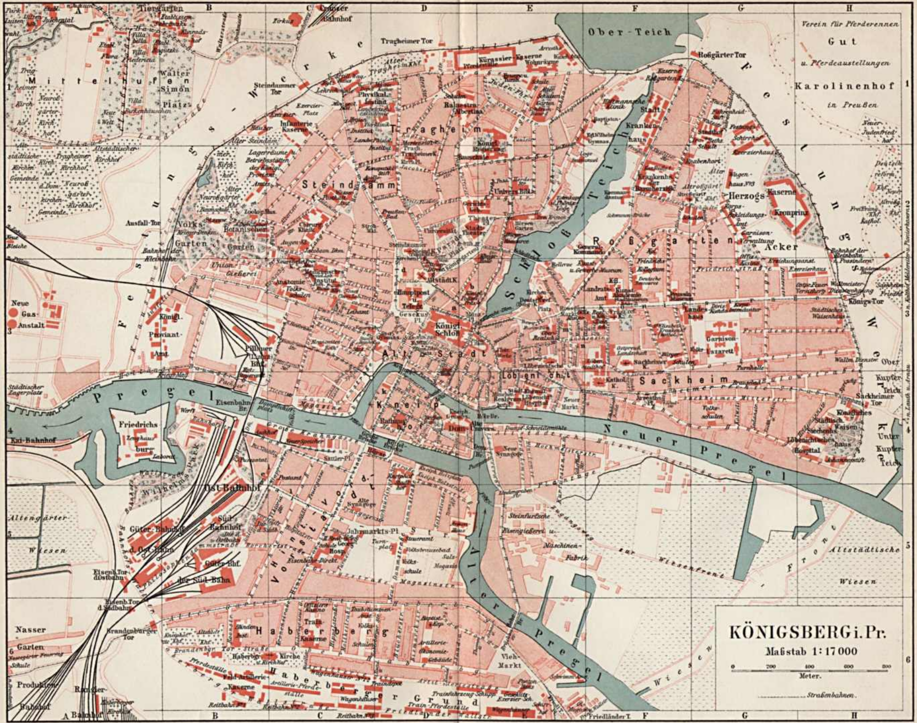
¿Por qué aprender grafos?

¿Por qué aprender grafos?

- Problemas de conectividad
- Optimización
- Bases de datos
- Redes sociales
- Manejo de concurrencia

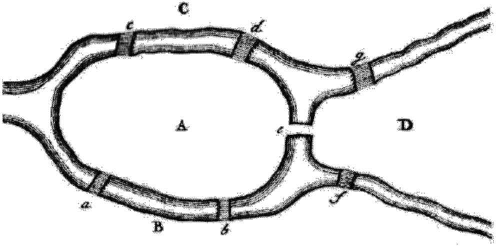
¿Por qué aprender grafos?

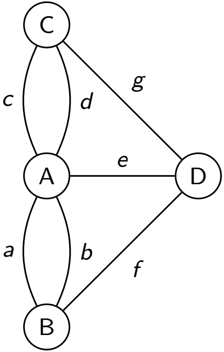
- Problemas de conectividad
- Optimización
- Bases de datos
- Redes sociales
- Manejo de concurrencia
- En general, **todo lo que se representa con relaciones binarias!**


KÖNIGSBERG i. Pr.
Maßstab 1:17000
0 200 400 600 800
Meter.
Straßenbahnen.
Ober-Teich
Schloß Teich
Pregel
Neuer Pregel
Alter Pregel
Tragheim
Steindamm
Roßgarten
Alte Stadt
Löbenicht
Sackheim
Kneiphof
Haberberg
Haberberger Grund
Vorstadt
Mittelhufen
Tiergarten
Walter Simon Platz
Festungswerke
Tragheimer Tor
Steindammer Tor
Roßgärter Tor
Königs-Tor
Sackheimer Tor
Ausfall-Tor
Brandenburger Tor
Friedländer T.
Karolinenhof
Verein für Pferderennen
Gut
u. Pferdeaustellungen
in Preußen
Kürassier-Kaserne
Kaserne Kronprinz
Herzogs-Acker
Friedrichsburg
Ost-Bahnhof
Süd-Bahnhof
Güter-Bahnhof
Kai-Bahnhof
Pillauer Bahnhof
Cranzer Bahnhof
Königl. Schloß
Hauptpost
Universität
Stadt-Theater
Dom
Neue Gas-Anstalt
Königl. Proviant-Amt
Volks-Garten
Botanischer Garten
Garnison-Lazarett
Landes-haus
Städtisches Waisenhaus
Neue Synagoge
Alte Synagoge
Jahrmarkts-Pl.
Vieh-Markt
Altenwärter
Wiesen
Altstädtische Wiesen
Nasser Garten
Front
Unter Kupfer-Teich
Ober Kupfer-Teich


Alt-Stadt
Löbenicht
Löbenichtsche K.
Löben. Stadthof
Kathol. K.
Städt. Realgymn.
Ehemal. Löbenicht. Hospital
Neuer Markt
Kneiphof
Rathaus
Kneiph. Gymnas.
Holz-Br.
Alte Univers.
Dom
Dampf-Schneidemühle
Dampfschiff-platz
Magazine
Bollwerk
Lastadie
Große Krahngasse
Aschhof
Neuer Speicher
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Sattler-Pl.
Postamt
Dom-Br.
Neue Synagoge
Hochmeisterstr.
Plantage
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Kneiphof Stadthof
Lindengraben-Str.
Vorderroßgarten
Alte Synagoge
Synagogenstr.
Schnürlingsstr.
Dammstraße
Selkestraße
Steinfurt'sche Eisengießerei u. Maschinen-Fabrik
Zugangsweg
Armen-Haus
Jahrmarkts-Pl.
Steueramt
Turn-platz
Volksbrausebad
Salz-Magazin
Volks-schule
II. Real-schule
Georg-Hosp.
Eisenbahn-Direkt.
Borchertstraße
Georgsstraße
Magazinstr.
Neue Dammstraße
Vorstadt
Alter Pregel
Hohe Br.
Unter Haberberg
Offiziers-Kasino
Train-Kaserne
Taubstummen-Anst.
Volks-Schulen
Baptist-Kap.
Artillerie-
Haberberg
Hippelstraße
Moltkestraße

Redes





Motivación

Una línea aérea tiene una lista de vuelos entre ciudades del mundo, y desea saber cuáles son los posibles viajes que se pueden realizar combinando vuelos. La lista de vuelos es la siguiente:

Origen	Destino
Stgo	BsAs
Stgo	Miami
Stgo	Londres
BsAs	Stgo
Miami	Stgo
Miami	Londres
Londres	Stgo
Londres	Paris
Frankfurt	Paris
Frankfurt	Moscu
Paris	Moscu
Moscu	Frankfurt

Objetivos de la clase

- Conocer definiciones básicas de grafos
- Aplicar nociones básicas de isomorfismo y subgrafos

Outline

Grafos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos **vértices** o **nodos**, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos **aristas**.

Grafos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos **vértices** o **nodos**, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos **aristas**.

Esta definición es bastante general.

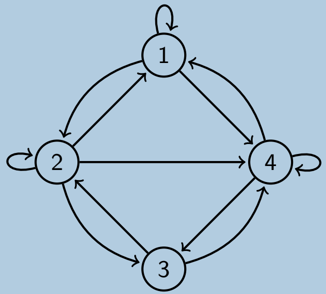
- Los grafos así definidos son llamados **grafos dirigidos**.

Si un grafo es dirigido, las aristas se dibujan con flechas.

Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$:

Grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$:

Definición

Un **rulo** (o *loop*) es una arista $(x, y) \in E$ tal que $x = y$. Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

Grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$:

Definición

Un **rulo** (o *loop*) es una arista $(x, y) \in E$ tal que $x = y$. Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

Definición

Dos aristas $(x, y) \in E$ y $(z, w) \in E$ son **paralelas** si $x = w$ e $y = z$. Es decir, si conectan a los mismos vértices.

Grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$:

Definición

Un **rulo** (o *loop*) es una arista $(x, y) \in E$ tal que $x = y$. Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

Definición

Dos aristas $(x, y) \in E$ y $(z, w) \in E$ son **paralelas** si $x = w$ e $y = z$. Es decir, si conectan a los mismos vértices.

El ejemplo anterior tiene rulos y aristas paralelas.

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

Definición (alternativa)

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si E es simétrica.

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

Definición (alternativa)

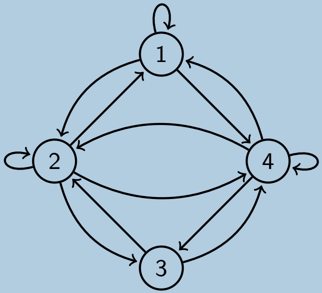
Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si E es simétrica.

Si un grafo es no dirigido, se dibuja con trazos en lugar de flechas.

Grafos

Ejemplo

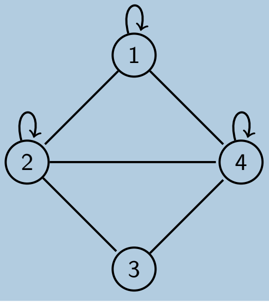
$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.



Grafos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si no tiene rulos.

Grafos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si no tiene rulos.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

Grafos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si no tiene rulos.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

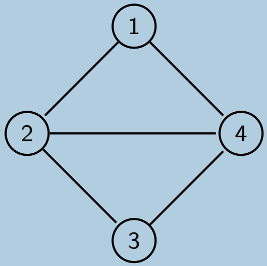
Definición (alternativa)

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si E es irrefleja.

Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.



Grafos

De ahora en adelante (a menos que se explicite otra cosa), cuando hablemos de grafos estaremos refiriéndonos a grafos simples, no dirigidos, no vacíos y finitos.

- $V \neq \varnothing$ y $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.
- E es simétrica e irrefleja.

Grafos

De ahora en adelante (a menos que se explicite otra cosa), cuando hablemos de grafos estaremos refiriéndonos a grafos simples, no dirigidos, no vacíos y finitos.

- $V \neq \varnothing$ y $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.
- E es simétrica e irrefleja.

Una pequeña definición:

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, dos vértices $x, y \in V$ son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$.

Outline

Isomorfismo

Definición

Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.

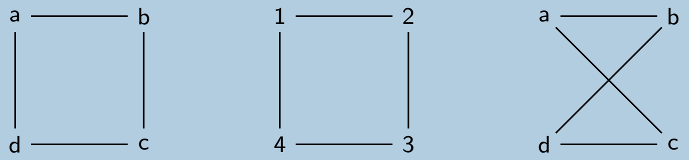
En tal caso:

- Diremos que f es un **isomorfismo** entre G_1 y G_2.
- Escribiremos $G_1 \cong G_2$.

Dos grafos son isomorfos cuando tienen "*la misma forma*"

Isomorfismo

Ejemplo



Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

<u>Demostración:</u>

- **Refleja:** Sea $G(V, E)$ tomemos la función $f : V \to V$ dada por $f(x) = x$. Luego, de manera trivial podemos inferir que $G \cong G$.

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

Demostración:

- **Refleja:** Sea $G(V,E)$ tomemos la función $f: V \to V$ dada por $f(x) = x$. Luego, de manera trivial podemos inferir que $G \cong G$.
- **Simétrica:** Sean $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ tales que $G_1 \cong G_2$. Por definición existe $f: V_1 \to V_2$ biyectiva tal que todo $(u,v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$ (*). Además, como f es biyectiva, sabemos que es invertible. Ahora mostraremos que f^{-1} cumple la definición de isomorfismo.

($\Rightarrow$) Sea $(u_2, v_2) \in E_2$ como f es biyectiva podemos expresarlo como $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego, por (*) obtenemos $(u_1, v_1) \in E_1$. Como f^{-1} es inversa obtenemos que $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$.

($\Leftarrow$) Sea $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$, podemos reescribirlo como $(u_1, v_1) \in E_1$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego por (*) obtenemos $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ lo que es equivalente a $(u_2, v_2) \in E_2$

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

- **Transitiva:** Sean $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ y $G_3(V_3, E_3)$ tales que $G_1 \cong G_2$ y $G_2 \cong G_3$. Por definición, sabemos que existen $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_3$ biyectivas tales que

$$(u_1, v_1) \in E_1 \text{ si y sólo si } (f(u_1), f(v_1)) \in E_2 \text{ (i)}$$
$$(u_2, v_2) \in E_2 \text{ si y sólo si } (g(u_2), g(v_2)) \in E_3 \text{ (ii)}$$

Sea $u_1, v_1 \in V_1$ tales que $(u_1, v_1) \in E_1$, por (i) sabemos que $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$. Luego, si aplicamos (ii) obtenemos $(g(f(u_1)), g(f(v_1))) \in E_3$. Por lo tanto, podemos utilizar $g \circ f$ como función biyectiva y concluimos que $G_1 \cong G_3$.

Isomorfismo

El concepto de isomorfismo nos permite concentrarnos en la estructura subyacente de los grafos.

- Podemos independizarnos de los nombres de los vértices.
- No importa cómo dibujemos los grafos.

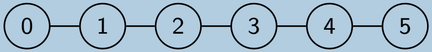
Definiremos familias de grafos a partir de isomorfismos

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **camino** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en una línea tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en la línea.

Ejemplo



Clases de grafos

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^P = (V_n^P, E_n^P)$, donde $V_n^P = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E_n^P = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge j = i + 1\}$.

Un **camino** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^P.

Llamaremos P_n a la clase de equivalencia $\left[G_n^P\right]_{\cong}$
Los caminos con n vértices.

Observación:

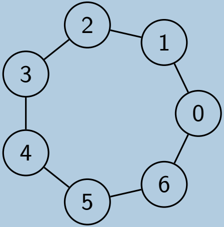
- Asumimos que G_n^P es no dirigido, a pesar de su definición

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **ciclo** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en un círculo tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en él.

Ejemplo



Clases de grafos

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^C = (V_n^C, E_n^C)$, donde $V_n^C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E_n^C = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge j = i+1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$.

Un **ciclo** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^C.

Llamaremos C_n a la clase de equivalencia $\left[G_n^C\right]_{\cong}$
Los ciclos con n vértices.

Observación:

- Asumimos que G_n^C es no dirigido, a pesar de su definición

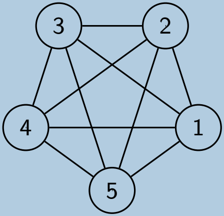
Clases de grafos

Definición

Un **grafo completo** es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.

Llamaremos K_n a la clase de equivalencia de los grafos completos de n vértices.

Ejemplo



Clases de grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si V se puede particionar en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tales que para toda arista $(x, y) \in E$, $x \in V_1$ e $y \in V_2$, o $x \in V_2$ e $y \in V_1$.

Es decir:

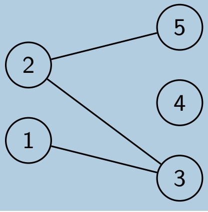
- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
- Cada arista une a dos vértices en conjuntos distintos de la partición.

Clases de grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si V se puede particionar en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tales que para toda arista $(x, y) \in E$, $x \in V_1$ e $y \in V_2$, o $x \in V_2$ e $y \in V_1$.

Ejemplo



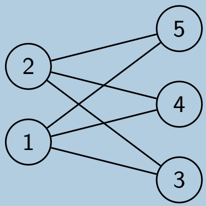
Clases de grafos

Definición

Un **grafo bipartito completo** es un grafo bipartito en que cada vértice es adyacente a todos los de la otra partición.

Llamaremos $K_{n,m}$ a la clase de los grafos bipartitos completos, donde n y m son los tamaños de las particiones.

Ejemplo



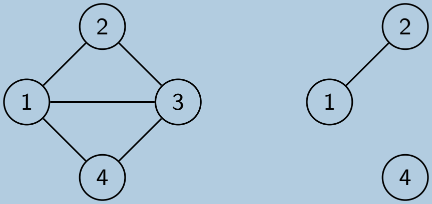
Más definiciones

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$:

Definición

Un grafo $H = (V_H, E_H)$ es un **subgrafo** de G (denotado como $H \subseteq G$) si $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ y E_H sólo contiene aristas entre vértices de V_H.

Ejemplo



G $\qquad\qquad$ $H \subseteq G$

Más definiciones

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$:

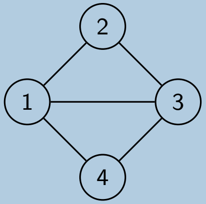
Definición

Un **clique** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall v_1, v_2 \in K,\ (v_1, v_2) \in E_G$.

Definición

Un **conjunto independiente** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall u, v \in K,\ (u, v) \notin E_G$.

Ejemplo



G

$K = \{1, 2, 3\}$ es **clique** en G

$K' = \{2, 4\}$ es un **conj. indep.** en G

Más definiciones

Definición

El **complemento** de G es el grafo $\overline{G} = (V_G, \overline{E_G})$, donde $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (u, v) \notin \overline{E_G}$.

Definición

Un grafo G se dice **autocomplementario** si $G \cong \overline{G}$.

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

<u>Demostración:</u>

($\Rightarrow$) Sea $V' \subseteq V$ un clique en G. Por definición sabemos que para todo par de vértices $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \in E$. Por otro lado, por definición de $\overline{G}$ sabemos que para todo $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \notin \overline{E}$, y por lo tanto V' es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

($\Leftarrow$) Sea $V' \subseteq V$ un conjunto independiente en $\overline{G}$. Por definición sabemos que para todo par de vértices $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \notin \overline{E}$. Por otro lado, por definición de $\overline{G}$ sabemos que para todo $u, v \notin V'$ ocurre que $(u, v) \in E$, y por lo tanto V' es un clique en G.

Más definiciones

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

Demostración:

Sea $G(V, E)$ con $|V| = 6$, buscamos demostrar que G tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3. Por el teorema anterior, esto es equivalente a mostrar que G tiene un clique o que $\overline{G}$ lo tiene. Por contradicción, suponemos que ni G ni $\overline{G}$ tiene el clique. Sea $v \in V$ tenemos 2 casos:

- v **tiene por lo menos 3 vecinos:** Sean $x, y, z \in V$ los vecinos de v tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \in E$. Una observación importante es que no pueden existir aristas entre x, y, z dado que de otra manera de generaría un clique de tamaño 3, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego, x, y, z forman un conjunto independiente en G y por el teorema anterior estos vértices mismos forman un clique en $\overline{G}$.

Más definiciones

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

- v **tiene menos de 3 vecinos:** En este caso v no es adyacente con por lo menos 3 vertices de G. Sean x, y, z estos vértices tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \notin E$. Luego, x, y, z son vecinos de v en $\overline{G}$ y podemos aplicar el mismo razonamiento del caso anterior para concluir que x, y, z forman un clique de tamaño 3 en G.

Como en ambos casos llegamos a que G o $\overline{G}$ cuentan con un clique, esto contradice nuestra hipótesis y por ende G debe ser tal que tiene un clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3.

Outline

Representación matricial

Dado un grafo $G = (V, E)$, como E es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

Representación matricial

Dado un grafo $G = (V, E)$, como E es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Representación matricial

Dado un grafo $G = (V, E)$, como E es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a M_G la **matriz de adyacencia** de G.

Representación matricial

- Si el grafo es simple, la diagonal sólo contiene ceros.
- Si el grafo es no dirigido, entonces $M_G = M_G^T$.
- ¿Cómo puedo obtener $M_{\overline{G}}$?

Estas construcciones solo necesitan operar con los **bits** en la matriz

Representación matricial

También podemos usar una **matriz de incidencia** A_G.

- Etiquetamos las aristas de G.
- Cada fila de la matriz representará a un vértice, y cada columna a una arista.
- Cada posición de la matriz tendrá un 1 si la arista de la columna *incide* en el vértice de la fila.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Outline

Objetivos de la clase

- Conocer definiciones básicas de grafos
- Aplicar nociones básicas de isomorfismo y subgrafos