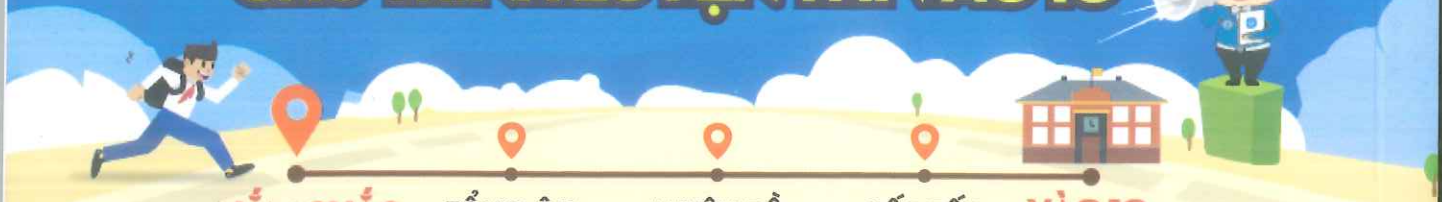
CHU TRÌNH LUYỆN THI VÀO 10



TRUY CẬP NGAY
HOCMAI.VN

HỌC TỐT kiến thức lớp 9

Chương trình Học tốt giúp học sinh trang bị đầy đủ kiến thức theo chương trình SGK lớp 9

HM10 TỔNG ÔN

Là chương trình giúp học sinh ôn luyện toàn diện kiến thức, rèn kỹ năng, phương pháp giải các dạng bài ở từng chuyên đề bám sát cấu trúc đề thi vào lớp 10 không chuyên.

HM10 LUYỆN ĐỀ

Là chương trình giúp học sinh rèn phương pháp, chiến thuật làm bài qua các đề thi sát cấu trúc và quét mọi dạng bài.

HM10 CẤP TỐC

Là chương trình giúp học sinh ở các tỉnh/thành có thi bài thi thứ 4/ bài thi tổ hợp hệ thống kiến thức, ôn luyện các dạng câu hỏi trọng tâm, rèn các kỹ năng, chiến thuật làm bài.

LUYỆN THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN

Dành cho học sinh thi vào 10 vòng 1, vòng 2 các trường THPT chuyên trong cả nước.

HỆ THỐNG GIÁO DỤC HOCMAI
Địa chỉ: Tầng 4, Tòa nhà 25T2, Đường Nguyễn Thị Thập, Phường Trung Hoà, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.
Website: hocmai.vn | Email: hotro@hocmai.vn
Đường dây nóng: 1900 6933

ISBN 978-604-3-15618-8
Giá: 150 000 đồng

NGUYỄN DUY KHƯƠNG

RÈN LUYỆN TƯ DUY HÌNH HỌC PHẲNG

QUA BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI TỈ SỐ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN DUY KHƯƠNG

RÈN LUYỆN TƯ DUY HÌNH HỌC PHẲNG QUA BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI TỈ SỐ

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Lời nói đầu

Trong quá trình ôn luyện cho một số đội tuyển HSG Quốc gia, các bạn ôn thi vào 10 chuyên tác giả nhận thấy rằng các bạn còn thắc mắc khá nhiều về cách sử dụng biến đổi tỉ số trong việc giải một bài toán hình học phẳng. Để giải đáp một phần thắc mắc, tác giả quyết định viết cuốn sách này như một món quà dành cho các bạn. Qua đó mong các bạn sẽ có thể giải quyết bài toán hình học phẳng nói chung và biến đổi tỉ số nói riêng.

Cuốn sách được chia thành ba chương:

Chương 1. Cách nhận biết bài toán sử dụng phương pháp biến đổi tỉ số.

Chương 2. Một số kiến thức thường dùng trong biến đổi tỉ số.

Chương 3. Ứng dụng phương pháp biến đổi tỉ số trong giải toán.

Cuốn sách sẽ giới thiệu cho các bạn cách nhìn ra dấu hiệu của một số bài toán sử dụng được phương pháp biến đổi tỉ số ở chương 1 từ đó giúp bạn có thể phát hiện hoặc có cảm giác với việc sử dụng phương pháp. Ở chương 2, tác giả đề cập tới một số kiến thức về biến đổi tỉ số để giúp các bạn có nhiều công cụ cho phương pháp này. Cuối cùng ở chương 3, tác giả sẽ giới thiệu nhiều bài toán hay và khó để giúp các bạn có thể vận dụng nhuần nhuyễn phương pháp biến đổi tỉ số. Điều mong mỏi lớn nhất của tác giả là sau khi đọc xong cuốn sách các bạn sẽ cảm thấy thêm đam mê, thích thú với hình học phẳng. Từ đó các bạn sẽ tìm tòi khai thác thêm thật nhiều điều thú vị.

Nhân đây xin chân thành cảm ơn anh Đặng Thành Trung đã động viên, giúp đỡ mình rất nhiều trong quá trình hoàn thiện cuốn sách. Cảm ơn bác Nguyễn Xuân Bình đã đọc bản thảo và góp ý rất nhiều. Cảm ơn anh Nguyễn Ngọc Thắng đã hoàn thiện phần latex cho cuốn sách. Cảm ơn các đồng nghiệp, các em học sinh ở CLB Toán Lim đã luôn tạo động lực để tác giả hoàn thiện cuốn sách.

Nhân cuốn sách được tái bản lần hai, tác giả đã kịp thời chỉnh sửa các nội dung còn sai, cũng như bổ sung thêm các nội dung mới hấp dẫn tới với bạn đọc. Chân thành cảm ơn bạn Đỗ Hoàng Gia Huy-12 Toán 1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam đã viết thêm phần nội dung rất hay ở chương 2. Rất mong được sự theo dõi và ủng hộ của bạn đọc.

Mọi góp ý xin bạn đọc gởi về CLB Toán Lim, số nhà 41 ngõ 612 ngách 77 Đê La Thành Giảng Võ Hà Nội. Số điện thoại: 0829521112.

TÁC GIẢ

2.12 Phụ lục: Một số bài tập về chủ đề diện tích và tam giác đồng dạng

Mục đích khi thêm phần này ở phần cuối chương hai nhằm giúp các bạn hiểu thêm về tầm quan trọng của diện tích và tam giác đồng dạng cũng như cách sử dụng cụ thể trong từng bài toán. Chân thành cảm ơn bạn **Đỗ Hoàng Gia Huy, lớp 12 Toán THPT chuyên Hà Nội Amsterdam** đã rất kì công trong việc sưu tầm các bài toán và hoàn thiện phần phụ lục vô cùng quan trọng. Qua phần này, tác giả rất muốn các bạn có được kĩ năng sử dụng diện tích cũng như đồng dạng tốt trước khi chuyển qua chương thứ ba.

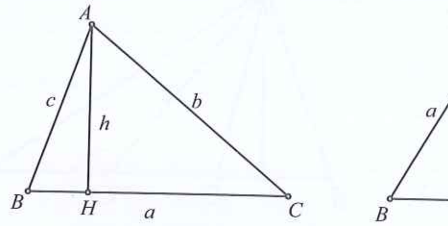
2.12.1 Nhắc lại và bổ sung kiến thức về diện tích

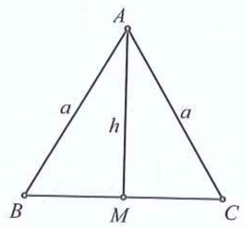
Ta kí hiệu diện tích của đa giác n cạnh $A_1A_2A_3...A_n$ là $S_{A_1A_2A_3...A_n}$.

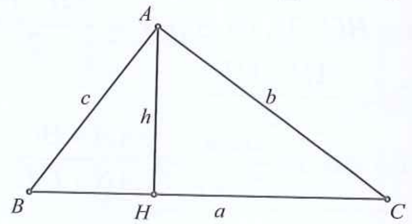
1) Tam giác có ba cạnh a, b, c, đường cao ứng với cạnh a của tam giác là h, khi đó diện tích tam giác là $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$.

2) Tam giác đều có cạnh là a thì có $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3) Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt là b, c, cạnh huyền là a, đường cao ứng với cạnh a của tam giác là h, khi đó diện tích của tam giác là $S = \dfrac{b \cdot c}{2} = \dfrac{a \cdot h}{2}$.



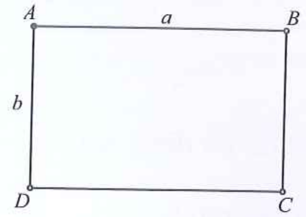


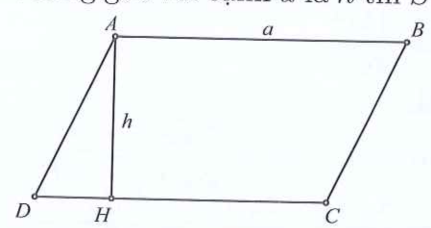


4) Hình vuông có cạnh là a thì $S = a^2$.

5) Hình chữ nhật có hai cạnh là a, b thì $S = a \cdot b$.

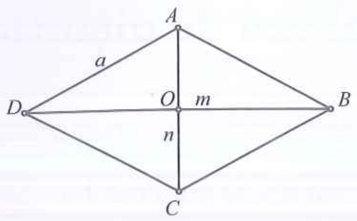
6) Hình bình hành có hai cạnh là a, b, đường cao vuông góc với cạnh a là h thì $S = a \cdot h$.

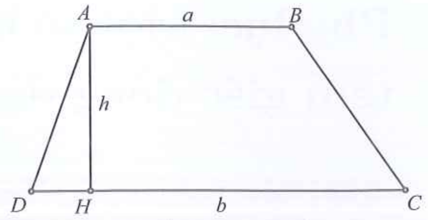




7) Hình thoi có cạnh a, hai đường chéo m, n thì $S = \dfrac{1}{2}mn$.

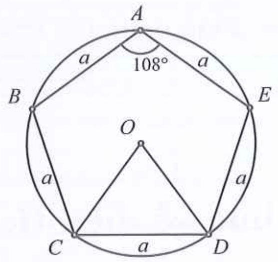
8) Hình thang có hai cạnh đáy a, b và đường cao h thì có $S = \dfrac{(a+b) \cdot h}{2}$.

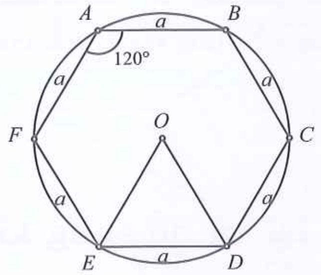




9) Hình ngũ giác đều có cạnh là a có diện tích là $S = \dfrac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$.

10) Hình lục giác đều có cạnh là a có diện tích là $S = \dfrac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$.





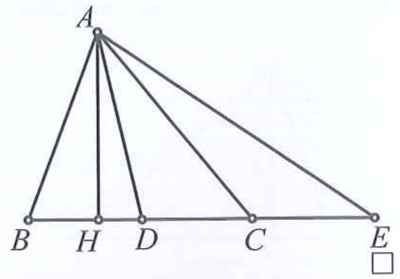
2.12.2 Một số bài tập về diện tích

Bài toán 2.12.1. Cho bốn điểm B, C, D, E phân biệt cùng nằm trên một đường thẳng và điểm A không nằm trên đường thẳng BC. Khi đó ta có $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \dfrac{BC}{DE}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng BC. Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AH \cdot BC}{2}$ và $S_{ADE} = \dfrac{AH \cdot DE}{2}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \dfrac{AH \cdot BC}{AH \cdot DE} = \dfrac{BC}{DE}$.



□

Bài toán 2.12.2. Cho ΔABC, điểm M, N lần lượt nằm trên cạnh AC, AB của tam giác. Khi đó ta có $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$. Nói riêng, khi $MN \parallel BC$ thì ta có $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM^2}{AC^2}$.

Lời giải.

Theo bài toán 1 ta có $\dfrac{S_{AMN}}{S_{AMB}} = \dfrac{AN}{AB}$ và $\dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AC}$, từ đó dễ dàng suy ra $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{AMN}}{S_{AMB}} \cdot \dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.12.3. Cho hai tam giác ABC và DBC có hai đường cao lần lượt là AH, DE. Chứng minh rằng:

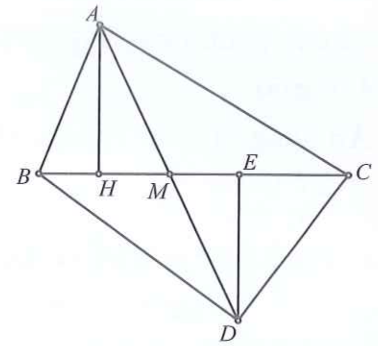
a) Ta có $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \dfrac{AH}{DE}$. Nói riêng, khi $AD \parallel BC$ thì $S_{ABC} = S_{BDC}$.

b) Giả sử đường thẳng AD cắt BC tại M, khi đó ra có $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \dfrac{MA}{MD}$.

Lời giải.

a) Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AH \cdot BC}{2}$ và $S_{DBC} = \dfrac{DE \cdot BC}{2}$ nên do đó ta dễ có $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \dfrac{AH \cdot BC}{DE \cdot BC} = \dfrac{AH}{DE}$. Ta có khi $AD \parallel BC$, mà $AH \perp BC$ và $DE \perp BC$ nên dễ có $AH = DE$, suy ra $S_{ABC} = S_{DBC}$.

b) Do $AH \parallel DE$ nên áp dụng định lý Thales ta có $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AH}{DE}$, theo câu a) ta dễ dàng chứng minh được $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \dfrac{AH}{DE} = \dfrac{MA}{MD}$.



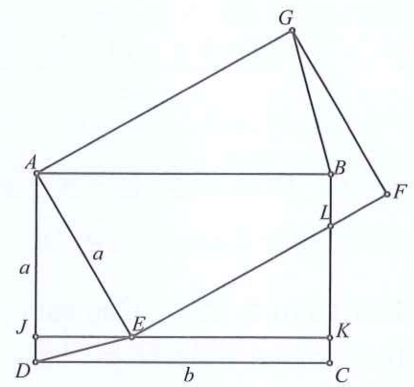
□

Bài toán 2.12.4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AD = a$, $AB = b$. Gọi E là điểm nằm trong hình chữ nhật sao cho $\angle DAE = 30°$ và $AE = AD$. Dựng hình chữ nhật $AEFG$ sao cho G cùng phía với B qua AE và $AG = b$. Tính $S_{AELCD} + S_{AGFLB}$ theo a và b.

Lời giải.

Dễ có $S_{AELCD} = S_{AGFLB}$ nên ta sẽ tính S_{AELCD} theo a và b.

Qua E kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại J, K. Do $\angle EAD = 30°$ nên ΔAEJ là tam giác nửa đều nên ta có $AJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $EJ = \dfrac{a}{2}$. Từ đó suy ra $JD = AD - AJ = a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $EK = CD - JE = b - \dfrac{a}{2}$.



Mặt khác ta có $\angle LEK = 90° - \angle AEJ = 30°$ do đó ΔLEK nửa đều, suy ra $LK = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Từ đó ta có:

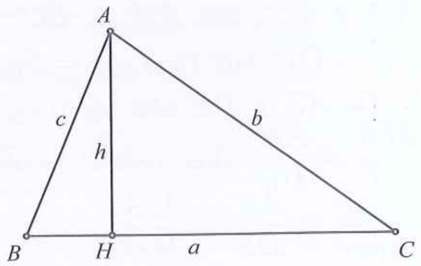
$$\begin{aligned} S_{AELCD} &= S_{AJE} + S_{DJKC} + S_{ELK} \\ &= \frac{JE \cdot JA}{2} + JD \cdot JK + \frac{KL \cdot KE}{2} \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{8} + ab\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{3}} + ab\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S_{AELCD}+S_{AGFLB}=2S_{AELCD}=\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{3}}+ab\dfrac{2\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}$. □

Bài toán 2.12.5. (Công thức Heron) Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$ và $AB=c$, đường cao $AH=h$. Gọi $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của ΔABC.
Chứng minh rằng $S_{ABC}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Pytago cho hai tam giác ABH và ACH ta có:



$$\begin{aligned}
&BA^2-BH^2=AH^2=CA^2-CH^2.\\
&\Rightarrow HC^2-HB^2=b^2-c^2\\
&\Rightarrow HC-HB=\frac{b^2-c^2}{a}\\
&\Rightarrow HC=\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
h^2&=b^2-HC^2\\
&=b^2-\frac{(b^2+a^2-c^2)^2}{4a^2}=\frac{2ab+b^2+a^2-c^2}{2a}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\\
&=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a}\cdot\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{2a}=\frac{4\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}
\end{aligned}$$

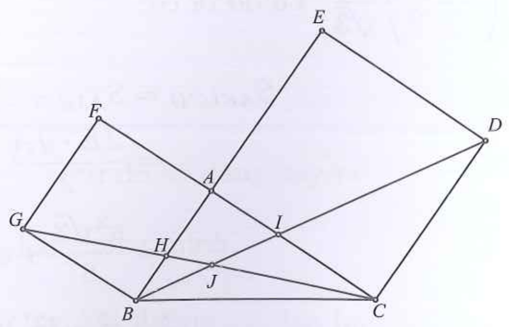
nên do đó ta có $p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)=\dfrac{(ah)^2}{4}=S^2_{ABC}$. Từ đó ta dễ dàng chứng minh được $S_{ABC}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. □

Bài toán 2.12.6. Cho tam giác ABC vuông tại A, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $CAED$ và $ABGF$. Gọi DB cắt AC tại I và GC cắt AB tại H, CG cắt BD tại J. Chứng minh rằng $S_{AHJI}=S_{BJC}$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh AB là a, AC là b. Ta có do $AI\parallel ED$, theo định lý Thales ta có

$$\frac{AI}{b}=\frac{AI}{ED}=\frac{BA}{BE}=\frac{a}{a+b}$$



nên $AI=\dfrac{ab}{a+b}$. Chứng minh tương tự suy ra
$AH=AI=\dfrac{ab}{a+b}$.

Ta có $S_{BAI}=\dfrac{AI\cdot AB}{2}=\dfrac{a^2b}{2(a+b)}$ và

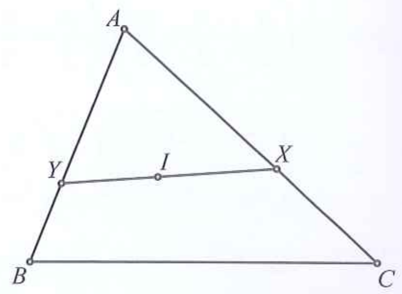
$$S_{CBH}=\frac{AC\cdot BH}{2}=\frac{AC(AB-AH)}{2}=\frac{b\left(a-\frac{ab}{a+b}\right)}{2}=\frac{a^2b}{2(a+b)}.$$

Do đó ta có $S_{BAI}=S_{CBH}$, dễ dàng suy ra $S_{AHJI}=S_{BJC}$. □

Bài toán 2.12.7 (Vô địch Nga khối 8 năm 1971).
Cho tam giác ABC, tâm đường tròn nội tiếp I. Gọi d là đường thẳng chia ΔABC thành hai phần có chu vi bằng nhau và diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng d đi qua I.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng d cắt cạnh AC, AB của ΔABC lần lượt tại X, Y thỏa mãn $AX+XY+YA=XY+YB+BC+CX$ và $S_{AXY}=S_{BCXY}$. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC. Giả sử điểm I không nằm trên XY, ta có:



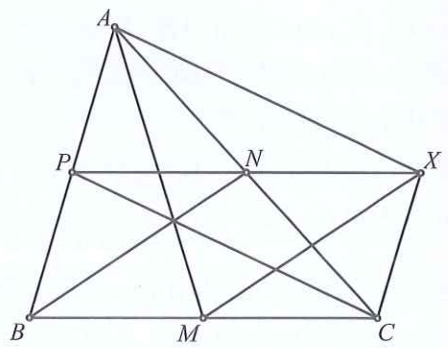
$$\begin{aligned}
&AX+AY=XC+CB+BY\\
&\Leftrightarrow r(AX+AY)=r(XC+CB+BY)\\
&\Leftrightarrow S_{AIX}+S_{AIY}=S_{BYI}+S_{BIC}+S_{IXC}\\
&\Leftrightarrow S_{AXIY}=S_{BYIXC}
\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có $S_{AXY}=S_{BCXY}$ suy ra $S_{XIY}=-S_{XIY}$ (vô lý) từ đó dễ dàng chứng minh được I nằm trên XY. □

Bài toán 2.12.8. Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a, m_b, m_c lần lượt ứng với cạnh BC, CA, AB của tam giác. Tính diện tích của tam giác ABC theo m_a, m_b, m_c.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Lấy điểm X đối xứng với P qua N. Do PN là đường trung bình của ΔABC nên ta có NX song song và bằng BM suy ra $BNXM$ là hình bình hành. Do đó $MX=BN=m_b$. Ta có PX và CA cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường nên $PCXA$ là hình bình hành, suy ra $XA=CP=m_c$.



Ta có $S_{AMX}=S_{AMN}+S_{ANX}+S_{MNX}=S_{MNC}+S_{ANP}+S_{MNP}=S_{APMC}=\dfrac{3}{4}S_{ABC}$.
Do đó áp dụng định lý Heron ta suy ra:

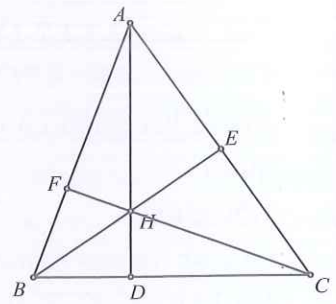
$$\begin{aligned}
S_{ABC}&=\frac{4}{3}S_{AMX}\\
&=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(m_a+m_b+m_c)\cdot(m_a+m_b-m_c)\cdot(m_c+m_a-m_b)\cdot(m_b+m_c-m_a)}
\end{aligned}$$

□

Bài toán 2.12.9. Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao ứng với cạnh BC, CA, AB lần lượt là h_a, h_b, h_c. Tính diện tích tam giác ABC theo h_a, h_b, h_c.

Lời giải.

Gọi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích ΔABC. Áp dụng định lý Heron cho tam giác ABC ta có:



$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{S}{h_a}+\frac{S}{h_b}+\frac{S}{h_c}\right)\left(\frac{S}{h_a}+\frac{S}{h_b}-\frac{S}{h_c}\right)\left(\frac{S}{h_b}+\frac{S}{h_c}-\frac{S}{h_a}\right)\left(\frac{S}{h_c}+\frac{S}{h_a}-\frac{S}{h_b}\right)}.$$

Từ đó suy ra $S = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)}}$.

□

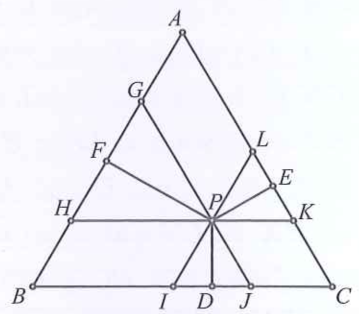
Bài toán 2.12.10. Cho tam giác đều ABC, điểm P bất kì nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P tới các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng: $PD + PE + PF$ không phụ thuộc vào vị trí của P.

b) Chứng minh rằng: $CD + BF + AE = AF + BD + CE$.

Lời giải.

Gọi G, H nằm trên AB, L, K nằm trên AC, I, J nằm trên BC sao cho $HK \parallel BC$, $GJ \parallel AC$, $LI \parallel AB$ và HK, GJ, LI đồng quy tại P.



a) Ta có $S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA} = \dfrac{AB \cdot PF}{2} + \dfrac{BC \cdot PD}{2} + \dfrac{PE \cdot AC}{2} = (PF + PE + PD) \cdot \dfrac{AB}{2}$. Từ đó dễ dàng chứng minh được $PD + PE + PF$ bằng chiều dài đường cao của tam giác ABC nên không phụ thuộc vào vị trí của P.

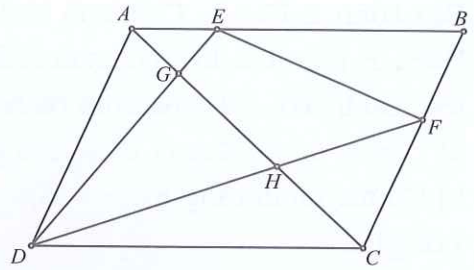
b) Ta có do $PJ \parallel AC$ và $PI \parallel AB$ nên ta có $\angle PIJ = \angle CBA = 60^\circ = \angle ACB = \angle PJI$ suy ra ΔPIJ là tam giác đều. Chứng minh tương tự ta có ΔPLK và ΔPGH đều. Ngoài ra ta dễ chứng minh các tứ giác $PHBI$, $PGAL$, $PKCJ$ là hình bình hành. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} AF + BD + CE &= GA + GF + IB + ID + KC + KE \\ &= PL + HF + PH + JD + PJ + LE \\ &= PK + HF + PG + JD + PI + LE \\ &= JC + HF + LA + JD + HB + LE \\ &= (JC + JD) + (LA + LE) + (HF + HB) \\ &= CD + BF + AE \end{aligned}$$

Suy ra ta có $CD + BF + AE = AF + BD + CE$. □

Bài toán 2.12.11. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{FB}{FC} = 2\dfrac{EA}{EB}$. Đường thẳng AC lần lượt cắt DE, DF tại G, H. Chứng minh rằng $S_{DGH} = \dfrac{S_{DEF}}{2}$.

Lời giải.

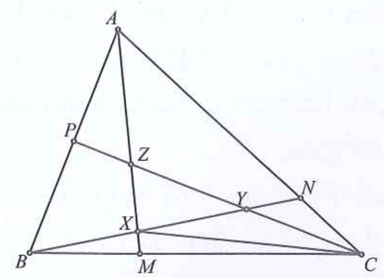


Ta dễ dàng chứng minh được
$$\frac{S_{DGH}}{S_{DEF}} = \frac{DG \cdot DH}{DE \cdot DF} = \frac{DG}{DE} \cdot \frac{DH}{DF}.$$
Đặt $\dfrac{FB}{FC} = k$, ta có $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{k}{2}$.

Áp dụng định lý Thales
$$\frac{DE}{DG} = \frac{GE + GD}{GD} = 1 + \frac{GE}{GD} = 1 + \frac{EA}{DC}$$
$$= 1 + \frac{EA}{EB + EA} = 1 + \frac{k}{k+2} = \frac{2k+2}{k+2}.$$
Chứng minh tương tự ta có
$$\frac{DF}{DH} = \frac{DH + HF}{DH} = 1 + \frac{HF}{HD} = 1 + \frac{CF}{DA} = 1 + \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}.$$
Từ đó dễ dàng chứng minh được $\dfrac{S_{DGH}}{S_{DEF}} = \dfrac{DG}{DE} \cdot \dfrac{DH}{DF} = \dfrac{k+2}{2k+2} \cdot \dfrac{k+1}{k+2} = \dfrac{1}{2}$. Từ đó dễ có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.12.12. *(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán ĐHTH 1992)* Cho tam giác ABC có diện tích S, gọi M, N, P lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB sao cho P là trung điểm AB, $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{NC}{NA} = \dfrac{1}{3}$. Các đường thẳng AM, BN, CP cắt nhau tạo thành tam giác XYZ. Tính diện tích tam giác XYZ theo S.

Lời giải.



Ta có $S_{XYZ} = S - (S_{ABM} + S_{BCN} + S_{CAP}) + (S_{ZAP} + S_{XBM} + S_{YCN})$. Mặt khác dễ có $\dfrac{S_{ABM}}{S} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3}$, tương tự suy ra $S_{BCN} = \dfrac{S}{4}$ và $S_{CAP} = \dfrac{S}{2}$.

Ta có $\dfrac{1}{3} = \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{S_{CXN}}{S_{AXN}} = \dfrac{S_{BCN}}{S_{BAN}} = \dfrac{S_{BCN} - S_{CXN}}{S_{BAN} - S_{AXN}} = \dfrac{S_{BXC}}{S_{BXA}}$.

Từ đó suy ra ta có:
$$\frac{S_{BXM}}{S_{BAX}} = \frac{S_{BXM}}{S_{BXC}} \cdot \frac{S_{BXC}}{S_{BAX}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$
Do đó ta chứng minh được $\frac{S_{BXM}}{S_{BAM}} = \frac{1}{10}$, suy ra:
$$\frac{S_{BXM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BXM}}{S_{BAM}} \cdot \frac{S_{BAM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{1}{30} \Rightarrow S_{BXM} = \frac{S}{30}$$
Chứng minh tương tự ta có $S_{CYN} = \frac{S}{20}$ và $S_{APZ} = \frac{S}{10}$

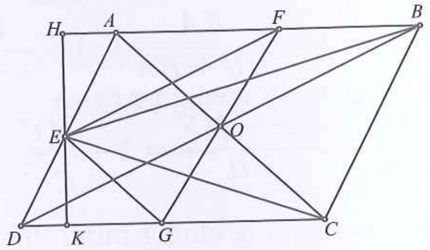
Do đó ta có:
$$S_{XYZ} = S - (S_{ABM} + S_{BCN} + S_{CAP}) + (S_{ZAP} + S_{XBM} + S_{YCN})$$
$$= S - \left(\frac{S}{3} + \frac{S}{4} + \frac{S}{2}\right) + \frac{S}{30} + \frac{S}{20} + \frac{S}{10} = \frac{S}{10}.$$
Vậy suy ra $S_{XYZ} = \frac{S}{10}$. □

Bài toán 2.12.13. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Điểm E nằm bất kì trên cạnh AD của hình bình hành. Lấy điểm F, G lần lượt nằm trên cạnh AB, CD của hình bình hành sao cho $EF \parallel BD$ và $EG \parallel AC$.

a) Chứng minh rằng O nằm trên GF.

b) Chứng minh rằng $S_{EGC} = S_{EFB}$.

Lời giải.



a) Gọi G' là giao điểm của FO với CD. Ta có $\Delta AFO = \Delta CG'O$ và $\Delta BFO = \Delta DG'O$. Suy ra $\frac{GC}{GD} = \frac{S_{OG'C}}{S_{OG'D}} = \frac{S_{FOA}}{S_{FOB}} = \frac{FA}{FB}$. Mặt khác áp dụng định lý Thales cho tam ADB và ACD ta có $\frac{FA}{FB} = \frac{EA}{ED} = \frac{GC}{GD}$ nên dễ dàng suy ra G trùng G'.

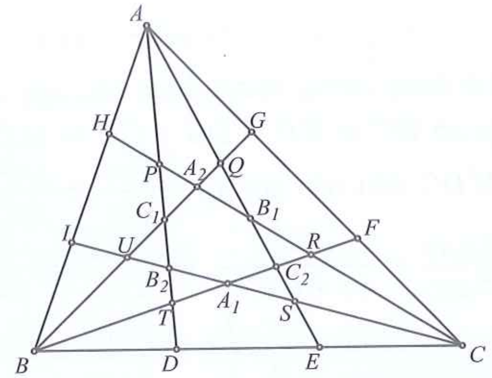
b) Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ E tới AB và DC. Ta có $DG = FB$ và $FA = GC$ nên theo định lý Thales suy ra $\frac{FB}{GC} = \frac{GD}{GC} = \frac{ED}{EA}$. Mặt khác do $BC \parallel AD$ nên ta có $\frac{EH}{EK} = \frac{S_{AEB}}{S_{DEC}} = \frac{EA}{ED}$. Từ đó ta có
$$\frac{S_{EGC}}{S_{EFB}} = \frac{CG \cdot EK}{FB \cdot EH} = \frac{CG}{FB} \cdot \frac{EK}{EH} = \frac{EA}{ED} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \text{ suy ra } S_{EGC} = S_{EFB}.$$
□

Bài toán 2.12.14. Cho tam giác ABC diện tích S, gọi D, E nằm trên BC; F, G nằm trên CA và H, I nằm trên AB thỏa mãn $BD = DE = EC$, $CF = FG = GA$ và $AH = HI = IB$. Gọi CI cắt BF tại A_1 và CH cắt BG tại A_2. B_1, B_2, C_1, C_2 xác định tương tự. Tính diện tích đa giác $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ theo S.

Lời giải.

Gọi P, T lần lượt là giao của AD với CH, BF; Q, S lần lượt là giao của AE với BG, CI; CI cắt BG tại U và BF cắt CH tại R. Ta có $2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2} = S_{PRT} + S_{QUS} - S_{PA_2C_1} - S_{UC_1B_2} - S_{TB_2A_1} - S_{SA_1C_2} - S_{RC_2B_1} - S_{QB_1A_2}$.

Ta sẽ tính diện tích tam giác PTR theo S. Ta có $S_{PTR} = S - (S_{ABD} + S_{BFC} + S_{CHA}) + (S_{AHP} + S_{BDT} + S_{CDR})$, do $\frac{S_{ABD}}{S} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2} = \frac{FC}{FA} = \frac{S_{CTF}}{S_{ATF}} = \frac{S_{BCF}}{S_{BAF}} = \frac{S_{BCF} - S_{TCF}}{S_{BAF} - S_{TAF}} = \frac{S_{CTB}}{S_{ATB}}$.



Từ đó suy ra:
$$\frac{S_{BTD}}{S_{BTA}} = \frac{S_{BTD}}{S_{BTC}} \cdot \frac{S_{BTC}}{S_{BAT}}$$
$$= \frac{BD}{BC} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
Do đó ta chứng minh được $\frac{S_{BXM}}{S_{BAM}} = \frac{1}{7}$, suy ra
$$\frac{S_{BTD}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BTD}}{S_{BAD}} \cdot \frac{S_{BAD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{1}{21}$$
Suy ra $S_{BTD} = \frac{S}{21}$.

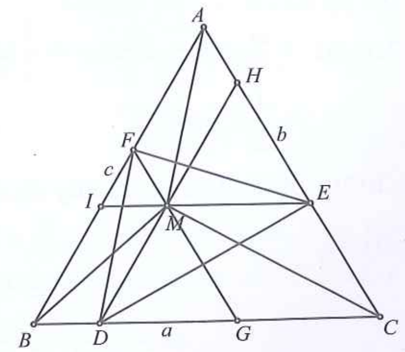
Chứng minh tương tự ta có $S_{CDF} = S_{APH} = \frac{S}{21}$.

Do đó suy ra: $S_{PTR} = S - \left(\frac{S}{3} + \frac{S}{3} + \frac{S}{3}\right) + \frac{S}{21} + \frac{S}{21} + \frac{S}{21} = \frac{S}{7}$. Tương tự $S_{QUS} = \frac{S}{7}$.

Chứng minh tương tự ta có
$$S_{PA_2C_1} = S_{UC_1B_2} = S_{TB_2A_1} = S_{SA_1C_2} = S_{RC_2B_1} = S_{QB_1A_2} = \frac{S}{70}.$$
Do đó suy ra:
$$2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2} = S_{PRT} + S_{QUS} - S_{PA_2C_1} - S_{UC_1B_2} - S_{TB_2A_1} - S_{SA_1C_2} - S_{RC_2B_1} - S_{QB_1A_2}$$
$$= \frac{S}{7} + \frac{S}{7} - \frac{S}{70} - \frac{S}{70} - \frac{S}{70} - \frac{S}{70} - \frac{S}{70} - \frac{S}{70} = \frac{S}{5}$$
Vậy ta có $S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2} = \frac{S}{10}$. □

Bài toán 2.12.15. Cho tam giác đều ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tam giác có độ dài ba cạnh là MA, MB, MC có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABC.

Lời giải.



Qua M kẻ đường thẳng song song BC lần lượt cắt AC, AB tại E, I, đường thẳng qua M song song AC lần lượt cắt BC, BA tại G, F, đường thẳng qua M song song AB lần lượt cắt CA, CB tại H, D. Ta có $\angle MDC = \angle ABC = 60° = \angle ACB$ và $ME \parallel CD$ nên $CDME$ là hình thang cân, do đó ta có $MC = DE$. Chứng minh tương tự ta có $MA = EF$ và $MB = IG$.

Ta chứng minh $S_{DEF} \leq \frac{1}{3} S_{ABC}$.

Gọi $DG = a$, $EH = b$ và $IF = c$. Ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác $CEMG$,

$AFMH$ và $BIMD$ là các hình bình hành. Do đó ta có $S_{DME} = S_{MEC} = \frac{1}{2}S_{MGCE}$, tương tự ta có:

$$\begin{aligned}S_{DEF} &= S_{DME} + S_{EMF} + S_{FMD}\\ &= \frac{1}{2}(S_{MGCE} + S_{AFMH} + S_{MIBD})\\ &= \frac{1}{2}(S_{ABC} - S_{MDG} - S_{MEH} - S_{FMI})\end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được các tam giác DMG, EMH, IMF là tam giác đều. Do đó ta có $BC = BD + DG + GC = MI + DG + ME = a + b + c$. Do tam giác ABC và MDG đều nên suy ra $\frac{S_{MDG}}{S_{ABC}} = \frac{DG^2}{BC^2} = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}$. Tương tự ta chứng minh được $\frac{S_{MHE}}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{(a+b+c)^2}$ và $\frac{S_{IMF}}{S_{ABC}} = \frac{c^2}{(a+b+c)^2}$. Từ đó ta có:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{S_{MDG}}{S_{ABC}} - \frac{S_{MHE}}{S_{ABC}} - \frac{S_{IMF}}{S_{ABC}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\right)$$

Mặt khác ta có do

$$\begin{aligned}&(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca\\ &\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2\end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Từ đó ta chứng minh được $S_{DEF} \leq \frac{1}{3}S_{ABC}$. □

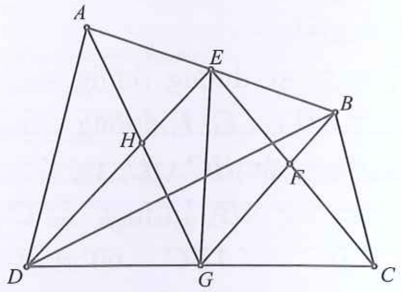
Bài toán 2.12.16. Cho tứ giác $ABCD$ lồi có E, G lần lượt là trung điểm AB, CD. Gọi F là giao điểm của BG và EC, H là giao điểm của AG và DE.

a) Chứng minh rằng $S_{HEFG} = S_{AHD} + S_{BFC}$

b) Chứng minh rằng $\frac{HA}{HG} + \frac{HD}{HE} + \frac{FB}{FG} + \frac{FC}{FE} \geq 4$.

Lời giải.

a) Ta có $\frac{S_{BED}}{S_{BAD}} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$ và $\frac{S_{BDG}}{S_{BDC}} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{2}$.



Do đó ta có

$$\begin{aligned}S_{DEBG} &= S_{DEB} + S_{DGB} = \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{DBC})\\ &= \frac{1}{2}S_{ABCD}.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự suy ra $S_{EBGD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}&S_{ABCD} = S_{AGCE} + S_{DEBC}\\ \Leftrightarrow\ &S_{ABCD} = S_{AHE} + S_{EBF} + S_{GFC} + S_{DHG} + 2S_{EFGH}\\ \Leftrightarrow\ &S_{AHD} + S_{BFC} = D_{EFGH}\end{aligned}$$

b) Ta có $\frac{HA}{HG} = \frac{S_{EAD}}{S_{DEG}} = \frac{2S_{EAD}}{S_{DEC}}$. Chứng minh tương tự suy ra $\frac{FB}{FG} = \frac{2S_{EBC}}{S_{DEC}}$, $\frac{HD}{HE} = \frac{2S_{DAG}}{S_{AGB}}$ và $\frac{FC}{FE} = \frac{2S_{BCG}}{S_{AGB}}$. Từ đó ta có

$$\frac{HA}{HG} + \frac{HD}{HE} + \frac{FB}{FG} + \frac{FC}{FE} = \frac{2(S_{DAG} + S_{BCG})}{S_{AGB}} + \frac{2(S_{EAD} + S_{EBC})}{S_{DEG}}$$

Theo câu a) ta suy ra

$$\begin{aligned}S_{DEC} &= S_{EHGF} + S_{DHG} + S_{GFC}\\ &= S_{AHD} + S_{BFC} + S_{DHG} + S_{GFC} = S_{DAG} + S_{BCG}\end{aligned}$$

nên do đó ta có

$$\frac{HA}{HG} + \frac{HD}{HE} + \frac{FB}{FG} + \frac{FC}{FE} = \frac{2S_{DEC}}{S_{AGB}} + \frac{2S_{AGB}}{S_{DEG}} \geq 4$$

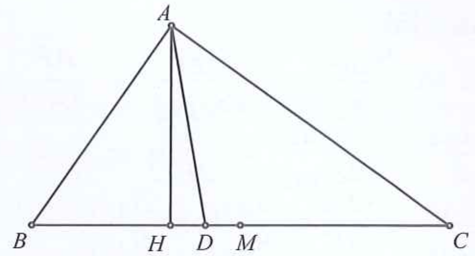
Vậy ta chứng minh được $\frac{HA}{HG} + \frac{HD}{HE} + \frac{FB}{FG} + \frac{FC}{FE} \geq 4$. □

Bài toán 2.12.17 (2007 Ecuador TST).

Cho tam giác ABC, các điểm H, D, M nằm trên cạnh BC, sao cho AH, AD, AM lần lượt là đường cao, phân giác và trung tuyến của tam giác. Giả sử $DH = DM$, $AB = 10$ và $AC = 14$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh BC là x, ta có $MC = MB = \frac{x}{2}$. Dễ có $\frac{DB}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$ mà AD là phân giác của $\angle BAC$ nên khoảng cách từ D đến AB, AC bằng nhau. Suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$.



Suy ra $DB = \frac{5x}{12}$ và $CD = \frac{7x}{12}$. Hơn nữa do $DM = DN$ nên $BH = DB - DH = DB - (MB - BD) = \frac{1}{3}x$, suy ra $CH = \frac{2}{3}x$.

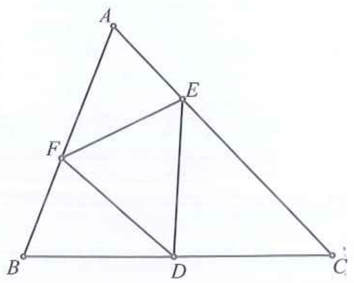
Áp dụng định lý Pytago ta có $96 = AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^2$ suy ra $x = 12\sqrt{2}$. Từ đó ta có $BH = \frac{1}{3}BC = 4\sqrt{2}$, theo định lý Pytago $AH = 2\sqrt{17}$. Do đó

$$S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = 12\sqrt{34}$$

Vậy $S_{ABC} = 12\sqrt{34}$. □

Bài toán 2.12.18. Cho tam giác ABC, gọi các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Chứng minh rằng trong các tam giác AEF, BDF và CDE luôn tồn tại một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{S}{4}$.

Lời giải.



Đặt $\frac{CE}{CA}=a$, $\frac{CD}{CB}=b$ và $\frac{AF}{AB}=c$. Ta dễ dàng chứng minh được $\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\frac{CE\cdot CD}{CS\cdot CB}=ab$, tương tự suy ra ta có

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=ab\cdot(1-a)c\cdot(1-b)(1-c)$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_{CDE}\cdot S_{AEF}\cdot S_{BFD}}{S^3_{ABC}}=abc(1-a)(1-b)(1-c)$$

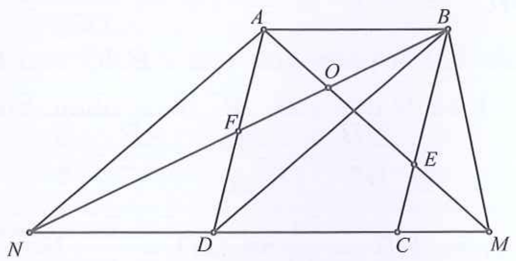
Mặt khác ta có do $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ tương đương với $a(1-a)\leq\frac{1}{4}$. Do đó suy ra

$$S_{CDE}\cdot S_{AEF}\cdot S_{BFD}\leq\frac{S^3}{64}.$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.12.19 (HOMC 2014).
Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích S, điểm F, E lần lượt nằm trên cạnh AD và BC sao cho $BC=3CE$ và $AD=2AF$. Gọi O là giao điểm của AE và BF. Đường thẳng AE và BF lần lượt cắt CD tại M, N. Tính diện tích của tam giác MON theo S.

Lời giải.



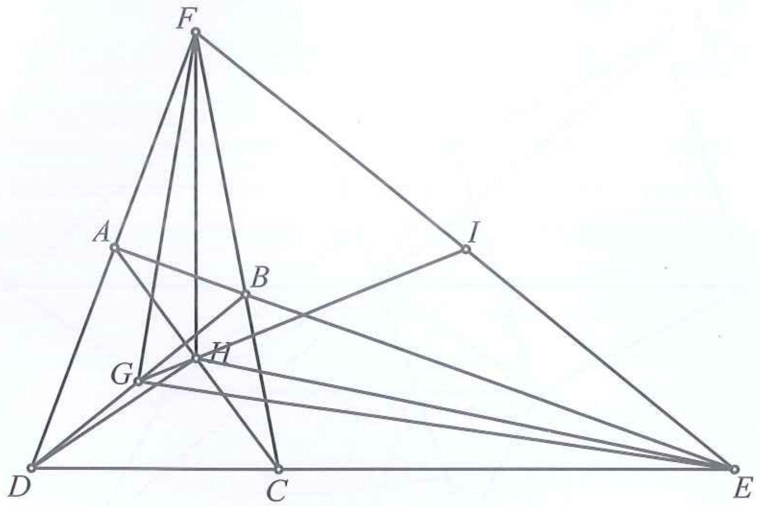
Ta có $\frac{S_{ABF}}{S}=\frac{S_{ABF}}{2S_{ABD}}=\frac{AF}{2AD}=\frac{1}{4}$ và $\frac{S_{ABE}}{S}=\frac{S_{ABE}}{2S_{ABC}}=\frac{BE}{2BC}=\frac{1}{3}$. Hơn nữa do $\frac{S_{OAB}}{S_{OBE}}=\frac{OA}{OE}=\frac{S_{BAF}}{S_{BEF}}=\frac{S_{ABF}}{S_{ABE}}=\frac{3}{4}$.
Do đó dễ có $S_{OAB}=\frac{S}{7}$ và $S_{BOE}=\frac{4S}{21}$.
Ta dễ có $S_{FND}=S_{AFB}=\frac{S}{4}$ và $\frac{S_{CEM}}{S_{ABE}}=\frac{EC^2}{EB^2}=\frac{1}{4}$ nên $S_{CEM}=\frac{S}{12}$. Hơn nữa ta có $S_{DFOEC}=S_{ABCD}-SABF-S_{OBE}=\frac{47S}{84}$.
Từ đó suy ra

$$S_{MON}=S_{NFD}+S_{CEM}+S_{DFOEC}=\frac{S}{4}+\frac{S}{12}+\frac{47S}{84}=\frac{25S}{28}.$$

Vậy ta có $S_{MON}=\frac{25S}{28}$. □

Bài toán 2.12.20. *(Đường thẳng Gauss)* Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho tia DA cắt tia CB tại F, tia AB cắt tia DC tại E. Gọi G, H, I lần lượt là trung điểm của BD, AC và EF. Chứng minh rằng ba điểm G, H, I thẳng hàng.

Lời giải.
Ta chứng minh với trường hợp hình vẽ sau, các trường hợp khác chứng minh tương tự. Xét diện tích tam giác FGH ta có



$$\begin{aligned}
S_{FGH}&=S_{FDC}-S_{FGD}-S_{FHC}-S_{DHG}-S_{DGC}\\
&=S_{FDC}-\frac{1}{2}S_{DFB}-\frac{1}{2}S_{CFA}-\frac{1}{2}S_{DHB}-\frac{1}{2}S_{BCD}\\
&=S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABD}-\frac{1}{2}S_{ABC}-\frac{1}{2}S_{DBC}+\frac{1}{2}S_{DHC}+\frac{1}{2}S_{CHB}-\frac{1}{2}S_{BCD}\\
&=\frac{1}{2}S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABD}-\frac{1}{2}S_{DBC}+\frac{1}{4}S_{CDA}+\frac{1}{4}S_{ABC}\\
&=\frac{1}{4}S_{ABCD}
\end{aligned}$$

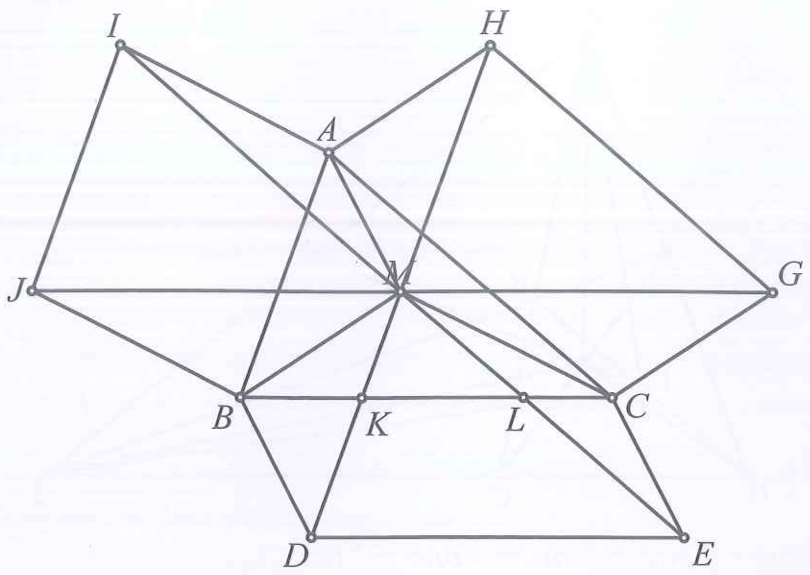
Chứng minh tương tự ta có $S_{GHE}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Gọi GH cắt EF tại I' dễ dàng suy ra $S_{FHI'}=S_{EHI'}$ nên suy ra I' là trung điểm EF hay I trùng I'.
Từ đó suy ra G, H, I thẳng hàng. □

Bài toán 2.12.21. Cho tam giác ABC nhọn có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.
a) Cho M là một điểm bất kì nằm trong tam giác với $MA=x$, $MB=y$ và $MC=z$. Chứng minh rằng $S_{ABC}\leq\frac{1}{4}(ax+by+cz)$.
b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$S_{ABC}=\frac{1}{4}(a\cdot AH+b\cdot BH+c\cdot CH).$$

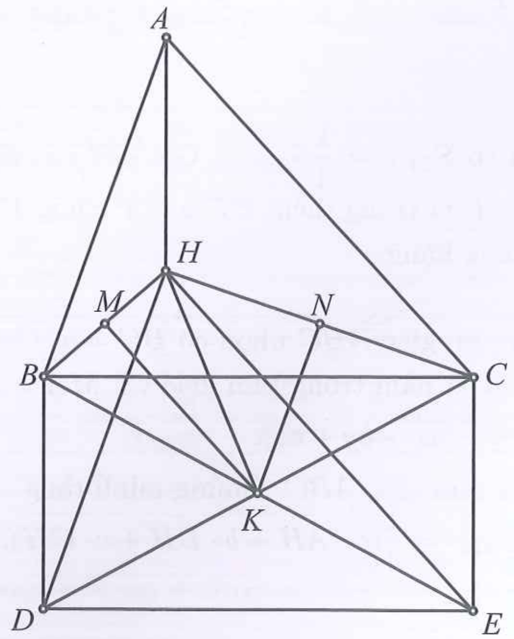
Lời giải.
a) Ta dựng các hình bình hành $AMDB$ và $AMEC$, dễ dàng chứng minh được $BCEC$ cũng là hình bình hành. Do $AB=MD$, $AC=ME$ và $BC=DE$ ta có $\Delta ABC=\Delta MDE$. Suy ra:

$$\begin{aligned}
2(S_{MAB}+S_{MAC})&=S_{MABD}+S_{MACE}\\
&=S_{ABDEC}-S_{MDE}\\
&=S_{ABDEC}-S_{ABC}=S_{BDCE}\\
&\leq BC\cdot BD=ax.
\end{aligned}$$



Chứng minh tương tự ta có $2(S_{MBA} + S_{MBC}) \leq by$ và $2(S_{MCA} + S_{MCB}) \leq cz$. Do đó ta dễ dàng chứng minh được $4S_{ABC} \leq (ax + by + cz)$ hay $S_{ABC} \leq \frac{1}{4}(ax + by + cz)$.

b) Dựng hình bình hành $ABDH$ và $ACEH$, ta có $BCED$ là hình chữ nhật.

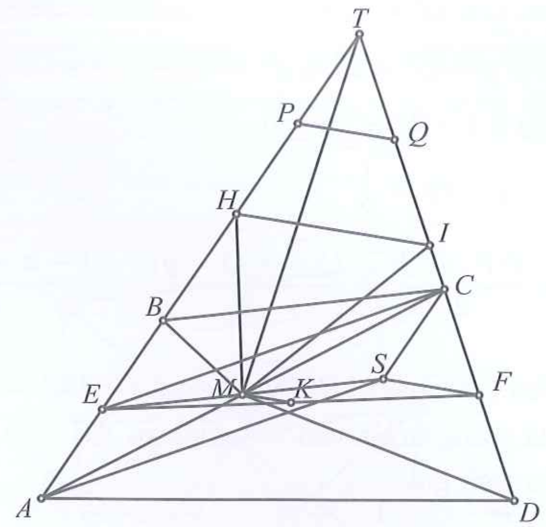


Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH, CH. Chứng minh tương tự câu a) ta có $2(S_{BHA} + S_{CHA}) = ax$. Ta có KM là đường trung bình tam giác BHE mà $HE \parallel AC$ nên $HE \perp BH$ suy ra $KM \perp BH$. Ta có do $DC \parallel BH$ do đó

$$S_{BHC} = S_{BHK} = \frac{1}{2}BH \cdot MK = \frac{1}{4}BH \cdot EH = \frac{1}{4}by.$$

Chứng minh tương tự ta có $S_{BHC} = \frac{1}{4}cz$. Từ đó ta có $\frac{1}{4}(ax + by + cz) = S_{HAB} + S_{BHC} + S_{CHA} = S_{ABC}$. □

Bài toán 2.12.22. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tìm vị trí điểm K nằm trên EF sao cho $S_{AKB} + S_{CKD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm AC, không mất tính tổng quát giả sử tia AB cắt tia DC tại điểm T. H, Q lần lượt nằm trên đoạn TA, TD sao cho $TH = AB$ và $TI = CD$.

Ta có $S_{BMA} + S_{CMD} = \frac{1}{2}(S_{BAC} + S_{CAD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, mà mặt khác $S_{THM} = S_{BAM}$ và $S_{TMI} = S_{CMD}$ suy ra $S_{THMI} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Qua M kẻ đường thẳng song song với HI cắt EF tại K. Ta sẽ chứng minh K là điểm thỏa mãn.

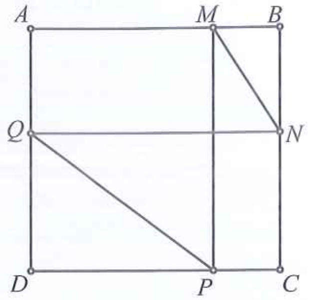
Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_{ABCD} &= S_{THMI} = S_{THI} + S_{HMI} \\ &= S_{THI} + S_{HKI} = S_{THKI} \\ &= S_{THK} + S_{TIK} \\ &= S_{BKA} + S_{CKD}\end{aligned}$$

Mặt khác gọi điểm S đối xứng với E qua M, ta có $AECS$ là hình bình hành. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm TH, TI ta có $SC = TP$ và $CF = TQ$, dễ có $\Delta TPQ = \Delta CSF$. Từ đó ta có $\angle SFC = \angle PQT = \angle HIT$ hay $HI \parallel SF$, suy ra $MK \parallel SF$ nên ta có MK là đường trung bình tam giác SF hay K là trung điểm EF. Vậy điểm K là trung điểm EF là điểm cần tìm. □

Bài toán 2.12.23. *(ITOT 2007)* Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 1. Các điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên AB, BC, CD và DA thỏa mãn $MP \parallel BC$ và $QN \parallel AB$ và chu vi tam giác MNB là 1. Tính diện tích tam giác QPD.

Lời giải.



Đặt $MB = x$, $NB = y$, từ đó dễ có $DP = 1 - x$ và $QD = 1 - y$. Áp dụng định lý Pytago cho tam giác MBN ta có $MN^2 = BM^2 + BN^2 = x^2 + y^2$. Theo đề bài ta có

$$1 = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow (x + y - 1)^2 = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow 2xy + 1 - 2x - 2y = 0$$
$$\Rightarrow x + y - xy = \frac{1}{2}$$

Từ đó suy ra $S_{QPD} = \dfrac{DP \cdot DQ}{2} = \dfrac{(1-x)(1-y)}{2} = \dfrac{1 - x - y + xy}{2} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}.$

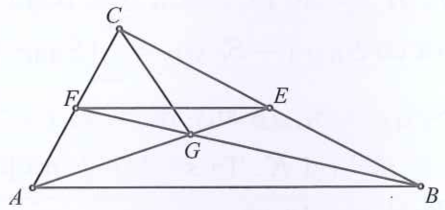
□

Bài toán 2.12.24. Cho tam giác ABC vuông tại C, $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Gọi AE, BF lần lượt là trung tuyến của tam giác và $AE = m$, $BF = n$, r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{r^2}{m^2 + n^2} \geq \dfrac{1}{20}$.

b) Tính giá trị lớn nhất của $\dfrac{r^2}{m^2 + n^2}$.

Lời giải.



a) Áp dụng định lý Pytago ta có

$AE^2 = \dfrac{a^2}{4} + b^2$ và $BF^2 = \dfrac{b^2}{4} + a^2$, suy ra

$m^2 + n^2 = AE^2 + BF^2 = a^2 + b^2 + \dfrac{a^2 + b^2}{4} = \dfrac{5}{4}c^2.$

Mặt khác do $\dfrac{ab}{2} = S_{ABC} = \dfrac{a + b + c}{2} \cdot r.$

Suy ra $r = \dfrac{ab}{a + b + c} = \dfrac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}.$

Ta có $(a - b)^2 \geq 0$ suy ra $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ và $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ hay $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$.

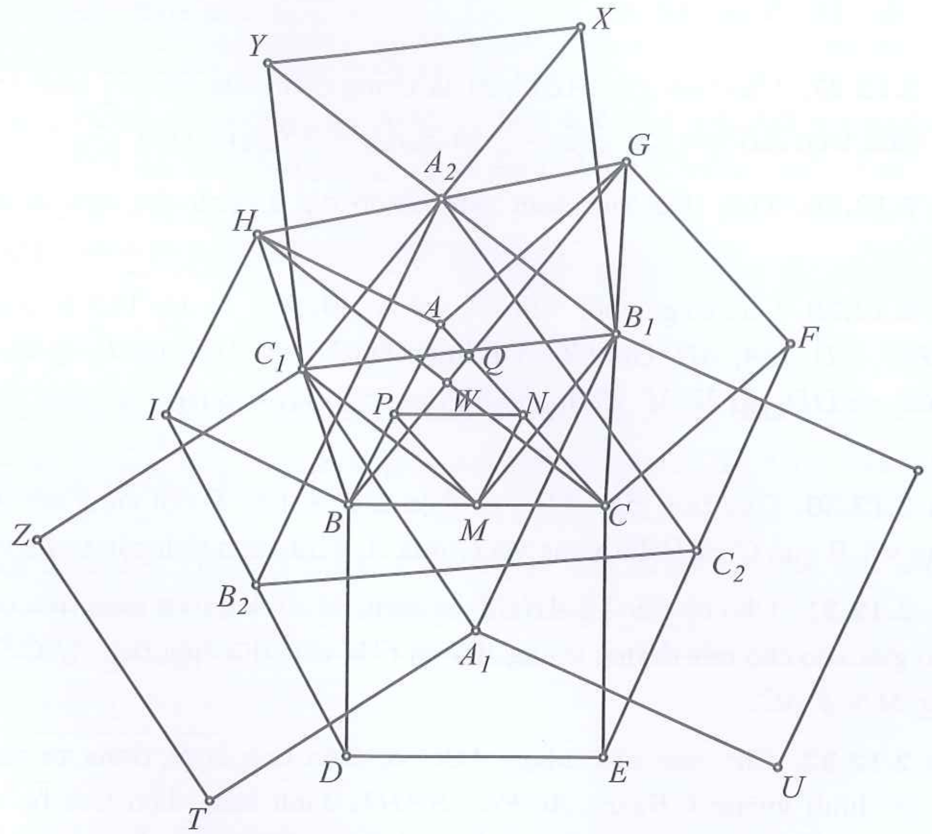
Từ đó $r < \dfrac{\frac{a^2 + b^2}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{a^2 + b^2}{4\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{c}{4}$ suy ra $r^2 < \dfrac{c^2}{16}$. Do đó ta dễ dàng chứng minh được $\dfrac{r^2}{m^2 + n^2} < \dfrac{c^2}{16} \cdot \dfrac{4}{5c^2} = \dfrac{1}{20}$.

b) Ta có

$$\frac{r^2}{m^2 + n^2} = \frac{a^2b^2}{\left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} \cdot \frac{4}{5c^2}$$
$$\leq \frac{a^2b^2}{\left(2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab}\right)^2} \cdot \frac{4}{5\left(a^2 + b^2\right)}$$
$$\leq \frac{ab}{\left(2 + \sqrt{2}\right)^2} \cdot \frac{4}{5 \cdot 2ab} = \frac{2}{5\left(2 + \sqrt{2}\right)^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$$

Vậy suy ra $\dfrac{r^2}{m^2 + n^2}$ đạt giá trị lớn nhất tại $\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $CA = CB$ hay tam giác ABC vuông cân tại C. □

Bài toán 2.12.25. *(IMO longlist 1971)* Cho tam giác nhọn ABC có diện tích là S, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $CBDE$, $ACFG$, $BAHI$ lần lượt có tâm là A_1, B_1, C_1. Dựng ra phía ngoài tam giác $A_1B_1C_1$ các hình vuông B_1C_1YX, C_1A_1TZ, A_1B_1VU lần lượt có tâm là A_2, B_2, C_2. Gọi $S_{A_1B_1C_1} = S_1$ và $S_{A_2B_2C_2} = S_2$. Chứng minh rằng $S = 8S_1 - 4S_2$.



Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Xét ΔAHC và ΔABG có $AB = AH$, $AC = AG$ và $\angle BAG = \angle HAC$ nên $\Delta AHC = \Delta ABG$ (cgc) suy ra $BG = CH$. Gọi CH cắt BG tại W và BG cắt AC tại Q ta có $\angle HCA = \angle AGB = 90° - \angle AQG = 90° - \angle CQW$. Suy ra $\angle CWB = 90°$ nên $CH \perp BG$.

Ta có MC_1 là đường trung bình của ΔBHC và MB_1 là đường trung bình của ΔBCG nên dễ có tam giác B_1MC_1 vuông cân tại M. Chứng minh tương tự ta có ΔNA_1C_1 vuông cân tại N và ΔPB_1A_1 vuông cân tại P.

Xét tam giác $A_1B_1C_1$ có A_2, B_2, C_2 lần lượt là tâm các hình vuông dựng ra phía ngoài của tam giác $A_1B_1C_1$ và M, N, P lần lượt là tâm các hình vuông dựng vào phía trong của tam giác $A_1B_1C_1$. Từ đó theo bài toán trước ta có $2S_{A_1B_1C_1} = S_{MNP} + S_{A_2B_2C_2}$ mà $S_{MNP} = \dfrac{S_{ABC}}{4}$ nên ta có $2S_1 = \dfrac{S}{4} + S_2$ hay $S = 8S_1 - 4S_2$, ta có điều phải chứng minh. □

2.12.3 Bài tập tự luyện

Bài toán 2.12.26. Cho tam giác ABC, điểm P bất kì nằm trong tam giác. Gọi AP, BP, CP cắt cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $\dfrac{DP}{DA} + \dfrac{EP}{EB} + \dfrac{FP}{FC} = 1$.

Bài toán 2.12.27. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, N nằm trên cạnh AC, và P nằm trên AB sao cho $\dfrac{NA}{NC} = \dfrac{3}{2}$ và $S_{MNP} = 3S_{BMP}$. Tính $\dfrac{PA}{PB}$.

Bài toán 2.12.28. Tính diện tích tam giác có độ dài 3 cạnh lần lượt là 2, $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3} - 1$.

Bài toán 2.12.29. Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi A_1, B_1, C_1. D_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DA, AB. Gọi CC_1 lần lượt cắt BB_1 và DD_1 tại P, Q và AA_1 lần lượt cắt BB_1 và DD_1 tại N, M. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = S_{AMD_1} + S_{BNA_1} + S_{CPB_1} + S_{DQC_1}$.

Bài toán 2.12.30. Cho tam giác ABC có diện tích S. Lấy P đối xứng với A qua B, Q đối xứng với B qua C và R đối xứng với C qua A. Tính diện tích của tam giác PQR.

Bài toán 2.12.31. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có điểm M, N lần lượt nằm trên cạnh AB, BC của tứ giác sao cho mỗi đường thẳng AN và CM chia đôi diện tích $ABCD$. Chứng minh rằng $MN \parallel AC$.

Bài toán 2.12.32. Cho tam giác nhọn ABC có diện tích là S, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $CBDE$, $ACFG$, $BAHI$. Tính tổng diện tích ba tam giác HAG, FCE và IBD.

Bài toán 2.12.33. Cho tam giác ABC vuông tại A diện tích S. Các điểm A' đối xứng A qua BC, B' đối xứng B qua CA và C' đối xứng C qua AB. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$ theo S.

Bài toán 2.12.34. *(JBMO 2001)* Cho ABC đều, điểm D, E bất kì lần lượt nằm trên cạnh AB và AC. Gọi $F \in AE$, $G \in AD$ sao cho DF, EG là phân giác trong của tam giác ADE. Chứng minh rằng $S_{DEF} + S_{DEG} \leq S_{ABC}$.

Bài toán 2.12.35. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, lấy các điểm E, F, G, H lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{FB}{FC} = \dfrac{GC}{GD} = \dfrac{HD}{HA} = \dfrac{1}{3}$. Giả sử diện tích của $EFGH$ là 1. Tính diện tích của hình vuông $ABCD$.

Bài toán 2.12.36. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, đường phân giác trong AD, BE, CF. Tính diện tích tam giác DEF theo a, b, c.

Bài toán 2.12.37. Cho lục giác $ABCDEF$ có các cặp cạnh đối song song. Chứng minh rằng $S_{ACE} = S_{BDF}$.

Bài toán 2.12.38. Tam giác ABC, trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Điểm P bất kì ngoài tam giác. Chứng minh rằng trong ba tam giác PAM, PBN, PCD luôn tồn tại hai tam giác có tổng diện tích bằng với tam giác còn lại.

Bài toán 2.12.39. Cho tứ giác lồi $ABCD$, điểm X, Y lần lượt nằm trên cạnh AB, CD của tứ giác thỏa mãn $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{YC}{YD}$. Gọi CX cắt BY tại Z, AY cắt DX tại T. Chứng minh rằng $S_{ADT} + S_{BCZ} = S_{XZYT}$.

Bài toán 2.12.40. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ có đường trung tuyến tương ứng lần lượt là m_a, m_b, m_c và diện tích S. Chứng minh rằng:

a) $4\sqrt{3}S \leq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$.

b) $S \leq \dfrac{\sqrt{3} \cdot (ab + bc + ca)}{12}$.

c) $S \leq \dfrac{\sqrt{3} \cdot (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9}$.

Bài toán 2.12.41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, X, Y nằm trên cạnh AD thỏa mãn $\dfrac{YD}{YA} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{XA}{XD} = \dfrac{1}{5}$. Gọi Z là giao điểm của BX và CY. Tính diện tích ΔBCZ theo a.

Bài toán 2.12.42. *(Vũ Hữu Bình).* Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, diện tích S, chu vi là p. Chứng minh rằng:

a) $S \leq \dfrac{1}{4}(a + c)(b + d)$

b) $S \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$

c) $S \leq (a + c)(b + d) \leq p^2$.

Bài toán 2.12.43. Cho đường tròn tâm O đường kính BC, điểm A chuyển động trên (O) khác B và C. Gọi AT là đường cao của tam giác ABC, X, Y lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ T tới AB, AC. Tìm vị trí điểm A để diện tích $OXAY$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 2.12.44. *(OJM 2006 IV Venezuela)* Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB và CD có độ dài lần lượt là 5 và 1. Gọi M nằm trên AD và N nằm trên BC sao cho MN song song với cạnh AB và diện tích tứ giác $ABNM$ gấp đôi diện tích tứ giác $CDMN$. Tính độ dài đoạn MN.

Bài toán 2.12.45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle ACB = 30°$. Dựng ra phía ngoài tam giác hình vuông $BCEF$, đường thẳng AF cắt BC tại K. Biết diện tích hình vuông $BCEF$ là 104. Tính diện tích tam giác ACK.

Bài toán 2.12.46. *(HOMC 2010)* Cho tam giác ABC, D nằm trên cạnh BC. Qua D lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AC, AB lần lượt cắt AB, AC tại F, E. Biết rằng $S_{BDF} = 9$ và $S_{CDE} = 25$. Tính diện tích tam giác AEF.

Bài toán 2.12.47. Cho tam giác ABC, các điểm M, N, P lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB của tam giác sao cho AM, BN, CP không đồng quy và đôi một cắt nhau tạo thành tam giác DEF. Gọi $\frac{MB}{MC} = x$, $\frac{NC}{NA} = y$ và $\frac{PA}{PB} = z$. Tính tỉ số $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ theo x, y, z.

Bài toán 2.12.48. Cho tam giác ABC, trung tuyến BD, điểm K di động trên AC. Lấy điểm P trên BD sao cho $S_{APK} = S_{BPC}$. Gọi M là giao điểm AP và BK. Tìm quỹ tích điểm M khi K chuyển động.

Bài toán 2.12.49. Cho tam giác ABC có diện tích S và điểm P bất khì nằm trong tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm PA, PB, PC. Gọi G_a, G_b, G_c lần lượt là trọng tâm của tam giác BCP, CAP và ABP. Tính diện tích đa giác $S_{XG_cYG_aZG_b}$ theo S.

Bài toán 2.12.50. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có diện tích là S, gọi các điểm E, F nằm trên cạnh AB và G, H nằm trên cạnh CD của tứ giác sao cho $\frac{EA}{EB} = \frac{FB}{FA} = \frac{3}{4}$ và $\frac{GC}{GD} = \frac{HD}{HC} = \frac{3}{4}$. Gọi các điểm X, Y nằm trên cạnh BC và Z, T nằm trên cạnh CD sao cho $\frac{XB}{XC} = \frac{YC}{YD} = \frac{ZD}{ZA} = \frac{TA}{TD} = \frac{4}{5}$. Gọi M, Q lần lượt là giao điểm của EH với XZ, YT, N, P lần lượt là giao điểm của FG với XZ, YT. Chứng minh rằng $S_{XYZT} = \frac{S}{63}$.

Bài toán 2.12.51. Cho tam giác ABC có diện tích S, trọng tâm G. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = k$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AC, AB. Qua M kẻ đường đường thẳng song song với BE lần lượt cắt CG, CA tại Z, X, đường thẳng qua M song song CF lần lượt cắt BG, BA tại T, Y.

a) Tính $\frac{S_{MXY}}{S_{MTGZ}}$.

b) Tính diện tích ΔMXY theo S, k.

Bài toán 2.12.52. Cho tam giác ABC vuông tại B ($BC > AB$) có độ dài cạnh AB và BC nguyên dương. Trung trực AC lần lượt cắt AC, BC tại D, E. Gọi F nằm trên AC sao cho $\angle BEF = 90°$. Giả sử diện tích tam giác DEF là 1. Tính diện tích ΔABC.

Bài toán 2.12.53. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp bán kính r tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.
Chứng minh rằng $OX^2 + OY^2 + OZ^2 = 3R^2 - 4Rr - r^2$.

Bài toán 2.12.54. Cho tam giác ABC nhọn có diện tích S, điểm K nằm trong tam giác khác các cạnh của tam giác. Các đường thẳng AK, BK, CK lần lượt cắt BC,

CA, AB tại M, N, P. Gọi $\frac{MB}{MC} = x$, $\frac{NC}{NA} = y$ và $\frac{PA}{PB} = z$. Chứng minh rằng $S_{MNP} = \frac{2S}{(x+1)(y+1)(z+1)}$.

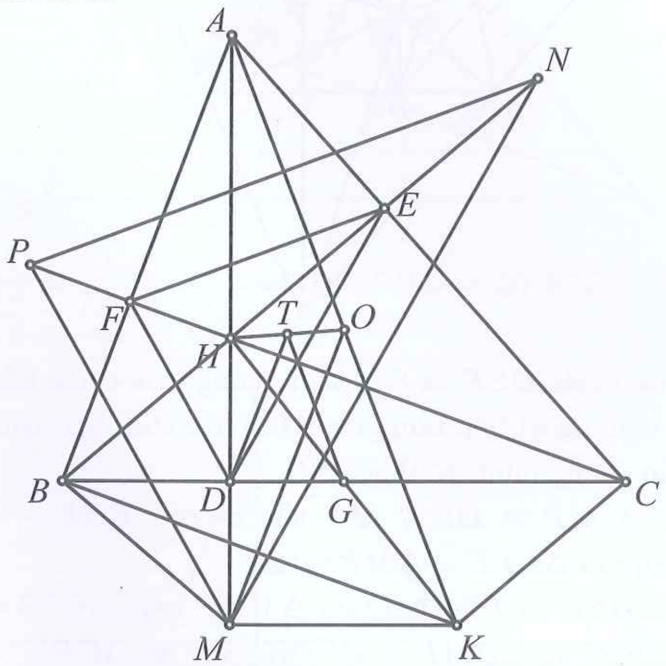
Bài toán 2.12.55. *(JMO 1992).* Cho tam giác ABC có diện tích là 1. Điểm D, E chuyển động lần lượt trên cạnh AB, AC. BE cắt CD tại P sao cho $S_{BCED} = 2S_{BPC}$. Tìm giá trị lớn nhất của S_{EPD}.

2.12.4 Một số bài tập về tam giác đồng dạng

Bài toán 2.12.56. Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi O, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC và ΔDEF. Chứng minh rằng H, O, T thẳng hàng.

Lời giải.

Gọi K là điểm đối xứng của A qua O; M, N, P lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các cạnh BC, CA, AB. Ta có do $OA = OK = PC$ nên suy ra tam giác ACK vuông tại C, ta có $CK \parallel BH$. Chứng minh tương tự ta thu được $CH \parallel BK$ hay $BHCK$ là hình bình hành.

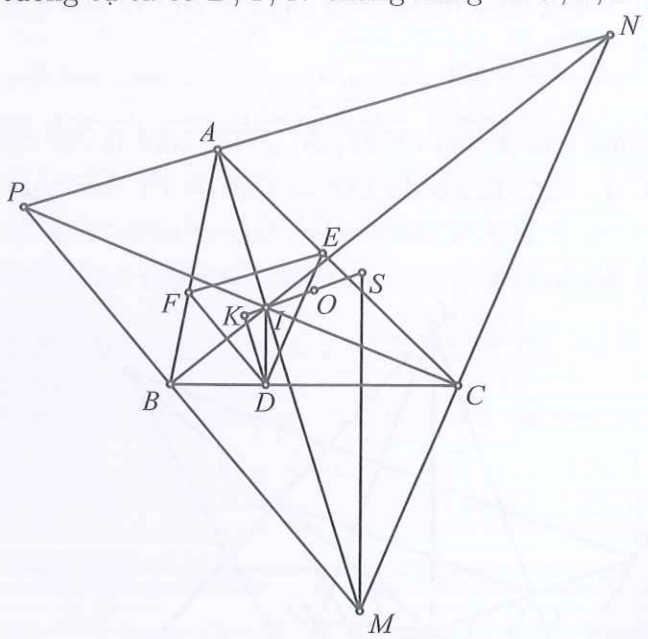


Gọi G là trung điểm BC suy ra G là trung điểm HK. Suy ra DG là đường trung bình tam giác HMK nên $MK \parallel DG$ hay $MK \perp AK$. Do đó ta có $OM = OA = OK$.
Gọi T' là trung điểm HO, do $T'D$ là đường trung bình của ΔHOM nên $T'D = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}OA$. Chứng minh tương tự ta có $T'D = T'E = T'F = \frac{1}{2}OA$ nên T' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF hay T trùng T'. Vậy suy ra H, T, O thẳng hàng. □

Bài toán 2.12.57. Cho tam giác ABC, gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác, D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ I tới các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng OI đi qua trực tâm tam giác DEF.

Lời giải.

Đường thẳng qua B song song FD lần lượt cắt đường thẳng qua A song song FE và đường thẳng qua C song song ED tại F, M, đường thẳng qua A song song FE cắt đường thẳng qua C song song ED tại N. Do $\angle MBC = \angle ABP$ nên dễ có khoảng cách từ M tới AB bằng khoảng cách từ M tới BC, tương tự có khoảng cách từ M tới AC bằng khoảng cách từ M tới BC nên ta có AM là phân giác $\angle BAC$ hay A, M, I thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có B, I, N thẳng hàng và C, I, P thẳng hàng.



Gọi K là trực tâm tam giác DEF và S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên theo bài toán trước ta có S, O, I thẳng hàng, ta cần chứng minh K thuộc SI.

Thật vậy ta có $FD \parallel MP$ và $DE \parallel MN$ nên dễ có $\angle EDF = \angle NMP$, tương tự $\angle BPA = \angle DFE$. Suy ra $\Delta DFE \backsim \Delta MPN$ (gg)

Do K là trực tâm ΔDEF và I là trực tâm ΔMNP nên $\angle KFD = 90^\circ - \angle FDE = 90^\circ - \angle BMC = \angle PBI$ và $\angle BMI = \angle FDK$. Suy ra $\Delta DFK \backsim \Delta MPI$ (gg) và $\Delta FID \backsim \Delta PSM$ (gg).

Ta có $\dfrac{DK}{IM} = \dfrac{DF}{PM} = \dfrac{DI}{MS}$ mà dễ dàng chứng minh được $\angle KDI = \angle IMS$ nên $\Delta IMS \backsim \Delta KDI$. Suy ra $\angle DKI = \angle MIS$ mà $KD \parallel IM$ nên ta chứng minh được $\angle KIM + \angle MIS = 180^\circ - \angle IKD + \angle MIS = 180^\circ$ hay K, I, S thẳng hàng. □

Bài toán 2.12.58. Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE.

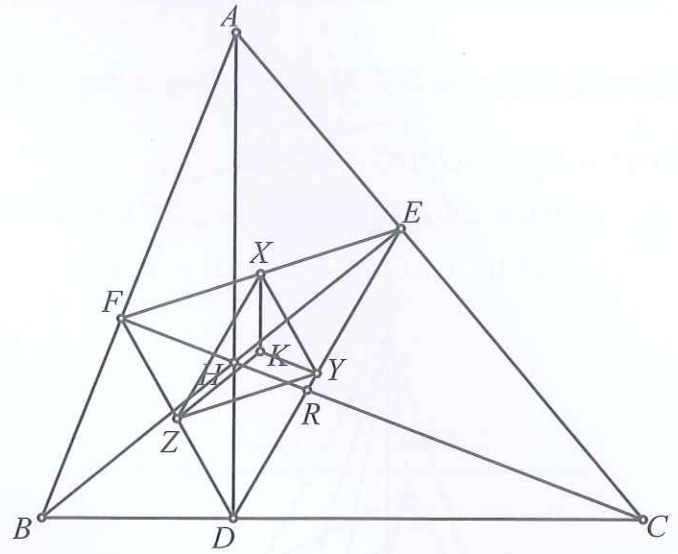
a) Chứng minh rằng đường thẳng qua X, Y, Z lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại K.

b) Gọi T là trực tâm tam giác DEF. Chứng minh rằng K là trung điểm của OT.

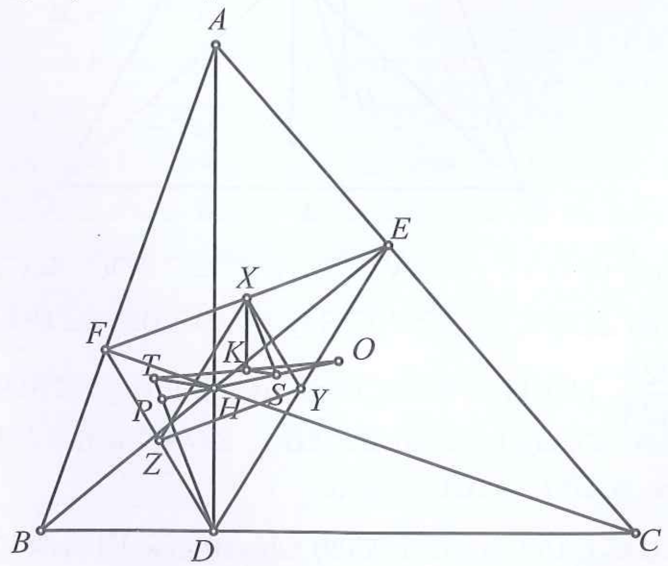
Lời giải.

a) Đường thẳng qua Y song song CF cắt đường thẳng qua Z song song EB tại K, ta sẽ chứng minh XK song song AD.

Gọi R là giao điểm của ED với CF. Dễ dàng chứng minh được $\Delta XYZ \backsim \Delta DFE$. Ta có do $KY \parallel CF$ và $KZ \parallel EB$ nên ta có $\angle KYZ = \angle KYD - \angle ZYD = \angle FRD - \angle FED = \angle HFE$, tương tự $\angle FEH = \angle YZK$. Suy ra $\Delta KYZ \backsim \Delta HFE$ (gg). Do $\angle XYZ = \angle DFE$ nên $\angle XYK = \angle DFH$.



Mặt khác ta có $\dfrac{KY}{HF} = \dfrac{ZY}{EF} = \dfrac{XY}{FD}$ suy ra $\Delta FHD \backsim \Delta YKX$ (cgc) suy ra $\angle KXY = \angle HDF$. Từ đó dễ dàng suy ra $XK \parallel HD$.



b)

Gọi S là tâm ngoại tiếp của tam giác DEF, theo bài toán trước ta thu được S

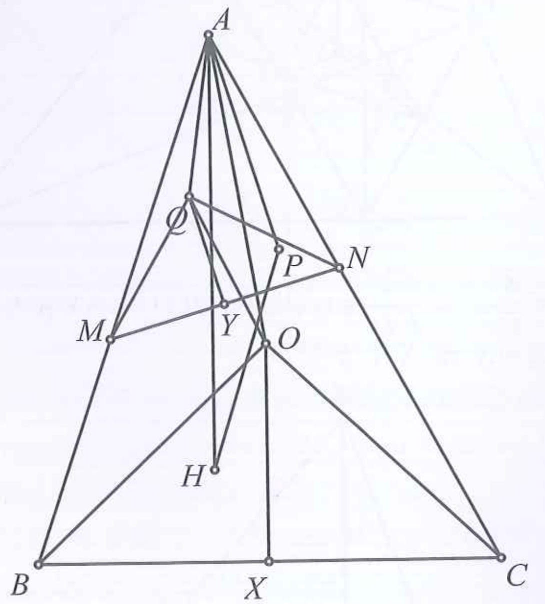
là trung điểm HO. Dễ dàng chứng minh S là trực tâm của tam giác XYZ, do đó $\angle SXY = 90° - \angle XYZ = 90° - \angle DFE = \angle FDT$ và $\angle SYX = \angle TFD$. Suy ra $\Delta SXY \backsim \Delta TDF$ (gg) nên ta có $\dfrac{SX}{TD} = \dfrac{XY}{FD} = \dfrac{XK}{DH}$. Mặt khác do $\angle KXS = \angle KXY - \angle SXY = \angle HDF - \angle TDF = \angle TDH$. Do đó $\Delta THD \backsim \Delta SKX$ (cgc).
Gọi P là giao điểm của OS với TD. Ta có $\angle KSH = \angle XSH - \angle XSK = \angle SPD - \angle PTH = \angle THP$ suy ra $KS \parallel TH$. Do đó KS là đường trung bình của tam giác THO. Suy ra K là trung điểm của TO. □

Bài toán 2.12.59. Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường ngoại tiếp O, gọi M, N lần lượt nằm trên cạnh AB, AC của tam giác. Gọi P, Q lần lượt là trực tâm và tâm ngoại tiếp của tam giác AMN. Chứng minh rằng $\Delta AHP \backsim \Delta AOQ$.

Lời giải.

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của BC, MN. Dễ dàng chứng minh được $AP = 2QY$ và $AH = 2OX$. Ta có

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 180° - \angle OBC - \angle OCB\\ &= 180 - \angle CBA - \angle BCA + \angle OCB + \angle OBC\\ &= \angle BAC + \angle OAC + \angle OAB = 2\angle BAC.\end{aligned}$$



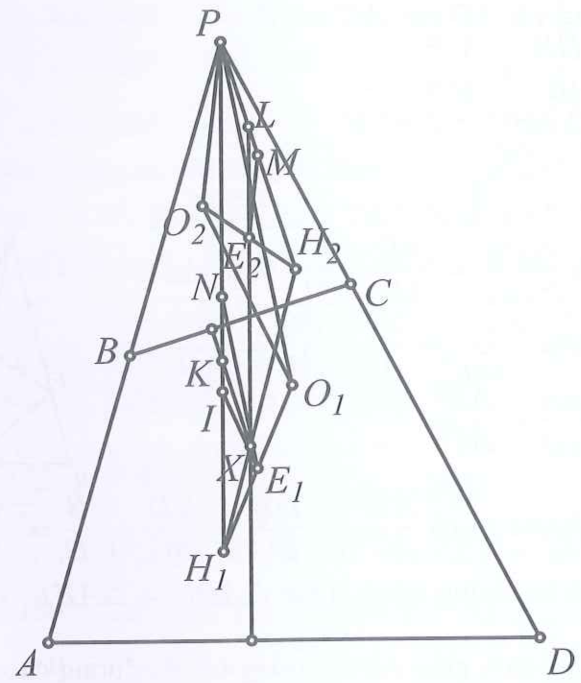
Chứng minh tương tự ta có $\angle MQN = 2\angle BAC = \angle BOC$. Suy ra $\Delta BOC \backsim \Delta MQN$ (cgc). Do đó ta có $\angle OBX = \angle QMN$. Suy ra $\angle MQY = \angle BOX$ (gg). Ta có $\dfrac{AP}{AH} = \dfrac{QY}{OX} = \dfrac{QM}{OB} = \dfrac{QA}{OA}$. Mặt khác chứng minh tương tự ta có $\angle AQM = 2\angle ANM$ suy ra $\angle QAM = \angle PAN$. Tương tự ta có $\angle HAB = \angle OAC$ nên $\angle PAH = \angle OAQ$. Vậy ta chứng minh được $\Delta AHP \backsim \Delta AOQ$ (cgc). □

Bài toán 2.12.60. *(IMO shortlist 2009)* Cho tứ giác lồi $ABCD$, tia AB cắt tia DC tại P. Gọi O_1, H_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của ΔPAD, O_2,

H_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của ΔPBC. Gọi E_1, E_2 lần lượt là trung điểm của H_1O_1 và H_2O_2. Chứng minh rằng đường thẳng qua E_2 vuông góc AD, đường thẳng qua E_1 vuông góc BC và H_1H_2 đồng quy.

Lời giải.

Gọi X là giao điểm của đường thẳng qua E_2 vuông góc AD với đường thẳng qua E_1 vuông góc BC. Ta sẽ chứng minh H_1, X, H_2 thẳng hàng.



Gọi L là giao điểm của PC với đường thẳng qua E_2 vuông góc AD và K là giao điểm của đường thẳng qua E_1 vuông góc BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của PH_2 và PH_1. Ta sẽ chứng minh $\dfrac{H_2L}{H_2P} = \dfrac{LX}{PH_1}$.

Dễ có $PLXK$ là hình bình hành nên ta cần chứng minh $\dfrac{H_2L}{H_2P} = \dfrac{PK}{PH_1}$, hơn nữa theo bài toán trước ta có $\angle O_1PD = \angle H_1PA$ và $\angle O_2PD = \angle H_2PA$.

Ta có NE_1 và ME_2 lần lượt là đường trung bình của các tam giác PO_1H_1, PO_2H_2 nên $NE_1 \parallel PO_1$ và $ME_2 \parallel PO_2$. Hơn nữa do $KE_1 \parallel PH_2$ và $LE_2 \parallel PH_1$, suy ra $\angle KE_1N = \angle O_1PH_2 = \angle O_2PH_1 = \angle ME_2L$ và $\angle H_1KE_1 = \angle H_1PH_2 = \angle E_2LH_2$.

Gọi I là điểm nằm trên PH_1 sao cho E_1K là phân giác của $\angle IE_1N$, suy ra $\Delta IKE_1 \backsim MLE_2$ (gg).

Ta có $\dfrac{NK}{NE_1} = \dfrac{IK}{IE_1} = \dfrac{ML}{ME_2}$ hay $\dfrac{ML}{NK} = \dfrac{ME_2}{NE_1} = \dfrac{PO_2}{PO_1}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}\frac{H_2L}{H_2P} = \frac{PK}{PH_1} &\Leftrightarrow \frac{H_2L}{H_2M} = \frac{PK}{PN} \Leftrightarrow \frac{H_2L - H_2M}{H_2M} = \frac{PK - PN}{PN}\\ &\Leftrightarrow \frac{ML}{MH_2} = \frac{NK}{NP} \Leftrightarrow \frac{ML}{KN} = \frac{H_2M}{PN} = \frac{PH_2}{PH_1}\end{aligned}$$

Mặt khác theo bài toán trước ta chứng minh được $\Delta PH_1H_2 \backsim \Delta PO_1O_2$ nên ta có $\dfrac{PH_1}{PH_2} = \dfrac{PO_1}{PO_2}$. Do đó ta chứng minh được $\dfrac{ML}{KN} = \dfrac{PO_2}{PO_1} = \dfrac{PH_2}{PH_1}$. Từ đó áp dụng định lý Thales đảo, do $LX \parallel PH_1$ và $\dfrac{H_2L}{H_2P} = \dfrac{LX}{PH_1}$, suy ra H_1, X, H_2 thẳng hàng. □

Bài toán 2.12.61. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $\angle DAB = \angle MAC$. Qua D kẻ đường thẳng song song AC cắt AB tại F, đường thẳng qua D song song với AB cắt AC tại E.

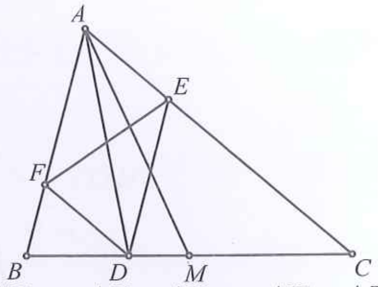
a) Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

b) Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$.

Lời giải.

a) Dễ dàng chứng minh được do $\angle MAC = \angle BAD$ nên $\dfrac{S_{ABD}}{S_{AMC}} = \dfrac{AB \cdot AD}{AM \cdot AC}$ và $\dfrac{S_{ACD}}{S_{AMB}} = \dfrac{AD \cdot AC}{AB \cdot AM}$. Mặt khác ta có $S_{AMB} = S_{AMC}$ nên $\dfrac{S_{ACD}}{S_{ABD}} = \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$.

Vậy suy ra $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



b) Áp dụng định lý Thales ta có $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BD}{BC} \cdot \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{AE}{AC} \cdot \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AE}{AF} \cdot \dfrac{AB}{AC}$ nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF}$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ (cgc). □

Bài toán 2.12.62. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, F là trung điểm AC. Gọi D nằm trên cạnh BC sao cho AD là phân giác $\angle CAH$. Qua B kẻ đường thẳng song song AD cắt AH tại E. Chứng minh rằng F, D, E thẳng hàng.

Lời giải.

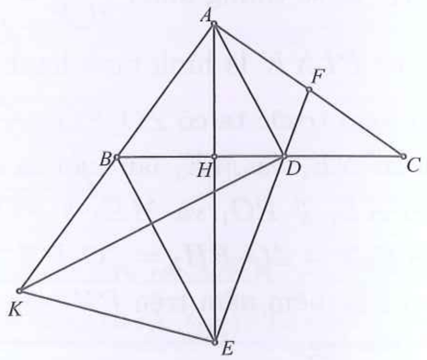
Ta có

$$\begin{aligned}\angle BAD &= \angle BAH + \angle HAD\\ &= \angle DCA + \angle CAD = \angle ADH.\end{aligned}$$

Suy ra ΔBAD cân tại B. Do BE song song AD nên $\angle BEA = \angle DAE = \angle DAC$. Suy ra $\Delta BEA \backsim \Delta DAC$ (gg) do đó $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{AB}{AE}$.

Gọi K là điểm đối xứng với A qua B.

Ta có $\dfrac{AE}{AK} = \dfrac{AE}{2AB} = \dfrac{CA}{2CD} = \dfrac{CF}{CD}$



nên suy ra $\Delta CDF \backsim \Delta AKE$ (cgc). Do đó $\angle FDC = \angle BKE$.

Mặt khác ta có $BD = BK = BA$ suy ra tam giác ADK vuông tại D. Mà BE song song AD nên dễ dàng chứng minh BE là trung trực DK, suy ra $\angle EDB = \angle EKB$. Từ đó ta có $\angle FDE = \angle FDB + \angle BDE = \angle FDB + \angle FDC = 180°$. Suy ra F, D, E thẳng hàng. □

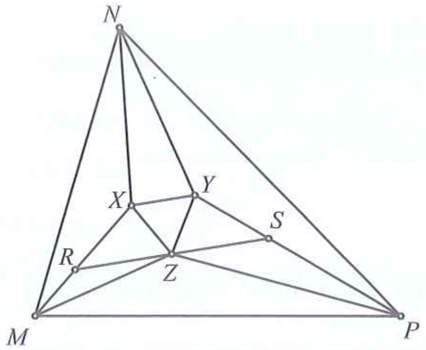
Bài toán 2.12.63. *(Định lý Morley)* Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng giao điểm của các đường phân ba kề nhau của các góc trong tam giác ABC tạo thành một tam giác đều.

Lời giải.

Ta đặt $\angle CAB = 3a$, $\angle ABC = 3b$ và $\angle BCA = 3c$.

Gọi $b' = 60° + b$, $c' = 60° + c$ và $a' = 60° + a$. Từ đó ta có

$$a' + b' + c = 180°$$
$$b' + c' + a = 180°$$
$$c' + a' + b = 180°$$



Xét tam giác XYZ đều, dựng ra phía ngoài tam giác XYZ các tam giác XZM, XYN, ZYP thỏa mãn $\angle MZX = \angle NYX = c'$, $\angle MXZ = \angle PYZ = b'$ và $\angle PZY = \angle NXY = a'$. Dễ dàng suy ra $\angle ZMX = a$, $\angle XNY = b$ và $\angle ZPY = c$. Qua Z kẻ đường thẳng song song XY lần lượt cắt XM, YP tại R và S. Ta có $\angle RZM = c' - 60° = c$ và $PZS = a' - 60° = a$. Suy ra $\Delta MRZ \backsim \Delta ZSP$ (gg).

Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh được $\Delta RXZ = \Delta SYZ$ (cgc) suy ra $ZR = ZS$.

Ta có $\dfrac{MR}{ZS} = \dfrac{RZ}{SP} = \dfrac{MZ}{ZP}$ hay $\dfrac{MR}{RS} = \dfrac{MZ}{RS}$. Hơn nữa do

$$\begin{aligned}\angle MZP &= 360° - \angle XZY - \angle XZM - \angle YZP = 300° - c' - a'\\ &= 180° - (c' - 60°) - (a' - 60°)\\ &= 180° - c - a = \angle MRZ.\end{aligned}$$

Suy ra $\Delta MRZ \backsim \Delta MZP$ (cgc). Ta có $\angle ZMP = \angle ZMR = a$ và $\angle ZMP = \angle RZM = c$.

Chứng minh tương tự, suy ra $\angle ZMP = \angle ZMX = \angle XMN = a$, $\angle XNM = \angle XNY = \angle YNP = b$ và $\angle YPN = \angle YPZ = \angle ZPM = c$ hay tam giác $\Delta ABC \backsim \Delta XYZ$ (gg).

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

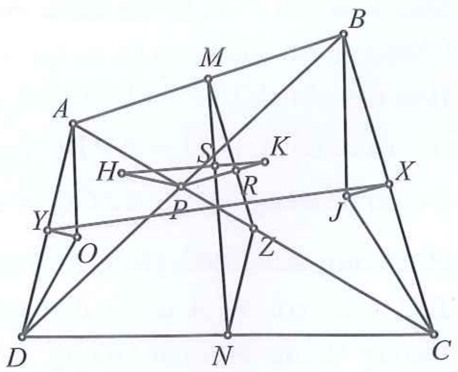
Bài toán 2.12.64. Cho tứ giác $ABCD$, AC cắt BD tại P. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. H, K lần lượt là trực tâm của tam giác APD, BPC. Chứng minh rằng HK vuông góc MN.

Lời giải.

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của BC, AD.

Gọi J, O lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BPC và APD. Ta dễ dàng chứng minh được $PH = 2OY$ và $PK = 2JX$.

Gọi Z là trung điểm AC, suy ra ZM và ZN là đường trung bình tam giác ABC và ACD nên $ZM \parallel BC$ và $ZN \parallel AD$. Ta có



$$\begin{aligned}\angle MZN &= \angle MZA + \angle AZN\\ &= \angle BCA + 180^\circ - \angle DCA\\ &= 90^\circ - \angle CPK + 180^\circ - 90^\circ + \angle HPA\\ &= 180^\circ - \angle CPK + \angle HPA = \angle HPK.\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\angle AOD &= 180^\circ - \angle OAD - \angle ODA\\ &= 180^\circ - \angle PDA - \angle PAD + \angle PAO + \angle PDO\\ &= \angle APD + \angle OPD + \angle OPA\\ &= 2\angle APD = 2\angle BPC = \angle BJC\end{aligned}$$

Suy ra $\Delta AOD \backsim \Delta BJC$ (cgc). Ta có $\dfrac{AE}{AO} = \dfrac{BX}{BJ}$ và $\angle DAO = \angle JBC$.

Do đó $\angle JXB = \angle OYA$. Do đó $\dfrac{PH}{PK} = \dfrac{OY}{JX} = \dfrac{AY}{BX} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{ZN}{ZM}$. Từ đó $\Delta IMN \backsim \Delta PKH$ (cgc).

Gọi S là giao của MN với HK, R là giao của PK với ZM. Ta có

$$\angle MSK = 180^\circ - \angle NMI - \angle MRH = 180^\circ - \angle HKP - \angle ZPK = 90^\circ.$$

Vậy MN vuông góc HK. □

Bài toán 2.12.65. *(Trần Quang Hùng)* Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến BE, CD, đường cao AH. Gọi CF cắt AH tại I, BE cắt AH tại J. Chứng minh rằng $\angle ABI = \angle ACJ$.

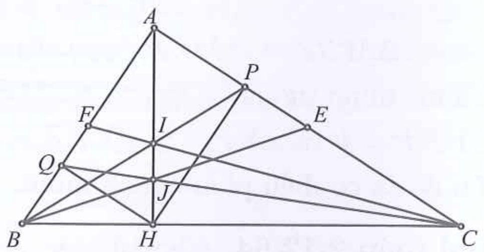
Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H tới các cạnh AC, AB. Ta có

$$\angle PAH = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABH$$

nên ta có $\Delta APH \backsim \Delta BHA$ (gg). Do đó ta có

$$\frac{PA}{BH} = \frac{HP}{HA}.$$



Tương tự chứng minh được $\Delta HPC \backsim \Delta AHC$ nên ta có $\dfrac{CP}{CH} = \dfrac{HP}{HA}$. Ta có $\dfrac{PA}{HB} = \dfrac{PC}{HC}$ nên theo định lý Thales đảo ta có $PH \parallel AB$.

Mặt khác do F là trung điểm AB, theo bổ đề hình thang ta có P, I, B thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có Q, J, C thẳng hàng.

Hơn nữa do $AQHP$ là hình chữ nhật nên $\angle APQ = \angle PAH = 90^\circ - \angle ACB = \angle ABC$ suy ra ta có $\Delta APQ \backsim \Delta ABC$ (gg). Từ đó $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$, suy ra $\Delta APB \backsim \Delta AQC$ (cgc). Do đó dễ dàng suy ra $\angle ACQ = \angle ABP$. □

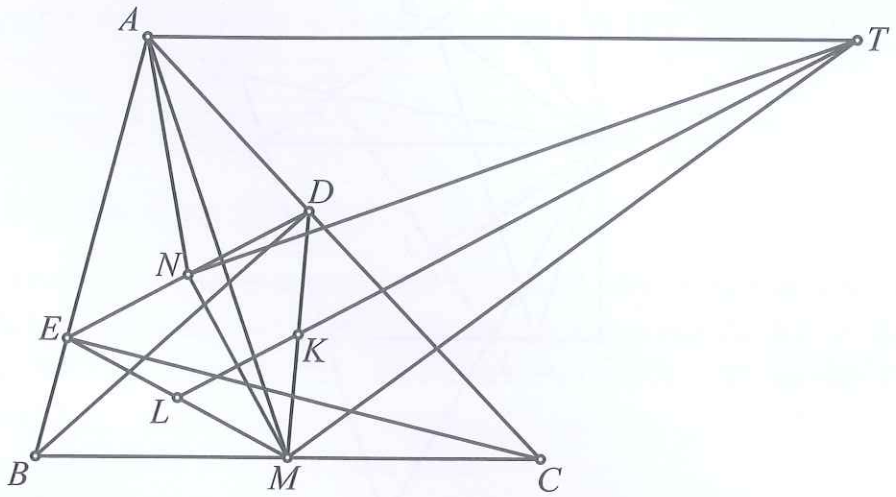
Bài toán 2.12.66. *(Iran TST 2011)* Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), đường cao BD, CE, gọi M là trung điểm BC. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của MD, ME. Đường thẳng KL cắt đường thẳng qua A song song BC tại T. Chứng minh rằng

$TA = TM$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của DE, J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN, Do tam giác BCD và BCE lần lượt là tam giác vuông tại D, E nên ta có $MB = MC = MD = ME$ hay $MN \perp ED$. Ta sẽ chứng minh J trùng T.

Ta có J nằm trên trung trực MN nên suy ra J nằm trên LK. Ta cần chứng minh $AJ \parallel BC$.



Ta có $\angle ABD = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACE$ do đó $\Delta AEC \backsim \Delta ADB$ (gg).

Suy ra $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$. Từ đó ta có $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (cgc).

Do đó ta chứng minh được $\angle ADN = \angle ABM$ và $\dfrac{DA}{DN} = \dfrac{2DA}{DE} = \dfrac{2BA}{BC} = \dfrac{BA}{BM}$. Suy ra ta có $\Delta ADN \backsim \Delta ABM$ (cgc) nên $\angle AMB = \angle AND$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\angle JAC &= \angle JAM - \angle CAM\\ &= \frac{1}{2}(\angle MAJ + \angle AMJ - \angle NMA - \angle NAM) - \angle CAM\\ &= \frac{1}{2}(\angle JNM + \angle JNA + \angle ANM - 180^\circ) - \angle CAM\\ &= \angle ANM - 90^\circ - \angle CAM\\ &= \angle AND - \angle CAM\\ &= \angle AMB - \angle CAM = \angle ACB\end{aligned}$$

Suy ra ta có $JA \parallel BC$ hay J trùng T. □

Bài toán 2.12.67. Cho hình ngũ giác đều ABCDE, điểm X bất kì nằm trên cạnh BC. Trên cạnh ED lấy điểm Y sao cho XA là phân giác của $\angle BXY$.

a) Tính số đo của $\angle XAY$.

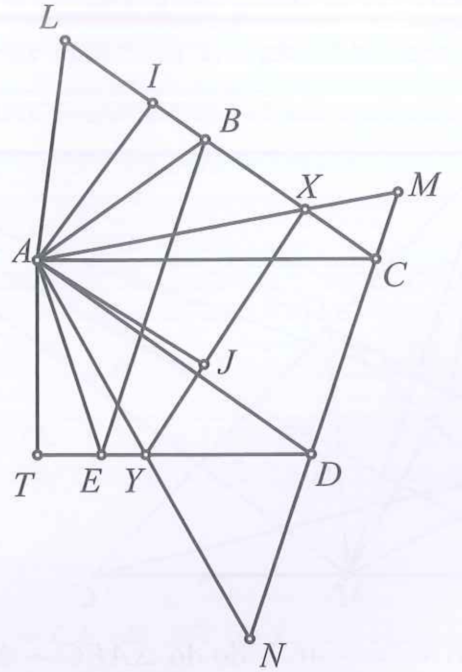
b) Đường thẳng AX, AY lần lượt cắt đường thẳng CD tại M, N. Chứng minh rằng $AX \cdot AM = AY \cdot AN$.

c) Chứng minh rằng $YD - XB = BE - XY$.

d) Chứng minh rằng khi điểm X thay đổi trên BC thì $\dfrac{XB \cdot YE}{XC \cdot YD}$ không đổi.

Lời giải.

a) Lấy I, J, T lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ điểm A tới các đường thẳng BC, XY và ED. Ta có do XA là phân giác $\angle BXY$ nên suy ra $AJ = AL$.



Mặt khác do $ABCDE$ là hình ngũ giác đều nên dễ có $AC = AD$ và $\angle BAE = 108°$. Ta có $CA = CD$, $\angle ACI = \angle ADI$ và $\angle AIC = \angle ATD = 180°$ nên $\Delta ACI = \Delta ADT$. Từ đó suy ra $AI = AJ = AT$ hay YA là phân giác của $\angle XYE$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta YAT = \Delta YAJ$ nên $\angle YAT = \angle YAJ$. Chứng minh tương tự ta có $XAJ = \angle XAI$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\angle XAY &= \angle YAJ + \angle XAJ\\ &= \frac{1}{2}(\angle JAI + \angle JAT) = \frac{1}{2}\angle TAI\\ &= \frac{1}{2}(\angle IAC + \angle CAD + \angle DAT) = 72°\end{aligned}$$

Vậy do đó $\angle XAY = 72°$.

b) Theo câu a) ta có YA là phân giác $\angle XYE$ và XA là phân giác $\angle BXY$ suy ra ta có

$$\angle XMC = 180° - \angle MCX - \angle MXC = 180° - 72° - \angle AXY = \angle AYX$$

suy ra $\Delta AXY \backsim \Delta ANM$ (gg). Từ đó $\dfrac{AX}{AN} = \dfrac{AY}{AM}$ hay $AX \cdot AM = AY \cdot AN$.

c) Lấy điểm L là điểm đối xứng của điểm Y qua AX. Theo câu b) ta dễ dàng chứng minh được $\Delta DNY \backsim \Delta AXY$ (gg). Mặt khác ta có $\angle LBA = \angle LAX = 72°$ nên $\Delta LBA \backsim \Delta LAX$ (gg). Từ đó suy ra $\Delta BAL \backsim \Delta DNY$ (gg). Áp dụng định lý Thales

ta chứng minh được

$$\frac{YD}{LB} = \frac{NY}{AL} = \frac{YN}{YA} = \frac{YD}{AC - YD} \Leftrightarrow AC - YD = LB = XL - XB$$

Do đó ta có $YD - XB = BE - XY$.

d) Ta chứng minh được $\Delta CMX \backsim \Delta DYN$ (gg) nên ta có $\dfrac{CX}{CM} = \dfrac{DN}{DY}$ suy ra $XC \cdot DY = CM \cdot DN$. Mặt khác do $\angle AXY = 72° = \angle BAD$ nên ta có $\Delta ABX \backsim \Delta ADN$ (gg), tương tự ta chứng minh được $\Delta AEY \backsim \Delta ACM$ (gg). Từ đó suy ra

$$\frac{XB \cdot YE}{XC \cdot YD} = \frac{BX \cdot YE}{DN \cdot CM} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.12.68. Cho tam giác nhọn ABC, điểm P nằm trong tam giác. Dựng ra phía ngoài ΔABC các tam giác BCD, CAY và ABX sao cho $\Delta CBD \backsim \Delta CAY \backsim \Delta ABX \backsim \Delta CBP$. Lấy điểm E, F lần lượt nằm trên tia BX, CY sao cho $\angle EAC = \angle FAB = \angle BPC$.

a) Chứng minh rằng $AXPY$ là hình bình hành.

b) Gọi M, N, T lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, CAE và ABF. Chứng minh rằng $\Delta MNT \backsim \Delta PBC$.

c) Chứng minh rằng $MN \perp CF$ và $MT \perp BE$.

d) Chứng minh rằng AD, CF, BE đồng quy tại S và NT là trung trực của AS.

Lời giải.

Ta chứng minh với trường hợp hình vẽ sau, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

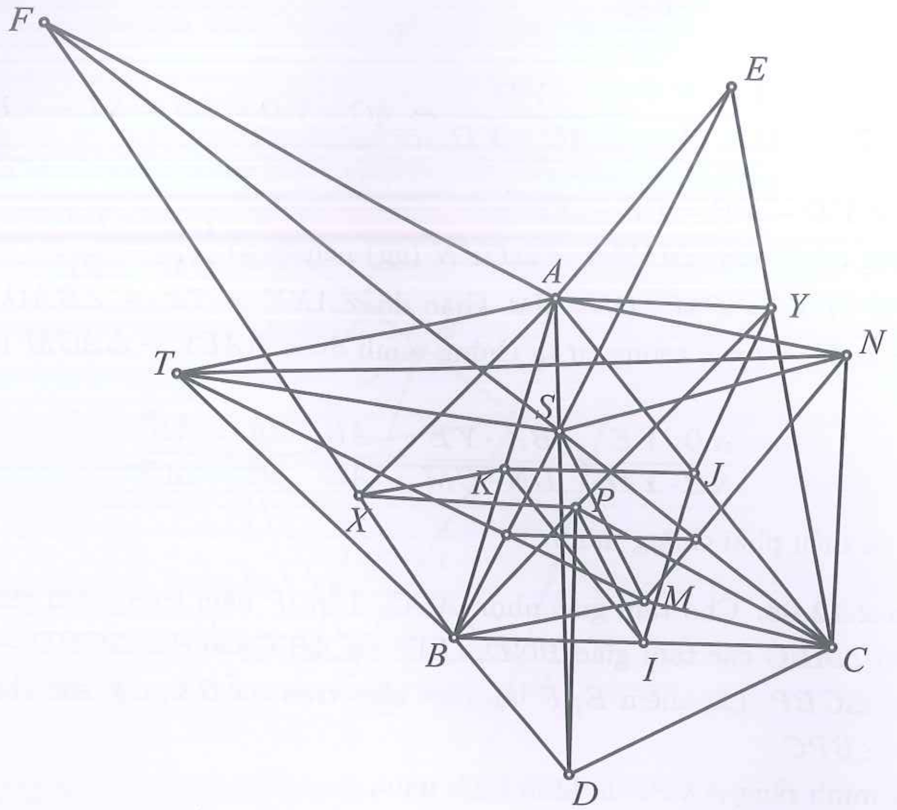
a) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Ta có $\Delta BPC \backsim \Delta BXA \backsim \Delta AYC$ nên suy ra $\dfrac{BX}{BK} = \dfrac{2BX}{BA} = \dfrac{2BP}{BC} = \dfrac{BP}{BI} = \dfrac{AY}{AJ}$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta AYJ \backsim \Delta BPI \backsim \Delta BXK$ (cgc).

Mặt khác do $\dfrac{BX}{BP} = \dfrac{BK}{BI}$ nên ta chứng minh được $\Delta BXP \backsim \Delta BKI$ (cgc). Từ đó suy ra $\dfrac{AY}{AJ} = \dfrac{BX}{BK} = \dfrac{XP}{KI}$. Do KI là đường trung bình của tam giác ABC nên $KI = AJ$, suy ra $XP = AY$.

Chứng minh tương tự ta có $AX = PY$, nên ta có $AXPY$ là hình bình hành.

b) Ta sẽ chứng minh $\Delta CAD \backsim \Delta CNM$. Thật vậy ta dễ dàng chứng minh $\angle DMC = \angle ANC$, do đó $\Delta CAN \backsim \Delta CDM$ (gg).

Ta có $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{CD}{CA}$ mà $\angle ACD = \angle NCM$ nên $\Delta CAD \backsim \Delta CNM$ (cgc). Từ đó suy ra $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{CM}{CD}$.



Chứng minh tương tự ta có $\frac{MT}{AD} = \frac{BM}{BD}$. Suy ra $\frac{MN}{MT} = \frac{DB}{DC}$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\angle NMT &= 360^\circ - \angle NMC - \angle BMT - \angle BMC\\ &= 180^\circ - \angle ADC - \angle ADB + \angle MBC + \angle MCB\\ &= 180^\circ - \angle BDC + \angle MBD + \angle MCD - \angle CBD - \angle BCD\\ &= \angle MBD + \angle MCD = \angle BDC\end{aligned}$$

Từ đó ta có $\Delta MNT \backsim \Delta PBC$ (cgc).

c) Ta dễ dàng chứng minh được $\Delta BCF \backsim \Delta BDA$ (cgc) nên ta có $\angle BCF = \angle BDA$. Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}\angle MCF + \angle CMN &= \angle BCF - \angle BCM + \angle ADC\\ &= \angle ADB + \angle MCB + \angle ADC\\ &= \angle BDC - \angle MCD = 90^\circ\end{aligned}$$

Từ đó ta có $MN \perp CF$. Chứng minh tương tự ta có $MT \perp BE$.

d) Gọi S là điểm đối xứng của B qua MT, do $MT \perp BE$ nên S nằm trên BE. Ta có $MB = MC = MS$ nên suy ra

$$\begin{aligned}\angle BCF = \angle BDA = \angle BMT &= \frac{1}{2}\angle BMS\\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBS - \angle MSB)\\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBS - \angle CSB + \angle MBC + \angle MSC)\\ &= \frac{1}{2}(\angle SCB + \angle SCM + \angle BCM) = \angle SBC\end{aligned}$$

nên ta có S nằm trên CF. Từ đó suy ra $TS = TB = TA$ và $NS = NC = NA$. Do đó NT là trung trực của AS, ta cần chứng minh A, S, D thẳng hàng.

Ta có

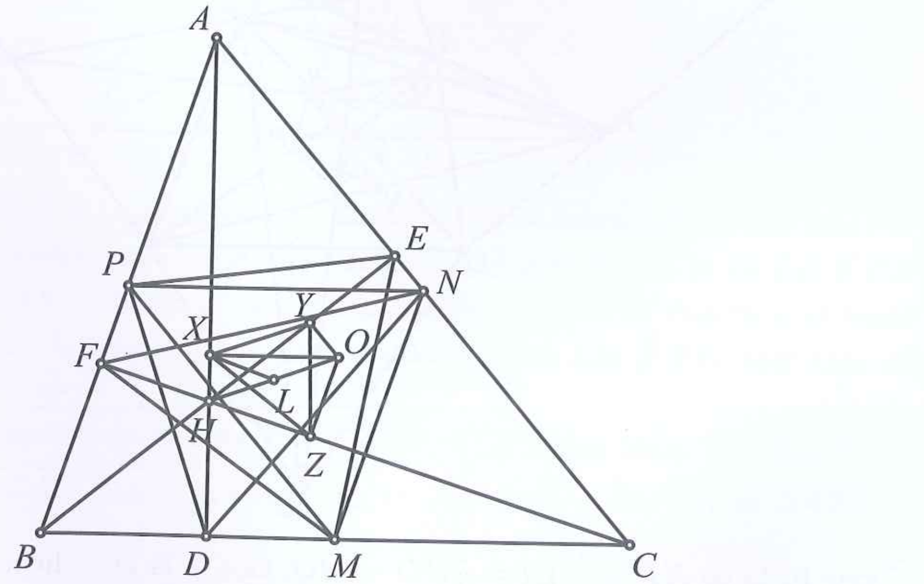
$$\begin{aligned}\angle DAC = \angle MNC = \frac{1}{2}\angle SNC &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle NSC - \angle NCS)\\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ASC - \angle ACS + \angle ASN - \angle NCA) = \angle NAS.\end{aligned}$$

Từ đó ta có A, D, S thẳng hàng. □

Bài toán 2.12.69. Cho tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Gọi AD, BE, CF lần lượt là đường cao của tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Lấy điểm X, Y, Z lần lượt là trực tâm của tam giác DNP, EPM và FMN. Chứng minh rằng $\Delta XYZ \backsim ABC$.

Lời giải.

Ta dễ có O là trực tâm của tam giác MNP. Ta có NP là đường trung bình của tam giác ABC nên $NP \parallel BC$. Ngoài ra $DP = \frac{1}{2}AB = MN$ nên suy ra $NPDM$ là hình thang cân. Do X là trực tâm của tam giác PND, O là trực tâm của tam giác MNP suy ra X đối xứng với O qua trung trực NP.



Chứng minh tương tự ta có O lần lượt đối xứng với Y, Z qua trung trực MP, MN. Từ đó suy ra $OX \perp AD$, $OY \perp BE$ và $OZ \perp CF$. Gọi L là trung điểm OH, dễ dàng suy ra $LX = LY = LZ$.

Ta có

$$\begin{aligned}\angle XZY &= \frac{1}{2}(\angle LZX + \angle LZY + \angle YZX)\\ &= \frac{1}{2}(\angle LXZ + \angle LYZ + 180^\circ - \angle ZXY - \angle ZYX)\\ &= \frac{1}{2}\angle XLY\end{aligned}$$

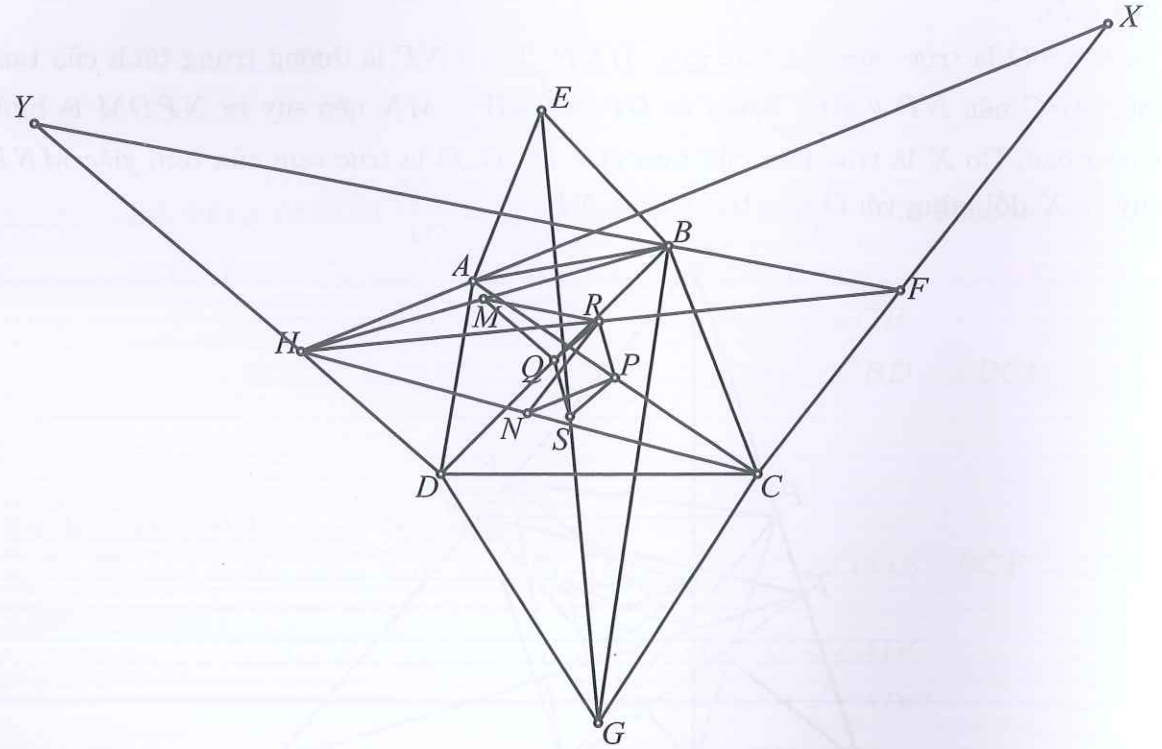
Chứng minh tương tự ta có $\angle XZY = \frac{1}{2}\angle XLY = \angle XOY$, do $OY \perp BE$ và $OX \perp AD$ nên $\angle YOX = \angle ACB$.

Chứng minh tương tự ta có $\angle ZYX = \angle CBA$. Vậy suy ra $\Delta XYZ \backsim \Delta ABC$ (gg). □

Bài toán 2.12.70. Cho tứ giác lồi $ABCD$, dựng ra ngoài các tam giác ABE, BCF, CDG và DAH cân có đáy là các cạnh của tứ giác sao cho $\Delta ABE \backsim \Delta BCF \backsim \Delta CDG \backsim \Delta DAH$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AC, BD, HF, EG. Chứng minh rằng $PRQS$ là hình thoi.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HB, HC. Ta có MR là đường trung bình tam giác HBF và NR là đường trung bình tam giác HFC. Suy ra $NR = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}BF = MR$.



Tương tự ta có $NP = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}HD = MQ$. Gọi X là giao điểm của CF, HA và Y là giao điểm của HD, BF. Do $NR \parallel CF$, $HP \parallel HA$ nên suy ra $\angle PNR = \angle CXA$, tương tự ta có $\angle QMR = \angle BYD$.

Mặt khác ta có do $\angle AHD = \angle BFC$ suy ra

$$\begin{aligned}\angle PNR = \angle CXA &= \angle CFH - \angle FHX\\ &= \angle DHF - \angle YFH\\ &= \angle BYD = \angle QMR\end{aligned}$$

Từ đó ta có $\Delta QMR = \Delta PNR$ (cgc) suy ra $RQ = RP$.

Chứng minh tương tự ta có $SQ = SP$.

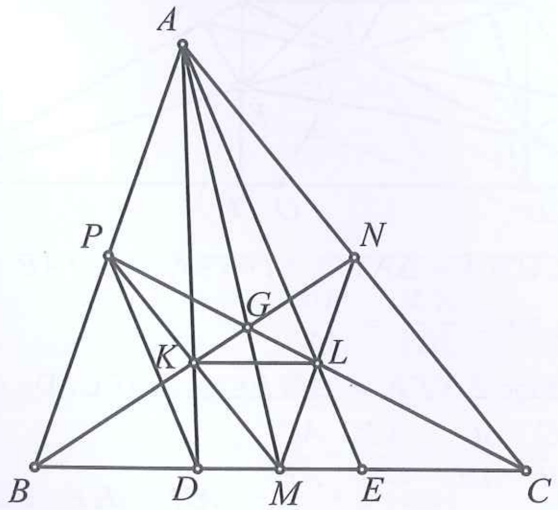
Mặt khác ta có do $\angle NRP = \angle MRQ$ suy ra $\angle QRP = \angle MRN = \angle BFC$, tương tự $\angle QSP = \angle AHD = \angle QRP$. Suy ra $\Delta SQP = \Delta RPQ$ (cgc) nên ta có $\angle SQP = \angle RQP$ hay $QR \parallel SP$, tương tự $QS \parallel RP$. Vậy từ đó suy ra $QRPS$ là hình bình hành. □

Bài toán 2.12.71. Cho tam giác ABC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Lấy D, E trên cạnh BC sao cho $BD = DE = EC$. Gọi K là giao điểm của BN với MP, L là giao điểm của MN với CP.

a) Chứng minh rằng M, L, N thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta MLK$.

Lời giải.



a) Ta sẽ chứng minh L là trung điểm CP. Thật vậy, do D là trung điểm BE nên PD là đường trung bình của tam giác ABE, suy ra $PD \parallel AE$. Từ đó ta có $LE \parallel PD$ và E là trung điểm DC nên LE là đường trung bình của ΔCPD. Suy ra L là trung điểm PB. Do đó LM là đường trung bình của ΔPBC nên $LM \parallel PB$. Mặt khác dễ có $MN \parallel AB$ nên ta có M, L, N thẳng hàng.

b) Chứng minh tương tự suy ra $KM \parallel AC$ và M, K, P thẳng hàng. Dễ dàng chứng minh $\angle NMP = \angle BAC$. Ngoài ra ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{NC} = \frac{ML}{MK}$ nên suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta MLK$ (cgc). □

Bài toán 2.12.72. Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình chữ nhật $DEFG$ nằm trong tam giác thỏa mãn G nằm trên cạnh AB, F nằm trên cạnh AC và D, E nằm trên cạnh BC. Gọi K là giao điểm của CG và EF, H là giao điểm của BF và DG, O là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng AO, CG, BF đồng quy tại I.

b) Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ H xuống cạnh AB, N là chân đường vuông góc hạ từ K xuống cạnh AC. Chứng minh rằng I nằm trên đường thẳng MN.

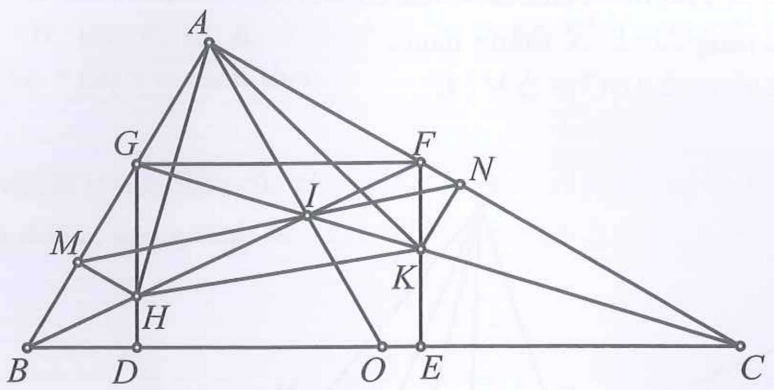
c) Chứng minh rằng $\angle HAB = \angle KAC$.

Lời giải.

a) Do $GF \parallel BC$ và O là trung điểm BC nên theo bổ đề hình thang ta có AO, CG và BF đồng quy tại I.

b) Gọi CG cắt MN tại I_1, BF cắt MN tại I_2. Do $\angle KFN = \angle FGA = \angle GHM$ nên suy ra $\Delta NFK \backsim MHG$ (gg).

Áp dụng định lý Thales ta có $\dfrac{I_1N}{I_1M} = \dfrac{KN}{MG} = \dfrac{FN}{MH} = \dfrac{I_2N}{I_2M}$. Do đó dễ có I_1 trùng I_2 hay MN đi qua I.



c) Ta sẽ chứng minh $\Delta MHA = \Delta NKA$, từ đó suy ra $\angle HAB = \angle KAC$.

Thật vậy ta cần chứng minh $\dfrac{KN}{MH} = \dfrac{AN}{AM}$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta NFK \backsim \Delta MHG \backsim \Delta ABC$. Do đó ta có $\dfrac{KN}{MH} = \dfrac{KN}{AC} \cdot \dfrac{AB}{MH} \cdot \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{KF}{BC} \cdot \dfrac{BC}{GH} \cdot \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{KF}{GH} \cdot \dfrac{AC}{AB}$.

Từ đó điều phải chứng minh tương đương với $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{KF}{GH} \cdot \dfrac{AC}{AB}$.

Mặt khác do

$$\begin{aligned}
\frac{AN}{AM} &= \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{GK}{GC} \cdot \frac{FB}{FH} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{GF}{DC} \cdot \frac{BE}{GF} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{BD}{CE} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{KE}{GD} \cdot \frac{EF}{DH} \cdot \frac{BD}{CE} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{EK}{EC} \cdot \frac{DB}{DH} \cdot \frac{AC}{AB} \\
&= \frac{FK}{GH} \cdot \frac{AC}{AB}
\end{aligned}$$

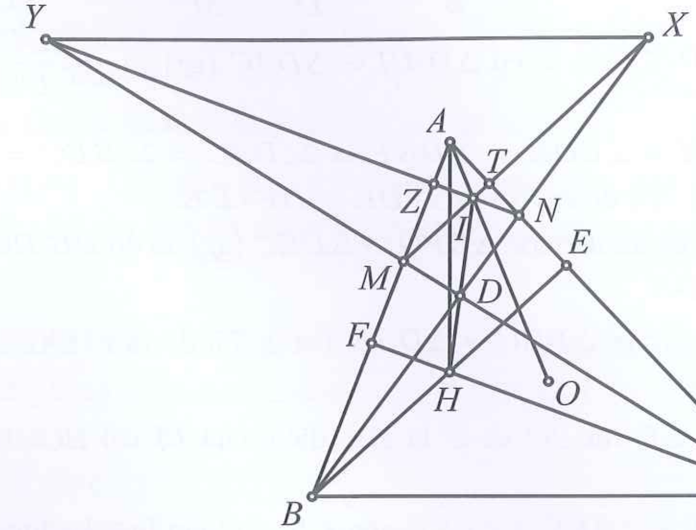
Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.12.73. Cho tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp O, đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Lấy điểm M bất kì nằm trên cạnh AB của tam giác. Kẻ đường thẳng qua M vuông góc AC cắt AO tại I. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc AB cắt AC tại N. Chứng minh rằng BN, CM, IH đồng quy.

Lời giải.

Gọi T là giao điểm của MI với AC, Z là giao điểm của NI với AB. Ta dễ dàng chứng minh được $\angle IAN = \angle HAB$. Mặt khác ta có $\angle INA = \angle HCA = \angle HBF$, do đó $\Delta IAN \backsim \Delta HAB$ (gg). Suy ra $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AM}{AC}$.

Từ đó dễ có $MN \parallel EF$ và $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ (gg).



Gọi CM cắt NZ tại Y, BN cắt MT tại X. Dễ có I là trực tâm của ΔAMN. Ta có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$, suy ra $\Delta AMC \backsim \Delta ANB$ (cgc) nên $\angle MCA = \angle NBA$.

Xét tam giác MXB và NYC ta có $\angle MCA = \angle NBA$ và $\angle YNC = \angle NBA$ suy ra $\angle NYC = \angle MXB$. Từ đó ta có $\Delta IMY \backsim \Delta INX$ (cgc).

Dễ dàng chứng minh được $\Delta IMN \backsim \Delta HCB$ (gg). Suy ra $\dfrac{IX}{IY} = \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{HB}{HC}$.

Lấy D_1, D_2 lần lượt là giao điểm của CY và BX với HI. Áp dụng định lý Thales ta có $\dfrac{D_1H}{D_1I} = \dfrac{HB}{IX} = \dfrac{HC}{IY} = \dfrac{D_2H}{D_2I}$.

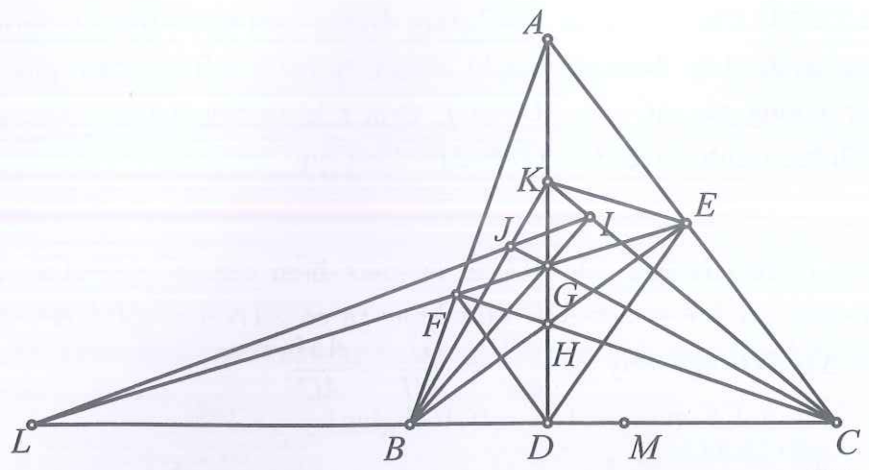
Vậy từ đó ta có BN, CM, IH đồng quy tại D. □

Bài toán 2.12.74. Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Gọi K là trung điểm AH, G là giao điểm của EF và AH.

a) Chứng minh rằng G là trực tâm ΔKBC.

b) Lấy I là giao điểm của BG với CK, J là giao điểm của CG với KB. Chứng minh rằng EF, IJ, BC đồng quy.

Lời giải.



a) Dễ có $\angle DBH = \angle DAC$ nên ta có $\Delta DBH \backsim \Delta DAC$ (gg) suy ra $\dfrac{DB}{DH} = \dfrac{DA}{DC}$ hay $DB \cdot DC = DH \cdot DA$.

Mặt khác ta có $\angle FDH = \angle EDH$ và $\angle DKE = 2\angle DAC = 2\angle HBC = \angle DFG$ nên $\Delta DFG \backsim \Delta DKE$ (gg). Từ đó suy ra $DG \cdot DK = DF \cdot DE$.

Ngoài ra ta dễ dàng chứng minh được $\Delta DFG \backsim \Delta DEC$ (gg) do đó $DB{\cdot}DC = DF{\cdot}DE$ hay $DB \cdot DC = DG \cdot DK$.

Do $\dfrac{DG}{DB} = \dfrac{DC}{DK}$ do đó suy ra $\Delta DGC \backsim \Delta DBK$ (cgc). Từ đó ta có $CG \perp BK$ hay G là trực tâm của ΔKBC.

b) Gọi L là giao điểm EF với BC và L' là giao điểm của IJ với BC. Ta cần chứng minh L trùng L'.

Ta có $\angle BFD = \angle ACB = \angle AFE = \angle LFB$ nên FB, FC lần lượt là đường phân giác trong và ngoài của ΔLFD. Do đó $\dfrac{BD}{BL} = \dfrac{CD}{CL}$ hay $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{LB}{LC}$.

Chứng minh tương tự với $\Delta L'JD$ có JB và JC là phân giác trong và phân giác ngoài, ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{L'B}{L'C}$.

Từ đó dễ có L trùng L' hay IJ, EF, BC đồng quy tại L. □

2.12.5 Bài tập tự luyện

Bài toán 2.12.75. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $BD = 6$, $BC = 8$, $CD = 12$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

Bài toán 2.12.76. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF, trực tâm H.

a) Chứng minh rằng $DB \cdot DC = DH \cdot DA$.

b) Gọi T là giao điểm của EF với BC, M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $TH \perp AM$.

c) Chứng minh rằng $TB \cdot TC = TD \cdot TM = TE \cdot TF$.

Bài toán 2.12.77. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB và AHC. Đường thẳng DE cắt cạnh

AB, AC lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng $AU = AV$.

Bài toán 2.12.78. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), tâm đường tròn ngoại tiếp là O, đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D thỏa mãn $AB = AD$. Trên tia AH lấy điểm F sao cho $AF = 2AO$. Chứng minh rằng $FD \perp AC$.

Bài toán 2.12.79. Cho tam giác ABC, điểm P bất kì trong mặt phẳng. Gọi X, Y, Z lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P tới các đường trung trực cạnh BC, CA, AB của tam giác. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta XYZ$.

Bài toán 2.12.80. Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, EF, AH.

a) Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

b) Gọi T là giao điểm của EF với BC, AH cắt EF tại L. Chứng minh rằng $TL{\cdot}TN = TD \cdot TM$.] c) Chứng minh rằng $PL \cdot PD = PH^2$.

Bài toán 2.12.81. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy điểm M, N thỏa mãn H nằm trên MN và $AM = AN$. Chứng minh rằng $\dfrac{MB}{MF} = \dfrac{NC}{NE}$.

Bài toán 2.12.82. Cho tam giác ABC vuông tại A, lấy hai điểm A', C' lần lượt khác A, C trên mặt phẳng thỏa mãn $\Delta BAC \backsim \Delta BA'C'$. Gọi D, D' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ C, C' tới AA'.

a) Chứng minh rằng $AD = A'D'$.

b) Gọi T đối xứng với C' qua A', L là giao của TA với $A'C$. Chứng minh rằng $BL \perp AA'$.

Bài toán 2.12.83. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$, gọi AC cắt BD tại X. Lấy điểm Y, Z nằm trong tam giác ACD sao cho $\angle ZCD = \angle YCA = 30°$ và $\angle ZDC = \angle YDA = 18°$.

a) Chứng minh rằng ΔXYZ là tam giác đều.

b) CY cắt BD tại N. Tính số đo $\angle DNZ$.

Bài toán 2.12.84. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M di động trên đoạn BD. Qua M kẻ đường thẳng song song AD, AB lần lượt cắt AB, AD tại E và F.

a) Chứng minh rằng HQ, CM, AD đồng quy.

b) Chứng minh rằng BF, DE, CM đồng quy.

c) Tìm vị trí của M trên đoạn BD sao cho diện tích tứ giác $AFME$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 2.12.85. Cho tam giác ABC, điểm P bất kì nằm trong tam giác. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Trên tia PM lấy điểm A', qua A' kẻ các đường thẳng song song AB, AC lần lượt cắt PN, PQ tại B', C'. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.

Bài toán 2.12.86. Cho tam giác đều ABC, M trung điểm BC. Điểm E chuyển động trên cạnh AC, lấy điểm F trên AB sao cho $\angle EMF = 60°$.

a) Chứng minh rằng $ME \cdot MF = \dfrac{BC^2}{4}$.

b) Chứng minh rằng EM, FM lần lượt là các đường phân giác của CEF và BFE.

c) Chứng minh rằng chu vi tam giác AEF không đổi.

Bài toán 2.12.87. *(IMO shortlist 1996)* Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi D là chân đường cao hạ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại K. Chứng minh rằng $\angle DHK = \angle ABC$.