CHUYÊN ĐỀ ĐƯỜNG VÀO HÌNH HỌC SƠ CẤP

Số 1
2021

Dành cho Giáo viên và Học sinh chuyên toán THCS, THPT

ĐƯỜNG VÀO HÌNH HỌC SƠ CẤP

VỀ HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI HSG QUỐC GIA NĂM 2020

NGUYỄN VĂN LINH

BỔ ĐỀ "BẮN" - SHOOTING LEMMA

LÊ PHÚC LỮ

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC CHỌN LỌC TRONG ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CÁC TỈNH

NGUYỄN DUY KHƯƠNG

IMOBOOKS

NHÀ XUẤT BẢN THANH NIÊN

BÀI TOÁN HÌNH HỌC NGÀY THỨ HAI ĐỀ THI CHINA TST NĂM 2013

Đỗ Hoàng Gia Huy

Lớp 12T1 THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam

Kì thi China TST là kì thi cuối cùng của Trung Quốc để chọn ra 6 người đại diện tham dự kì thi IMO. Các bài toán hình học trong đề thi có cấu hình lạ, đẹp mắt và không đòi hỏi kiến thức cao để chinh phục nó. Và trong thời điểm rất nhiều bạn thí sinh đứng trước kì thi Vietnam TST sắp tới đây, tác giả xin khai thác một số tính chất xung quanh bài toán ngày 2 China TST 2013 khá thú vị sau.

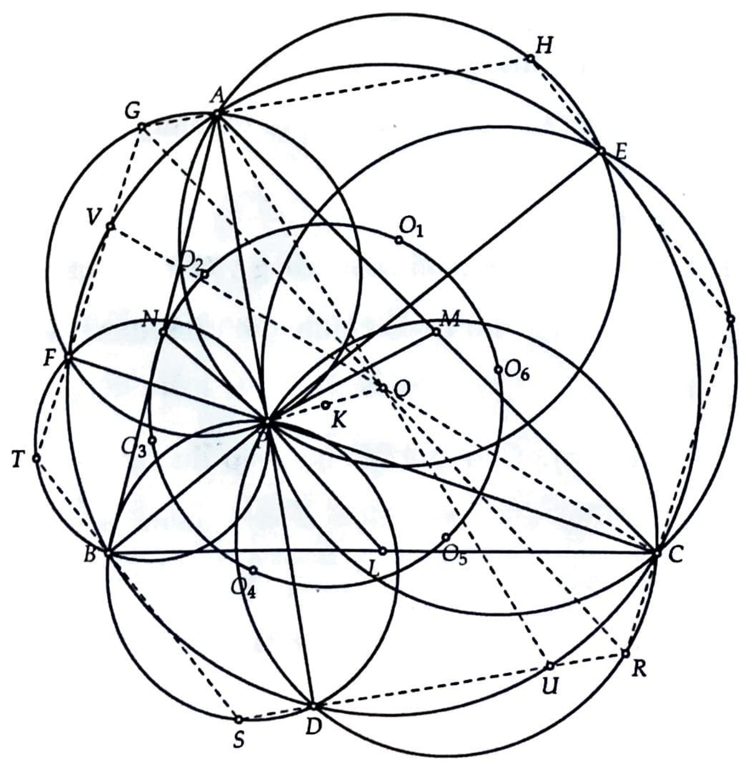
Bài toán 1 (Prob 2 ngày 2 China TST 2013).

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). L, M, N tương ứng là trung điểm của BC, CA, AB. Điểm P nằm trong ΔABC sao cho

$$PL : PM : PN = BC : CA : AB$$

Các đường thẳng AP, BP, CP cắt (O) lần thứ hai tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



Gọi O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APE, APF, BPF, BPD, CPD, CPE. Đường thẳng qua A vuông góc AD cắt đường thẳng qua E vuông góc EP tại H, dễ có $H \in (O_1)$.

Xác định tương tự cho các điểm $I \in (O_6)$, $R \in (O_5)$, $S \in (O_4)$, $T \in (O_3)$ và $G \in (O_2)$.

Gọi CO, AO cắt lại (O) tại V, U tương ứng nằm trên DR, FG. Ta có $\widehat{RUC} = \widehat{DAC} = \widehat{GAV}$ và $\widehat{GVA} = \widehat{ACF} = \widehat{RCU} \Rightarrow \Delta RUC = \Delta GAV$ nên có (O) là trung điểm GR.

Chứng minh tương tự ta có O là trung điểm HS và IT.

Xét phép vị tự tâm P tỉ số 2 biến O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 lần lượt thành H, I, R, S, T, G.

$\Rightarrow O_1O_4$, O_2O_5, O_6O_3 có chung trung điểm K.

Ta sẽ chứng minh $O_1O_4 = O_2O_5 = O_6O_3$.

Ta có $\Delta CPO_5 = \Delta APO_2$ (cgc) nên $\dfrac{CP}{PO_5} = \dfrac{AP}{PO_2} = 2sin(\widehat{PDC}) = 2sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{R}$.

Xét tam giác PO_2O_5 có:
$$\begin{aligned}\frac{O_2O_5^2}{4} &= \frac{PO_2^2 + PO_5^2}{2} - PK^2\\ &= \frac{R^2}{AC^2}\left(\frac{AC^2}{4} + PM^2\right) - PK^2\\ &= R^2\left(\frac{1}{4} + \frac{PM^2}{AC^2}\right) - PK^2\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta tính được O_3O_6, O_1O_4 và kết hợp giả thiết, ta có $O_1O_4 = O_2O_5 = O_6O_3$. Từ đó suy ra O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 và O_6 cùng nằm trên đường tròn tâm K. □

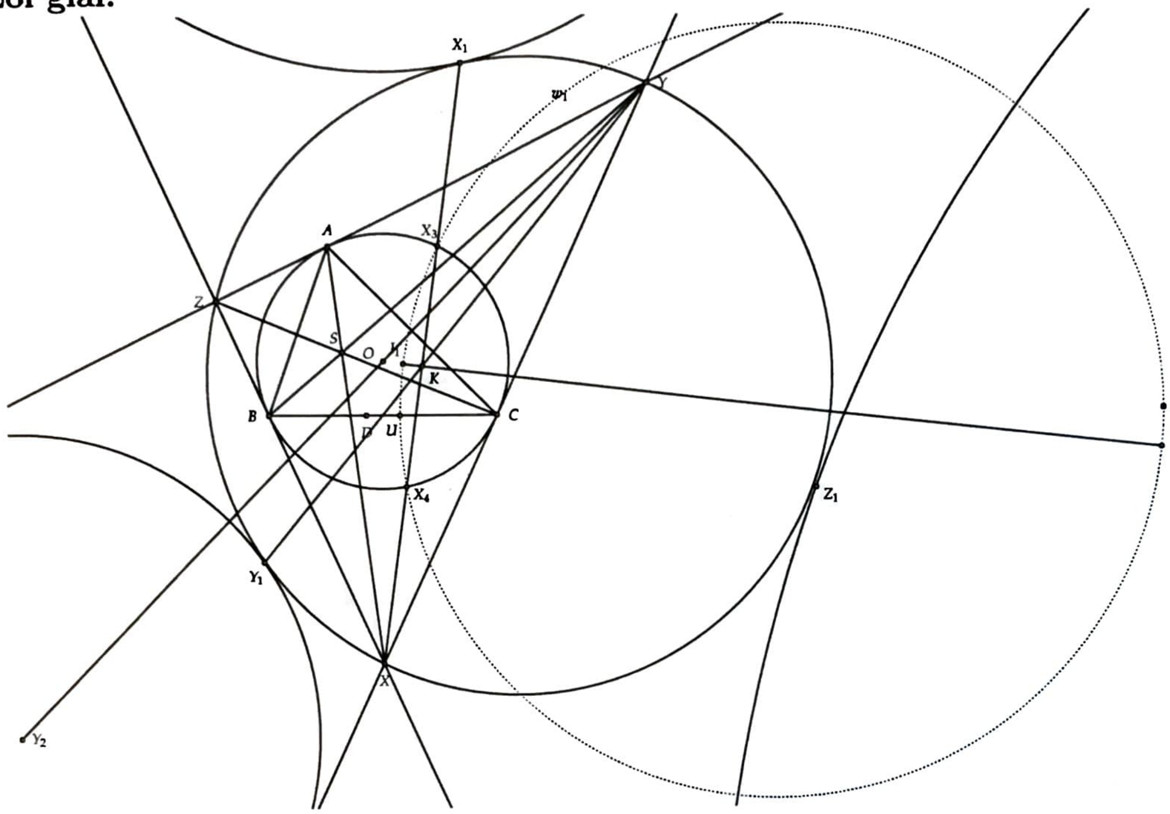
Nhận xét: Có thể thấy điểm P là mấu chốt trong việc tính toán tỉ lệ để dẫn tới kết quả đúng, từ đó ta mong muốn tìm được chính xác cách dựng điểm P và khai thác một số tính chất về nó.

Bài toán 2 (Điểm Isologic). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ lần lượt là các đường tròn đối xứng với đường tròn Apollonius của ΔABC qua trung trực của cạnh tương ứng, giả sử 3 đường tròn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ đôi một giao nhau thì chúng giao nhau tại hai điểm I_1 và I_2 là điểm *isologic* của ΔABC. Khi đó ta có:

$$BC : CA : AB = I_1A : I_1B : I_1C = I_1A : I_2B : I_2C \tag{1.1}$$

và I_1, I_2 nằm trên đường thẳng *Euler* của ΔABC, hay nói cách khác, OH là trục đẳng phương của ω_1, ω_2 và ω_3.

Lời giải.



Gọi D, P tương ứng là chân đường phân giác trong và ngoài đỉnh A của ΔABC. Các điểm U, V lần lượt đối xứng D, P qua trung trực BC. Tiếp tuyến của (O) tại A, B, C lần lượt cắt nhau tại X, Y, Z. Gọi X_2, Y_2, Z_2 là tâm đường tròn bằng tiếp của ΔXYZ. Gọi X_1, Y_1, Z_1 là tiếp điểm của (X_2), (Y_2), (Z_2) với (XYZ).

Dễ có XX_1 là đẳng giác của XA qua phân giác của $\widehat{ZXY}$. Gọi K là giao của XX_1, YY_2, ZZ_1.

$\Rightarrow K$ là điểm liên hợp đẳng giác với S trong ΔXYZ.

$\Rightarrow XS$ đối xứng XK qua trung trực BC.

Ta lấy X_3 và X_4 là giao điểm của XK và (O) thì dễ có X_3, X_4 nằm trên (ω_1) theo tính đối xứng.

Tương tự với Y_3, Y_4, Z_3, Z_4. Ta có do O nằm trên trục đẳng phương của ba đường tròn Apollonius của ΔABC nên dễ có O và K có phương tích tới ω_1, ω_2 và ω_3 bằng nhau nên ω_1, ω_2, ω_3 đồng trục và cắt nhau tại I_1 và I_2.

Ta cần chứng minh K nằm trên đường thẳng Euler của ΔABC.

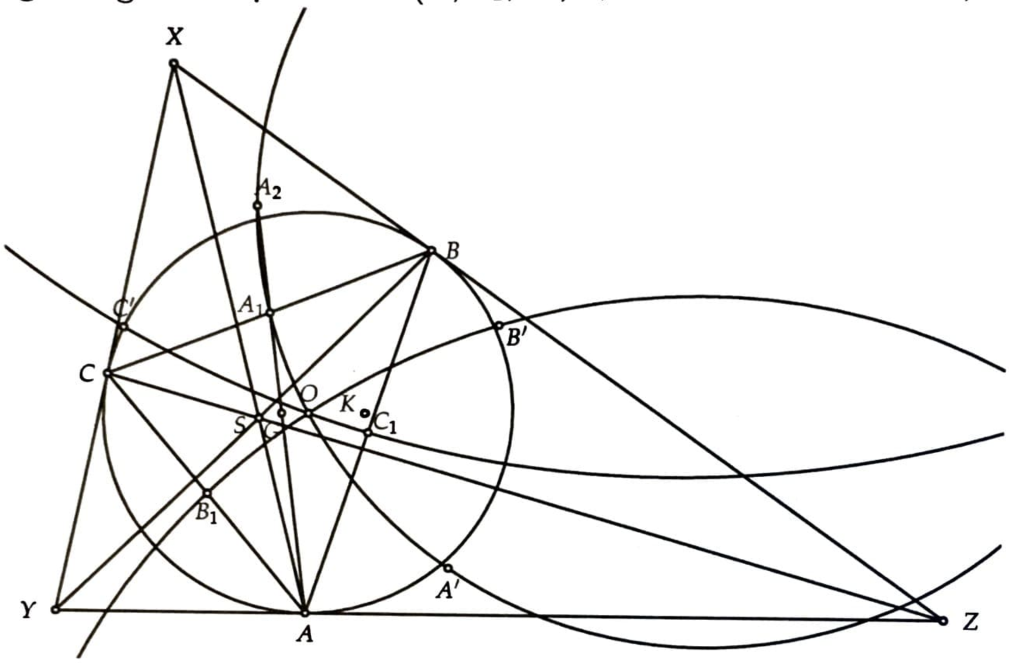
Thật vậy, xét phép nghịch đảo tâm O phương tích OA_2. Gọi A' là điểm đối xứng A

qua XO, A_1 là trung điểm BC, $(A'OA_1)$ cắt (O) tại A_2.

Tương tự xác định B', C', B_1, C_1, B_2, C_2. Lấy G là trọng tâm ΔABC.

Bài toán trở thành chứng minh $(A'OA_1)$, $(B'OB_1)$, $(C'OC_1)$ có cùng trục đẳng phương là OG.

Dễ dàng chứng minh bộ các điểm (A, A_1, A_2), (B, B_1, B_2) và (C, C_1, C_2) thẳng hàng.



Mặt khác ta có kết quả quen thuộc $GA_1.GA_2 = GB_1.GB_2 = GC_1.GC_2 \Rightarrow G$ có phương tích tới $(A'OA_1)$, $(B'OB_1)$, $(C'OC_1)$ bằng nhau.

$\Rightarrow I_1I_2$ là đường thẳng Euler của ΔABC. Sau khi có I_1 và I_2 nằm trên đường thẳng Euler, phần còn lại của bài toán khá đơn giản như sau:

Do I_1 nằm trên đường tròn ω_1 là đối xứng của đường tròn Apollonius ứng với đỉnh A của ΔABC nên có I_1X phân giác trong của $\widehat{BI_1C}$ nên ta có:

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{UB}{UC} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

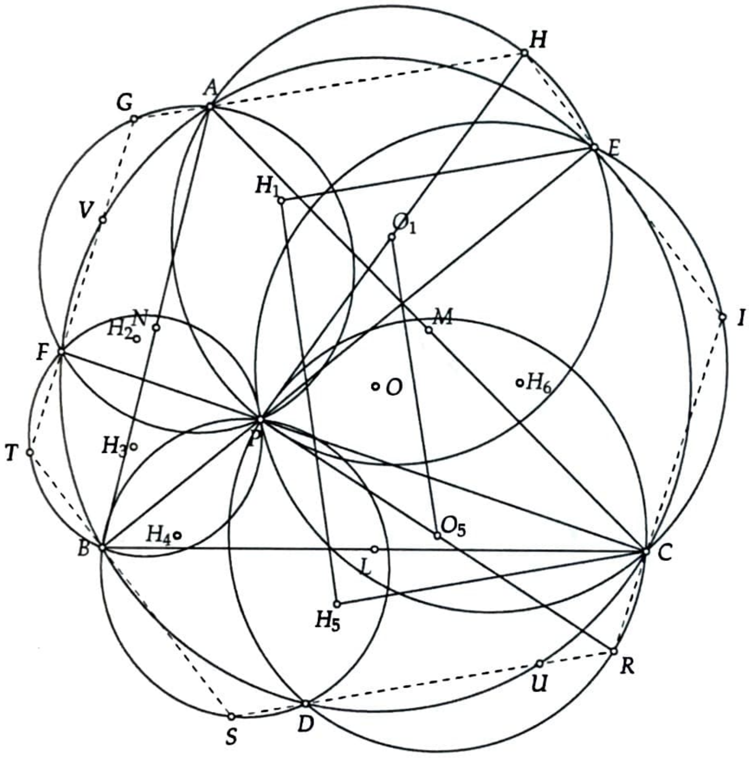
Dễ dàng chứng minh tương tự với I_2, ta có (1.1) đúng. □

Nhận xét: Quay lại bài toán China TST 2013, ta phát hiện rằng tồn tại 2 vị trí điểm P thỏa mãn đẳng thức $PL : PM : PN = BC : CA : AB$. Khi đó kết quả của bài toán vẫn đúng với điểm P nằm ngoài ΔABC.

MỘT SỐ KHAI THÁC BÀI TOÁN PROB 2 NGÀY 2 CHINA TST 2013

Tính chất 1. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 và H_6 lần lượt là trực tâm của các tam giác APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE. Khi đó các tứ giác H_1H_3FA, H_3H_5BD, H_5H_1EC là hình bình hành.

Chứng minh



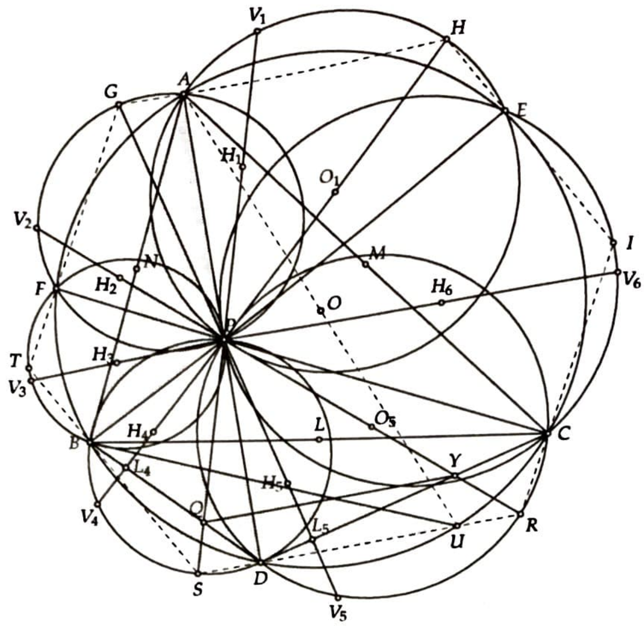
Gọi Z và W tương ứng là trung điểm của PA và PD. Dựa vào kết quả bài toán trước, ta có G, H, I, R, S, T đồng viên. Khi đó do $AHRD$ là hình chữ nhật và O_1O_5 là đường trung bình của tam giác PHR nên ta có $O_1O_5 \parallel HR \parallel AD$.

$\Rightarrow O_1Z = O_5W$ suy ra $EH_1 = CH_5$ (mà EH_1CH_5) nên H_1ECH_5 là hình bình hành. Chứng minh tương tự với tứ giác H_1H_3FA và H_3H_5BD ta có điều phải chứng minh.

Qua khai thác tính chất của các trực tâm, ta phát hiện một tính chất khá đẹp gần giống với phát biểu ban đầu của bài toán ngắn gọn và đơn giản như sau.

Tính chất 2. Sáu điểm H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 và H_6 cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh



Gọi các điểm V_i là giao điểm khác P của PH_i với (O_i) $(i = \overline{1,6})$. Theo kết quả trước ta có các điểm G, H, I, R, S, T cùng nằm trên đường tròn tâm O. Do AF và CD đối song nên có $GP \perp CD$ và $RP \perp FG$.

$\Rightarrow GP$ đi qua V_5 và RP đi qua V_2.

$\Rightarrow V_5$, V_2 cùng nằm trên đường tròn $(O; OR)$. Chứng minh tương tự ta có G, H, I, R, S, T, V_i cùng nằm trên một đường tròn $(i = \overline{1,6})$ và TP, SP, IP, HP lần lượt đi qua V_6, V_1, V_3, V_4. Ta chứng minh tồn tại một phép vị tự tâm P biến H_i thành V_i $(i = \overline{1,6})$.

Thật vậy, gọi chân đường cao từ P của ΔPBD và ΔPDC tương ứng là L_4 và L_5, khi đó: $\dfrac{PH_4}{PV_4} = \dfrac{PH_5}{PV_5} \Leftrightarrow \dfrac{L_4P}{L_4V_4} = \dfrac{L_5P}{L_5V_5} \Leftrightarrow \dfrac{PB.PD}{V_4B.V_4D} = \dfrac{PC.PD}{V_5D.V_5C}$

$$\Leftrightarrow \frac{PB.PD}{SB.SD} = \frac{PC.PD}{RC.RD} \Leftrightarrow \frac{QP}{QS} = \frac{YP}{YR} \Leftrightarrow QY \parallel SR.$$

(với DB cắt PS tại Q và DC cắt PR tại Y).

Mặt khác ta lại có $UR = GA = SD$ và $\Delta CRU \backsim \Delta DCPA$ (g.g) và $\Delta BSU \backsim \Delta BPA$ (g.g). Từ đó ta có:

$$(1.2) \Leftrightarrow \frac{PB}{SB.UR} = \frac{PC}{SU.RC} \Leftrightarrow \frac{SU}{SB}.PB = \frac{RU}{RC}.PC \Leftrightarrow \frac{PA}{PB}.PB = \frac{PA}{PC}.PC \quad \text{(đúng)}$$

Chứng minh tương tự ta có các tỉ số $\dfrac{PH_i}{PV_i}$ bằng nhau với mọi $i = \overline{1,6}$. Suy ra tồn tại phép vị tự tâm P biến H_i thành V_i mà V_i nội tiếp $(i = \overline{1,6})$.

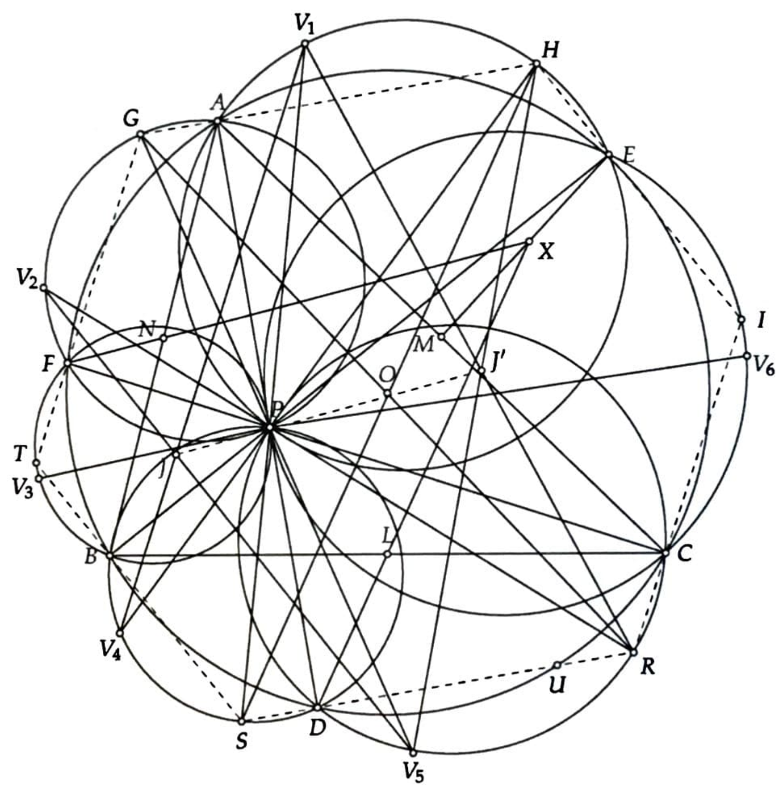
$\Rightarrow$ Sáu điểm H_1, H_2, H_3, H_4, H_5và H_6 cùng nằm trên một đường tròn.

Nhận xét: Lời giải trên dựa vào ý tưởng sử dụng phép vị tự giống bài toán ban đầu China TST 2013 nhưng tuy nhiên ở đây tỉ số phép vị tự không xác định đơn giản như ở mô hình tâm ngoại tiếp mà ta phải chứng minh từng tỉ lệ bằng nhau.

Để kết thúc bài viết, tác giả xin trình bày tới bạn đọc một kết quả khá thú vị và ngắn gọn sau.

Tính chất 3. Các đường thẳng V_1V_4, V_2V_5 và V_3V_6 cùng đi qua 1 điểm thuộc OP.

Chứng minh



Gọi V_2V_5 cắt V_4V_1 tại J, RV_1 cắt HV_5 tại J'. Khi đó ta áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} V_2 & V_1 & H \\ V_4 & V_5 & R \end{pmatrix}$ cùng nằm trên đường tròn $(O; OR)$ ta thu được J, P, J' thẳng hàng.

Mặt khác tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} V_1 & H & G \\ V_5 & R & S \end{pmatrix}$ ta có J', O, P thẳng hàng. $\Rightarrow V_2V_5$, V_4V_1 cắt nhau trên OP. Chứng minh tương tự với V_3V_6 ta có V_1V_4, V_2V_5 và V_3V_6 đồng quy tại J thuộc OP.

Trên đây là một số khai thác từ bài thi ngày hai China TST 2013 của tác giả, rất mong các bạn có thể tìm và phát hiện thêm các tính chất xung quanh cấu hình đẹp của bài toán này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Chronopoulos Takis (parmenides51), *China TST from 1986 – 2019 (103p).*
`https://imogeometry.blogspot.com/p/china-tst.html`

[2] Xtec – Xarxa Telemàtica Educative de Catalunya, *Isologic points.*
`http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttweng/definicions/d_isologics_p.html`

[3] AoPS Topic, *2013 China Team Selection Test.*
`https://artofproblemsolving.com/community/c4969_2013_china_team_selection_test`

[4] Nguyễn Văn Linh, *Bài tập ôn luyện đội tuyển IMO năm 2017.*
https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2017/09/bai-giang-imo-2017

[5] Aops Topic, *Circumcenters of 6 circles are concyclic.*
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h527618p2997376`

[6] Group facebook Hướng tới Olympic toán VN
`https://www.facebook.com/groups/vmo.tst`

[7] Orthologic Triangles, Wolfram MathWorld.

[8] AoPS: Collinear with Isogonal conjugate and Circumcenter.
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h1262747p6562352`

[9] AoPS: Four Concurrent Euler Lines.
`https://artofproblemsolving.com/community/c6h615558p3664276`