

삼각함수와 거듭제곱급수

거듭제곱급수

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

를 생각해보자. 그 수렴반경이 무한대인 것은 비율판정법으로 알 수 있다.

마찬가지로

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

도 수렴반경이 무한대이다.

두 함수 $S(x), C(x)$ 는 실수 전체에서 정의되었으며

$$S'(x) = C(x)$$

$$C'(x) = -S(x)$$

를 만족한다. 한편, $S(0) = 0, C(0) = 1$ 이다. 함수

$$f(x) = (S(x) - \sin x)^2 + (C(x) - \cos x)^2$$

를 생각하자. $f(0) = 0$ 이다. 미분해 보면 $f'(x) = 0$ 이고 이로부터

$$\sin x = S(x)$$

$$\cos x = C(x)$$

를 얻는다.

생각해보기

$f(x)$ 가

$$f''(x) = -f(x)$$

이고

$$f(0) = a, \quad f'(0) = b$$

이면 $f(x) = a \cos x + b \sin x$ 인가?

교과서(김홍종, 미적분학1+, 연습문제 2장 4절 8번) 문제 참조