정사영

# 정의

두 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$를 생각하고 $\mathbf{a} \neq 0$이라고 가정하자. $\mathbf{a}$에 대한 $\mathbf{b}$의 정사영은 다음을 만족하는 벡터 $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$를 뜻한다.

$\mathbf{c}$가 $\mathbf{a}$와 평행하면, $|p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{c} - \mathbf{b}|$이 성립한다.

다시 말하면, $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$는 $\mathbf{a}$와 나란한 벡터 중에서 $\mathbf{b}$와의 거리가 가장 가깝다.

정사영이 존재하는지, 존재한다면 유일한지 알아보자. $\mathbf{a}$와 나란한 벡터는 적당한 실수 $t$에 의해서 $t\mathbf{a}$로 유일하게 표현된다.

$$|t\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})t^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})t + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

인데, 실수 $t$에 대한 2차 함수로 최고차항의 계수가 양수이므로 유일한 최솟값을 갖는다. 최솟값은

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

에서 얻어진다.

덤으로 다음 정리도 얻는다.

**정리**

*영벡터가 아닌 벡터* $\mathbf{a}$*에 대하여 벡터* $\mathbf{b}$*의 정사영은*

$$p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}$$

*이다.*

# 정사영은 수선의 발

**b**가 영벡터가 아니고 **a**와 나란하지 않은 경우, **a**와 **b**는 한 평면을 결정한다. 이 평면에서 **b**를 **a**를 포함한 직선에 내린 수선의 발이 $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$가 된다.

정사영에서 등장한 양

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$$

을 벡터 $\mathbf{b}$의 $\mathbf{a}$성분이라고 부른다. 특히 $\mathbf{a}$가 단위벡터일 때에는 보다 간단하게

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

가 성분이 된다.

# 생각해보기

$\mathbf{a}$가 표준단위벡터일 때 $\mathbf{a}$성분은 어떤 의미를 갖는가?