호환과 치환

정리

$n \geq 2$일 때, 모든 n-치환은 호환의 곱으로 나타낸다.

증명

귀납법을 사용해서 증명해보자. $n = 2$일 때, 치환은

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

두 가지가 있다. 각 $(12)^2$, (12)이므로 호환의 곱으로 표현된다.

$n > 2$라 하고 치환 σ가 주어졌다고 하자. $\sigma(n) = n$이면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$

은 $(n-1)$-치환이 된다. 귀납법의 가정에 의해 이를 호환의 곱으로 표현할 수 있다.

만약 $\sigma(n) = k \neq n$이라고 하자.

$$\sigma' = (kn)\sigma$$

는 $\sigma'(n) = n$을 만족하여 앞에서 설명한대로 호환의 곱으로 표현된다. 호환 τ_i들에 의해서

$$\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_r$$

라면

$$\sigma = (kn)\tau_1 \cdots \tau_r$$

이므로 호환의 곱으로 표현된다.

생각해보기

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

을 호환의 곱으로 표현해보자.