

지수함수

자연상수로부터 얻어진 지수함수

$$f(x) = e^x$$

는 다음을 만족한다.

$$f(0) = 1 \tag{1}$$

$$f'(x) = f(x) \tag{2}$$

그리고, (1)과 (2)를 동시에 만족하는 미분가능한 함수는 e^x 뿐이다.

유일성

$f(x)$ 가

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = f(x)$$

를 만족한다고 가정하자. $g(x) = f(x)e^{-x}$ 를 미분해보면 $g'(x) = 0$ 임을 알게 되는데 $g(0) = 1$ 이므로 $g(x) = 1$ 를 얻는다. 결론적으로, $f(x) = e^x$ 이다.

생각해보기

양의 실수에서 정의된 로그함수 $f(x) = \log(x)$ 는

$$\begin{aligned}f(1) &= 0 \\x \cdot f'(x) &= 1\end{aligned}$$

으로 결정되는가?