행렬식과 일차독립

정리

n차 정사각행렬 $A = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$에 대해서 $\det A \neq 0$일 필요충분조건은 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$가 일차독립인 것이다.

증명

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$가 일차독립이면 $\mathbb{R}^n$을 생성한다. 따라서 각 표준단위벡터를 $\boldsymbol{v}_i$들의 선형결합으로 표시할 수 있다.

$$\boldsymbol{e}_i = \sum b_{ij} \boldsymbol{v}_j$$

로 쓰고, $B = (b_{ij})$로 놓으면 $AB = I$이다. 행렬식을 취하면

$$\det(A)\det(B) = 1$$

으로, 여기서 $\det(A) \neq 0$을 얻는다.

증명(계속)

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$가 일차종속이면 자명하지 않은 해

$$\sum c_i \boldsymbol{v}_i = 0$$

가 존재한다. j에 대해 $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i \neq j} c_i \boldsymbol{v}_i$으로 바꿔 쓸 수 있다. 교대선형사상의 성질로부터 $j = 1$이라고 가정해도 무방하다. 다중선형사상의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left(\sum_{i \geq 2} c_i \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \right) \\ &= \sum_{i \geq 2} c_i \det \left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \right) \end{aligned}$$

을 얻는데 같은 열이 반복되는 행렬의 행렬식은 영이므로 원하던 $\det A = 0$을 얻는다.

생각해보기

$\det A \neq 0$인 것의 필요충분조건은 L_A가 전단사인 것이다.