직교행렬

정의

n차 정사각행렬 A이

$$A^{\mathrm{t}}A = I$$

를 만족하면 직교행렬이라고 부른다.

정리

n차 정사각행렬 A에서 얻은 L_A가 등장사상일 필요충분조건은

$$A^{\mathrm{t}}A = I$$

이다.

증명

L_A가 등장사상이라고 가정하자. 모든 $X, Y \in \mathbb{R}^n$에

$$|L_A(X) - L_A(Y)| = |X - Y|$$

인데, 제곱하여

$$X \cdot Y = AX \cdot AY$$

를 얻는다. 바꿔쓰면

$$X \cdot Y = AX \cdot AY = (AX)^{\mathrm{t}} AY = (X^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}) AY = X^{\mathrm{t}} (A^{\mathrm{t}} A) Y$$

이다. 이를 모든 X, Y에 만족하는 행렬 $A^{\mathrm{t}}A$는 단위행렬 뿐이다. X, Y에 단위행렬을 대입하여 얻을 수 있다.

증명(계속)

A가 $A^{\mathrm{t}}A = I$를 만족한다고 가정하자.

$$X^{\mathrm{t}}X = X^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}AX = (AX)^{\mathrm{t}}AX$$

이므로 모든 $X \in \mathbb{R}^n$에 대해서 $|AX| = |X|$이다. 따라서 임의의 $X, Y \in \mathbb{R}^n$에 대해서

$$|AX - AY| = |A(X - Y)| = |X - Y|$$

이므로 L_A는 등장사상이다.

생각해보기

$A^{\mathrm{t}}A = I$는 A를 구성하는 열벡터들이 길이가 1이고 서로 직교한다는 말이다. 행벡터에 대해서는 어떤가?