일반화된 로피탈의 정리

로피탈의 정리의 한 형태는 다음과 같다.

정리

실수 a 근방에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, 극한값

$$L := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 존재한다고 하자. 다음 둘 중 하나가 성립하면

1. $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0, \ \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty, \ \lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$

그때

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

이 성립한다.

$\lim_{x \searrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \searrow a} g(x) = 0$ 경우에 로피탈의 정리를 증명해보자.
코시의 평균값 정리에 의해서 임의의 $a < y < x < b$에 대해서

$$f(y) - f(x) = (g(y) - g(x)) \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

가 되는 $c \in (y, x)$가 존재한다. 양변에 $g(x)$를 나누고 다시 쓰면

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right) - \frac{g(y)}{g(x)} L$$

을 얻는다.

여기서 $g(x)$로 나누어도 되는지 생각해보자.

$g(x)$의 영점이 있다면 당연히 나누어도 된다.

어떤 $x_1 \in (a, b)$에 대해 $g(x_1) = 0$라고 하자. 어떤 $x_0 \in (a, x_1)$에 대해서 $g(x_0) = 0$이라면 평균값정리로부터 $g'(x)$의 영점을 얻게 되고 이것은 가정에 반한다. 따라서 $x < x_1$일 때 $g(x) \neq 0$이다.

따라서, x가 a에 충분히 가까우면 $g(x)$로 나누어도 된다.

앞의 식

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right) - \frac{g(y)}{g(x)}L$$

으로 돌아가자. 좌변은 y 관계없으므로 양변에 극한 $y \to 0$를 취하면 가정에 의해서

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \lim_{y \searrow 0}\left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right)$$

가 얻어진다.

한편, 가정에 의해서

$$\lim_{t \searrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

이므로, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해서 적당한 양수 δ가 존재하여

$$a < t < a + \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \epsilon$$

이다. 따라서, $a < y < x < a + \delta$일 때 당연히 $a < c < a + \delta$이고

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \epsilon$$

이다. 이로부터

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \lim_{y \searrow 0} \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right) \right| \leq \epsilon$$

을 얻으므로 로피탈의 정리가 증명되었다.

생각해보기

나머지 경우도 비슷한 방법으로 증명해 보자.