실수의 완비성

실수의 완비성

감소하는 양수들의 수열은 수렴한다.

식으로 표현하면,

실수의 완비성

실수열 (a_n)이 모든 자연수 n에 대해서 $a_n > 0$이고 $a_n \geq a_{n+1}$이면, 극한값

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

이 존재한다.

완비성을 이용한 비교판정법 증명 개요

실수열 (a_n)과 (b_n)이 주어졌다. $0 \le a_n \le b_n$이라고 가정하자. 만약

$$\sum b_n = B < \infty$$

이면

$$c_n = B - (a_1 + \cdots + a_n)$$

은 감소하는 양의 수열을 이룬다. 완비성에 의해서

$$\lim_{n \to \infty} c_n = C < \infty$$

를 얻는다. 여기서 어렵지 않게

$$\sum a_n = B - C$$

를 얻을 수 있다.

완비성을 이용한 교대급수의 정리 증명 개요

$a_1 > 0$인 교대급수 $\sum a_n$이 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이고 모든 자연수 n에 대해서 $|a_n| \geq |a_{n+1}|$이라고하자. 수열

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

을 생각하자. 먼저, 완비성을 이용하여 (s_{2n})과 (s_{2n-1})이 수렴함을 보이고, 그 값을 각 b_+, b_-라고하자.

한편, $s_{n+1} - s_n = a_n$이 0으로 수렴하므로, $b_+ = b_-$임을 보일 수 있다. 결론적으로, 교대급수 $\sum a_n$은 $b = b_+ = b_-$에 수렴한다.