거듭제곱급수와 함수

거듭제곱급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 $r > 0$이라고 하자.
이 때, $f(x)$는 구간 $(-r, r)$에서 정의된 함수를 만든다.

이렇게 해서 얻어진 함수를 "거듭제곱급수함수"라고 부른다.

거듭제곱급수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 $r>0$이라고 하자.

정리

두 개의 거듭제곱급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

의 수렴반경은 r*이다. 한편, 구간* $(-r,r)$*에서* $f(x)$*는 미분가능하며*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int_{t=0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

이 성립한다.

따름정리

거듭제곱급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 $r > 0$이라고 하자.
앞의 정리에 의해서

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

이고 $x \in (-r, r)$일 때

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

이다.

생각해보기

함수 $f(x) = |x+1|$을 거듭제곱급수합수로 표현한 후 $x = -2$를 대입해보자.