수열의 수렴과 발산

수열의 수렴과 발산

실수로 이루어진 수열 (a_n)이 주어졌다. 어떤 실수 $L \in \mathbb{R}$이 있어서 n이 커짐에 따라 a_n이 L에 한없이 가까워지면, 수열 (a_n)이 L에 수렴한다고 하고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

이라 쓴다. 또한 L을 수열 (a_n)의 극한값이라 한다.

주어진 수열 (a_n)은 수렴할 수도 있고, 수렴하지 않을 수도 있는데, 후자의 경우를 “발산”한다고 한다.

수렴의 수학적 정의

"한없이 가까워진다" 는 것의 엄밀한 정의는 다음과 같다.

정의

주어진 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해서 양의 정수 N이 존재하여

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

이 성립할 때, 수열 (a_n)이 L에 수렴한다고 말한다.

발산의 종류 - 한없이 증가하는 수열

수열이 발산할 때에 한없이 증가하는 경우가 있다. 이것을 "무한대로 발산"한다고 하며 다음과 같이 수학적으로 정의한다.

정의

주어진 임의의 실수 T에 대해서 양의 정수 N이 존재하여

$$n > N \Rightarrow a_n > T$$

이 성립할 때, 수열 (a_n)이 무한대로 발산한다고 말한다.

무한대로 발산하는 수열

수열 (a_n)이 무한대로 발산하는 경우

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

라고 쓰지만, 이 경우에 수열 (a_n)이 무한대로 '수렴'한다고 말해서는 안 된다.

한없이 감소하는 수열

수열 $(-a_n)$이 한없이 증가할 때,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

라고 쓴다. 또한 수열 (a_n)이 음의(마이너스) 무한대로 발산한다고 말한다.

생각해보기

어떤 주어진 수열 (a_n)과 실수 $L \in \mathbb{R}$에 대하여 다음 두 가지 성질은 동치이다.

1. 주어진 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해서 양의 정수 N이 존재하여

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

   이 성립한다.

2. 주어진 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해서

$$|a_n - L| < \epsilon$$

   이 유한개의 항을 제외하고 모두 성립한다.