비율 판정법

비율 판정법

실수열 (a_n)이 모든 n에 대해서 $a_n > 0$을 만족한다고 하자.

정리

적당한 양수 $r \in (0, 1)$*이 존재하여 모든* $n \geq 1$*에 대해서*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

이면, $\sum a_n$*은 수렴한다.*

정리

모든 $n \geq 1$*에 대해서*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

이면, $\sum a_n$*은 무한대로 발산한다.*

따름정리

실수열 (a_n)이 모든 n에 대해서 $a_n > 0$을 만족한다고 하자. 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

가 존재한다고 가정하자.

1. $\rho < 1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.
2. $\rho > 1$이면 $\sum a_n$은 무한대로 발산한다.

따름정리의 적용

급수
$$\sum \frac{n}{3^n}$$
의 경우, 따름정리를 사용해서 수렴을 보일 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$
을 확인하는 것으로 충분하다.

따름정리의 잘못된 적용

실수열 (a_n)이 모든 n에 대해서 $a_n > 0$을 만족하고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

라고 가정하자. 두 급수

$$\sum \frac{1}{n}, \qquad \sum \frac{1}{n^2}$$

는 위의 가정을 만족하지만, 한 수열은 발산하고 다른 하나는 수렴한다.

따라서, 이런 경우에 따름정리를 적용해서는 안 된다.