내적과 벡터

미지의 n-벡터 $\mathbf{a}$가 영벡터인지 여부를 내적으로부터 알아낼 수 있다.

정리

모든 n-벡터 $\mathbf{x}$에 대해서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$이면, $\mathbf{a} = 0$이다.

증명해보자. $\mathbf{x} = \mathbf{a}$일 때 가정으로부터 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$를 얻는다. 이를 만족하는 벡터 $\mathbf{a}$은 영벡터뿐이다.

다르게 증명해보자. 표준단위벡터를 내적해 보자. 가정에 의해서 모든 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대해서

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = 0$$

이 된다. 한편 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$이라면

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_i$$

이므로 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$을 얻는다.

미지의 두 n-벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 동일한 벡터인지 내적으로부터 알아낼 수 있다.

정리

모든 n-벡터 $\mathbf{x}$에 대해서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$이면, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$이다.

앞의 정리를 이용해서 증명해보자. 내적의 성질에 의해서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$이면

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

이다. 앞의 정리에 의해서

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

을 얻는다. 따라서 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$가 된다.

생각해보기

정리를 두 가지 방법으로 증명하였다. 각각의 증명방법을 평가해보자.