

공평

정의

정규곡선 $X(t)$ 의 접방향 \mathbf{t} 는

$$\mathbf{t} = \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

로 정의한다. 곡률벡터 κ 는 접방향의 호의 길이에 대한 변화율

$$\kappa = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

으로 정의한다.

일반적 매개변수를 이용한 곡률의 표현

곡률벡터 κ 는

$$\kappa = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{t}}{dt}$$

으로 다시 쓸 수 있다. 여기서

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|X'|}$$

이고

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)$$

이다. 합치면

$$\kappa(t) = \frac{1}{|X'(t)|} \frac{d}{dt} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)$$

호의 길이로 매개화된 경우

곡선 $Y(s)$ 가 호의 길이로 매개화되었다면

$$\mathbf{t} = Y'(s)$$

이고

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{|Y'|} \frac{d}{ds} \left(\frac{Y'}{|Y'|} \right) = Y''(s)$$

이다. 따라서, 이 때 곡률벡터는 가속도와 같다.

용어

곡률은 곡률벡터의 크기를 말한다. 곡률을 κ 라 하면

$$\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$$

이다. 곡률반경은 $\frac{1}{\kappa}$ 을 뜻한다.

생각해보기

곡률은 재매개화에 의존하지 않는다. 가속도는 재매개화에 의존한다. 하지만, 이것이

호의 길이로 매개화된 곡선의 경우 곡률은 가속도의 크기와 같다.
라는 사실에 반하지는 않는다.