벡터의 내적

정의

두 벡터

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

의 내적(inner product)는 다음 실수를 뜻한다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

보기를 들면

$$(0, 1, 2) \cdot (3, 4, 5) = 0 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 5 = 14$$

이다.

내적의 성질

n-공간의 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$와 실수 t에 대하여 내적은 다음 성질을 가지고 있다.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$
$$(t\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(t\mathbf{b})$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

내적의 정의를 풀어쓰면 금방 얻을 수 있다.

내적과 절댓값

내적과 절댓값은 다음 관계가 있다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

내적의 성질을 이용해서 계산해 보면,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}
\end{aligned}$$

를 얻는다. 정리하면

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2\right)$$

가 된다.

생각해보기

내적은 앞에서 살펴본 성질로 결정된다. 어떤 연산 $\mathbf{a} * \mathbf{b} \in \mathbb{R}$이 내적의 성질 세 가지를 만족하고

$$\mathbf{a} * \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

이라면 이 연산은 내적이어야만 한다.