등장사상

정리

등장사상

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

가 원점을 보존하면, T는 선형사상이다.

여기서 원점을 보존한다는 것은

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

가 성립한다는 말이다.

증명

등장사상이면 모든 $X, Y \in \mathbb{R}^n$에 대해

$$|T(X) - T(Y)| = |X - Y| \tag{1}$$

가 성립한다. 양변을 제곱해서 정리하면

$$T(X) \cdot T(Y) = X \cdot Y$$

를 얻는다. 한편, (1)에서 $Y = O$일 때

$$|T(X)| = |X| \tag{2}$$

를 얻는다.

증명(계속)

T가 선형임을 보이기 위해서 임의의 $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$에 대해서

$$|(aT(X) + bT(Y)) - T(aX + bY)| = 0$$

을 보이면 충분하다. (1)과 (2)에서

$$\begin{aligned}
&|aT(X) + bT(Y) - T(aX + bY)|^2 \\
&= a^2|T(X)|^2 + b^2|T(Y)|^2 + |T(aX + bY)|^2 \\
&\quad + abT(X) \cdot T(Y) - 2bT(Y) \cdot T(aX + bY) - 2aT(X) \cdot T(aX + bY) \\
&= a^2|X|^2 + b^2|Y|^2 + |aX + bY|^2 \\
&\quad + abX \cdot Y - 2bY \cdot (aX + bY) - 2aX \cdot (aX + bY) \\
&= a^2|X|^2 + b^2|Y|^2 + |aX|^2 + |bY|^2 + 2abX \cdot Y \\
&\quad + abX \cdot Y - 2abX \cdot Y - 2b^2|Y|^2 - 2abX \cdot Y - 2a^2|X|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

를 얻는다.

생각해보기

원점을 보존하지 않는 등장사상이 있는가? 그 경우 선형사상이 되는가?