자연상수

수열 (a_n)이 “유계(bounded)” 라는 것은 실수 M이 존재하여 모든 n에 대해서 $|a_n| < M$인 것을 말한다.

정리

수열

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

은 수렴한다.

주어진 수열이 증가하며 유계인 것을 보이면 충분하다. 수렴성은 실수의 완비성으로부터 따른다.

증가

이항정리를 사용하면

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

을 얻는다. 임의의 자연수 $k \geq 2$에 대해서

$$b_n^{(k)} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

로 놓으면 모든 $(b_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$는 음이 아닌 증가수열인 것을 확인하면 충분하다.

유계

마찬가지로, 이항정리를 사용하면

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\le 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} \\ &\le 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}} < 3\end{aligned}$$

을 얻는다.

자연상수를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

생각해보기

다음 문제에 실수의 완비성을 적용할 수 있다.

교과서(김홍종, 미적분학1+) 1장 탐구문제 5번(급수의 재배열): 전단사 함수 $r: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$과 절대수렴하는 급수 $\sum a_n$이 있을 때, 새로이 얻어진 급수 $\sum a_{r(n)}$도 절대수렴한다.

원래 급수와 재배열된 급수는 그 합이 같은가?