

극좌표에서 호의 길이

극좌표로 함수

$$r = r(\theta)$$

로 나타내어진 곡선의 구간 $a \leq \theta \leq b$ 에서의 길이는

$$\int_a^b (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

이다.

증명

곡선

$$r(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

의 속도는

$$r'(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) + r(\theta)(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

인데,

$$(\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

가 서로 수직인 단위벡터 이다. 따라서 속력의 제곱은

$$(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2$$

이다.

생각해보기

곡선

$$r = 1 - \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

의 길이를 계산해보자.