등비급수

정의

실수로 이루어진 수열 (a_n)이 있을 때, 실수 r이 존재하여 모든 자연수 n에 대해서

$$r \cdot a_n = a_{n+1}$$

이 성립하면, 수열 (a_n)을 등비수열이라고 부른다.

등비수열로부터 얻어진 급수를 등비급수라고 부른다.

등비급수의 수렴

등비수열

$$1, r, r^2, r^3, \cdots$$

을 생각하자.

정리

$|r| < 1$*이면*

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

이다.

증명

모든 자연수 n에 대해서

$$1 + r + \cdots + r^{n-1} - \frac{1}{1-r} = \frac{1-r^n}{1-r} - \frac{1}{1-r} = \frac{-r^n}{1-r}$$

이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = 0$$

을 보이면 충분하다. 사실, 분모 $1 - r$은 n과 관계없으므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \tag{1}$$

으로 충분하다. (1)은 다음 장에서 보이자.

증명(계속)

(1)을 보이자. 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해서

$$|r^n| < \epsilon$$

은

$$n \log |r| < \log \epsilon$$

과 동치이다. $|r| < 1$에서 $\log |r| < 0$ 을 얻으므로

$$n > \log \epsilon / \log |r|$$

으로 써도 된다. 따라서, N을 $\log \epsilon / \log |r|$보다 큰 아무 정수로 고르면

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0$$

이 증명된다.