테일러 급수

원점 근방에서 정의된 함수 $f(x)$가 무한번 미분가능하면 거듭제곱급수

$$Tf(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

를 $f(x)$의 테일러 급수라고 부른다.

테일러 급수가 x에서 수렴할 필요충분조건은

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(x) = 0$$

이다.

테일러 급수가 x에서 수렴하더라도 반드시

$$Tf(x) = f(x)$$

인 것은 아니다. 단, $f(x)$가 원점 근방에서 해석함수이면 성립한다.

생각해보기

교과서(미적분학1+, 김홍종) 6절2장 참조: 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

은 모든 n에 대해서 $f^{(n)}(0) = 0$인 것이 알려져 있다. 이것을 이용하여 $Tf(x)$와 $f(x)$가 서로 다를 수도 있다는 것을 설명해 보자.