

지수함수와 거듭제곱급수

거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

은 수렴반경이 무한대이고, 실수 전체에 정의된 함수가 된다. 또한

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = f(x)$$

이므로

$$f(x) = e^x$$

이다.

다시 말해서,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

이 모든 실수 x 에 대해서 성립한다. $x = 1$ 을 대입하여

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

을 얻는다.

생각해보기

두 개의 수렴하는 급수

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum \frac{1}{n!} \quad (2)$$

이 있다. (1)보다 (2)가 더 빨리 수렴한다고 할 수 있는가? 어떤 의미에서 그런가?