

거리공간

어떤 집합 U 에 대하여 함수

$$d: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

가 성질

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

를 가지면, 함수 d 를 '거리함수'라고 부른다. 순서쌍 (U, d) 를 거리공간이라고 부른다.

좌표공간은 거리공간의 예가 된다. 또한, 좌표공간의 임의의 부분집합은 좌표공간의 거리를 이용해서 거리공간으로 볼 수 있다.

연속함수의 집합

$$U = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$$

를 생각하자.

$$d(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

은 거리함수가 된다.

연속함수의 집합

$$U = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$$

의 임의의 부분집합도 거리공간이 된다. 예를 들면, 다항식은 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수를 정의하므로, 다음 거리함수

$$d(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)|: x \in [0, 1]\}$$

를 이용하여 거리공간으로 만들 수 있다.

생각해보기

앞에서 소개한 거리함수에 대해서 두 다항식 사이의 ‘거리’

$$d(x^2, 4x + 3)$$

를 구해보자.