

미분과 역함수

정리 (역함수 정리)

구간에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 가 미분가능하고, 정의역의 임의의 점 x 에 대해서

$$f'(x) \neq 0$$

이면 다음 두 가지가 성립한다.

1. $f(x)$ 는 역함수 $g(x)$ 를 가지며, $g(x)$ 는 미분가능하다.
2. 또한,

$$\frac{dg}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}$$

가 성립한다.

미분가능한 역함수의 존재성을 가정하면, 도함수의 관계식을 얻기 위해서는

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

에 합성함수의 미분법을 적용하면 된다.

흔동의 여지

역함수 정리의 결과

$$\frac{dg}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}$$

를 간략히

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

으로 쓸 수도 있다. 더 간략히

$$\frac{dg}{dy} = \left(\frac{df}{dx} \right)^{-1}$$

쓰고 싶을 수도 있으나, 세심한 주의를 요한다. $(-)^{-1}$ 기호는 경우에 따라 역수를 나타내기도 하고 역함수를 나타내기도 하기 때문이다.

생각해보기

$\sin^2(x)$ 는 $(\sin(x))^2$ 을 나타낸다. 한편, $\sin^{-1}(x)$ 는 $\frac{1}{\sin(x)}$ 를 뜻하지 않는다. 여기서 어떤 기호가 두 가지 의미로 사용되고 있는가?