

호환과 전도

n -치환 σ 의 전도의 수란

$$i < j, \quad \sigma(i) > \sigma(j)$$

를 동시에 만족하는 $1 \leq i, j \leq n$ 의 개수를 말한다.

전도의 수 세기

σ 의 전도의 수를 세려면

$$(\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(3) \ \sigma(4) \ \cdots \ \sigma(n))$$

을 놓고, 각 $k = 1, 2, \dots, n$ 에 대해서 k 의 왼쪽에 k 보다 큰 수가 얼마인지 세어보면 된다.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

의 경우 표

k	1	2	3	4	5
	4	3	1	1	0

을 얻는다. $4 + 3 + 1 + 1 + 0 = 9$ 이므로 전도의 수는 아홉이다.

호환 (ij) 의 전도의 수는 $2|i-j|-1$ 이다. 사실, $m = |i-j|$ 인 경우 $(m+1)$ -치환

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m & m+1 \\ m+1 & 2 & 3 & \cdots & m & 1 \end{pmatrix}$$

의 전도의 수를 세어보면 된다.

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & \cdots & m & m+1 \\ \hline & m & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

으로부터 전도의 수 $m+1+\cdots+1=2m-1$ 을 얻는다.

생각해보기

미지의 치환 σ 의 전도의 수를 앞의 방법을 통해 세었더니 표

k	1	2	3	4	5	6
	2	4	1	2	1	0

를 얻었다. σ 는 무엇인가?