일반항 판정법

일반항 판정법

실수열 (a_n)이 주어졌다고 하자.

정리

급수 $\sum a_n$이 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다.

일반항 판정법의 증명

수열 (a_n)으로 만들어진 급수 $\sum a_n$이 실수 L으로 수렴한다고 가정하자. 극한의 정의에 의해서, 임의의 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때,

$$k > N \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{k} a_n - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

가 성립하는 N이 존재한다. 임의의 자연수 $m > N$에 대해서

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_n - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\left| \sum_{n=1}^{m+1} a_n - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

이고, 위의 두 식으로부터

$$|a_{m+1}| < \epsilon$$

을 얻는다. 따라서, (a_n)의 극한은 0이다.

일반항 판정법의 대우

정리

급수 $\sum a_n$이 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다.

의 대우는 다음과 같다.

정리

만약

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

이면 급수 $\sum a_n$는 발산한다.

따라서, 일반항 판정법은 급수의 발산을 보이기 위해 사용할 수 있다. 그러나, 일반항 판정법으로 급수의 수렴을 보일 수는 없다.