행렬식과 전치

n차 정사각행렬 A에 대해서

$$\det A = \det A^{\mathrm{t}}$$

가 성립한다.

증명

행렬식의 정의로부터

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$
$$\det A^{\mathrm{t}} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

이다.

한편, n-치환 σ, τ에 대해서 $\sigma\tau = 1$이면 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$이다. 위의 두 합에서 σ와 그 역치환 σ^{-1}에 대응되는 항이 동일하고 함수 $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$가 S_n에서 전단사이므로 두 합은 같다.

생각해보기

$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$가 S_n에서 전단사인 것을 $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$로부터 얻어낼 수 있다.