미분과 $o(x^n)$

원점 근방에 정의된 함수 $f(x)$가 n번 미분가능하고

$$f(x) = o(x^n)$$

라고 가정하자. 이때,

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$$

인지 알아보자.

$f(0)$

극한
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$
으로부터 충분히 작은 x에 대해서
$$\frac{|f(x)|}{|x^n|} \le 1$$
을 얻는다. 따라서
$$|f(x)| \le |x^n|$$
이고, 극한을 취하면
$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$$
이다. 미분가능한 함수는 연속이므로 $f(0) = 0$을 얻는다.

귀납법

$n > 0$이라고 하자. $f(x) = o(x^n)$이면 $f(x) = o(x^{n-1})$이므로 귀납법의 가정에 의해

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

이다. 따라서, 로피탈의 정리로부터

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!x}$$

를 얻는다. 한편, $f(x) = o(x^n)$이므로

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x}$$

을 얻는데, 미분의 정의에 의해 $f^{(n)}(0) = 0$을 얻는다.

생각해보기

수학적 귀납법이란 무엇인가?