

극좌표계와 영역의 넓이

극좌표계에서

$$0 \leq r \leq f(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

으로 표현되는 영역의 넓이는

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

이다. 여기서 $f(\theta)$ 는 연속함수이다.

증명은 구분구적법으로 할 수 있다.

쉬운 보기

반지름이 r 인 사분원의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{4}\pi r^2$$

가 된다.

보기

$r = 1 + \cos \theta$ 에 의하여 둘러싸인 부분의 경우 그 넓이는

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)^2 d\theta \\&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\&= \frac{1}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

가 된다.

생각해보기

한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이를 극좌표를 이용해서 계산해보자. 원하던 답을 얻는가?