거듭제곱근 판정법

거듭제곱근 판정법

실수열 (a_n)이 모든 n에 대해서 $a_n \geq 0$을 만족한다고 하자.

정리

적당한 양수 ϵ이 존재하여 모든 $n \geq 1$에 대해서 $(a_n)^{\frac{1}{n}} < 1 - \epsilon$이면, $\sum a_n$은 수렴한다.

정리

적당한 양수 ϵ이 존재하여 모든 $n \geq 1$에 대해서 $(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 + \epsilon$이면, $\sum a_n$은 무한대로 발산한다.

따름정리

실수열 (a_n)이 모든 n에 대해서 $a_n \geq 0$을 만족한다고 하자. 극한값

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = r$$

이 존재한다고 가정하자.

1. $r < 1$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.
2. $r > 1$이면 $\sum a_n$은 무한대로 발산한다.

따름정리의 적용

급수

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\log n)^n}$$

의 경우, 따름정리를 사용해서 수렴을 보일 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(\log n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0$$

을 확인하는 것으로 충분하다.

따름정리의 잘못된 적용

실수열 (a_n)이 모든 n에 대해서 $a_n \geq 0$을 만족하고,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

라고 가정하자. 두 급수

$$\sum \frac{1}{n}, \qquad \sum \frac{1}{n^2}$$

는 위의 가정을 만족하지만, 한 수열은 발산하고 다른 하나는 수렴한다.

따라서, 이런 경우에 따름정리를 적용해서는 안 된다.