

근사다항식의 존재

존재성

n 은 주어진 음이 아닌 정수이다. 원점 근방에서 정의된 n 번 미분 가능한 함수 $f(x)$ 를 생각하자. 이때, $f(x)$ 의 n 차 근사다항식은

$$p(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

으로 주어진다.

증명

다항식은 한없이 미분가능하므로

$$g(x) = f(x) - p(x)$$

또한 n 번 미분가능하다. 그 미분값들은

$$g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(n)}(0) = 0$$

이므로

$$g(x) = o(x^n)$$

이다.

생각해보기

$\cos(x)$ 의 2차 근사 다항식으로부터 $\cos(x^2)$ 의 4차 근사 다항식을 얻어낼 수 있는가?