비해석 함수의 예시

무한번 미분가능한 비해석 함수의 예로

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

가 있다.

모든 양수 n에 대해서 $f^{(n)}(x)$가 존재하고 $f^{(n)}(0) = 0$임을 보이면 충분하다.

$x < 0$에서는 항상 $f^{(n)}(x) = 0$이다.

$x > 0$인 영역에서 수학적 귀납법을 이용해 다음 사실을 보일수 있다.

모든 자연수 n에 대해서 적당한 유리함수 $q_n(x)$가 존재하여

$$f^{(n)}(x) = f(x)q_n(x), \qquad x > 0$$

이다.

수학적 귀납법을 이용해 모든 $n \geq 1$에 대해서

$$f^{(n)}(0) = 0$$

인 것을 보이자.

$f^{(n)}(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하고 도함수의 값이 0임을 증명하기 위해서는 다음을 보이면 충분하다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0$$

왜냐하면 $x \neq 0$에서는 무한번 미분가능하고, $x = 0$에서만 도함수를 계산하면 되기 때문이다.

왼쪽의 극한

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0$$

은 쉽게 확인된다.

오른쪽의 극한

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

을 계산해보자. $x > 0$에서, $x = \frac{1}{t}$로 치환하면,

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)q_n(x)}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{tq_n(\frac{1}{t})}{e^t} = 0$$

을 얻는다.

따라서, 원래 함수 $f(x)$가 비해석함수인 것이 증명되었다.

생각해보기

$f(x)$는 $x \neq 0$ 근방에서는 해석함수이다.