근사다항식의 유일성

n은 주어진 음이 아닌 정수이다. n차 이하의 다항식 $f(x)$을 생각하자. 이때,

$$f(x) = o(x^n)$$

일 필요충분조건은

$$f(x) = 0$$

이다.

왜냐하면, $f(x) = o(x^n)$로부터 $0 \leq k \leq n$에 대해 $f^{(k)}(0) = 0$을 얻는데, 이를 만족하는 n차 이하의 다항식은 0뿐이다.

유일성

n번 미분가능한 함수 $f(x)$의 n차 근사다항식 $p(x)$와 $q(x)$를 생각하자. 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-q(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-p(x)}{x^n} = 0$$

이다. 이때,

$$r(x) = p(x) - q(x)$$

는 n차 이하의 다항식이다. 한편,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} &= \lim_{x\to 0} \frac{(f(x)-q(x))-(f(x)-p(x))}{x^n} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-q(x)}{x^n} - \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-p(x)}{x^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

이므로 $r(x) = o(x^n)$이다. 결론으로 $r(x) = 0$을 얻는다.

생각해보기

$o(x^n)$은 덧셈과 실수곱에 대해서 닫혀 있는가?