거듭제곱급수와 급수

실수로 이루어진 수열 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \cdots)$와 변수 x로부터 얻어낸 거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

를 생각하자. 실수값 c를 x에 대입하여 수열

$$a_0, a_1 c, a_2 c^2, \cdots$$

와 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$$

을 얻는다.

거듭제곱급수의 수렴

거듭제곱급수

$$\sum n^n x^n$$

은 $x = 0$에서만 수렴한다.

일반항 판정법을 사용하여 알 수 있다

거듭제곱급수의 수렴

거듭제곱급수

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

은 모든 실수 x에 대해서 수렴한다.

비율판정법을 사용하여 알 수 있다.

거듭제곱급수의 수렴

거듭제곱급수

$$\sum x^n$$

이 수렴할 필요충분조건은 $|x| < 1$이다.

등비급수에 관한 기본적인 사실이다.

생각해보기

거듭제곱급수는 다항식처럼 덧셈과 곱셈이 가능하다. 거듭제곱급수끼리 연산할 때에는 수렴성을 걱정하지 않아도 되는데, 그 이유가 무엇인가?