극한 예제

a를 1보다 큰 실수라고 하자. 다음

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$$

을 극한의 정의를 이용하여 확인해보자. 우선 편의를 위해 $a = 1 + \epsilon$으로 쓰자. 그러면 $\epsilon > 0$이다.

극한의 정의를 적용하기 위해서, 임의의 실수 T가 주어졌다고 하자. 이항정리를 적용하면

$$\frac{(1+\epsilon)^n}{n} > \frac{1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2}{n} > \frac{1}{2}(n-1)\epsilon^2$$

을 얻는다.

모든 $n > 1 + 2T/\epsilon^2$에 대해서

$$\frac{(1+\epsilon)^n}{n} > T$$

를 얻는다.

$a = 1 + \epsilon$이었다는 사실을 상기하며 앞에서 관찰한 내용을 반복하면, 모든 $n > 1 + 2T/\epsilon^2$에 대해서

$$\frac{a^n}{n} > T$$

이 성립한다. 따라서, 주어진 T에 대응하는 N으로 $1 + 2T/\epsilon^2$보다 큰 자연수 중에서 아무거나 고르면

$$n > N \Rightarrow \frac{a^n}{n} > T$$

를 얻고, 정의에 의해서

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n} = \infty$$

를 얻는다.

생각해보기

실수 $a > 1$에 대해서

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

인 것을 극한의 정의를 이용하여 확인해보자.