

비교판정법

비교판정법

실수열 (a_n) 과 (b_n) 이 주어졌다고 하자.

정리

$0 \leq a_n \leq b_n$ 일 때, 다음 두 가지가 성립한다.

1. $\sum b_n$ 이 수렴하면, $\sum a_n$ 도 수렴한다.
2. $\sum a_n$ 이 무한대로 발산하면, $\sum b_n$ 도 무한대로 발산한다.

예제

다음 급수

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

가 수렴한다는 것을 보이자. $n \geq 2$ 일 때에는

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

인 한편,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} &= \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \cdots = 1 \end{aligned}$$

으로 수렴하므로, 비교판정법에 의해 (1)도 수렴한다.