좌표계

거리공간 (U, d)이 있을 때, 좌표계란 단사 함수

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

를 말한다. 좌표계 f는 n개의 실수값을 갖는 함수 $f_1, \cdots, f_n$으로 구성되어 있다. 모든 점 $p \in U$에 대해서

$$f(p) = (f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p))$$

이고 $f_i(p)$를 점 p의 i번째 성분이라고 한다.

북반구면

조건

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0$$

은 삼차원 공간에서 북반구면 S를 정의한다. 함수

$$f : (a, b, c) \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

은 좌표계

$$f : S \to \mathbb{R}^2$$

를 준다.

직교좌표계

유클리드 공간 $\mathbb{E}^n$의 직교좌표계란 등장사상

$$f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n$$

을 말한다.

표준좌표계

$\mathbb{R}^n$은 유클리드 공간이고 항등사상

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

은 직교좌표계가 된다. 이를 표준좌표계라고 부른다. 표준좌표계의 성분은 정사영으로 주어진다.

불변량

좌표계의 선택과 무관하게 정해지는 양을 불변량이라고 부른다. 뒤에서 다루게 될 예로, 질량중심, 고유값, 대각합, 행렬식, 곡선의 길이, 곡률 등이 있다.

생각해보기

두 조건

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0$$

로 정의된 삼차원 공간에서의 북반구면 S가 가진 좌표계

$$f : (a, b, c) \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

를 생각하자. 이 좌표계는 거리를 보존하는가? 바꿔 말해서, 다음 식

$$d(p, q) = d(f(p), f(q))$$

이 성립하는가?