

등장사상

두 개의 거리공간 (U_1, d_1) 과 (U_2, d_2) 가 있을 때, 등장사상이란 어떤 함수

$$f: U_1 \rightarrow U_2$$

가 다음 조건을 만족할 때를 말한다.

1. f 는 전단사이다.
 2. 모든 $x, y \in U_1$ 에 대해서 $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ 이다.
- 두 거리공간사이에 등장사상이 존재하면 '등장'이라고 한다.

정의

n 차원 유클리드 공간이란, n 차원 데카르트 공간 \mathbb{R}^n 과 등장인 거리공간을 뜻한다.

삼차원 좌표공간에서 $z = 1$ 로 표현되는 평면은 \mathbb{R}^2 와 등장이다.

위 주장을 증명하기 위해서는 등장사상을 찾으면 된다. xy -평면으로의 정사영이 필요한 등장사상이 된다.

한편

$$x + y + z = 1$$

으로 표현되는 평면도 유클리드 공간이다. 우선 평행이동

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z - 1)$$

을 이용하면 다른 평면

$$x + y + z = 0$$

과 등장인 것을 안다. 한편, 이 평면은 $(1, -1, 0)$ 과 $(1, 1, -2)$ 이 길이가 각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ 이고 서로 수직이므로

$$t(1, -1, 0) + s(1, 1, -2) \mapsto t\sqrt{2}(1, 0) + s\sqrt{6}(0, 1)$$

가 등장사상이 된다. 두 등장사상을 합성하여 원하던 등장사상을 얻는다.

생각해보기

유클리드 공간에서 평행이동은 등장사상이 됨을 보여라.