

역함수의 합성

역함수의 합성

집합 A, B, C 가 있다. 함수 $f: A \rightarrow B$ 와 $g: B \rightarrow C$ 가 둘 다 역함수를 가지면 그 합성

$$\begin{aligned} g \circ f: A &\longrightarrow C \\ a &\longmapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

도 역함수를 가진다. 또한

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

이다.

왜냐하면, 함수의 합성이 가지는 성질으로부터

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_C$$

이고

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \circ f = 1_A$$

을 얻을 수 있기 때문이다.

생각해보기

실수 a, b 를 생각하고 $a \neq 0$ 이라 하자. 두 개의 함수

$$f(x) = ax$$

$$g(x) = x + b$$

는 역함수를 가진다.

$$f^{-1} \circ g^{-1}$$

와

$$g^{-1} \circ f^{-1}$$

를 계산해 그 결과를 비교해보자.