테일러 정리

자연수 n이 주어졌다. n번 미분가능한 함수 $f(x)$에 대해서 테일러 다항식 $T_n f(x)$과 나머지항 $R_n f(x)$은

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$$

이므로 다음 관계식

$$f(x) - T_n f(x) = R_n f(x)$$

도 만족한다. $f(x)$를 테일러 다항식으로 근사한 결과를 평가하기 위해서는 $R_n f(x)$을 분석해야 한다.

테일러 정리

$f(x)$가 원점을 포함하는 구간에서 정의되어 있고, $n+1$번 미분가능하다고 가정하자. 구간에 포함되는 임의의 양수x에 대해서 적당한 $x_* \in [0, x]$가 존재하여

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_*)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

이 성립한다.

증명

우선, 근사다항식의 정의로부터 $R_n(x) = o(x^n)$임을 상기하자.

x는 고정하고, 새로운 변수 s를 도입하여

$$g(s) = R_n(x)s^{n+1} - x^{n+1}R_n(s)$$

로 정의하자. x는 상수이고, $s^{n+1} = o(s^n)$, $R_n(s) = o(s^n)$이므로, $g(s) = o(s^n)$이다. 따라서, $0 \le k \le n$에 대해서 $g^{(k)}(0) = 0$이다. 구간 $[0, x]$에 평균값 정리를 적용하면

$$0 = g(x) - g(0) = R_n(x)(n+1)x_1^n - x^{n+1}R_n'(x_1)$$

인 $x_1 \in [0, x]$를 얻는다.

함수
$$g'(s) = R_n(x)(n+1)s^n - x^{n+1}R_n'(s)$$
와 구간 $[0, x_1]$에 평균값 정리를 적용하면
$$0 = g(x_1) - g(0) = R_n(x)(n+1)nx_2^{n-1} - x^{n+1}R_n^{(2)}(x_2)$$
를 얻는다.

반복하면,
$$R_n(x)(n+1)! - x^{n+1}R_n^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$
을 얻는다. $f^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x)$이므로 위 식을 정리하면 테일러 정리
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}x^{n+1}$$
을 얻는다.

따름정리

일반적으로 $x_* \in [0, x]$를 특정할 수 없으므로

$$M_{n+1}(x) := \max \left\{ \left| f^{(n+1)}(t) \right| : t \in [0, x] \right\}$$

로 놓고

$$|R_n f(x)| = M_{n+1}(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

을 얻는다.

생각해보기

함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

을 원점 근방에서 미분해보고 그래프를 그려보자. 따름정리는 언제나 유용한가?