

자연상수는 무리수

수렴하는 급수

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

로부터 e 가 무리수인 것을 알 수 있다.

증명

e 가 유리수라고 가정하자. 어떤 자연수 N 이 존재하여 Ne 는 양의 정수이다. 당연히 $N!e$ 도 양의 정수이다.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

의 양변에 $N!$ 을 곱하면

$$N! \cdot e = N! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!}$$

인데 우변은 정수와의거리가

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!} < \frac{1}{1+N} + \frac{1}{(1+N)^2} + \cdots = \frac{1}{N} \leq 1$$

이므로 모순을 얻는다.

생각해보기

다음 급수

$$\sum \frac{1}{(n!)^2}$$

는 수렴하는가? 그 합은 유리수인가?