호의 길이로 재매개화

주어진 곡선의 수많은 재매개화 방법 중에서 기하학적 성질을 가지는 방법으로 ‘호의 길이로 재매개화’가 있다.

정의

일급곡선

$$X : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

이

$$\int_a^t |X'(u)| du = t - a, \qquad a \le t \le b$$

를 만족하면, X는 ‘호의 길이로 매개화 되었다’라고 한다. 이 말은

$$|X'(t)| = 1$$

도 된다.

정리

정규곡선은 호의 길이로 재매개화할 수 있다.

이 말은, 주어진 정규곡선 X를 적당히 재매개화했을 때, 그 결과로 얻어진 곡선 Y가 호의 길이로 매개화되었다는 뜻이다.

증명

길이가 L인 정규곡선
$$X\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$
으로부터 가역함수
$$\begin{aligned} [a,b] &\to [0,L] \\ t &\mapsto \int_a^t |X'(u)|du \end{aligned}$$
를 얻는다. 그 역함수를 $g\colon [0,L] \to [a,b]$라 하면 그 미분값은 $g(s)=t$일 때
$$g'(s) = \frac{1}{|X'(t)|}$$
가 된다. 한편 합성함수의 미분 공식으로부터
$$(X \circ g)'(s) = g'(s)X'(g(s))$$
이고 절댓값을 취하면 $|(X \circ g)'(s)| = |g'(s)X'(g(s))| = 1$ 이므로 $X \circ g$는 호의 길이로 매개화되었음을 안다.

생각해보기

$(\cos t, \sin t)$는 호의 길이로 매개화되었는가?