로피탈의 정리와 $o(x^n)$

원점 근방에 정의된 함수 $f(x)$를 생각하자. 만약 $f(x)$가 n번 미분가능하고, 그 미분값들이 모두 0이라고 가정하자;

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0.$$

이 경우,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}$$

에 로피탈의 정리를 반복해서 적용할 수 있다. 그 결과로

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

을 얻는다. 결론적으로

$$f(x) = o(x^n)$$

이다.

생각해보기

$f^{(n)}(0) = 0$으로만은 불충분하다. 그 이유는 무엇인가?