좌표공간의 차원

정리

$\mathbb{R}^n$의 벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$가 일차독립이면, 이들은 기저를 이룬다.

보조정리

$k \geq 2$일 때, 벡터

$$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$$

가 일차독립이면 임의의 실수 r에 대해서

$$\mathbf{a}_1 + r\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$$

도 독립이다. 왜냐하면, 자명하지 않은 해

$$t_1(\mathbf{a}_1 + r\mathbf{a}_k) + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = 0$$

로부터 자명하지 않은 해

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + (t_k + t_1 r)\mathbf{a}_k = 0$$

를 얻기 때문이다.

잠시
$$\{(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n \colon b_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$
의 원소 $(b_1, \cdots, b_{n-1}, 0)$을
$$(b_1, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$
으로 보아
$$\mathbb{R}^{n-1} = \{(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n \colon b_n = 0\}$$
이라고 여기자.

증명

귀납법을 사용하자. $n = 1$일 때는 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$이면 직선을 생성하므로 문제없다. $n \geq 2$라고 하자. 각 벡터의 성분을

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \cdots, a_{1n}), \mathbf{a}_2 = (a_{21}, \cdots, a_{2n}), \cdots, \mathbf{a}_n = (a_{n1}, \cdots, a_{nn})$$

이라고 하자. $a_{1n} = \cdots a_{nn} = 0$이면 $\mathbf{R}^{n-1}$에 대한 귀납가정에 의해 $\mathbf{a}_n$을 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$의 일차결합으로 표시할 수 있다. 이는 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$이 일차독립이라는 것에 모순이다. 따라서 $a_{in} \neq 0$인 i가 존재하고, $i = n$이라고 가정해도 무방하다. 보조정리에 의해서 $a_{1n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$이라고 가정해도 무방하다. 귀납가정에 의해서 $\mathbb{R}^{n-1}$은 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$으로 생성되고, 특히

$$(a_{n1}, \cdots, a_{n-1,n}, 0)$$

은 이들의 일차결합이다. 따라서

$$(0, \cdots, 0, a_{nn})$$

도 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$의 일차결합이다. $a_{nn} \neq 0$이므로 $\mathbb{R}^n$은 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$으로 생성된다.

생각해보기

보조정리의 증명에서 사용한 다음 사실을 확인해보자. $(t_1, \cdots, t_k)$가

$$t_1(\mathbf{a}_1 + r\mathbf{a}_k) + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = 0$$

의 자명하지 않은 해이면 $(t_1, \cdots, t_{k-1}, t_k + t_1 r)$도

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{t}_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + (t_k + t_1 r)\mathbf{a}_k = 0$$

의 자명하지 않은 해이다.

사실, 그 역도 성립한다.