벡터곱과 내적

정리

임의의 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$에 대해서, 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$$

증명

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$로 표현하자. 좌우변의 각각의 성분을 계산해보자. 좌변의 첫 번째 성분의 계산은 다음과 같다.

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ -\det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

우변의 첫 번째 성분은

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\, b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\, c_1$$

이다. 양쪽을 전개하여 비교해보면 같다. 나머지 성분들에 대한 계산도 비슷하다.

생각해보기

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = \det\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right)$$

로부터 다음 항등식을 유도해보자.

$$|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 + |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2$$