

유리수로부터 실수 만들기

# 실수란 무엇인가?

## 데데킨트의 답

유리수로 이루어진 집합  $A$ 가

1.  $A$ 는 공집합이 아니다
2. 유리수  $a, b$ 에 대해서,  $a \in A$ 이고  $b < a$ 이면  $b \in A$ 이다.
3. 모든  $a \in A$ 에 대해서  $a' \in A$ 가 존재하여  $a < a'$ 이다.

를 만족하면  $A$ 를 '실수'라고 부르자.

임의의 유리수  $r$ 에 대해서,  $r$ 미만의 유리수를 모은 집합은 데데킨트의 조건을 만족시키므로 '실수'라고 여길 수 있다. 더 나아가,

$$'x^2 < 2 \text{ 또는 } x < 0'$$

를 만족하는 모든 유리수를 모으면 어떤 '실수'를 얻게 되고, 그것을 ' $\sqrt{2}$ '라고 부를 수 있다.

실수를 정의하기 위해서 데데킨트의 방법 대신 '감소하는 유리수 구간'을 사용하거나, 유리수열을 사용할 수 있다. 어떻게 하더라도 '실수의 성질을 갖는 것은 실수 뿐'이라는 것을 증명할 수 있다. 따라서, 실수가 무엇인지에 대해서 크게 고민할 필요는 없다.

중요한 것은 실수가 완비성을 가진다는 것이다.