일차독립

정의

주어진 k개의 벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차종속이 아니면, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$를 일차독립이라고 한다.

정리

일차독립인 벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$*가 주어지면*

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = 0$$

의 해는 자명한 해 $(t_1, \cdots, t_k) = (0, \cdots, 0)$*뿐이다. 역으로, 위 방정식의 해가 자명한 해 뿐이면* $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$*는 일차독립이다.*

증명

자명하지 않은 해 $(t_1, \cdots, t_k)$가 있다면 적당한 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$에 대해서 $t_i \neq 0$이다.

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = 0$$

를 정리하면

$$\mathbf{a}_i = \frac{-1}{t_i}\left(t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + t_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + t_k\mathbf{a}_k\right)$$

가 되어 일차종속이 된다.

한편, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ 일차종속이라면 적당한 $i \in \{1, \cdots, k\}$에 대해서

$$\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + t_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$$

이고 이로부터 자명하지 않은 해

$$(t_1, \cdots, t_{i-1}, -1, t_{i+1}, \cdots, t_k)$$

를 얻는다.

생각해보기

$(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$이 일차독립인 것을 보이자.