벡터곱과 결합법칙

벡터곱은 결합법칙을 만족하지 않는다. 일반적으로,

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

이다. 대신,

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

이 성립한다.

증명

$$M(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

는 교대다중선형사상임을 알 수 있다. 예를 들면,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &\mapsto \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \\
\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) &\mapsto \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \\
\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &\mapsto \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 한편,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_3$$

일 때, $M(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$이다. 교대다중선형사상의 분류에 의해서 원하던 결과를 얻는다.

생각해보기

다시 쓰면, 곱함수의 미분과 비슷하게 생긴

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$$

가 된다.