평균값 정리

정리 (평균값 정리)

연속 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$이 구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

가 되는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

평균값 정리를 최대최소 정리와 임계점 정리로부터 얻어낼 수 있다.

정리 (최대최소 정리)

연속 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*는 최댓값과 최솟값을 갖는다.*

정리 (임계점 정리)

연속 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*가 주어졌다.* $c \in (a, b)$*가 최솟값 또는 최댓값일 때, 만약* $f(x)$*가* $x = c$*에서 미분가능하면* $f'(c) = 0$*이다.*

평균값정리의 증명

$(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식 $l(x)$를 생각하자.

$$m(x) = (f(x) - l(x))^2$$

은 연속이므로 최댓값을 갖는다. 만약 최댓값이 0이라면 $f(x) = l(x)$이므로 평균값정리가 성립한다. 최댓값이 양수인 경우 그것을 $m(c)$라고 하면 $c \in (a, b)$이다. 임계점정리에 의해서 $m'(c) = 0$이다. 풀어쓰면

$$2(f'(c) - l'(c))m(c) = 0$$

인데 $2m(c) \neq 0$을 나누어 원하던

$$f'(c) = l'(c)$$

를 얻는다.

생각해보기

다음 정리를 얻기 위해서 평균값 정리를 적용해보자.

정리

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$이 미분가능하고 모든 $c \in (a, b)$에 대해서 $f'(c) > 0$이라고 가정하자. 이때,

$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

가 성립한다.