

곡선의 길이

정의

일급 곡선

$$X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

의 길이는

$$\int_a^b |X'(t)| dt$$

이다.

정리

곡선의 길이는 곡선을 재매개화하더라도 변하지 않는다.

증명

$g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ 로 재매개화한 곡선 $Y(t) = X \circ g(t)$ 를 생각하자.
편의상 $g'(t) > 0$ 으로 가정하자. $Y(t)$ 의 길이는

$$\int_c^d |(X \circ g)'| dt$$

이다. 합성함수의 미분법을 사용하면

$$(X \circ g)'(t) = g'(t)X'(g(t))$$

이고, $g'(t) > 0$ 과 치환 $s = g(t)$ 을 사용하면

$$\int_c^d |(X \circ g)'| dt = \int_c^d |X'(g(t))|g'(t) dt = \int_a^b |X'(s)| ds$$

를 얻는다. 결과로 X 의 길이를 얻는다.

생각해보기

$g'(t) > 0$ 인 경우만 살폈다. 이런 경우를 동향 재매개화라고 한다.
 $g'(t) < 0$ 인 경우도 증명해보자. 이런 종류의 재매개화를 역향 재매개화라고 한다.