# 선형사상은 행렬

선형사상

$$L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

을 생각하자.

다시 말해, $L$은 조건

$$\begin{gathered} L(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = L(\boldsymbol{v}) + L(\boldsymbol{w}) \\ L(c\boldsymbol{v}) = cL(\boldsymbol{v}) \end{gathered}$$

를 모든 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$에 대해서 만족한다.

적당한 행렬 $A$에 대해서 $L = L_A$가 성립한다.

## 증명

표준단위벡터 $\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$을 생각하고

$$L(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{v}_i$$

로 정의하자. 행렬

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

에 대해서

$$L = L_A$$

가 성립한다. 다음 장에서 이유를 살펴보자.

우선 $L(\boldsymbol{e}_i) = L_A(\boldsymbol{e}_i)$가 성립한다. 한편, 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$는 표준단위벡터의 선형결합이다. 다시 말해, 적당한 실수 $a_1, \cdots, a_n$이 있어

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$$

이다. 선형사상의 정의를 사용하면

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{v}) &= L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i L(\boldsymbol{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i L_A(\boldsymbol{e}_i) \\ &= L_A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i\right) = L_A(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

를 얻는다.

# 생각해보기

평면에서 반시계방향으로 $\frac{\pi}{2}$회전하는 변환은 선형변환이다. 이를 행렬로 표현해보자.