적분 판정법

적분 판정법

감소하는 연속함수

$$f: [1, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$$

가 주어졌다고 하자. 여기서 감소는 $x \leq y$이면 $f(x) \leq f(y)$임을 뜻한다.

정리

급수 $\sum f(n)$이 수렴할 필요충분조건은

$$\int_1^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$$

가 수렴하는 것이다.

증명: 양의 값을 갖는 감소함수의 적분과 리만 합이 만족하는 부등식을 이용하면 된다. 김홍종의 미적분학1+ 33쪽 그림 참조.

조화급수의 발산

조화급수

$$\sum \frac{1}{n}$$

의 발산은 적분 판정법으로 보일 수 있다.

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \log b$$

가 발산하는 것을 확인하는 것으로 충분하다.

오일러가 1740년경에 도입하고, 리만이 이름을 지은 제타함수는 $s > 1$일 때,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

으로 정의한다. 우변의 급수가 수렴한다는 것은 적분 판정법으로 보일 수 있다.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1}$$

을 보이는 것으로 충분하다.