

치환의 부호

n -치환 σ 의 전도의 수를 $N(\sigma)$ 로 나타내자.

정리

σ 가 n -치환이고 τ 가 호환일 때, $N(\sigma)$ 과 $N(\sigma\tau)$ 는 홀짝이 서로 다르다.

식으로 표현하면

$$N(\sigma) + N(\sigma\tau) \equiv 1 \pmod{2}$$

또는

$$2 \nmid N(\sigma) + N(\sigma\tau)$$

이다.

증명

$i < j$ 일 때, $(i(j+1)) = (j(j+1)) \cdot (ij) \cdot (j(j+1))$ 이므로 $\tau = (i(i+1))$ 꼴일 때 증명하면 충분하다.

$\tau = (i(i+1))$ 일 때에는 $N(\sigma) = N(\tau\sigma) \pm 1$ 임을 직접 보이자. σ 의 형태가

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & u-1 & u & u+1 & \cdots & v & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(u-1) & i & \sigma(u+1) & \cdots & i+1 & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

이면 $\tau\sigma$ 는

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & u-1 & u & u+1 & \cdots & v & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(u-1) & i+1 & \sigma(u+1) & \cdots & i & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

이어서 $N(\sigma) = N(\tau\sigma) - 1$ 이다.

증명

σ 의 형태가

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & u-1 & u & u+1 & \cdots & v & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(u-1) & i+1 & \sigma(u+1) & \cdots & i & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

이면 $\tau\sigma$ 는

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & u-1 & u & u+1 & \cdots & v & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(u-1) & i & \sigma(u+1) & \cdots & i+1 & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

이어서 $N(\sigma) = N(\tau\sigma) + 10$ 이다.

정의

짝치환은 짝수개의 호환의 곱으로 나타내어지는 치환을 말한다. 홀치환은 홀수개의 호환의 곱으로 나타내어지는 치환을 말한다. 주어진 치환은 짝치환이거나 홀치환이고, 동시에 둘 다일 수는 없다.

치환의 부호는

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{는 짝치환} \\ -1 & \sigma \text{는 홀치환} \end{cases}$$

으로 정의한다.

생각해보기

다음 치환의 부호를 구해보자.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$