행렬의 수렴

정의

$m \times n$행렬 A의 절댓값은

$$|A| = |\mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}A)|^{\frac{1}{2}}$$

으로 정의한다.

수열 $a_{ij}(k)$로 구성된 행렬 $A(k) = (a_{ij}(k))$를 생각하자. 또다른 행렬 B를 생각하자. 다음 정리가 성립한다.

정리

$|A(k) - B|$가 0으로 수렴할 필요충분조건은 각 (i, j)에 대해서 $a_{ij}(k)$가 b_{ij}로 수렴하는 것이다.

증명

정의로부터

$$|A(k) - B|^2 = \sum_{i,j} (a_{ij}(k) - b_{ij})^2$$

이다. 좌변이 0으로 수렴할 필요충분조건은 각 (i, j)에 대해서 $(a_{ij}(k) - b_{ij})^2$이 0으로 수렴하는 것이다.

생각해보기

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

일 때 A^k의 극한을 구해보자. $\sum_{k=1}^{\infty} A^k$도 구해보자.