무리함수와 근삿값

무리함수

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

를 생각해보자.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

이다. 원점 근방에서 $|f''(x)| \leq 1$이므로 테일러 정리를 적용하면

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x^2)$$

이다.

모든 n에 대해서 적당한 상수 c_n이 있어 $|f^{(n)}(x)| \leq c_n$이고, 근사다항식의 차수를 늘릴 수 있다. 예를 들면

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

로부터

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

을 얻는다.

조금 더 정교한 근삿값을 얻을 수도 있다. 테일러 정리에 의해서 적당한 $x_* \in [0, x]$에 대해서

$$R_1(x) = -\frac{1}{8}(1 + x_*)^{-\frac{3}{2}} x^2$$

인데 $x > 0$이면

$$(1 + x_*)^{-\frac{3}{2}} \leq 1$$

이므로

$$|R_1(x)| \leq \frac{x^2}{8}$$

이고, 다시 쓰면

$$\left|\sqrt{1 + x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right| \leq \frac{x^2}{8}$$

을 얻는다.

생각해보기

교과서(미적분학1+, 김홍종, 연습문제 3장4절 참조): 테일러 정리를 이용해서

$$\int_0^{0.3} e^{-x^2}\,dx$$

의 근사값을 오차 범위 10^{-3} 이하가 되도록 구해보자.