

극좌표에서의 가속도와 각운동량

평면에서 극좌표로 나타내어진 곡선

$$(r(t), \theta(t))$$

는 직교좌표로 나타내면

$$X(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

이다.

속도와 가속도

$$X(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

를 미분하면

$$\begin{aligned} X'(t) &= r'(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \\ &\quad + r(t)\theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \end{aligned}$$

이고, 한 번 더 미분하면

$$\begin{aligned} X'' &= (r'' - r(\theta')^2)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \\ &\quad + (2r'\theta' + r\theta'')(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \end{aligned}$$

이다.

각운동량

평면을 3차원의 일부로 생각하여 각운동량 $X(t) \times X'(t)$ 을 구해보자.
 $X(t) \times X'(t)$ 를 쓰면

$$r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0)$$

\times

$$r'(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0) + r(t)\theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t), 0)$$

이다. 평행한 벡터의 벡터곱은 영벡터이므로 그 결과는

$$(0, 0, r^2\theta')$$

이 된다. 따라서, 각운동량이 보존된다는 것은 $r^2\theta'$ 이 상수라는 것과 동치이다.

생각해보기

원점을 지나는 평면 속의 곡선이 가지는 원점에 대한 각운동량은 항상 평면에 수직이다.