벡터곱과 행렬식

벡터곱은 행렬식으로 표현될 수 있다.

정리

임의의 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$*에 대해서 다음이 성립한다.*

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

증명

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

좌우변을 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$에 관한 함수로 보면, 각각이 선형함수이다. 두 선형함수를 비교하기 위해서는 기저를 선택하여 확인하면 충분하다. 표준단위기저를 선택하자. $i = 1, 2, 3$에 대해서

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{e}_i = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_i)$$

를 확인하면 된다.

사실, 벡터곱은 그 성질

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

로부터 결정된다. 왜냐하면, 어떤 미지의 벡터 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$가 임의의 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$에 대해서 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$을 만족하면 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$이기 때문이다.

다시 말해서 어떤 연산 $*$에 대해서

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

이면 $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$이다.

생각해보기

벡터곱을 행렬식으로 표현하면 다음 항등식들을 쉽게 얻는다.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \\
\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \\
(t\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} &= t\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (t\boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$