거듭제곱급수의 수렴

거듭제곱급수 $f(x) = \sum a_n x^n$을 생각하자. x_0, x_1은 어떤 주어진 실수이다.

정리

$f(x)$가 $x = x_0$에서 수렴하고 $x = x_1$일 때 발산한다고 가정하자.

1. *$|c| < |x_0|$이면 $x = c$에서 $f(x)$는 절대수렴한다.*
2. *$|c| > |x_1|$이면 $x = c$에서 $f(x)$는 발산한다.*

절대수렴 증명

$\sum a_n x_0^n$이 수렴하고 $|c| < |x_0|$일 때 $\sum |a_n c^n|$이 수렴함을 보이자.
일반항 판정법에 의해서

$$\sum a_n x_0^n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

이므로 $N > 0$이 존재하여 $n > N$이면 $|a_n x_0^n| < 1$이다. $n > N$이면

$$|a_n c^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{c}{x_0}\right|^n < \left|\frac{c}{x_0}\right|^n$$

이다.

$|c| < |x_0|$이므로 $\sum \left|\frac{c}{x_0}\right|^n$은 수렴하고, 비교판정법에 의해서

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n c^n| < \infty$$

를 얻는다.

생각해보기

앞 증명에서

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n c^n|$$

이 수렴함을 보였다. 사실 첫 항의 위치는 중요하지 않아서,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n c^n|$$

이 수렴한다고 말해도 되는데, 그 이유가 무엇인가?

앞 증명은 수렴 부분만 다루었다. 발산 부분도 증명해보자.