각과 내적

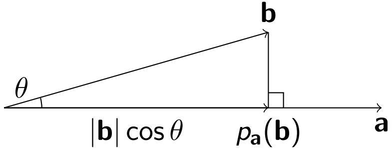
정리

영이 아닌 두 벡터 **a**, **b***가 이루는 각을* θ*라고 하면,*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

이다.

그림을 그려서 증명해보자. 편의상 예각인 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



정사영 공식에 의해서

$$p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$$

이다. 한편, 위의 직각삼각형으로부터 $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$는 크기가 $|\mathbf{b}|\cos\theta$이면서 $\mathbf{a}$와 나란하므로

$$p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cos\theta \times \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

를 얻는다. 둘을 합쳐 정리하면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$를 얻는다. 둔각의 경우도 비슷하게 증명된다.

영이 아닌 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$와 이들이 이루는 각 θ를 생각하자. 내적의 부호와 각의 모양은 다음 관계가 있다.

- θ는 예각 $\Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$
- θ는 직각 $\Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
- θ는 둔각 $\Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$

생각해보기

n-공간에서 단위벡터들은 서로 수직이다.