행렬식은 교대다중선형사상

n차 정사각행렬 A를 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$으로 나타내자. 여기서 각 $\boldsymbol{v}_i$는 n-벡터이다.

행렬식은 다중선형함수

i를 하나 고정하고, $\det A$를 $\boldsymbol{v}_i$에 대한 함수로 보자. $\boldsymbol{v}_i$를 제외한 나머지 벡터들은 고정된 벡터들 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$이라고 하자. 함수

$$\boldsymbol{v} \longmapsto \det\left(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right)$$

는 선형사상이다. 치환의 부호를 이용한 행렬식의 정의로부터 알 수 있다.

함수

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \det\colon \left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\right) &\longmapsto \det\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\right) \end{aligned}$$

는 각 $\boldsymbol{v}_i$에 대해서 선형이다. 이러한 함수를 다중선형함수라고 한다.

행렬식은 교대다중선형함수

다중선형함수

$$L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

이 모든 쌍 (i, j), $i < j$에 대해서

$$\begin{aligned} & L(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1} \cdots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{j+1} \cdots \boldsymbol{v}_n) \\ = & -L(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{i+1} \cdots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{j+1} \cdots \boldsymbol{v}_n) \end{aligned}$$

을 만족하면 L을 교대다중선형사상이라고 부른다.

행렬식은 교대다중선형사상이다. 치환의 부호를 이용한 행렬식의 정의로부터 알 수 있다.

생각해보기

교대다중선형사상 L의 경우 어떤 $i < j$에 대해서 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$이면

$$L(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = 0$$

이다.