

Lecture Note 14



Fall, 2021

Syllabus

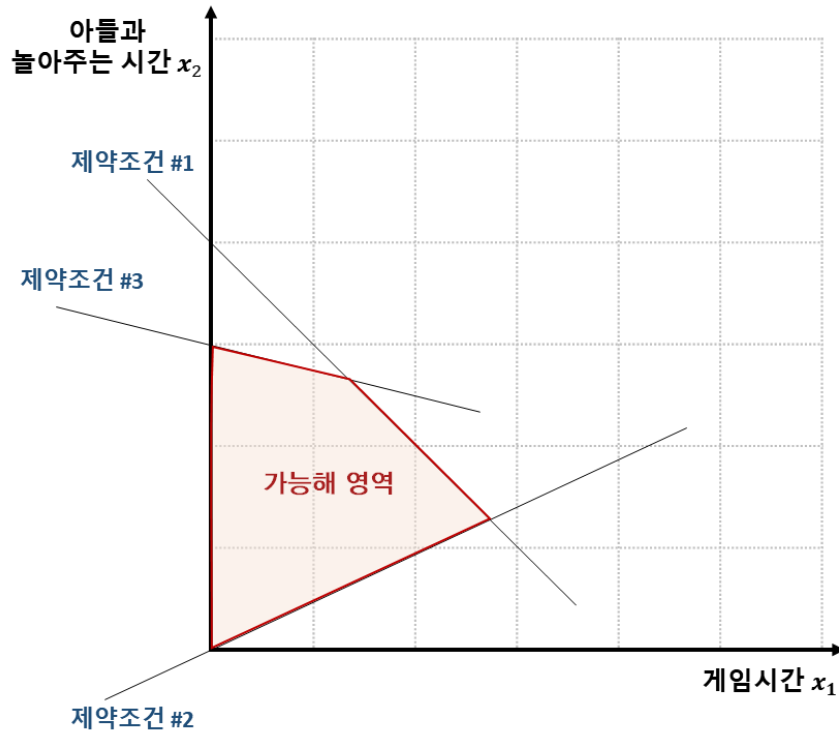
| Week | Date | Topic | Note |
|------|---------------------|------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1 | 9/6(월) | R Basic - R 기초 문법 학습 | |
| 2 | 9/13(월) | R Basic – Data Manipulation I | 과제#1 |
| 3 | 9/20(월) (추석) | <추석> (보충영상) R Basic - Data Manipulation II | |
| 4 | 9/27(월) | Descriptive Analytics I - 데이터 요약하기/상관관계/차이검증 | 과제#2 |
| 5 | 10/4(월) (대체공휴일) | <대체공휴일> (보충영상) Descriptive Analytics II - 데이터 시각화 | 과제#2 |
| 6 | 10/11(월) (대체공휴일) | <대체공휴일> (보충영상) Supplementary Topic I - 외부 데이터 수집 (정적 콘텐츠 수집) | 과제#4 과제#3 |
| 7 | 10/18(월) | Predictive Analytics I – Linear regression | |
| 8 | 10/25(월) | Predictive Analytics II – Logistic Regression | 시험 대체 수업 |
| 9 | 11/1(월) | Predictive Analytics III – Clustering & Latent Class Analysis | 과제#4 |
| 10 | 11/8(월) | Predictive Analytics IV – Tree-based Model and Bagging (Random Forest) | |
| 11 | 11/15(월) | Predictive Analytics V – Association Rules | |
| 12 | 11/22(월) | Prescriptive Analytics I – Linear Programming | 과제#5 |
| 13 | 11/29(월) | Prescriptive Analytics II – Data Envelopment Analysis (DEA) | |
| 14 | 12/6(월) | Prescriptive Analytics III – Integer Programming | 과제#6 |
| 15 | 12/13(월) | Prescriptive Analytics IV – Simulation | Quiz |
| 16 | 12/20(월) | Final Presentation | |

Lecture 14-1

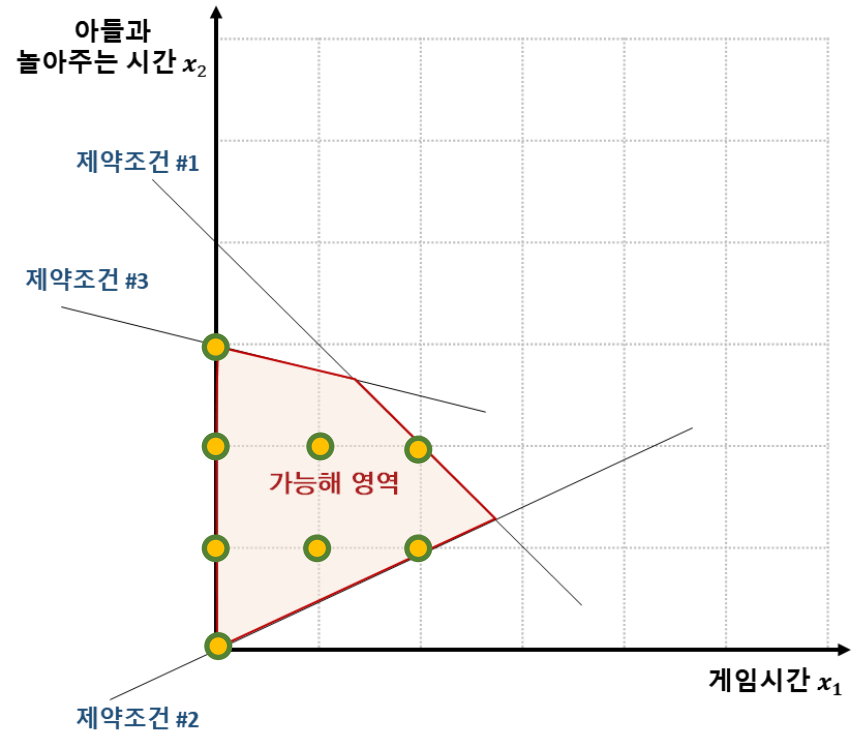
정수계획법의 이해

정수제약의 의미

<선형계획모형의 가능해영역>



<정수계획모형의 가능해영역>



정수계획모형의 가능해가 적어 더 간단할 것이라 생각할 수 있지만, 정수계획문제는 해를 찾는 효율적인 방법이 없어 모두 열거해 비교하기 때문에 계산부담이 큼.

정수계획문제를 조합최적화(Combinational optimization) 문제라 부르기도 함

경희 호텔문제를 다시 생각해보자.

< Capacity Allocation을 통한 수익 극대화 Problem >

- 경희 호텔 Revenue Manager는 Room mix를 각 여행사에 적절하게 제공해 최적의 수익을 낼 수 있는 방안을 모색하고 있다.
- 현재 거래 중인 판매 채널은 "A여행사", "B여행사", "C여행사"이며, 계약 조건에 따라 한번 Room mix를 제공할 때 각 여행사마다 배분되는 객실 수가 상이하다.
※가령, 우측 표와 같이 A 여행사에 한번 Room을 제공할 때는 Deluxe-double 5개, Deluxe-Twin 3개, Executive 2개를 제공해야 한다.
- 또한, 계약 조건에 따라 각 여행사에 판매하는 평균 객실가격도 상이하다.
- 현재 Deluxe-Double 50개, Deluxe-Twin 35개, Executive 13개 가 있고, 여행사와의 계약 체결조건은 우측의 표와 같다.
- 판매하는 시기가 성수기라 어떤 여행사든 판매하면 전 객실은 판매가 된다고 가정하자.



| 구분 | A여행사 | B여행사 | C여행사 | 가용 객실 수 |
|-----------------|------|------|------|---------|
| Deluxe-Double | 5 | 7 | 4 | 50 |
| Deluxe-Twin | 3 | 1 | 4 | 35 |
| Executive | 2 | 3 | 2 | 13 |
| 평균 판매가 (단위:십만원) | 3 | 4 | 5 | - |

경희호텔 Revenue manger는 수익을 극대화하기 위해 각 여행사에 몇 건의 Room mix를 배정해야 할까?

경희 호텔문제를 다시 생각해보자.

의사결정, 목적함수, 제약 조건 순으로 주어진 문제를 모형화 해보자.



1 의사결정 변수는 무엇인가?

- ✓ A여행사 Room mix 판매 수 : x_1
- ✓ B여행사 Room mix 판매 수 : x_2
- ✓ C여행사 Room mix 판매 수 : x_3

2 목적함수는 무엇인가?

- ✓ 판매 수익을 극대화 하는 것

$$\text{Max Revenue} = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

3 제약조건은 무엇인가?

- ✓ 각 객실의 가용 객실 수 (자원 제약)

$$\text{Subject to } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 50$$

$$3x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 35$$

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 13$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

| 구분 | A여행사 | B여행사 | C여행사 | 가용 객실 수 |
|--------------------|------|------|------|------------|
| Deluxe -Double | 5 | 7 | 4 | 50 |
| Deluxe -Twin | 3 | 1 | 4 | 35 |
| Executive | 2 | 3 | 2 | 13 |
| 평균 판매가 (단위:십만원) | 3 | 4 | 5 | - |

경희 호텔문제를 다시 생각해보자.

```
44 {r}
45 constr_coeff <- matrix(c(5,7,4,
46                        3,1,4,
47                        1,3,2),
48                        ncol=3, byrow=TRUE)
49
50 constr_dir <- c("<=", "<=", "<=")
51 constr_rhs <- c(50, 35, 13)
52
53
54 ### 3) Solve the problem : 해 찾기
55
56 {r}
57 KH_hotel_sol <- lp("max",
58                  obj_fun,
59                  constr_coeff,
60                  constr_dir,
61                  constr_rhs,
62                  compute.sens = TRUE)
63
64
65 ### 4) 최적해 확인
66
67 A 여행사에 8개, B 여행사에 0개, C 여행사에 2.5개 팔면 된다.
68 {r}
69 KH_hotel_sol$solution
70
71 [1] 8.0 0.0 2.5
```

최적 Room mix를 판매했을 때
얻을 수 있는 최적 수익 =
36.5(십만원)

A 여행사에 8개
B 여행사에 0개
C 여행사에 2.5개
팔았을 때,
최적 수익을 달성할 수
있음

***"C여행사에 Room Mix를 2.5개 판다는
최적해를 실제 의사결정 상황에
적용할 수 있을까?"***

위와 같이, 선형계획 문제에서 최적해가 정수(Integer)로 나와야 할 때,
정수 제약조건을 추가한 정수계획법을 적용해야 함

정수계획법(Integer Programming) 특징

- 1 정수계획문제도 선형계획문제로 놓고 풀어도 답이 나온다. 그렇다면 나온 답을 반올림해서 정수로 만들어서 최적해로 간주해도 되지 않는가?

Answer : **No**

- ✓ 선형계획법의 최적해를 반올림해서 구한 값과 실제 정수계획법으로 구한 값을 비교해보면 알 수 있다. 정수계획법에서는 가능해 영역이 달라지므로 최적해는 전혀 다른 곳에서 형성된다.

- 2 정수계획법은 선형계획법에서 “의사결정변수는 정수값을 취한다” 라는 제약만 추가되었다. 이게 어떤 의미인가?

- ✓ 앞서 「선형계획법의 기하학적 이해」부분에서 선형계획 문제의 가능해 영역은 면적으로 나타낼 수 있었다. 하지만, 정수계획문제는 실수값이 아니라 정수 즉, 이산형 값을 취하므로 가능해 영역이 줄어든다.
- ✓ 따라서, 정수계획문제의 최적해로 달성한 목표값(극대화된 수익 혹은 최소화된 비용)은 선형계획법의 목표값보다 낮은 수준으로 형성될 수 밖에 없다.

“모든 의사결정 문제에 제약조건이 늘어나면 가능해 영역이 좁아지고, 목표값은 더 작아진다. 따라서, 더 높은 수익을 달성하거나 더 많은 비용을 줄이기 위해서는 제약을 완화시켜야 한다”

정수계획법(Integer Programming) 문제의 종류

순수 정수계획 모형 (Pure IP model)

- 의사결정 변수 모두 정수 값을 갖도록 제약을 주는 모형으로 의사결정 변수의 선형성 즉, 1차식 형태는 그대로 유지됨

가부(0 또는 1) 정수계획 모형 (0-1 IP model)

- 의사결정 변수가 0 또는 1의 값만을 갖는 모형으로 0은 부(否), 1은 가(可)를 나타냄
- 가령, 특정 서비스 혹은 제품의 제공 여부 혹은 투자 여부에 대한 의사결정을 내릴 때, "0이면 실시, 1이면 실시하지 않음"을 나타내기 위해 가부 정수계획모형으로 모형화 할 수 있음

혼합 정수계획 모형 (Mixed IP model)

- 의사결정 변수 중 일부는 선형계획법과 같이 연속형을 유지하고, 일부 의사결정 변수에 대해서만 정수 제약 조건을 추가하는 모형

순수 정수계획모형 예시

< 경희자동차 이윤극대화 문제 >

경희자동차는 1톤 트럭, 2.5톤 트럭, 5톤 트럭 세 종류의 차량을 생산하는 업체이다. 각 차량은 조립공정과 마무리 공정을 거쳐야 한다. 조립공정에서 세 종류의 차량만을 각각 조립한다면 각각 하루 30대의 트럭을 처리할 수 있다. 마무리 공정의 경우, 1톤 트럭만 처리한다면 40대, 2.5톤 트럭만 처리한다면 30대, 5톤 트럭만 처리한다면 20대 처리할 수 있다. 1톤 트럭 한 대당 50만원의 이윤을 가져오고, 2.5톤 트럭은 한대당 60만원, 5톤 트럭은 한대당 65만원의 이윤을 가져온다. 팬데믹 이후 소화물 운송 서비스가 확대됨에 따라 1톤 트럭 수요가 늘어 1톤 트럭은 하루 적어도 15대는 생산해야 될 것으로 예상된다. 경희자동차의 이윤 극대화를 위한 일일 생산계획을 수립해보자.



1 의사결정 변수

- ✓ 1톤 트럭 생산대수 : x_1
- ✓ 2.5톤 트럭 생산대수 : x_2
- ✓ 5톤 트럭 생산대수 : x_3

2 목적함수 : 이윤극대화

$$\text{Max Revenue} = 50x_1 + 60x_2 + 65x_3$$

3 제약조건

$$\text{Subject to } x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 120$$

$$x_1 + \quad \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 : \text{integer(정수)}$$

가부 정수계획모형 예시

< 투자 포트폴리오 최적화 문제 >

경희주식회사는 순현재가치(NPV)를 최대로 하는 포트폴리오를 구성하고자 한다. 현재 6개의 투자대안이 있는데, 투자대안 별 NPV와 경희주식회사의 매년 자금조달능력은 표와 같다. 투자사업 결정에서 부분투자, 중복투자는 불가능하다고 하자. 이때 NPV를 최대로 하는 투자계획을 수립해보자.

| 투자대안 | NPV | 1차 연도 | 2차 연도 | 3차 연도 | 4차 연도 |
|-----------------|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 20 | 15 | 20 | 18 | 19 |
| 2 | 18 | 10 | 19 | 15 | 12 |
| 3 | 22 | 16 | 27 | 15 | 10 |
| 4 | 30 | 12 | 15 | 15 | 18 |
| 5 | 33 | 20 | 22 | 21 | 23 |
| 6 | 35 | 21 | 22 | 20 | 19 |
| 자금조달 능력(억 원) | | 80 | 90 | 100 | 100 |

1 의사결정 변수

✓ 각 투자대안에 투자 여부: $X_i, i = 1, 2, \dots, 6$

2 목적함수 : NPV 극대화

$$\begin{aligned} \text{Max NPV} = & 20X_1 + 18X_2 + 22X_3 \\ & + 30X_4 + 33X_5 + 35X_6 \end{aligned}$$

3 제약조건은 무엇인가?

Subject to

$$\begin{aligned} 15X_1 + 10X_2 + 15X_3 + 12X_4 + 20X_5 + 21X_6 &\leq 80 \\ 20X_1 + 19X_2 + 27X_3 + 15X_4 + 22X_5 + 22X_6 &\leq 90 \\ 18X_1 + 15X_2 + 15X_3 + 15X_4 + 21X_5 + 20X_6 &\leq 100 \\ 19X_1 + 12X_2 + 10X_3 + 18X_4 + 23X_5 + 19X_6 &\leq 100 \\ X_i: \text{Binary } (0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

혼합 정수계획모형 예시

< 시설 건설 및 공급량 최적화 문제 >

경희시는 도시가스의 원활한 공급계획을 위해 새롭게 도시가스 공급시설을 건설하고자 한다. 도시가스 공급시설 신설을 위해 후보지역 3개소와 수요지역 4개소 간 단위당 서비스 비용(억 원)과 수요지역별 수요량을 조사한 결과, 아래 표와 같았다. 도시가스 공급시설의 공급가능용량과 후보지역의 건설비 또한 아래 표와 같은 상황에서 수요를 충족하면서 및 비용을 최소화하는 가장 경제적인 대안을 찾아보자.

| | | 수요지역(j) | | | | 시설 용량 | 건설비 (고정비) (억 원) |
|---------------------|---|---------|----|-----|-----|----------|-----------------------|
| | | X | Y | Z | W | | |
| 시설건설 후보지역 (i) | A | 4 | 5 | 6 | 8 | 200 | 500 |
| | B | 4 | 7 | 9 | 2 | 300 | 100 |
| | C | 5 | 8 | 7 | 6 | 500 | 800 |
| 시설수요 | | 100 | 60 | 130 | 180 | - | - |

1 의사결정 변수

- ✓ 후보지역에 시설 건설 여부: $Y_i, i = 1, 2, 3$
- ✓ 후보지역에서 각 수요지역 공급량 :
 $X_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$

2 목적함수 : 비용 최소화

$$\begin{aligned} \text{Min Cost} \\ = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 c_{ij} * X_{ij} + 500 * Y_1 + 100 * Y_2 + 800 * Y_3 \end{aligned}$$

3 제약조건은 무엇인가?

Subject to

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} &\leq 200 * Y_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} &\leq 300 * Y_2 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} &\leq 500 * Y_3 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 100 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 60 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 130 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 180 \end{aligned}$$

$$X_{ij} : \text{양수}, Y_i : (0, 1)$$