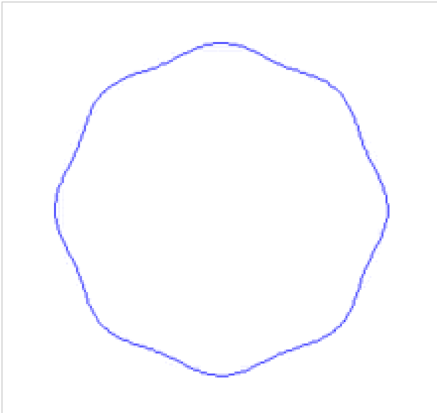
Eigenfrequenz

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Dieser Artikel wurde den Mitarbeitern der Redaktion Physik zur Qualitätssicherung aufgetragen. Wenn Du Dich mit dem Thema auskennst, bist Du herzlich eingeladen, Dich an der Prüfung und möglichen Verbesserung des Artikels zu beteiligen. Der Meinungsaustausch darüber findet derzeit **nicht** auf der Artikeldiskussionsseite, sondern auf der **Qualitätssicherungs-Seite** der Physik statt.

Eine **Eigenfrequenz** eines schwingfähigen Systems ist eine Frequenz, mit der das System nach einmaliger Anregung als Eigenform schwingen kann.

Wenn einem solchen System von außen Schwingungen aufgezwungen werden, deren Frequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt, reagiert das System bei schwacher Dämpfung mit besonders großen Amplituden, was man als Resonanz bezeichnet.


Für eine kreisförmige stehende Welle muss ein ganzzahliges Verhältnis Umfang/Wellenlänge vorliegen.

Inhaltsverzeichnis

Freiheitsgrade

Man schreibt einem System so viele Freiheitsgrade zu, wie es voneinander *unabhängige* Bewegungsmöglichkeiten besitzt.

> „Man wird dann sehen, dass solche Systeme immer eine Zahl an Eigenfrequenzen besitzen, die der Zahl der Freiheitsgrade entspricht[1]“
> – HORST IRRETIER

Ein Freiheitsgrad beim Federpendel

Wie die Eigenfrequenz eines Systems mit nur einem Freiheitsgrad bestimmt wird, kann am Beispiel eines ungedämpften Federpendels erklärt werden. Eine Kugel mit der Masse m hängt an einer Schraubenfeder mit der Federkonstante *c*. Diese ist definiert als Kraft pro Auslenkung, mit der die Feder reagiert. Nach dem Zweiten Newton'schen Axiom ist die Beschleunigung der Summe aller Kräfte, die auf die Kugel wirken proportional. Gewicht und Federkraft gleichen sich in der Ruhelage aus, können also ignoriert werden. Übrig bleibt eine Abweichung von der statischen Federkraft als einzige Kraft, die zu berücksichtigen ist. Diese Kraft zieht die Kugel nach oben, wenn diese sich unterhalb der Ruhelage befindet und drückt die Kugel nach unten, wenn diese sich oberhalb der Ruhelage befindet. Also ist Masse * Beschleunigung entgegengesetzt gleich dem c-fachen der Auslenkung z(t), die mit der Zeit t schwankt:

$$m\ddot{z} = -cz(t) \Rightarrow m\ddot{z} + cz(t) = 0$$

Diese lineare homogene Differentialgleichung lässt sich mit folgendem Ansatz lösen:

$$z(t) = a\,\sin(\omega_0 t)$$

Wenn man den Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt, ergibt sich

$$(c - \omega_0^2 m)\sin(\omega_0 t) = 0$$

was nur dann für alle Zeiten t gilt, wenn der Koeffizient der Sinusfunktion für sich alleine null ist.

$$c - \omega_0^2 m = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

ω_0 wird auch Kennkreisfrequenz genannt. Sie ist 2π mal so groß wie die ungedämpfte Eigenfrequenz f_0: $\omega_0 = 2\pi\, f_0$.

Wenn man die Feder an ihrem oberen Ende mit dem Weg $z_0\,\sin(\omega t)$ zwangsbewegt, entspricht die Federkraft nicht mehr der gesamten Auslenkung der Kugel, sondern nur noch der Differenz zur Auslenkung am gegenüberliegenden Ende der Feder. Die allererste Gleichung geht damit über in

$$m\ddot{z} = -c(z(t) - z_0\sin(\omega t)) \Rightarrow m\ddot{z} + cz(t) = cz_0\sin(\omega t)$$

Die homogene Lösung entspricht dem oben beschriebenen Problem und stellt eine freie Schwingung in der Eigenfrequenz dar, deren Amplitude und Phasenlage von den Anfangsbedingungen abhängt. Ihr überlagert sich als Partikulärlösung die erzwungene Schwingung

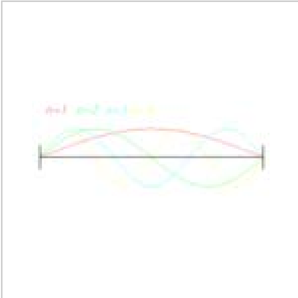
$$z(t) = \frac{c/m}{c/m - \omega^2}\, z_0\,\sin(\omega t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\, z_0\,\sin(\omega t) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}\, z_0\,\sin(\omega t)$$

Ohne Dämpfung wird die Amplitude im Resonanzfall $\omega = \omega_0$ unendlich groß. Mit Dämpfung, die in der Realität immer vorhanden ist, erreicht die Schwingungsamplitude bei der Resonanzfrequenz ein Maximum. Bei geringer Dämpfung ist die Eigenfrequenz nur geringfügig niedriger als die ungedämpfte Eigenfrequenz (Kennfrequenz).

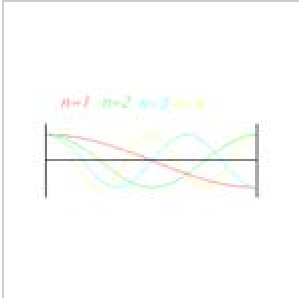
Ein Freiheitsgrad bei einer schwingenden Luftsäule oder einer elektrischen Welle

Dem „festen“ Ende einer Welle entspricht das offene Ende einer Luftsäule in einem Rohr, weil dort der Luftdruck konstant ist. Umgekehrt entspricht das „freie“ Ende einer Welle dem druckfesten Abschluss einer schwingenden Luftsäule.

Schwingungsformen bei einem festen und einem freien Ende



Schwingungsformen bei zwei festen Enden



Schwingungsformen bei zwei freien Enden

Mehrere Freiheitsgrade

Systeme mit mehreren Freiheitsgraden werden in Analogie dazu mit einer Matrizengleichung beschrieben:

$$[M]\frac{\partial^2\{X\}}{\partial t^2} + [B]\frac{\partial\{X\}}{\partial t} + [C]\{X\} = \{F\}.$$

Darin ist [M] die Massenmatrix, [B] die Dämpfungsmatrix, [C] die Steifigkeitsmatrix und {F} der Lastvektor. Eine Untersuchung der freien Schwingungen des ungedämpften Systems führt zum allgemeinen Eigenwertproblem

$$([C] - \omega^2[M])\{X\} = 0$$

Dies kann in ein spezielles Eigenwertproblem umgerechnet werden, wie unter "Eigenwertproblem" beschrieben, um die Eigenfrequenzen des Systems zu berechnen.

Unendliche Freiheitsgrade

Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden weisen unendlich viele Eigenfrequenzen auf, beispielsweise ein beidseitig gelenkig gelagerter Biegebalken mit der Biegesteifigkeit EI und der Masse pro Längeneinheit m, dessen Durchbiegung $w(x,t)$ sich abhängig von Ort x und Zeit t aus folgender Differentialgleichung ergibt:

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

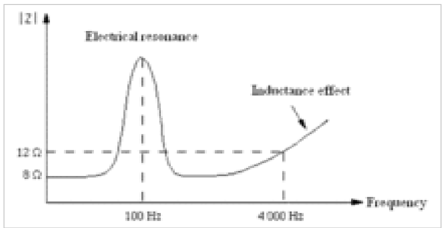
Die beidseitig gelenkige Lagerung wird durch ein ganzes Vielfaches an Halbwellen erfüllt, und der entsprechende Ansatz

$$w(x,t) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin(\omega t)$$

ergibt die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_j = \sqrt{\frac{EI}{m}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4} \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Beispiele



Resonanz eines Lautsprechers

- Eine Glocke, die angeschlagen wird, schwingt anschließend mit den Eigenfrequenzen. Durch Dämpfung klingt die Schwingung über die Zeit ab. Dabei werden höhere Frequenzen schneller abgedämpft als tiefere.
- Eine Stimmgabel ist so konstruiert, dass außer der tiefsten Eigenfrequenz (Kammerton a, 440 Hz) kaum weitere Eigenschwingungen angeregt werden.
- Auch in Gebäuden können Eigenfrequenzen angeregt werden. Wenn beim Nachbarn Musik durchaus sehr leise läuft, kann es vorkommen, dass die Bässe mit einer Eigenfrequenz des Gebäudes gleichfrequent sind, was sich als lautes Wummern äußert, ohne dass die Musik als solche hörbar wäre.
- Trommeln zeigen eine Vielfalt von möglichen Eigenfrequenzen.
- Membranen von Lautsprechern. Die Partialschwingungen führen zu einer unerwünschten Beeinträchtigung der Wiedergabequalität.

Einzelnachweise

1. Grundlagen der Schwingungstechnik. 2. Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, kontinuierliche Systeme, Studium Technik, Band 2 von Grundlagen der Schwingungstechnik, Horst Irretier, ISBN 3528039078, Seite 23 Online (http://books.google.de/books?id=ecUqEuGaILMC&lpg=PA90&dq=Eigenschwingung%20Freiheitsgrade&pg=PA23#v=onepage&q=dass%20solche%20Systeme%20immer%20eine%20Zahl%20an%20Eigenfrequenzen%20besitzen&f=false)

Literatur

- Dieter Meschede: *Gerthsen Physik.* 23. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2006, ISBN 978-3-540-25421-8
- Hans-Ulrich Harten: *Physik für Mediziner.* 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, ISBN 3-540-56759-3

Weblinks

- Eigenschwingungsformen von runden Platten (http://www.epsilon-lyrae.de/Doppelsterne/61Cygni/Eigenschwingungen.html)
- Interaktive Simulation von Wellen in einer runden Membran ("Trommel") (http://www.falstad.com/circosc/) (Java; englisch)

Von „http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Eigenfrequenz&oldid=116822668“
Kategorie: Schwingung

- Diese Seite wurde zuletzt am 3. April 2013 um 17:25 Uhr geändert.
- Abrufstatistik