Δοϊνάκης Μιχαήλ
AEM:9292
e-mail: doinakis@ece.auth.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

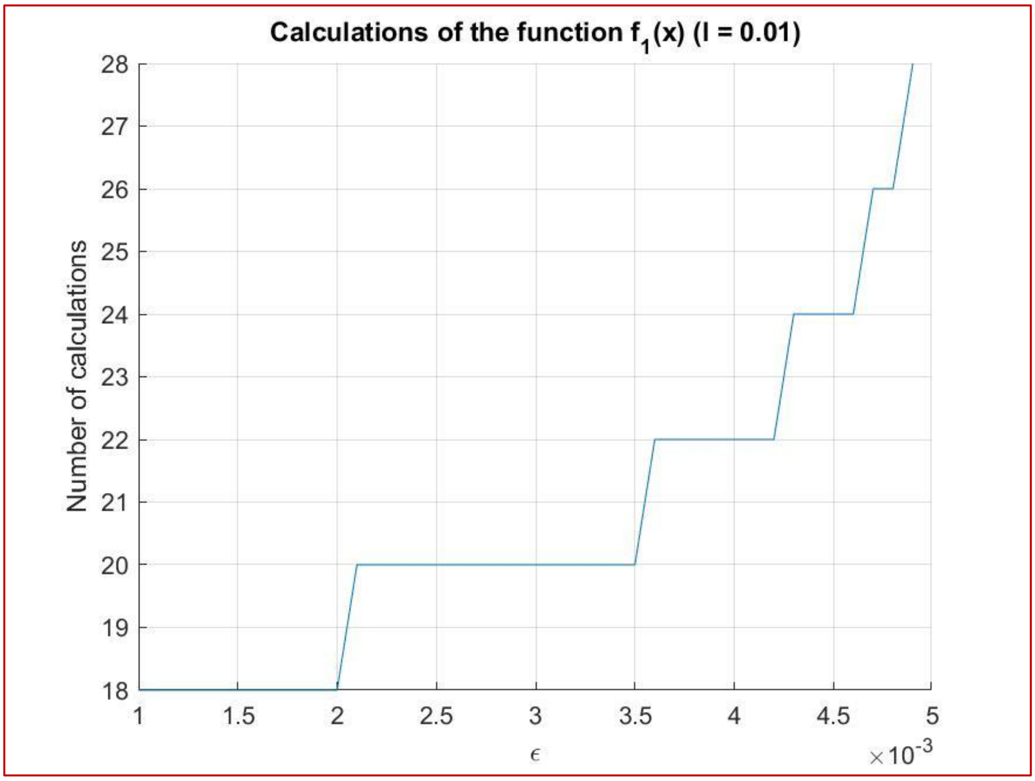
Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την ελαχιστοποίηση τριών συναρτήσεων, σε δοσμένο διάστημα $[\alpha,\beta]$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διχοτόμου, την μέθοδο του χρυσού τομέα, την μέθοδο Fibonacci και την μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγου. Το διάστημα ενδιαφέροντος είναι το [2,5] και οι συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση είναι οι εξής:

- $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$
- $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos^2(0.5x)$
- $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$

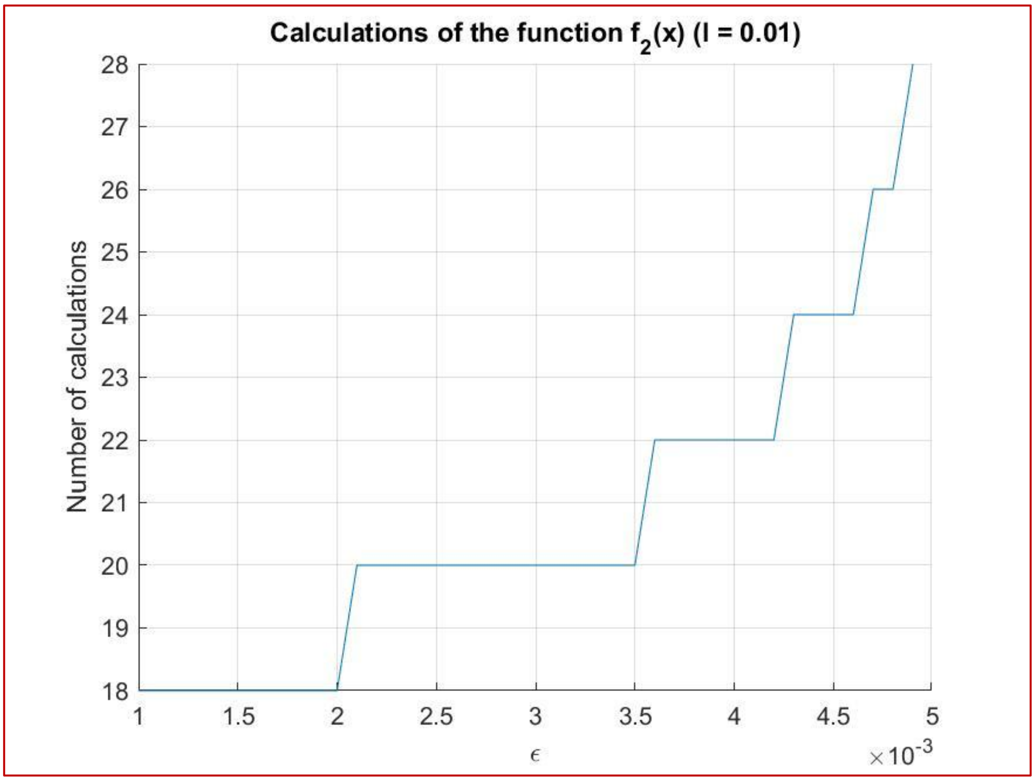
Έχουν υλοποιηθεί στο matlab 4 συναρτήσεις (bisection, golden_section, Fibonacci_method, bisection_with_derivatives) καθώς και 4 matlab scripts με ονομασίες Subject_1st, Subject_2nd, Subject_3rd, Subject_4th όπου το καθένα υλοποιεί τα θέματα που αναφέρονται στην εκφώνηση της εργασίας και που θα αναλυθούν παρακάτω.

ΘΕΜΑ 1: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ

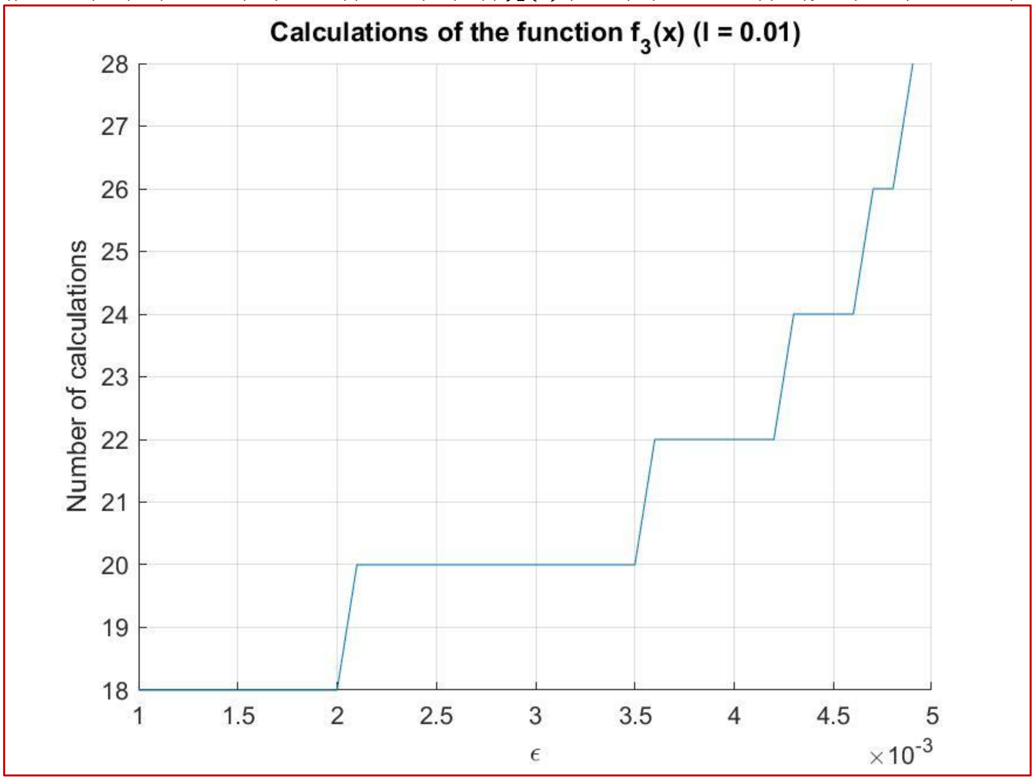
Στο πρώτο θέμα μελετήθηκε η συμπεριφορά του αλγορίθμου της διχοτόμου, και για τις τρεις συναρτήσεις, συναρτήσει των παραμέτρων l και ε. Αρχικά, διατηρώντας το $l = 0.01$, υπολογίστηκαν οι κλήσεις των συναρτήσεων $f_i(x)$, καθώς το ε παίρνει τιμές στο διάστημα $[0.001, 0.004]\ \mu\varepsilon\ \beta\acute{\eta}\mu\alpha = 0.0001$. Για το ε δηλαδή τέθηκε ο περιορισμός $\varepsilon < l/2$. Στα σχήματα που παρουσιάζονται παρακάτω φαίνεται η μεταβολή των υπολογισμών για κάθε συνάρτηση καθώς μεταβάλλεται το ε, ως μεταβολή των υπολογισμών θεωρείται ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης ανάλογα με τον αλγόριθμο που υλοποιείται. Πιο συγκεκριμένα, για τον αλγόριθμο της διχοτόμου οι κλήσεις της συνάρτησης είναι $n = 2 * k$, όπου k αριθμός των βημάτων μέχρι $b_k - a_k < l$.



Σχήμα 1. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_1(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό l.



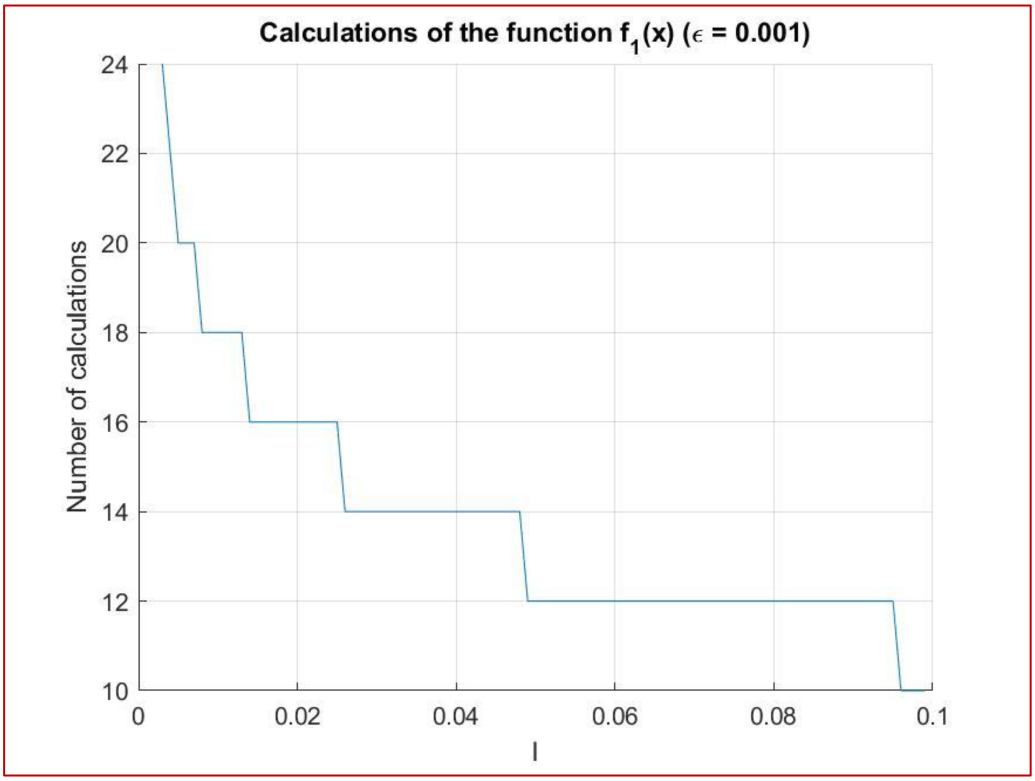
Σχήμα 2. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_2(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό l.



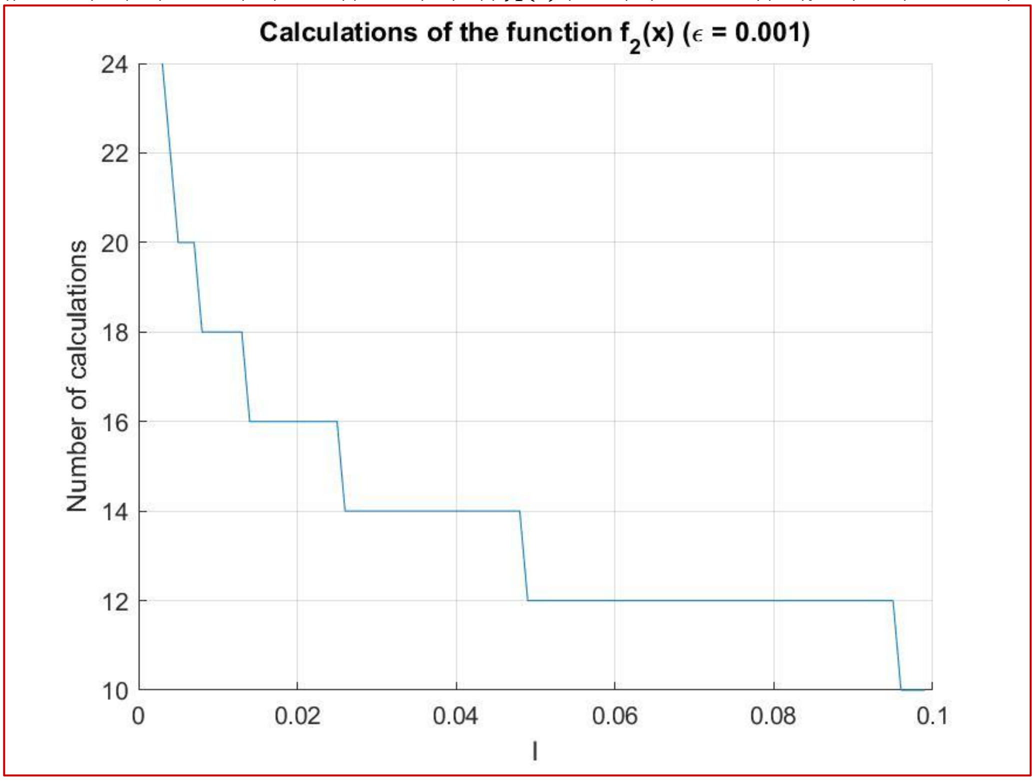
Σχήμα 3. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_3(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό l.

Καθώς, λοιπόν το ε αυξάνεται παρατηρείται ότι αυξάνεται και ο αριθμός των βημάτων του αλγορίθμου και κατά συνέπεια αυξάνονται και οι υπολογισμοί της εκάστοτε συνάρτησης. Επιπλέον, αν δεν ικανοποιείται η συνθήκη $\varepsilon < l/2$ τότε η διαφορά $b_k - a_k$ δεν θα γίνει ποτέ μικρότερη του l.

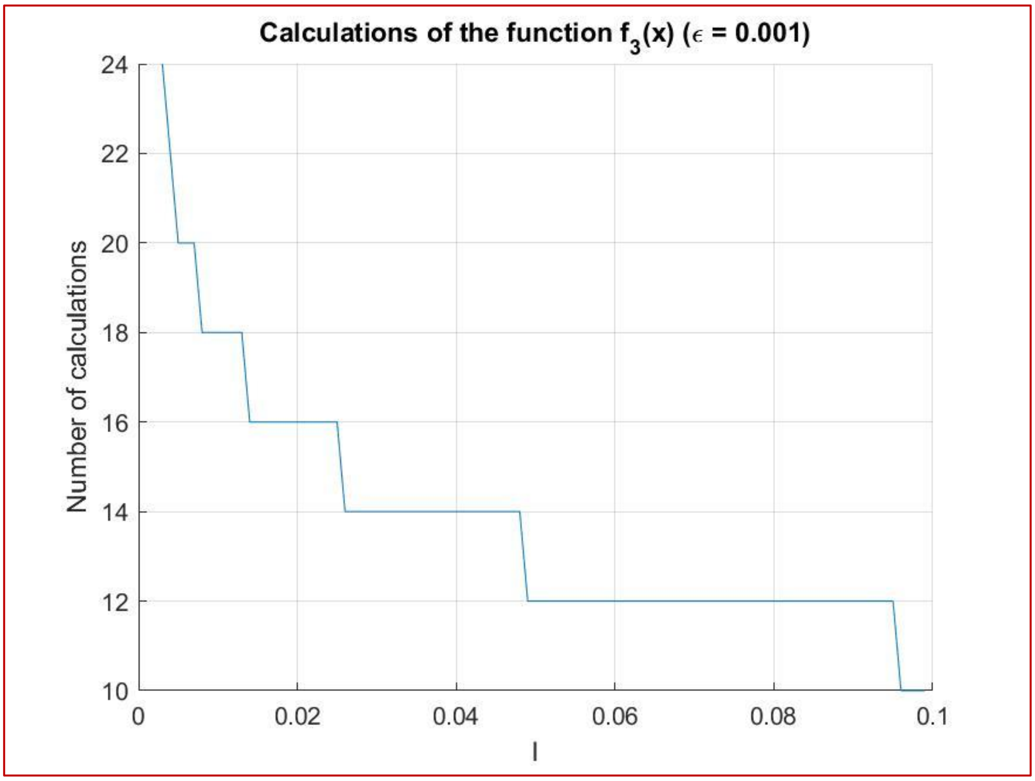
Παράλληλα, ενδιαφέρον έχουν και τα διαγράμματα της μεταβολής των υπολογισμών όταν το ε διατηρείται σταθερό ($\varepsilon = 0.001$) και το l μεταβάλλεται στο διάστημα $[0.001,0.1]$ $με\ βήμα = 0.001$. Η αύξηση του l, όπως φαίνεται και παρακάτω, έχει αντίθετη επίδραση από αυτή της αύξησης του ε, δηλαδή η αύξηση του οδηγεί σε μείωση του αριθμού των υπολογισμών για την εκάστοτε συνάρτηση.



Σχήμα 4. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_1(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό ε.

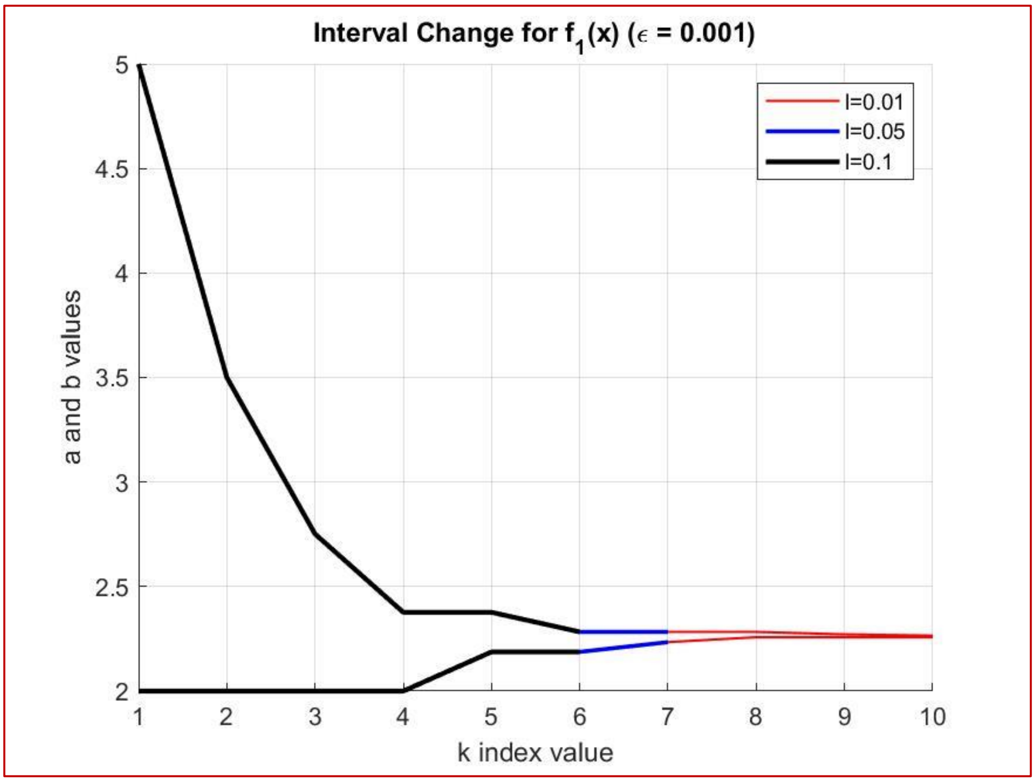


Σχήμα 5. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_2(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό ε.

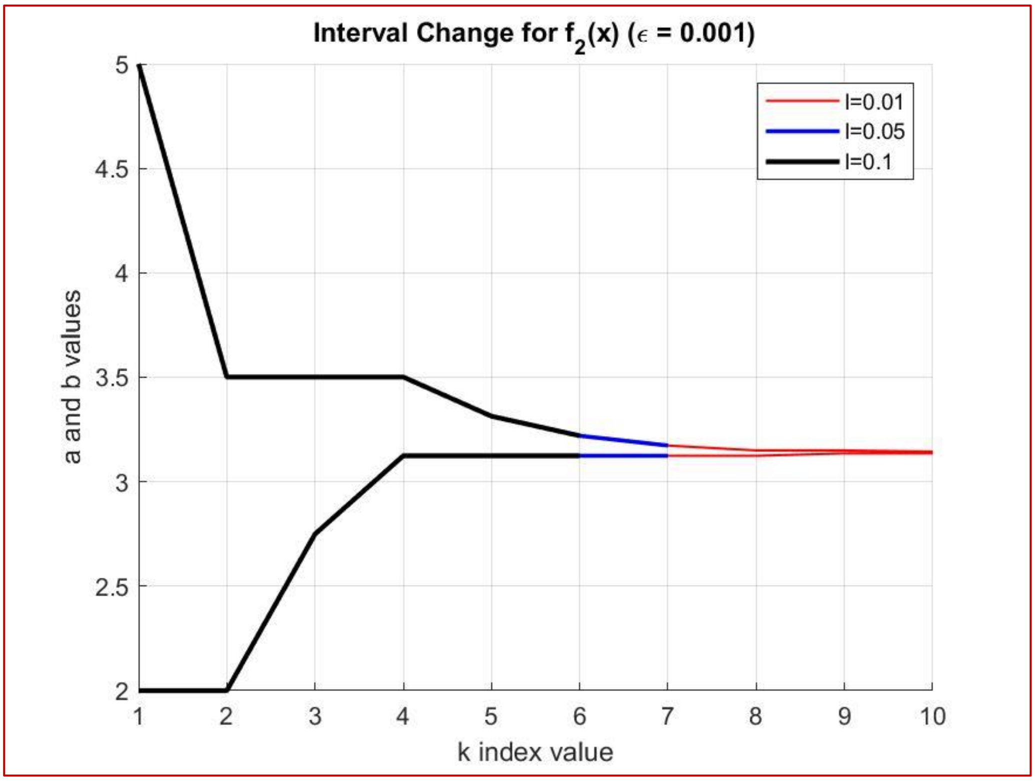


Σχήμα 6. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_3(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό ε.

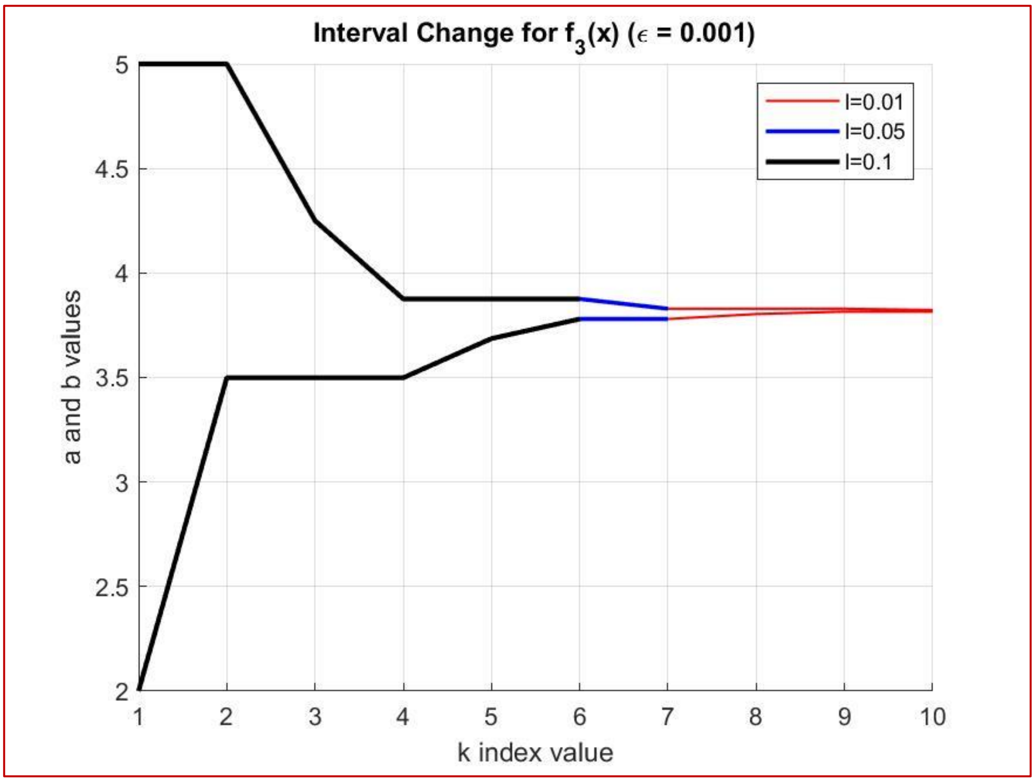
Σε συνέχεια των πειραμάτων του πρώτου θέματος, δημιουργήθηκαν, για κάθε συνάρτηση, οι γραφικές παραστάσεις των άκρων των διαστημάτων για 3 διακριτά $l = [0.01\ 0.05\ 0.1]$. Για κάθε l η γραμμή που βρίσκεται από «πάνω» δείχνει την μεταβολή του b συναρτήσει του κ ενώ η γραμμή που βρίσκεται από «κάτω» δείχνει τη μεταβολή του a. Γραμμές με το ίδιο χρώμα αναφέρονται στο ίδιο διάστημα για συγκεκριμένο l. Όσο πιο μικρό είναι το l, τόσο πιο μικρό είναι το τελικό διάστημα που καταλήγει ο αλγόριθμος, γεγονός που είναι αναμενόμενο αφού ο αλγόριθμος τερματίζει μόνο όταν το μήκος του διαστήματος $[a_k, b_k]$ γίνει μικρότερο από l. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι εκεί που φαίνεται μόνο μαύρο χρώμα, στη πραγματικότητα είναι και τα τρία l μαζί, εκεί που φαίνεται το μπλε είναι κόκκινο και μπλε, ενώ τέλος το κόκκινο είναι μόνο για το $l = 0.01$.



Σχήμα 7. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_1(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό ε.



Σχήμα 8. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_2(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό ε.

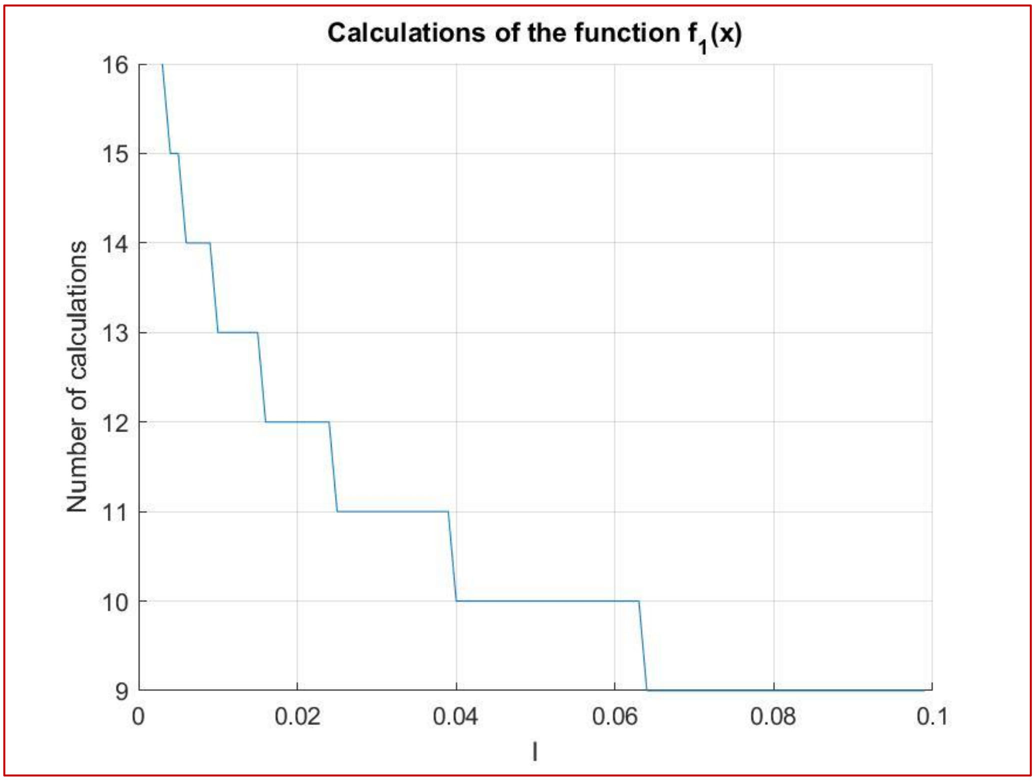


Σχήμα 9. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_3(x)$ για την μέθοδο της διχοτόμου για σταθερό ε.

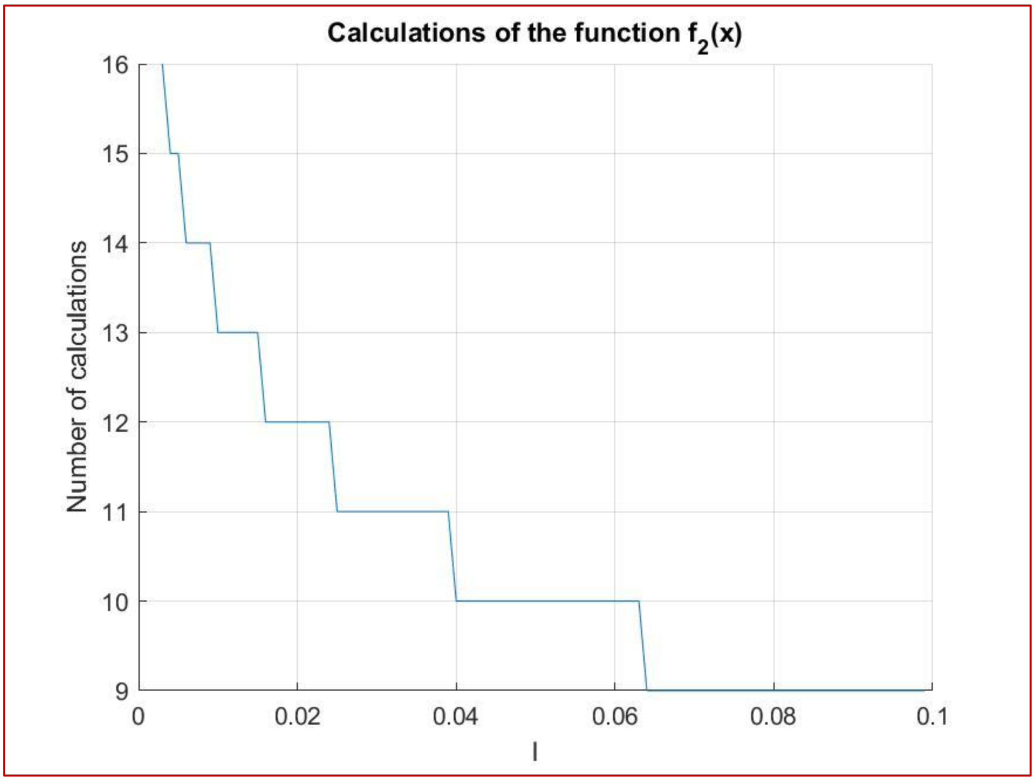
ΘΕΜΑ 2: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ ΧΡΥΣΟΥ ΤΟΜΕΑ

Σε συνέχεια των πειραμάτων, πραγματοποιήθηκε αντίστοιχη μελέτη και για τη μέθοδο του χρυσού τομέα. Όπως και πριν, και σε αυτή τη περίπτωση το l μεταβάλλεται στο διάστημα $[0.001{,}0.1]\, \mu\varepsilon\ \beta\acute{\eta}\mu\alpha\ = 0.001$ και υπολογίζεται η μεταβολή των υπολογισμών. Ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα, όπως φαίνεται και από τα παρακάτω διαγράμματα, απαιτεί μικρότερο αριθμό υπολογισμών, καθώς μόνο στην αρχή υπολογίζονται οι δύο τιμές της συνάρτησης για τα $\chi_{1\kappa}$ και $x_{2\kappa}$ και έπειτα για κάθε βήμα απαιτείται μονάχα ο υπολογισμός της συνάρτησης για ένα σημείο. Πιο συγκεκριμένα, για τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα οι κλήσεις της συνάρτησης είναι $n = k + 1$ όπου k αριθμός των βημάτων μέχρι $b_k - a_k \ < \ l$.

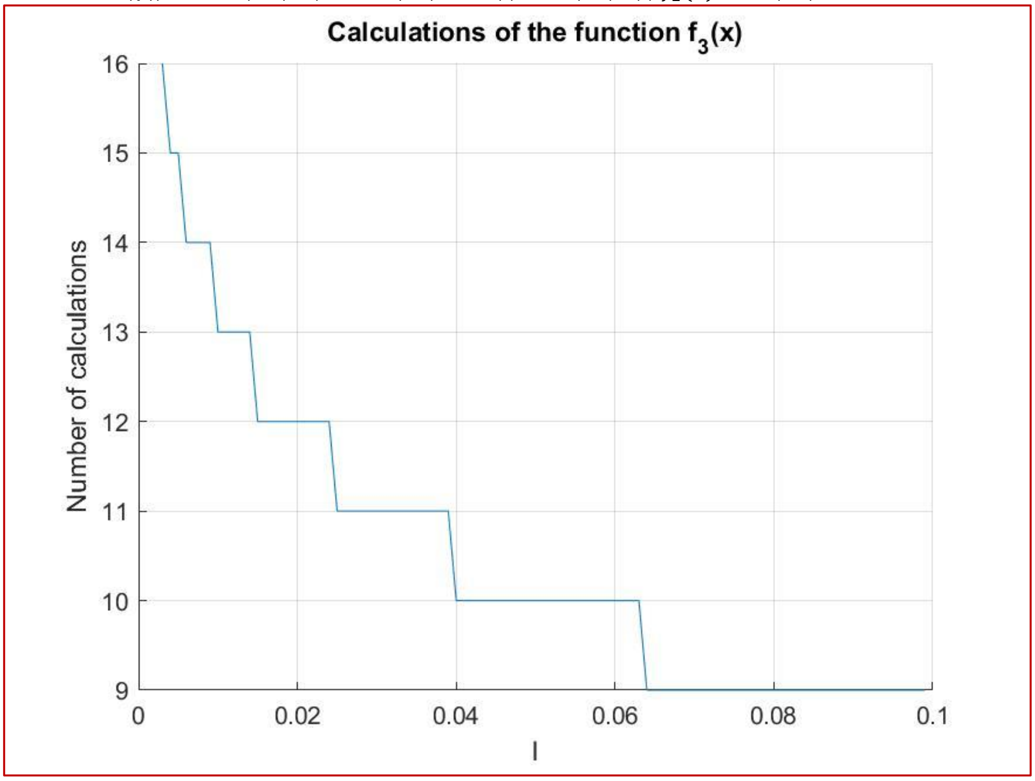
Παράλληλα με τα διαγράμματα της μεταβολής των υπολογισμών, παρουσιάζονται, όπως και στο θέμα 1, οι γραφικές παραστάσεις των όρων $(k, a_k)\ \kappa\alpha\iota\ (k, b_k)$ για τις ίδιες τιμές που αναφέρθηκαν και παραπάνω.



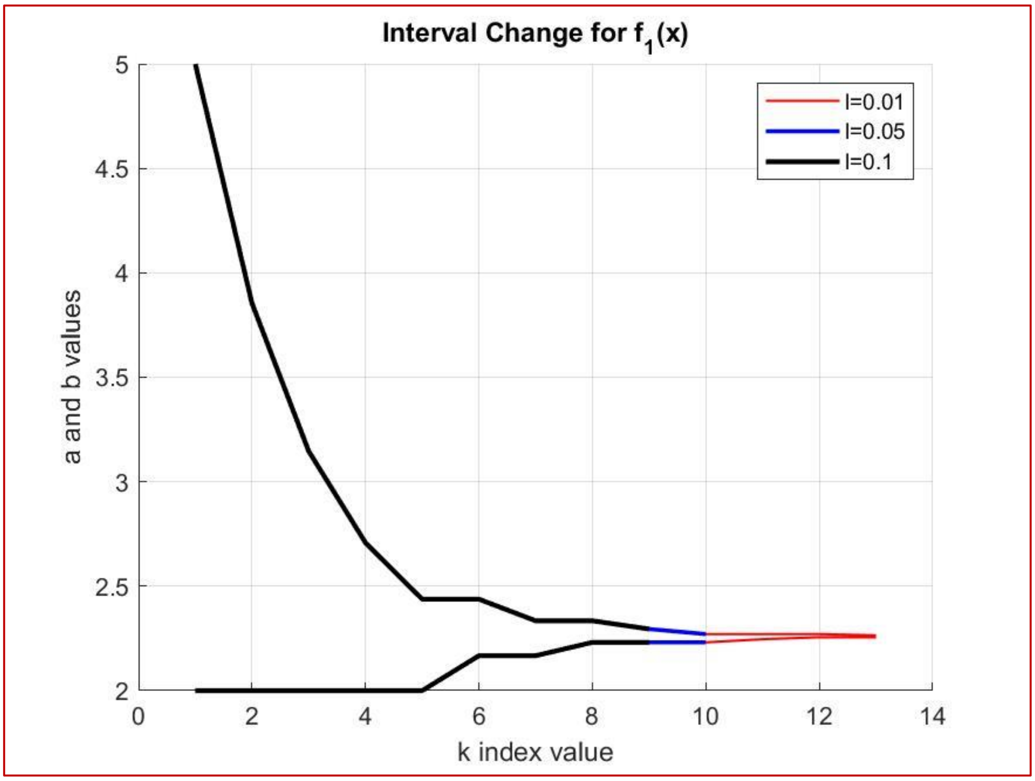
Σχήμα 10. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_1(x)$ συναρτήσει του l.



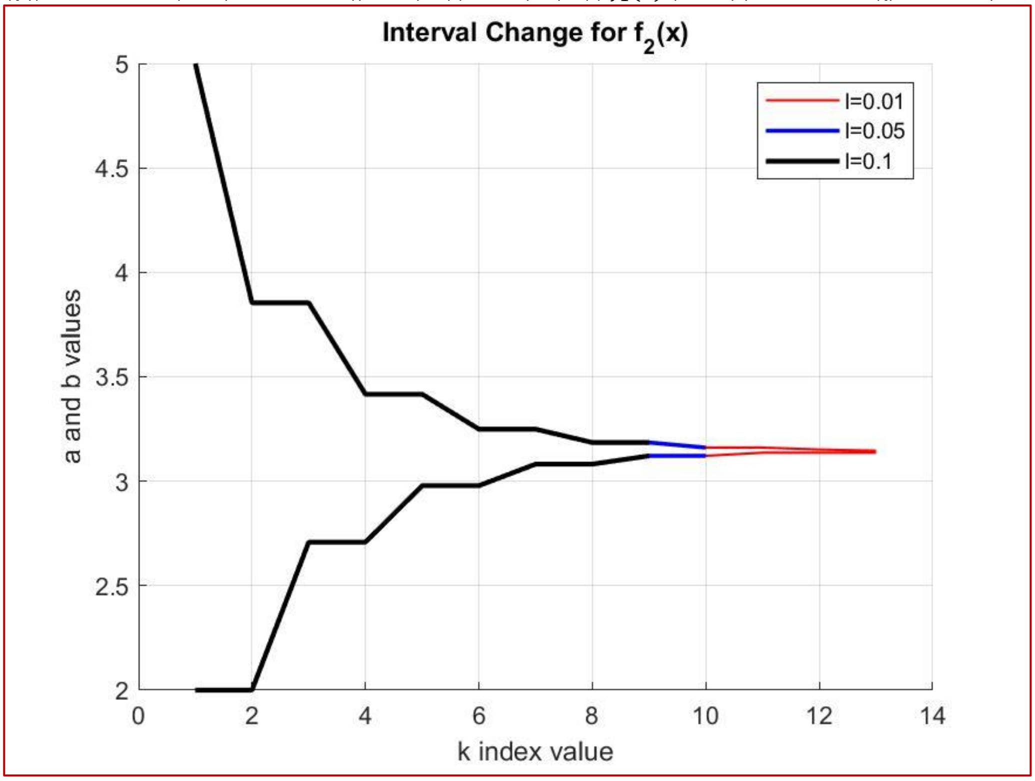
Σχήμα 11. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_2(x)$ συναρτήσει του l.



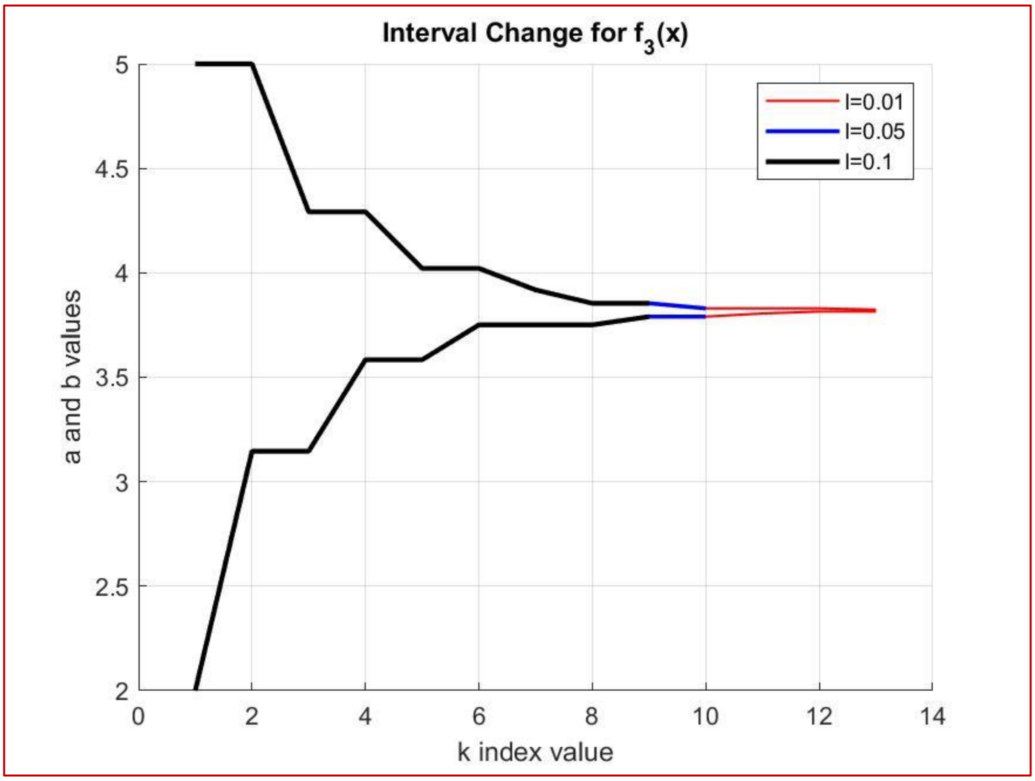
Σχήμα 12. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_3(x)$ συναρτήσει του l.



Σχήμα 13. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_1(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.



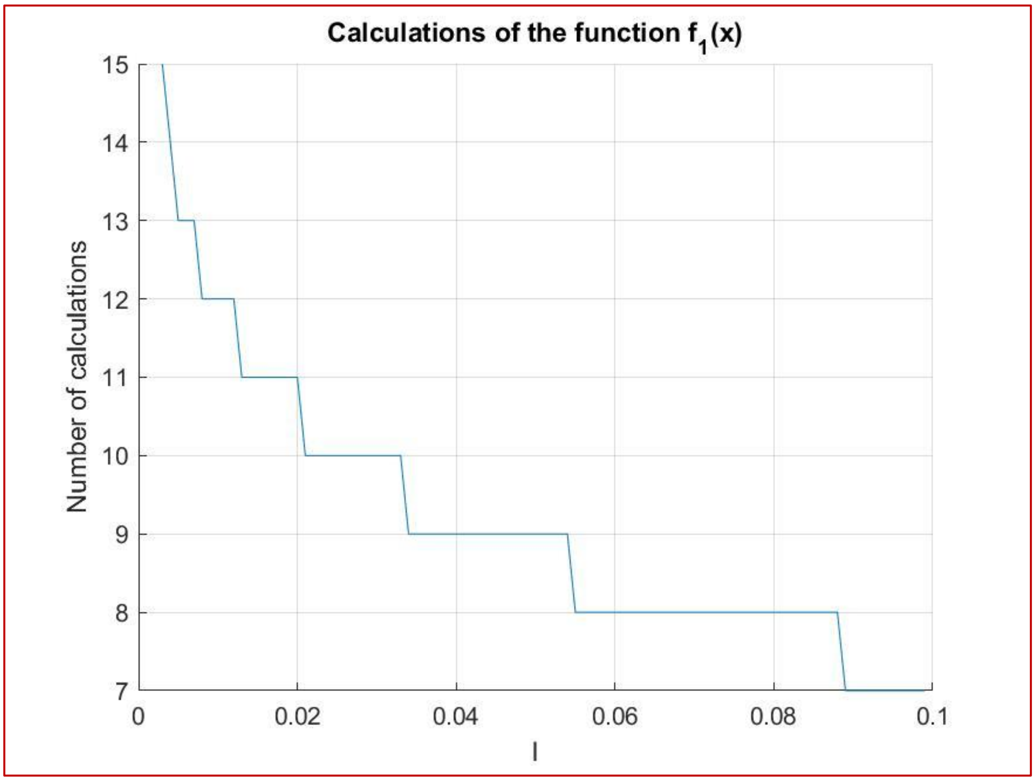
Σχήμα 14. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_2(x)$.



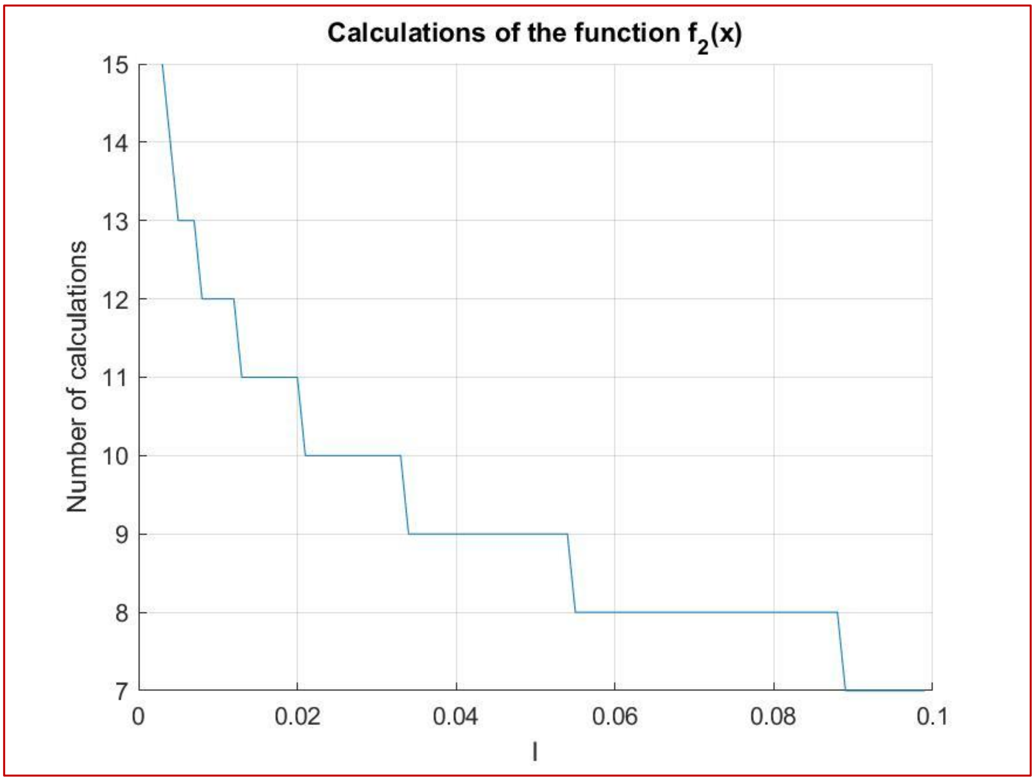
Σχήμα 15. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_3(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.

ΘΕΜΑ 3: ΜΕΘΟΔΟΣ FIBONACCI

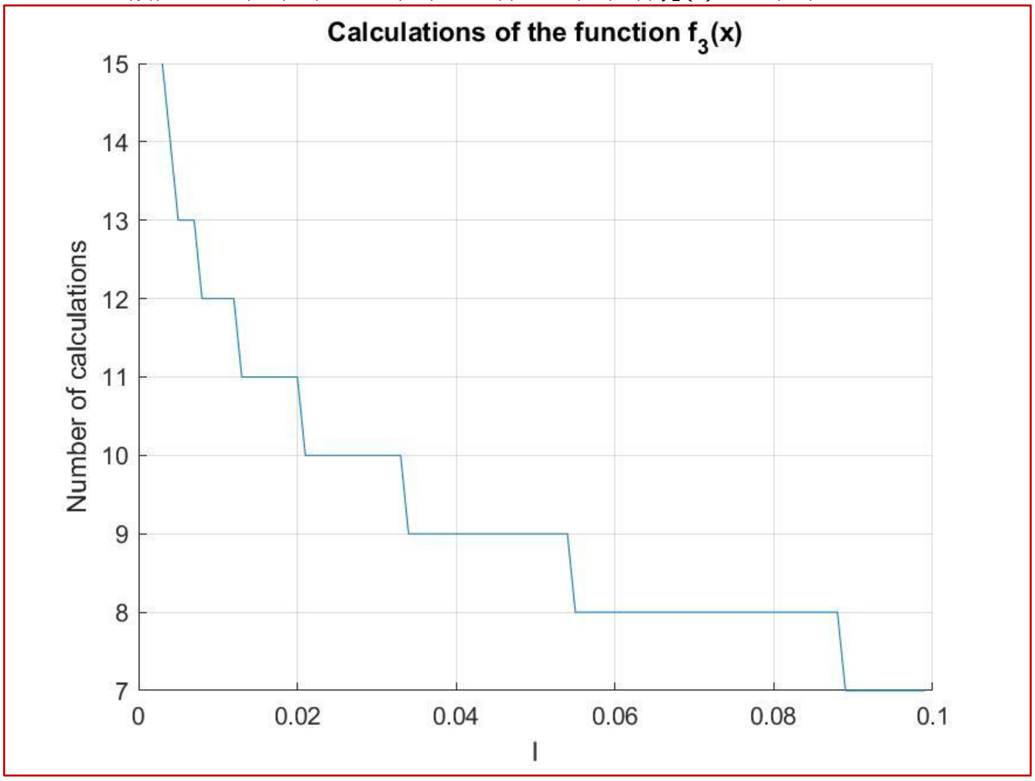
Το θέμα 3 αποτελεί, και αυτό, επανάληψη του θέματος δύο με χρήση όμως της μεθόδου Fibonacci. Τα βήματα που εκτελεί ο αλγόριθμος εξαρτώνται από τη σχέση $F_n > \frac{b-a}{l}$. Για την επιτάχυνση του αλγορίθμου, πέρα από τις τιμές της συνάρτησης για τα προηγούμενα x_k, κρατιούνται και οι αριθμοί της σειράς Fibonacci μέχρι το n. Επιπλέον, ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης, είναι και εδώ $n = k + 1$, όπως και στον αλγόριθμο του χρυσού τομέα.



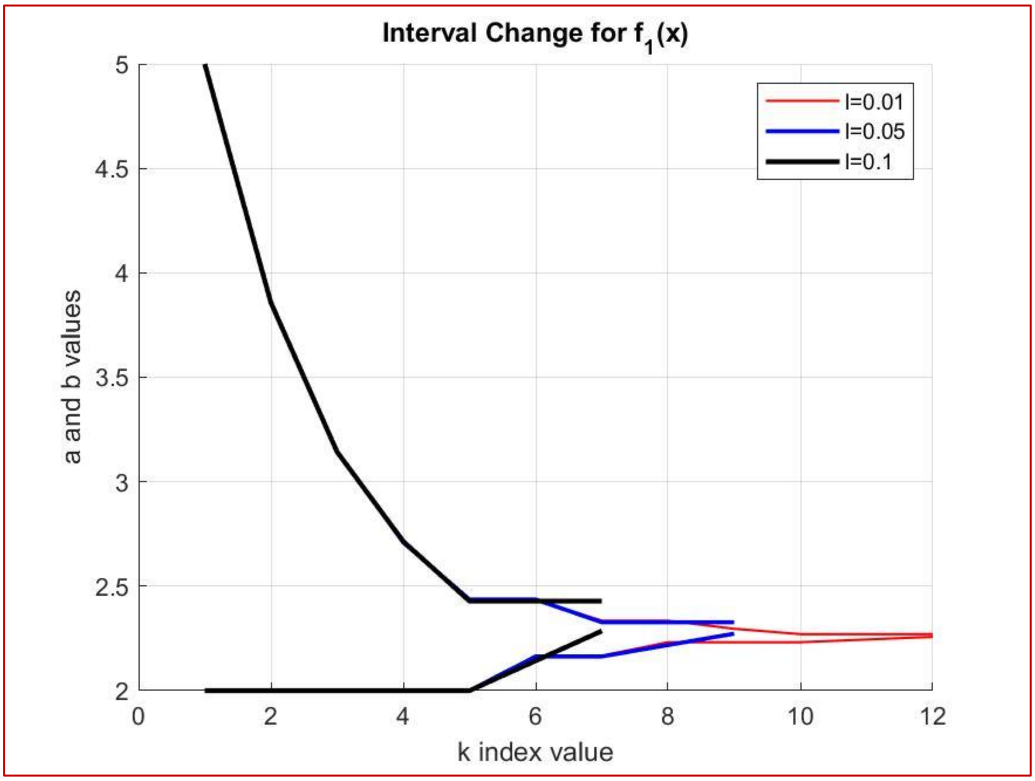
Σχήμα 16. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_1(x)$ συναρτήσει του l.



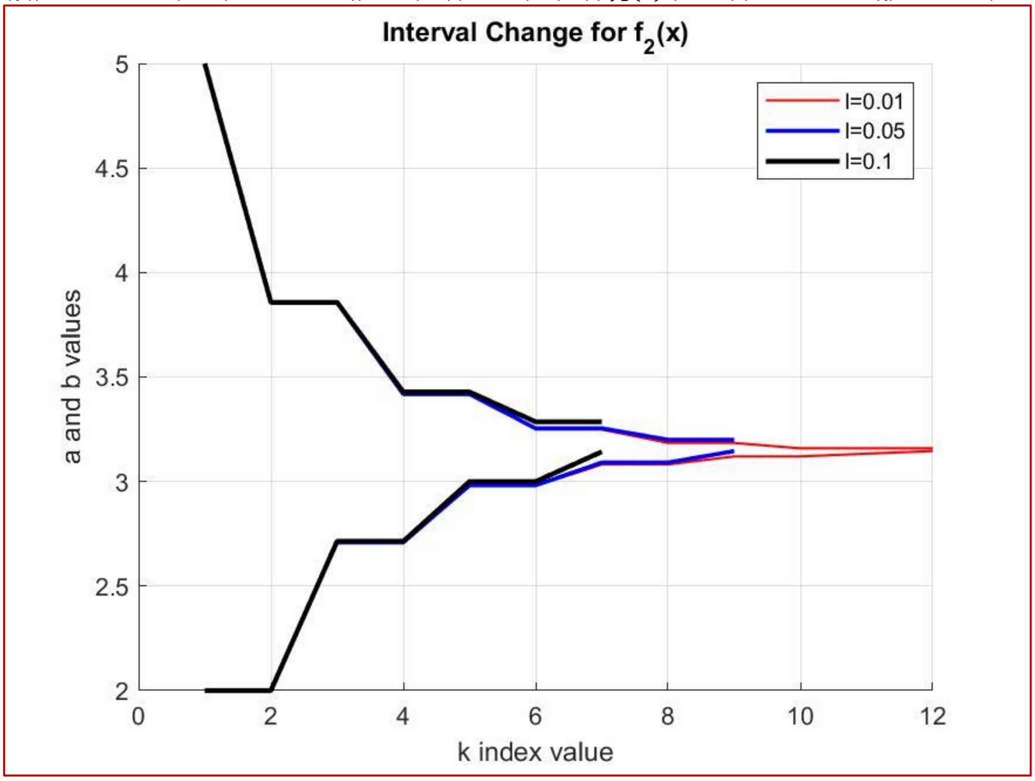
Σχήμα 17. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_2(x)$ συναρτήσει του l.



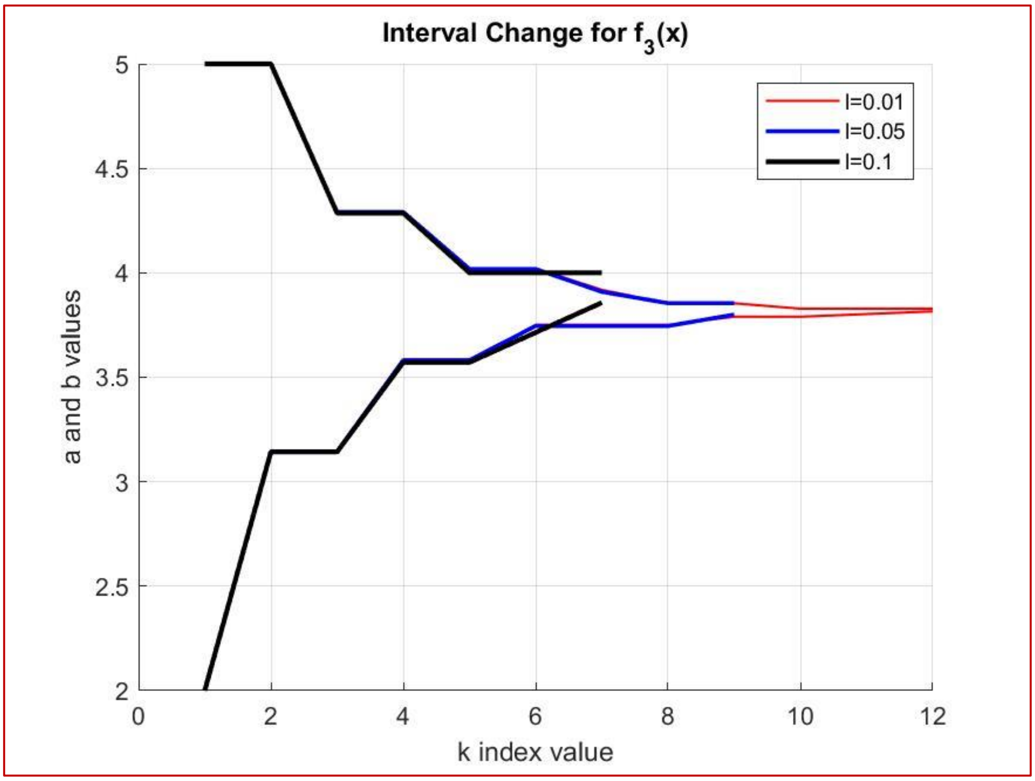
Σχήμα 18. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_3(x)$ συναρτήσει του l.



Σχήμα 19. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_1(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.



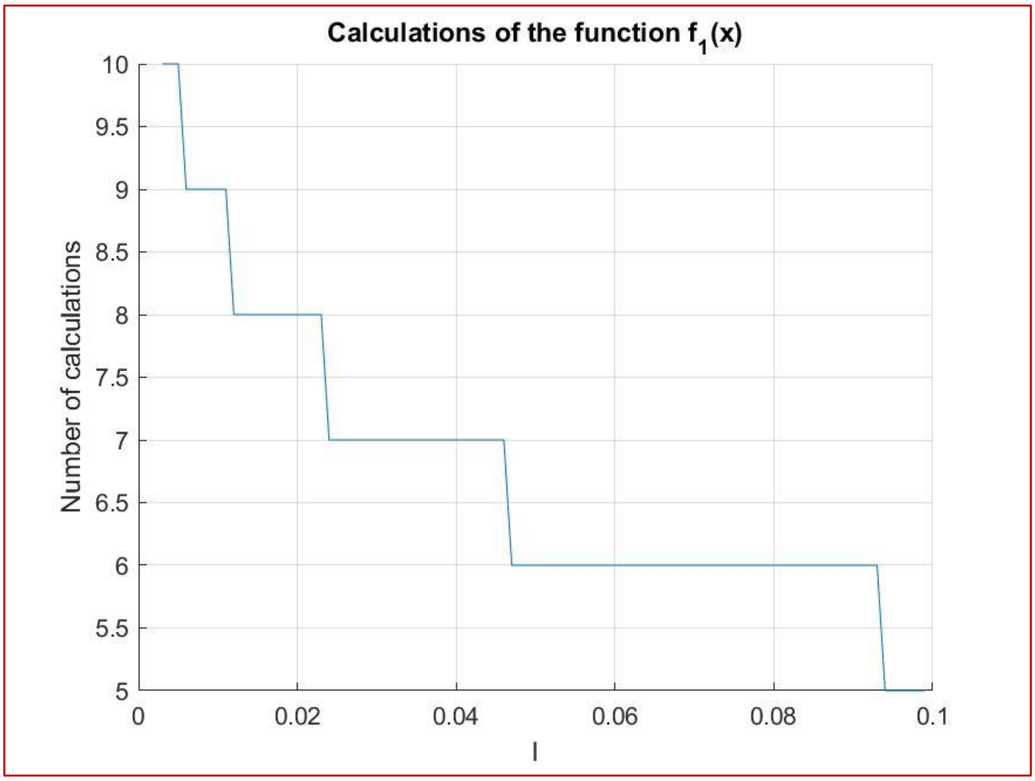
Σχήμα 20. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_2(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.



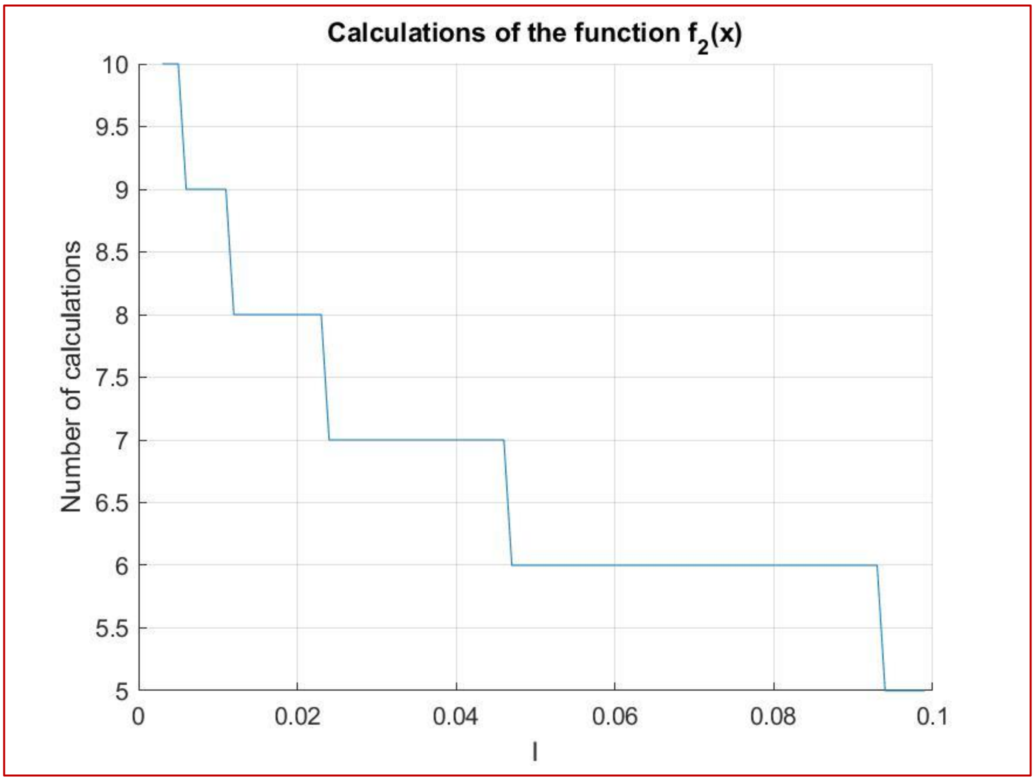
Σχήμα 21. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_3(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.

ΘΕΜΑ 4: ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

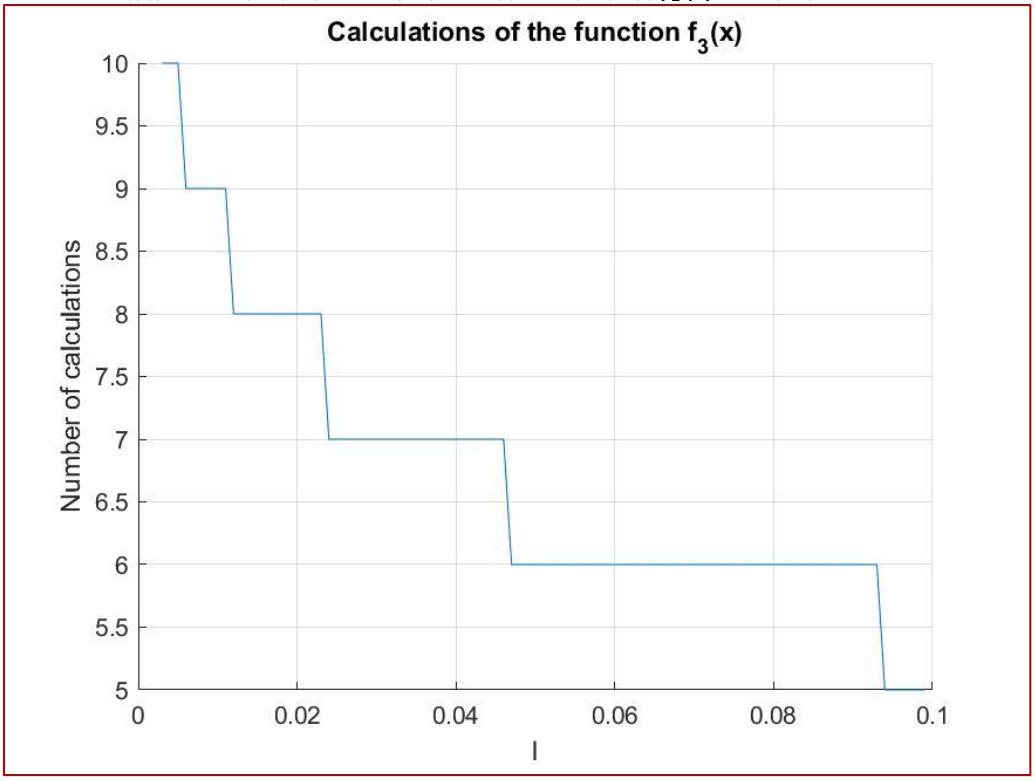
Επανάληψη του θέματος δύο αλλά για τη μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγου. Τα βήματα που θα εκτελέσει ο αλγόριθμος εξαρτώνται από τη σχέση $(\frac{1}{2})^n < \frac{l}{b-a}$, είναι δηλαδή το μεγαλύτερο n ώστε να ισχύει η προηγούμενη σχέση. Προφανώς, σε αυτόν τον αλγόριθμο ο αριθμός των κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης (της παραγώγου της για την ακρίβεια), ισούται με τον αριθμό n. Παρακάτω παρουσιάζονται τα ίδια πειράματα που πραγματοποιήθηκαν και στο θέμα δύο, για τη μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγου.



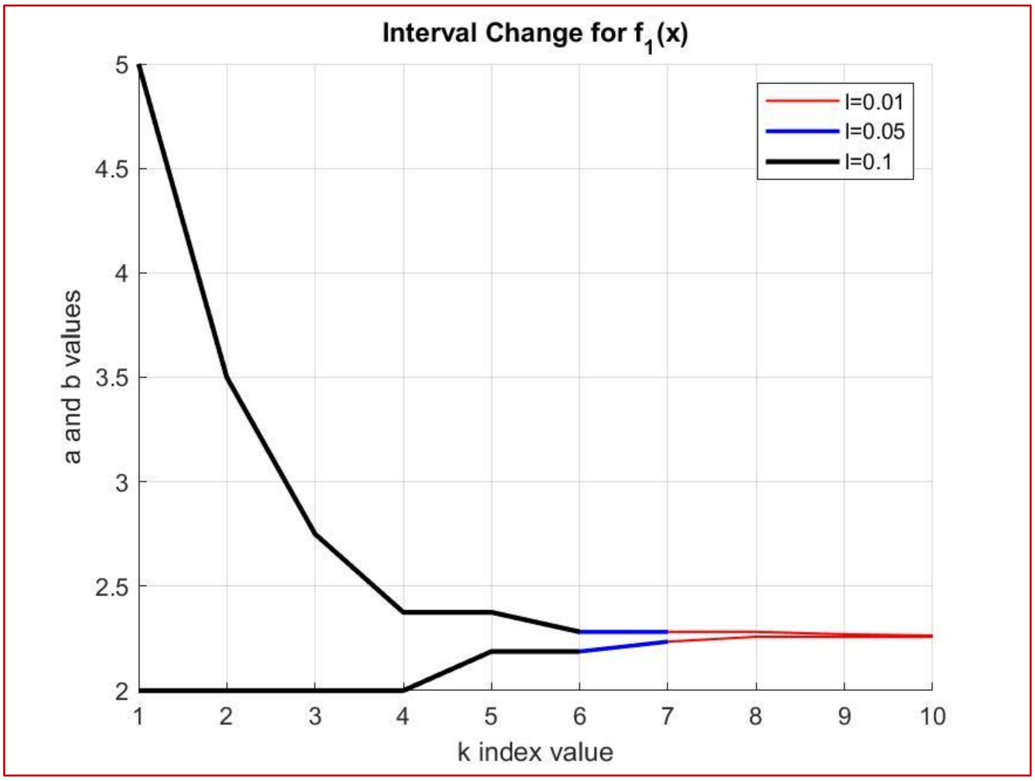
Σχήμα 22. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_1(x)$ συναρτήσει του l.



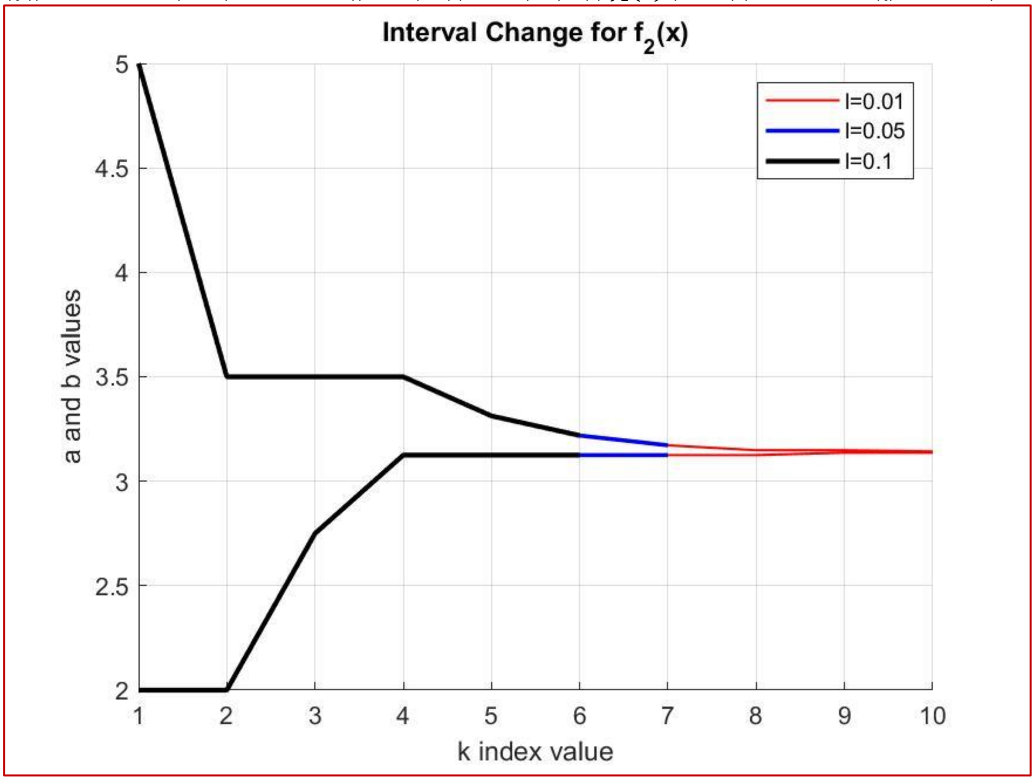
Σχήμα 23. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_2(x)$ συναρτήσει του l.



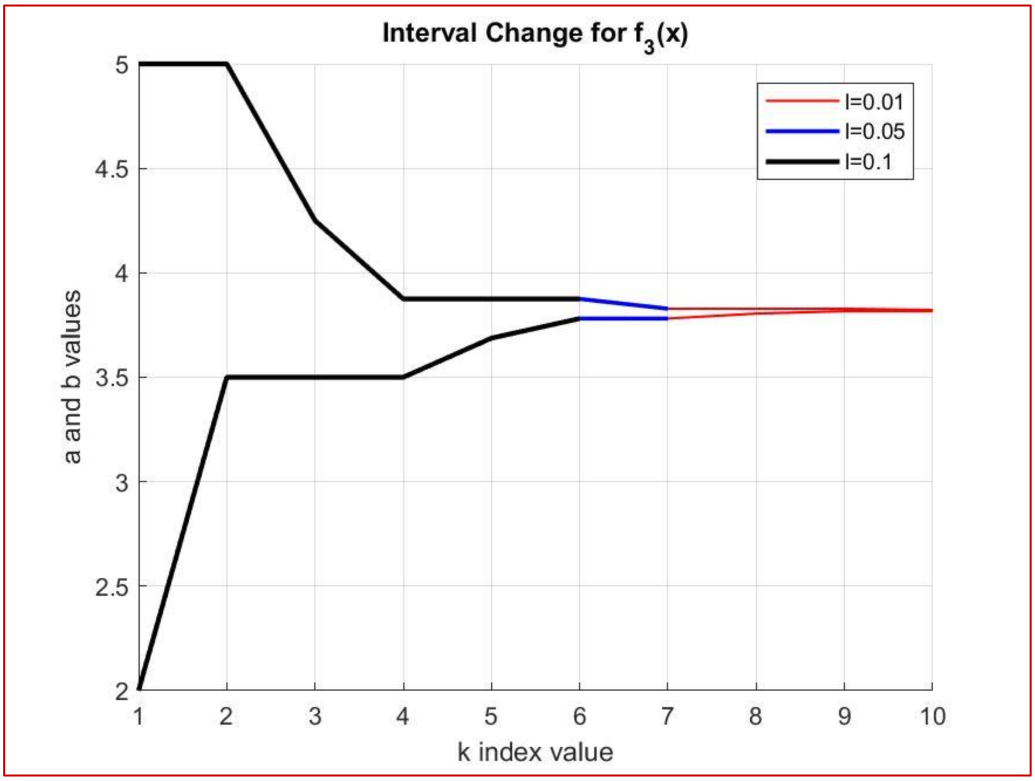
Σχήμα 24. Αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης $f_3(x)$ συναρτήσει του l.



Σχήμα 25. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_1(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.



Σχήμα 26. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_2(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.



Σχήμα 27. Μεταβολή του διαστήματος της συνάρτησης $f_3(x)$ για τη μέθοδο του χρυσού τομέα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ/ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι κλήσεις των συναρτήσεων για κάθε μέθοδο και συνάρτηση συναρτήσει του διαστήματος l, με $l = 0.1$.

$\boldsymbol{l = 0.1}$	Αλγόριθμος Διχοτόμου ($\boldsymbol{\varepsilon = 0.001}$)	Αλγόριθμος χρυσού τομέα	Αλγόριθμος Fibonacci	Αλγόριθμος διχοτόμου με χρήση παραγώγου
$\boldsymbol{f_1}(x)$	10	9	7	5
$\boldsymbol{f_2}(x)$	10	9	7	5
$\boldsymbol{f_3}(x)$	10	9	7	5

Αρχικά, από τον πίνακα φαίνεται ότι και οι τρεις συναρτήσεις απαίτησαν τον ίδιο αριθμό βημάτων, όταν σε αυτές εφαρμόστηκε ο ίδιος αλγόριθμος. Επίσης, ο αλγόριθμος που φαίνεται να είναι πιο αποδοτικός είναι ο αλγόριθμος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων, καθώς είναι αυτός που απαιτεί τον μικρότερο αριθμό υπολογισμών, έπειτα ακολουθεί ο αλγόριθμος Fibonacci, ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα και τέλος ο αλγόριθμος της διχοτόμου, επιβεβαιώνοντας έτσι και τη θεωρητική ανάλυση που αναφέρεται στο βιβλίο.