Méthode de Rejet

Douba Jafuno

5 avril 2019

Introduction

But

Que faisons-nous si nous voulons générer des échantillons d'une variable aléatoire X de densité $f(x)$, que nous ne sachions pas simuler directement ?

Avec la **Methode de rejet** bien que nous ne puissons pas facilement échantillonner $f(x)$, il éxiste une autre densité $g(x)$, à partir de laquelle il est plus facile pour nous d'échantillonner.

Nous pouvons ensuite échantillonner directement dans g, puis rejeter les échantillons de manière stratégique pour donner l'impression que les échantillons non rejetés résultants ressemblent à la densité f

La densité g sera appellé densité candidate et f sera la densité cible.

Soit donc (Y, U) un couple de variables aléatoires indépendantes tirées selon une loi uniforme avec $Y \sim g$, i.e. (Y, U) est un point tiré uniformément dans le carré unité par exemple. On peut alors montrer que la distribution de X est la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $M = \{U \geq f_X(Y)\}$. Autrement dit, $f_X(x) = f_Y(x|M)$. Pour simuler une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ de distribution identique à celle de X il suffit donc, dans une suite de tirages de couples (Y_i, U_i) uniformes indépendants, de sélectionner les Y_i correspondant aux tirages (Y_i, U_i) vérifiant M, et de rejeter les autres. Tout celà donne lieu à un algorithme.

Algorithme

Pour utiliser l'algorithme de la méthode des rejets, nous devons d'abord nous assurer que le support de f est un sous-ensemble du support de g . Si X_f est le support de f et X_g est le support de g, alors nous devons avoir $X_f \subset X_g$

Cela a du sens: s'il y a une région du support de f que g ne peut jamais toucher, alors cette région ne sera jamais échantillonnée. De plus, il faut supposer que $c = \sup_{x \subseteq X_f} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

L'algorithme de la Méthode de rejet pour prélever un échantillon à partir de la densité cible f est alors:

- Simuler $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$
- Simuler $Y \sim g$
- Si $U < \frac{f(Y)}{cg(Y)}$ On accepte Y sinon on rejette Y et on recommence depuis le début.

De plus le nombre N d'itération de l'algorithme suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{c}$ Ce paramètre correspond donc à la probabilité d'accepter Y en effet:

$P(Y : accept?) = P(U < \frac{f(Y)}{cg(Y)}) = \int P(U < \frac{f(y)}{cg(y)})|Y = y)g(y)dy = \int \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)dy = \frac{1}{c}$

Exemple: Methode de rejet pour la loi gamma

Soit X $\sim \Gamma(\alpha, \beta)$, Loi Gamma de paramètre α > 0 et β > 0 de densité $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$

Comment Simuler X?

- Si α = 1, cela coincide avec une variable aléatoire de loi exponnentielle de parametre α.
- Si α est un entier non nul, une variable aléatoire de loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ s'écrit comme la somme de α variables aléatoires indépendantes de loi exponnentielle de paramètre β : la simulation en découle immédiatement (Méthode d'inversion)
- Si α n'est pas entier, il est utile d'avoir recours à la **Méthode de Rejet**. Donnons en une illustration, sans avoir le soucis d'optimalité. Pour simplifier, supposons β = 1 et $\alpha \in (n, n + 1)$

Pour le dernier cas α n'est pas un entier tel que $\alpha \in (n, n + 1)$ et $\beta = 1$

- Si $\alpha > 1$. Prenons pour $Y \sim g$ une loi $\Gamma(n, \frac{1}{2})$ .On vérifie alors que la constante de rejet vaut: $c = \sup_{x>0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\Gamma(n) 2^\alpha (\alpha-n)^{\alpha-n} e^{-(\alpha-n)}}{\Gamma(\alpha)}$.Cette constante augmente rapidement lorsque α tend vers +∞.
- Si $\alpha \in]0, 1[$ et donc $\beta = 1$ avec $f_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$. Prenons pour $Y \sim g$ de loi que l'on surnomme **Auxgamma** de densité $g(x)$ = $\frac{\alpha e}{\alpha+e}(x^{\alpha-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + e^{-x} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x))$. Pour simuler selon la loi Auxgamma de densité g on utilise l'inverse de la fonction de repartition. La fonction quantile s'écrit $\forall U \in]0, 1[$, $G^{-1}(u) = (\frac{(\alpha+e)u}{e})^{\frac{1}{\alpha}} \mathbf{1}_{u < \frac{e}{\alpha+e}} - log((1-u)\frac{(\alpha+e)u}{e}) \mathbf{1}_{u \geq \frac{e}{\alpha+e}}$ .On vérifie alors que la constante de rejet vaut: $c = \frac{(\alpha+e)}{\alpha e \Gamma(\alpha)}$

Application

Methode de Rejet

Taille de l'echantillion:

0 1,000 10,000

0 1,000 2,000 4,000 6,000 8,000 10,000

Entrez la densite f(x) a simuler (vous pouvez utiliser la documentation de R):

dgamma(x,0.5,1)

Par exemple entrer dnorm(x,0,1) pour une loi normale centree reduite

Entrer la constante C (affiche dans la deuxieme table)

1,4

Choissez une loi de densite g(x) parmi:

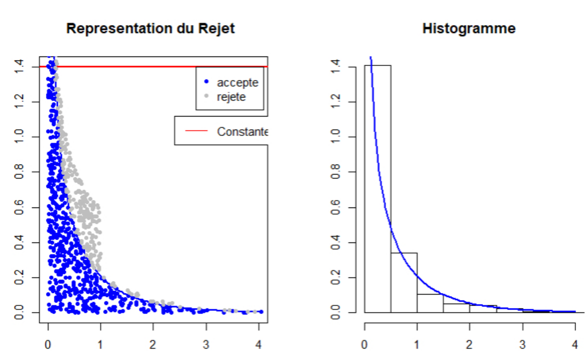
AuxGamma Gamma

Weibull Uniforme

Gaussienne

Utilisez cette loi pour simuler une Gamma de

Representation et Histogramme



Constante c = 1.33589908287533

axe x

-10 0 4 10

parametre Alpha et 1 avec Alpha dans]0,1[

-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

Alpha

0,5

Demarrer