第五章 平面向量及解三角形（基础卷）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．已知向量 $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,x)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，那么 x 的值是（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．3　　D．-3

2．记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=b=4c$，则 $\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．2

3．向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,1)$，则 $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=$（　　）

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．3　　D．5

4．在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$AB=1$，$AC=2$，且角 A 的平分线 AD 交 BC 于 D，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

5．$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，则 $\angle B$ 的大小为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

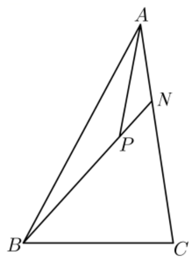
6．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC=6$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于（　　）

A．9　　B．18　　C．$9\sqrt{3}$　　D．$18\sqrt{3}$

7．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin C=2\sin(B+C)\cos B$，那么 $\triangle ABC$ 一定是（　　）

A．等腰直角三角形　　B．等腰三角形　　C．直角三角形　　D．等边三角形

8．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$，则实数 m 的值为（　　）



A．$\frac{9}{11}$　　B．$\frac{5}{11}$　　C．$\frac{3}{11}$　　D．$\frac{2}{11}$

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．）

9．已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 120°，则以下说法正确的是（　　）

A．$|\vec{a}+\vec{b}|=1$　　　　B．$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$

C．$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $2\vec{a}+\vec{b}$ 可以作为平面内的一组基底

10．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，则下列命题正确的是（　　）

A．若 A＝30°，$a=3$，$b=4$，则$\triangle ABC$ 有两解

B．若 $\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{CB}$，则角 A 最大值为 30°

C．若 $a^2+b^2>c^2$，则$\triangle ABC$ 为锐角三角形

D．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，则直线 AP 必过$\triangle ABC$ 内心

11．在$\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$AC=2$，$AB=k$，则（　　）

A．$\triangle ABC$ 外接圆面积为定值，且定值为 9π　　B．$\triangle ABC$ 的面积有最大值，最大值为 $3+2\sqrt{2}$

C．若 $k=3\sqrt{3}$，则 $C=60°$　　　　D．当且仅当 $0<k\le 2$ 或 $k=6$ 时，$\triangle ABC$ 有一解

12．在$\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，D、E 分别是 AC、BC 上的点，AE 与 BD 交于 O，且满足：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，则下列说法正确的是(　　)

A．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$　　　　B．$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

C．$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　　　D．$\overrightarrow{ED}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{7}{12}$

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,\lambda)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角，则实数 λ 的取值范围是______.

14．赵爽是我国古代数学家，大约在公元 222 年，他为《周髀算经》一书作序时，介绍了“赵爽弦图”——由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如图 1 所示.类比“赵爽弦图”，可构造如图 2 所示的图形，它是由 3 个全等的三角形与中间一个小等边三角形拼成的一个大等边三角形.在$\triangle ABC$ 中，若 $AF=2, FD=4$，则 $AB=$ __________.

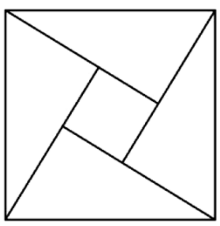


图 1

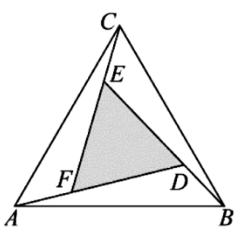


图 2

15．沈阳二中北校区坐落于风景优美的辉山景区，景区内的一泓碧水蜿蜒形成了一个“秀”字，故称“秀湖”．湖畔有秀湖阁 (A) 和临秀亭 (B) 两个标志性景点，如图．若为测量隔湖相望的 A、B 两地之间的距离，某同学任意选定了与 A、B 不共线的 C 处，构成$\triangle ABC$，以下是测量数据的不同方案：

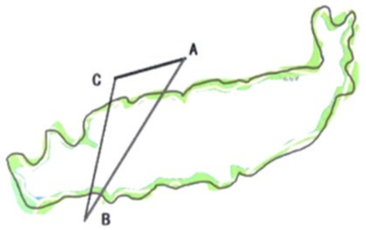
①测量 $\angle A$、AC、BC；

②测量 $\angle A$、$\angle B$、BC；

③测量$\angle C$、AC、BC；

④测量$\angle A$、$\angle C$、$\angle B$．

其中一定能唯一确定A、B两地之间的距离的所有方案的序号是____________.



16．$\triangle AOB$中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi$，$OA=OB=1$．若$\vec{m}=(3-k)\vec{a}+k\vec{b}$，$\vec{n}=(2-k)\vec{a}+k\vec{b}$．若$k=2$，则$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为__________；当$\vec{m}$与$\vec{n}$夹角最大时，$k=$__________．

四、解答题（本题共6小题，共70分，其中第17题10分，其它每题12分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-1,4)$，

(1)若$(k\vec{a}+2\vec{b})//(\vec{a}-3\vec{b})$，求$k$的值；

(2)若$\left(k\vec{a}+2\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$，求$k$的值.

18．已知$\triangle ABC$的三个角A，B，C的对边分别是a，b，c，而且满足$\dfrac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2}$.

(1)求角C的值；

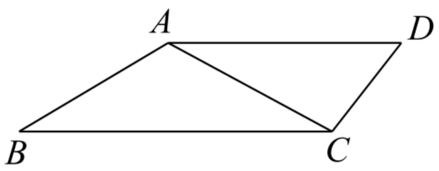
(2)若$a=2$，$b=5$，边AB上的中点为D，求CD的长度.

19．已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足：$\left|\vec{a}\right|=4$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=61$.

(1)求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ；

(2)求向量$\vec{a}$在向量$2\vec{a}+\vec{b}$上的投影.

20．如图，在平面四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\dfrac{5\pi}{6}$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$AC=5\sqrt{3}$，$CD=5$．



(1)求 $\angle BAC$ 的值；

(2)若 $AB=3\sqrt{3}$，求△ ABC 的边 BC 上高的大小．

21．已知两个不共线的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，且 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$．

(1)若 $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}+4\vec{b}$ 垂直，求 $\tan\theta$；

(2)若 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，求 $|x\vec{a}+\vec{b}|$ 的最小值及对应的 x 的值，并指出此时向量 $\vec{a}$ 与 $x\vec{a}+\vec{b}$ 的位置关系.

22．已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3}\sin x,\cos x)$，$\vec{b}=(1,1)$，函数 $f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$．

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的值域；

(2)若 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $f\left(A\right)=2$，$a=1$，求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

第五章 平面向量及解三角形（中档卷）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．设非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则（　　）

A．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$

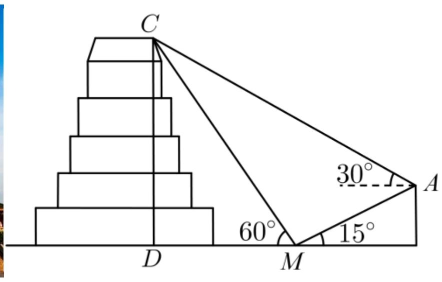
C．$\vec{a}//\vec{b}$　　D．$|\vec{a}|>|\vec{b}|$

3．在△ABC中，“$\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C$”是“△$ABC$是锐角三角形”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

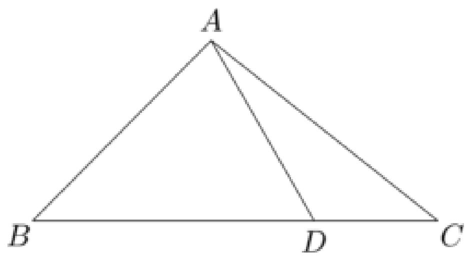
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．滕王阁，位于江西省南昌市西北部沿江路赣江东岸，始建于唐朝永徽四年，因唐代诗人王勃诗句“落霞与孤鹜齐飞，秋水共长天一色”而流芳后世．如图，小明同学为测量滕王阁的高度，在滕王阁的正东方向找到一座建筑物AB，高为$12\mathrm{m}$，在它们的地面上的点M（B，M，D三点共线）测得楼顶A，滕王阁顶部C的仰角分别为$15°$和$60°$，在楼顶A处测得阁顶部C的仰角为$30°$，则小明估算滕王阁的高度为（　　）（精确到$1\mathrm{m}$）



A．$42\mathrm{m}$　　B．$45\mathrm{m}$　　C．$51\mathrm{m}$　　D．$57\mathrm{m}$

6．如图，在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=45°$，D是BC边上的一点，$AD=5, AC=7, DC=3$，则AB的长为（　　）



A．$5\sqrt{3}$　　B．$5\sqrt{6}$　　C．$\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{5\sqrt{6}}{2}$

7．在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{15}{2}$，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=\sqrt{19}$，$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{CB}$方向上的投影为$-\frac{5}{2}$，$P$为线段$AB$上的一点，且$\overrightarrow{CP}=\frac{\lambda\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\mu\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}(\lambda,\mu\in\mathrm{R})$.则$\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}$的最小值为（　　）

A．$\frac{15}{4}$　　B．4　　C．8　　D．$2\sqrt{15}$

8．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，若$c=3b\sin A$，则$\frac{(a+b)^2}{ab}$的取值范围是（　　）

A．$[3,5]$　　　　B．$[4,6]$　　　　C．$[4,2+\sqrt{13}]$　　　　D．$[4,2+\sqrt{15}]$

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9．已知向量$\vec{a}=(1,\sin\theta),\vec{b}=(\cos\theta,\sqrt{2})$，则下列命题正确的是（　　）

A．存在θ，使得$\vec{a}//\vec{b}$　　　　B．当$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直

C．对任意θ，都有$|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$　　　　D．当$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}$时，$\tan\theta=\sqrt{2}$

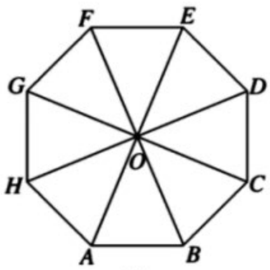
10．已知$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，下列条件中，能使$\triangle ABC$的形状唯一确定的有（　　）

A．$a=2,b=3,\angle C=60°$　　　　B．$a=1,b=\sqrt{2},\angle A=30°$

C．$a=1,\angle B=30°,\angle C=45°$　　　　D．$a=3,b=2,\angle A=30°$

11．如图甲所示，古代中国的太极八卦图是以同圆内的圆心为界，画出相等的两个阴阳鱼，阳鱼的头部有眼，阴鱼的头部有个阳殿，表示万物都在相互转化，互相涉透，阴中有阳，阳中有阴，阴阳相合，相生相克，蕴含现代哲学中的矛盾对立统一规律，其平面图形记为图乙中的正八边形$ABCDEFGH$，其中$OA=2$，则（　　）


甲



乙

A．$\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$　　　　B．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-2\sqrt{2}$

C．$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}\right|=4$　　　　D．$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}\right|=4+2\sqrt{2}$

12．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$(a+b):(a+c):(b+c)=9:10:11$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$　　　　B．$\triangle ABC$是锐角三角形

C．$\triangle ABC$的最大内角是最小内角的 2 倍　　　　D．若$c=6$，则$\triangle ABC$外接圆半径为$\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，若向量$\vec{p}=\vec{a}+\dfrac{4}{3}m\vec{b}$与向量$\vec{q}=\vec{b}+3m\vec{a}$共线，则$m$的值为____________.

14．已知$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$45°$，若向量$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)$与$\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)$的夹角是锐角，则实数λ的取值范围是：______.

15．在$\triangle ABC$中，若$b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cos C$，则$\triangle ABC$是__________.

16．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，已知$\dfrac{2\sin A-\sin C}{\sin C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$，则$\sin^2A+\sin^2C$的最大值为_________；设$D$是$AC$上一点，且$AD:DC=1:2,BD=1$，则$a+3c$的最大值为_________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分，其中第 17 题 10 分，其它每题 12 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．已知向量 $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$ 和向量 $\vec{b}=\left(1,f\left(x\right)\right)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和最大值；

（2）已知 ΔABC 的三个内角分别为 A,B,C，若有 $f\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{7}$，$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 AC 的长度.

18．在 ΔABC 中，若边 a,b,c 对应的角分别为 A,B,C，且 $c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $c=3,b=1$，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，求 AD 的长度.

20．已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\sin\left(A+B-C\right)=c\sin\left(B+C\right)$.

(1)求角 C 的值；

(2)若 $2a+b=6$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

21．已知函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-1$，其中 $\vec{a}=(\sin 2x,2\cos x)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\cos x)(x\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f(x)$ 的单调增区间；

(2)在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$f\left(\frac{B}{4}\right)=\sqrt{3}$，$b^2=ac$，求$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$的值.

22．在① $2b\sin C=\sqrt{3}c\cos B+c\sin B$，② $\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{b}{2a-c}$两个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题.在$\triangle ABC$中，内角A、B、C所对的边分别是a、b、c，且________.

(1)求角B；

(2)若$a+c=\sqrt{3}$，点D是AC的中点，求线段BD的取值范围.

第五章 平面向量及解三角形（提高卷）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．已知向量$\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,m)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$反向共线，则$\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|$的值为（　　）

A．0　　　　B．48　　　　C．$4\sqrt{3}$　　　　D．$3\sqrt{6}$

3．在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$b\sin B+c\sin C=\frac{4}{3}a\sin A$，则$\frac{\sin A\tan A}{\sin B\sin C}$的值为（　　）

A．4　　　　B．5　　　　C．6　　　　D．7

4．翠浪塔，位于赣州市章江西岸杨梅渡公园山顶上，与赣州古城的风水塔——玉虹塔相呼应．塔名源于北宋大文豪苏东坡吟咏赣州的诗句“山为翠浪涌，水作玉虹流”，该塔规划设计为仿宋塔建筑风格，塔体八面．一研学小组在李老师的带领下到该塔参观，这时李老师（身高约 1.7 米）站在一个地方（脚底与塔底在同一平面）面朝塔顶，仰角约为 45°；当他水平后退 50 米后再次观测塔顶，仰角约为 30°，据此李老师问：同学们，翠浪塔高度大约为（　　）米？（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.732$）

A．68　　　　B．70　　　　C．72　　　　D．74

5．在凸四边形$ABCD$中$AB=AD=2$，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则以下结论正确的是（　　）

A．$S_{ABCD}>\sqrt{3}$　　　　B．四边形$ABCD$为菱形

C．$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$　　　　D．四边形$ABCD$为平行四边形

6．设$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$是平面内两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=(a-1)\vec{e_1}+\vec{e_2}$，$\overrightarrow{AC}=2b\vec{e_1}-\vec{e_2}$ $a>0$，$b>0$，若A，B，C三点共线，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最小值是（　　）

A．8　　　　B．6　　　　C．4　　　　D．2

7．已知锐角$\triangle ABC$，其外接圆半径为2，$C=\frac{\pi}{3}$，AB边上的高的取值范围为（　　）．

A．$(0,3]$　　　　B．$(0,3)$　　　　C．$(2,3]$　　　　D．$(2,3)$

8．小强计划制作一个三角形，使得它的三条边中线的长度分别为 1，$\sqrt{7}$，$\sqrt{7}$，则（　　）

A．能制作一个锐角三角形　　　　B．能制作一个直角三角形

C．能制作一个钝角三角形　　　　D．不能制作这样的三角形

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

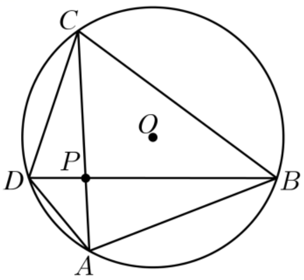
全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9．已知向量 $\vec{a}=(3,-1)$，$\vec{b}=(1,-2)$，则下列结论中正确的是（　　）

A．$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$　　　　B．$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$

C．$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$　　　　D．$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

11．“圆幂定理”是平面几何中关于圆的一个重要定理，它包含三个结论，其中一个是相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.如图，已知圆 O 的半径为 2，点 P 是圆 O 内的定点，且 $OP=\sqrt{2}$，弦 AC、BD 均过点 P，则下列说法正确的是（　　）



A．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 为定值　　　　B．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的取值范围是 $[-2,0]$

C．当 $AC\perp BD$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值　　　　D．$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|$ 的最大值为 12

12．在△ABC 中，$AB=AC=3$，$BC=4$，O 为△ABC 内的一点，设 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则下列说法正确的是（　　）

A．若 O 为△ABC 的重心，则 $\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$　　　　B．若 O 为△ABC 的内心，则 $\lambda+\mu==\dfrac{2}{5}$

C．若 O 为△ABC 的外心，则 $\lambda+\mu=\dfrac{9}{10}$　　　　D．若 O 为△ABC 的垂心，则 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{5}$

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．已知点 $A(-2,-1)$，$B(3,4)$，$C(-1,1)$，$D(3,3)$，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影向量为______.

14．已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，则能使 $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$ 成立的一组 A，B 的值是________.

15．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c_i}\ (i=1,2)$，其中 $|\vec{a}|=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{8}$ 且 $\vec{c_i}=\vec{a}+t_i\vec{a_0}$　其中 $\left(\vec{a_0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)$ 设 $\vec{c_i}-\vec{b}$ 与 $-\vec{b}$ 的夹角为 θ_i，若对于任意 t_1，$t_2>0$，总有 $k>|\cos\theta_1-\cos\theta_2|$，则 k 的最小值为__________.

16．已知在△ABC 中，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，与 BC 交于点 D，M 是 AD 的中点，延长 BM 交 AC 于点 H，$|AD|=|CD|$，$\tan\angle DAC=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{|AC|}{|AD|}=$___________，$\dfrac{|AH|}{|AC|}=$___________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分，其中第 17 题 10 分，其它每题 12 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且 $c^2=a^2+b^2-ab$，

(1)若 $\tan A-\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+\tan A\cdot\tan B)$，求角 B.

(2)设 $\vec{m}=(\sin A,1)$ ， $\vec{n}=(3,\cos 2A)$ ，试求 $\vec{m}\cdot\vec{n}$ 的最大值.

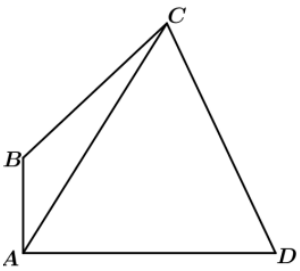
18．在① $\cos 2A=\cos\left(B+C\right)$，② $a\sin C=\sqrt{3}c\cos A$ 这两个条件中任选一个作为已知条件，然后解答问题.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，______.

(1)求角 A；

(2)若 $b=2$ ， $c=4$ ，求 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线 AD 的长.

19．在三角形 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2S=-\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ ，作 $AB\perp AD$，使得四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$， $AD=\sqrt{3}$ ，



(1)求 $\angle B$；

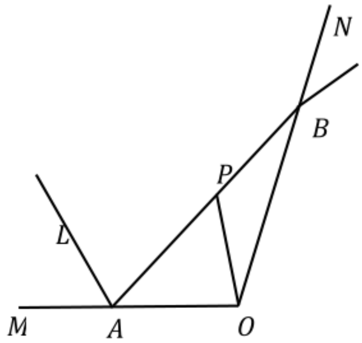
(2)设 $\angle BAC=\theta$， $BC=f\left(\theta\right)$，求函数 $f\left(\theta\right)$ 的值域.

20．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．在① $b\cos A+a\cos B=2c\cos C$ ，② $\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)=3ab$ ，③ $\cos 2C+\cos C=0$ 中任选一个，

(1)求角 C 的大小；

(2)若 $c=2$ ，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

21．如图，某城市有一条$\left(MO\right)$从正西方通过市中心O后转向东偏北60°方向$\left(ON\right)$的公路，为了缓解城市交通压力，现准备修建一条绕城高速公路L，并在MO，NO上分别设置两个出口A，B，B在A的东偏北θ的方向（A，B两点之间的高速路可近似看成直线段），由于A，B之间相距较远，计划在A，B之间设置一个服务区P．



(1)若P在O的正北方向且$OP=2\text{km}$，求A，B到市中心O的距离和最小时$\tan\theta$的值；

(2)若B到市中心O的距离为10km，此时P设在$\angle AOB$的平分线与AB的交点位置，且满足$\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{BP}^2\geq 11\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，则求$A$到市中心$O$的距离最大时$\tan\theta$的值．

22．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，满足$b\sin A=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$

(1)设$a=3$，$c=2$，过B作BD垂直AC于点D，点E为线段BD的中点，求$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EA}$的值；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，$c=2$，求$\triangle ABC$面积的取值范围．