第五章 平面向量及解三角形（基础卷）

一、单选题

1. 【答案】D

由题意$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+x=0$，$x=-3$.

故选：D.

2. 【答案】C

由正弦定理得：$\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{4c}{4c+c}=\dfrac{4}{5}$.

故选：C.

3. 【答案】D

由题意知：$2\vec{a}+\vec{b}=\left(0,5\right)$，则$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=5$.

故选：D.

4. 【答案】A

【详解】

因为AD是角A的平分线，$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{1}$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

故选：A.

5. 【答案】A

由题意，$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合余弦定理可知$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\because 0<B<\pi,\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：A.

6. 【答案】C

根据正弦定理得：$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，所以$AC=\dfrac{BC\times\sin B}{\sin A}=6\sqrt{3}$，

因为$C=180^\circ-B-A=30^\circ$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times CA\times CB\times\sin C=9\sqrt{3}$.

故选：C.

7. 【答案】B

因为$\sin C=2\sin\left(B+C\right)\cos B$，$\sin(B+C)=\sin A$，

所以$\sin C=2\sin A\cos B$，

所以由正余弦定理得$c=2a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，化简得$a^2=b^2$，

所以$a=b$，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

故选：B.

8. 【答案】D

解：由题意得：

$\because \overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AN}$

$\because \overrightarrow{AP}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+4m\overrightarrow{AN}$

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BN}$，则

$\therefore \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})=\lambda\overrightarrow{AN}-\lambda\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AN}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$

又由 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AN}$ 不共线

$\therefore \begin{cases}\lambda=4m\\1-\lambda=\frac{3}{11}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=\frac{2}{11}\\\lambda=\frac{8}{11}\end{cases}$

故选：D

二、多选题

9. 【答案】ABD

据题意,$\vec{a}^2=\vec{b}^2=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos120^{\circ}=-\frac{1}{2}$

因为$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

所以$|\vec{a}+\vec{b}|=1$,所以A对

因为$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,所以$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$,所以B对.

因为$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$,$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

所以$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以C错

因为$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}+\vec{b}$不共线,所以可以作为平面内的一组基底,所以D正确

故选：ABD

10. 【答案】ABD

【详解】

对于选项 A：$b\sin A$＝4sin30°＝2，则 $b\sin A<a<b$，

所以，$\triangle ABC$ 有两解，A 选项正确；

对于选项 B：设 $\overrightarrow{AB}=\vec{c},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ （以 $\vec{c},\vec{b}$ 为基底），则 $\overrightarrow{CB}=\vec{c}-\vec{b}$，

$\because\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{CB}\therefore\left(\vec{c}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$=0

则 $4\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{c}^{2}+3\vec{b}^{2}$，即 $4bc\cos A=c^{2}+3b^{2}$

$\therefore \cos A=\dfrac{c^{2}+3b^{2}}{4bc}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{c}{b}+\dfrac{3b}{c})\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because A\in$（0，π），$\therefore A\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，B 选项正确；

对于选项 C：$\because a^{2}+b^{2}>c^{2}$，$\therefore \cos C=\dfrac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}>0$，又 $0<C<\pi$ $\therefore C$ 为锐角

若 C 为最大角， 则$\triangle ABC$ 为锐角三角形，否则$\triangle ABC$ 为锐角三角形或直角三角形或钝角三角形，C 选项错误；

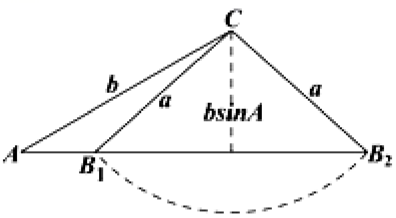
对于选项 D：$\because \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AC}$ 同向单位向量

又$\because \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线

$\therefore \overrightarrow{AP}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$ 与菱形对角线向量共线

$\therefore$ 直线 AP 为角 A 的角平分线，即直线 AP 必过$\triangle ABC$ 内心， D 选项正确.

故选：ABD.



11. 【答案】ABD

【详解】

由 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 容易得到 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，由 $\dfrac{AC}{\sin B}=2R$ 得 $R=3$，$S=\pi R^{2}=9\pi$，A 正确；

由 $\cos B=\dfrac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}\geqslant\dfrac{2ac-b^{2}}{2ac}$ 得 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\geqslant\dfrac{2ac-4}{2ac}$，解得 $ac\leqslant 6\left(3+2\sqrt{2}\right)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B\leq\dfrac{1}{2}\times 6\left(3+2\sqrt{2}\right)\times\dfrac{1}{3}=3+2\sqrt{2}$，B 正确.

若 $k=3\sqrt{3}$，由 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$ 得 $\sin C=\dfrac{AB\cdot\sin B}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore C=60°$ 或 $C=120°$（均符合题意），C 错误.

由 $\cos B=\dfrac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}=\dfrac{a^{2}+c^{2}-4}{2ac}$ 得

$c^{2}-\dfrac{4\sqrt{2}a}{3}c+a^{2}-4=0$，$\Delta=\left(-\dfrac{4\sqrt{2}a}{3}\right)^{2}-4\left(a^{2}-4\right)=\dfrac{4\left(36-a^{2}\right)}{9}$，此方程有唯一正解等价于 $\Delta=0$ 或 $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ a^{2}-4\leq 0\end{cases}$，又由于 $a>0$，$\therefore 0<k\leq 2$ 或 $k=6$，D 正确.

故选：ABD.

12. 【答案】BC

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 得 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos B=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos C$，

$\therefore |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos B=|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos C$，即 $c\cdot\cos B=b\cdot\cos C$，

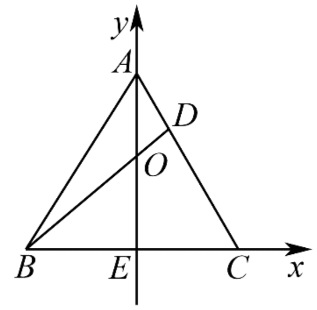
由正弦定理得：$\sin C\cdot\cos B=\sin B\cdot\cos C$，即 $\sin(B-C)=0$，

又 $A+B+C=\pi$，$B\in(0,\pi)$、$C\in(0,\pi)$，$\therefore B-C=0$，即 $B=C$，

同理可得 $A=C$，$\therefore A=B=C$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\because \overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}$，$\therefore D$ 为 AC 的三等分点，

$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，$\therefore E$ 为 BC 的中点，



如图建立平面直角坐标系，则 $A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$B\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$C\left(\frac{1}{2},0\right)$、$D\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{6}\neq 0$，故 A 错误；

设 $O(0,y)$，则 $\overrightarrow{BO}=\left(\frac{1}{2},y\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\because \overrightarrow{BO}\,/\!/\,\overrightarrow{BD}$，$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}y\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow O$ 为 AE 的中点，$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$，故 B 正确；

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}$，故 C 正确；

$\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\cos\left\langle\overrightarrow{ED},\overrightarrow{BA}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{ED}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$，故 D 错误.

故选：BC.

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．【答案】$\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$

因向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,\lambda)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角，于是得 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，

因此，$2+2\lambda>0$ 且 $\lambda-4\neq 0$，解得 $\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$，

所以实数 λ 的取值范围是 $\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$.

故答案为：$\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$

14．【答案】$2\sqrt{13}$

由题意 $\angle ADB=120^\circ$，$BD=AF=2$，$AD=6$，

所以 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB}=\sqrt{36+4-2\times 6\times 2\cos 120^\circ}=2\sqrt{13}$.

故答案为：$2\sqrt{13}$.

15.【答案】②③

对于①，由正弦定理可得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，则$\sin B=\dfrac{AC\sin A}{BC}$，

若$AC>BC$且$\angle A$为锐角，则$\sin B=\dfrac{AC\sin A}{AB}>\sin A$，此时$\angle B$有两解，

则$\angle C$也有两解，此时AB也有两解；

对于②，若已知$\angle A$、$\angle B$，则$\angle C$确定，由正弦定理$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$可知$AB$唯一确定；

对于③，若已知$\angle C$、AC、BC，由余弦定理可得$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C}$，

则AB唯一确定；

对于④，若已知$\angle A$、$\angle C$、$\angle B$，则AB不确定.

故答案为：②③.

16．【答案】 $\dfrac{\pi}{6}$##30° $\sqrt{2}$

当k=2时，

$\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{n}=2\vec{b}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

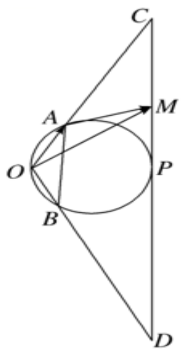
$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1-2+4=3$，

$\therefore\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，

$\therefore\vec{m}$与$\vec{n}$夹角θ的余弦值$\cos\theta=\dfrac{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot2\vec{b}}{\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\cdot\left|2\vec{b}\right|}=\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

如图所示：



分别延长OA，OB到C，D使$OC=OD=3OA$.

$\vec{m}=(3-k)\vec{a}+k\vec{b}=3\vec{a}+k\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，

故$\vec{m}$终点在CD上运动，

又$\vec{n}=\vec{m}-\vec{a}$.

即向量$\overrightarrow{AM}$，

$\therefore\vec{m}$与$\vec{n}$夹角为$\angle AMO$，

当$\triangle OAM$外接圆与CD相切时$\angle AMO$最大（即M在P点时），

由$CP^2=CA\cdot CO=6$，

$\vec{m}=(3-k)\vec{a}+k\vec{b}$，

$=\frac{3-k}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OD}$，

$=\frac{3-k}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{k}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}\right)$，

$=\overrightarrow{OC}+\frac{k}{3}\overrightarrow{CD}$，

易求$CD=3\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{k}{3}=\frac{CP}{CD}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$，

$\therefore k=\sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{\pi}{6}$，$\sqrt{2}$

四、解答题

17．【答案】(1) $k=-\frac{2}{3}$ (2) $k=-\frac{11}{2}$

(1) $k\vec{a}+2\vec{b}=(k-2,2k+8)$, $\vec{a}-3\vec{b}=(1+3,2-12)=(4,-10)$，

由题意得：$-10(k-2)-4(2k+8)=0$，解得：$k=-\frac{2}{3}$

(2)由题意得：$4(k-2)-10(2k+8)=0$，

解得：$k=-\frac{11}{2}$

18．【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$ (2) $CD=\frac{\sqrt{39}}{2}$

(1)由正弦定理及余弦定理有$\frac{a^2b\sin C}{a}=\frac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2ab}=\sqrt{3}\cos C$

$\Rightarrow\tan C=\sqrt{3}$，又因为$0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\because CD$是AB边上的中线，$\therefore \overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$\therefore \overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}\left(CA^2+CB^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{4}\left(25+4+2\times5\times2\times\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{39}{4}$.

$\therefore CD=\frac{\sqrt{39}}{2}$.

19．【答案】(1) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{26}{7}$

(1)$\because \left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=61$，$\therefore 4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2=61$，

又$\because |\vec{a}|=4,|\vec{b}|=3$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\frac{1}{2}$.

$\because\ \theta\in[0,\pi]$，$\therefore\ \theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)$\because\ \left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=49$，$\therefore\ \left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=7$，

$\therefore$ 向量$\vec{a}$在向量$2\vec{a}+\vec{b}$上的投影为$|\vec{a}|\cdot\dfrac{\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|}=\dfrac{2\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|}=\dfrac{26}{7}$.

20.　【答案】(1) $\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $\dfrac{45}{14}$

(1)在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即$\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{5}{\sin\angle CAD}$，解得$\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}$，

$\because\ AC>CD$，且$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\ 0<\angle CAD<\dfrac{\pi}{3}$，即$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore\ \angle BAC=\angle BAD-\angle CAD=\dfrac{2\pi}{3}$；

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$

$=(3\sqrt{3})^2+(5\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}\times5\sqrt{3}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}=147$，解得$BC=7\sqrt{3}$，

又$\because\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times5\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore\triangle ABC$的边BC上高的大小为$\dfrac{\dfrac{45\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{1}{2}\times7\sqrt{3}}=\dfrac{45}{14}$.

21.　【答案】(1) $\tan\theta=-\sqrt{35}$

(2) $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|$的最小值为$\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}$与$x\vec{a}+\vec{b}$垂直

(1)解：$\because\ \vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{a}+4\vec{b}$垂直，$\therefore\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+4\vec{b}\right)=0$，

$\therefore\ \vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}^2=0$，即$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-8\left|\vec{b}\right|^2=0$.

$\because\ \left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=1$，$\therefore\ 9+6\cos\theta-8=0$，$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{1}{6}$.

$\because\ \theta\in[0,\pi]$，$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$，$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{35}$.

(2)解：当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=1\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|^2=x^2\vec{a}^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=x^2\left|\vec{a}\right|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

$=9x^2+2x\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=9x^2+3\sqrt{3}x+1$，

$\therefore\ x=-\dfrac{3\sqrt{3}}{18}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|$的最小值为$\dfrac{1}{2}$，

此时$\vec{a}\cdot\left(x\vec{a}+\vec{b}\right)=x\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=x\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=9x+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

$\therefore\vec{a}$与$x\vec{a}+\vec{b}$垂直.

22. 【答案】(1)$\left[-1,2\right]$；(2)$\left(2,3\right]$.

(1)（1）依题意，$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$，

由$x\in\left[0,\pi\right]$得$x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\sin(x+\frac{\pi}{6})\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以$f\left(x\right)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$在$\left[0,\pi\right]$上的值域为$\left[-1,2\right]$.

(2)由$f\left(A\right)=2\sin(A+\frac{\pi}{6})=2$得，$\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$，$A\in\left(0,\pi\right)$，则有$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得$A=\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，$1=a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geq(b+c)^2-\frac{3(b+c)^2}{4}=\frac{(b+c)^2}{4}$，

当且仅当$b=c=1$时取“=“，即有$0<b+c\leq 2$，又因为$b+c>a=1$，则$1<b+c\leq 2$，

因此$2<b+c+a\leq 3$，

所以$\triangle ABC$的周长的取值范围为$\left(2,3\right]$.

第五章 平面向量及解三角形（中档卷）

一、单选题

1．【答案】B

由$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，平方得$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$.

故选：B.

3．【答案】B

由正弦定理可知，$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C\Leftrightarrow a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow\cos C>0$，

$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$不能得到$\triangle ABC$是锐角三角形,但$\triangle ABC$是锐角三角形,则$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$.

故“$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$”是“$\triangle ABC$是锐角三角形”的必要不充分条件，

故选:B.

4．【答案】D

由题意得，在$Rt\triangle ABM$中，$AM=\dfrac{AB}{\sin15^\circ}$，

在$\triangle ACM$中，$\angle CAM=30^\circ+15^\circ=45^\circ$，$\angle AMC=180^\circ-15^\circ-60^\circ=105^\circ$，

所以$\angle ACM=30^\circ$，由正弦定理$\dfrac{AM}{\sin\angle ACM}=\dfrac{CM}{\sin\angle CAM}$，

得$CM=\dfrac{\sin\angle CAM}{\sin\angle ACM}\cdot AM=\dfrac{\sqrt{2}AB}{\sin15^\circ}$，

又$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

在$Rt\triangle CDM$中，$CD=CM\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{6}AB}{2\sin15^\circ}=\dfrac{12\sqrt{6}}{2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=36+12\sqrt{3}\approx57$.

故选：D.

6．【答案】D

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得：$\cos C=\dfrac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\dfrac{49+9-25}{2\times7\times3}=\dfrac{11}{14}$，

因为$C\in(0,\pi)$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得：$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即$\dfrac{AB}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\dfrac{7}{\sin45^\circ}$，

解得：$AB=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

故选：D

7．【答案】B

因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{15}{2}$，$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{CB}$方向上的投影为$-\frac{5}{2}$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{5}{2}\times\left|\overrightarrow{CB}\right|=-\frac{15}{2}$，解得：$\left|\overrightarrow{CB}\right|=3$.

因为$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=\sqrt{19}$，所以$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=19$，即$|\overrightarrow{CA}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=19$，所以$|\overrightarrow{CA}|^2+2\times\left(-\frac{15}{2}\right)+3^2=19$，解得：$|\overrightarrow{CA}|=5$.

因为P为线段AB上的一点，且$\overrightarrow{CP}=\frac{\lambda\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\mu\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}(\lambda,\mu\in\mathrm{R})$，所以$\frac{\lambda}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\mu}{|\overrightarrow{CB}|}=1$，即$\frac{\lambda}{5}+\frac{\mu}{3}=1$.

所以$\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}=\left(\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{5}+\frac{\mu}{3}\right)=1+\frac{5\mu}{3\lambda}+\frac{3\lambda}{5\mu}+1\geq 2+2\sqrt{\frac{5\mu}{3\lambda}\times\frac{3\lambda}{5\mu}}=4$（当且仅当$\frac{5\mu}{3\lambda}=\frac{3\lambda}{5\mu}$时取等号）.

所以$\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}$的最小值为 4.

故选：B

8．【答案】C

$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}+2=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2=4$(当且仅当$a=b$时取等号)

由$c=3b\sin A$，可得$\sin C=3\sin B\sin A$

$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}+2=\frac{c^2+2ab\cos C}{ab}+2$

$=2+\frac{c^2}{ab}+2\cos C=2+\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}+2\cos C$

$=2+\frac{\sin^2 C}{\frac{1}{3}\sin C}+2\cos C=2+2\cos C+3\sin C$

$=2+\sqrt{13}\sin\left(C+\varphi\right)\leq 2+\sqrt{13}$， 其中$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}},\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$ ，当且仅当$C+\varphi=\frac{\pi}{2}$时取得等号,

所以$4\leq\frac{(a+b)^2}{ab}\leq 2+\sqrt{13}$

故选：C

二、多选题

9．【答案】BD

对于选项 A：若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\sqrt{2}=\sin\theta\cos\theta$，即$\sin 2\theta=2\sqrt{2}>1$，

所以不存在这样的θ，故 A 错误；

对于选项 B：若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=0$，即$\cos\theta=-\sqrt{2}\sin\theta$，得$\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 B 正确；

对于选项 C：$|\vec{a}|=\sqrt{1+\sin^2\theta},|\vec{b}|=\sqrt{2+\cos^2\theta}$，当$|\vec{a}|=|\vec{b}|$时，$\cos 2\theta=-1$，

此时$\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，故 C 错误；

对于选项 D：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=-\sqrt{3}$，两边同时平方得$\cos^2\theta+2\sin^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sin\theta=3\cos^2\theta+3\sin^2\theta$，化简得$2\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta=0$，等式两边同除以$\cos^2\theta$得$\tan^2\theta-2\sqrt{2}\tan\theta+2=0$，

即$(\tan\theta-\sqrt{2})^2=0$，所以$\tan\theta=\sqrt{2}$，故 D 正确.

故选：BD.

10.　【答案】ACD

对于 A，由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=7$，解得$c=\sqrt{7}$，故 A 正确；

对于 B，根据正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$b>a$，所以$\angle B>\angle A$，所以$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$，故 B 不正确；

对于 C，由三角形的内角和可知$\angle A=105°$，又 $a=1$，利用正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，可知$b,c$均有唯一值，故 C 正确；

对于 D，根据正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$\sin B=\dfrac{1}{3}$，

又因为$a>b$，所以$\angle A>\angle B$，所以$\angle B$只能是锐角，故 D 正确；

故选：ACD

11.　【答案】ABC

由题意，分别以HD,BF所在的直线为x轴和y轴，建立如图所示的平面直角坐标系，

因为正八边形$ABCDEFGH$，所以$\angle AOH=\angle HOG=\angle AOB=\angle EOF=\angle FOG$

$=\angle DOE=\angle COB=\angle COD=\dfrac{360°}{8}=45°$，

作$AM\perp HD$，则$OM=AM$，

因为$OA=2$，所以$OM=AM=\sqrt{2}$，所以$A(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

同理可得其余各点坐标，$B(0,-2)$，$E(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(2,0)$，$H(-2,0)$，

对于 A 中，$\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=(0+\sqrt{2}+(-\sqrt{2}),-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})=\vec{0}$，故 A 正确；

对于 B 中，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2})\times 2+(-\sqrt{2})\times 0=-2\sqrt{2}$，故 B 正确；

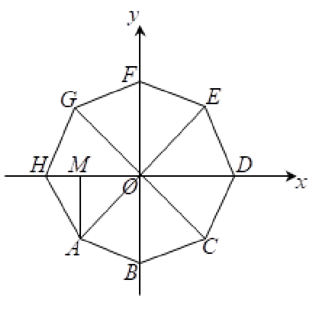
对于 C 中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EH}=(-2-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}=(-4,0)$，

所以$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}\right|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$，故 C 正确；

对于 D 中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{GH}=(-2+\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}=(-4+2\sqrt{2},0)$，

$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}\right|=\sqrt{(-4+2\sqrt{2})^2+0^2}=4-2\sqrt{2}$，故 D 不正确.

故选：ABC.



12.　【答案】BCD

解：因为在$\triangle ABC$中，$(a+b)$∶$(a+c)$∶$(b+c)$＝9∶10∶11，

所以$\begin{cases}a+b=9x\\a+c=10x\\b+c=11x\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4x\\b=5x\\c=6x\end{cases}$，

所以 sin A∶sin B∶sin C＝$a:b:c=4:5:6$，故 A 错误；

易角 C 为最大角，则$\cos C=\dfrac{16x^2+25x^2-36x^2}{2\cdot 4x\cdot 5x}=\dfrac{1}{8}>0$，所以角 C 为锐角，故$\triangle ABC$是锐角三角形，故 B 正确；

易角A为最小角，则$\cos C=\dfrac{36x^2+25x^2-16x^2}{2\cdot 6x\cdot 5x}=\dfrac{3}{4}$，所以$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{8}$，即$\cos 2A=\cos C$，又$2A\in(0,\pi)$，所以$2A=C$，故 C 正确；

设外接圆的半径为 R，则由正弦定理得$2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$，解得$R=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$，故正确；

故选：BCD

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．【答案】$\pm\dfrac{1}{2}$

解：因为$\vec{p}=\vec{a}+\dfrac{4}{3}m\vec{b}$与$\vec{q}=\vec{b}+3m\vec{a}$共线，可设$\vec{p}=\lambda\vec{q}$，

即$\vec{a}+\dfrac{4}{3}m\vec{b}=\lambda\left(\vec{b}+3m\vec{a}\right)$，因为$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，所以$\begin{cases}3m\lambda=1\\\dfrac{4}{3}m=\lambda\end{cases}$，所以$m=\pm\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\pm\dfrac{1}{2}$

14．【答案】$(1,\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},6)$

解：$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)$与$\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)$夹角为锐角时，$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)=2\lambda\vec{a}^2-\left(6+\lambda^2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+3\lambda\vec{b}^2=4\lambda-\left(6+\lambda^2\right)+3\lambda>0$；

解得$1<\lambda<6$；

当$\lambda=\sqrt{6}$时，$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)$与$\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)$分别为$\left(2\vec{a}-\sqrt{6}\vec{b}\right)$与$\left(\sqrt{6}\vec{a}-3\vec{b}\right)$同向，夹角为零，不合题意，舍去；

∴实数λ的取值范围为$\left(1,\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},6\right)$.

故答案为：$\left(1,\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},6\right)$.

15．【答案】直角三角形

因为$b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cos C$，

所以$\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 B=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

所以$2\sin^2 B\sin^2 C=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

因为$\sin B\neq 0$，$\sin C\neq 0$，

所以$\sin B\sin C=\cos B\cos C$，

所以$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$，

所以$\cos(B+C)=0$，

因为$0<B+C<\pi$，所以$B+C=\dfrac{\pi}{2}$，则$A=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$为直角三角形.

故答案为：为直角三角形.

16. 【答案】 $\dfrac{3}{2}$ $\sqrt{21}$

（1）由余弦定理知：$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C, a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$

又由正弦定理化简得：$\dfrac{2\sin A-\sin C}{\sin C}=\dfrac{b\cos C}{c\cos B}=\dfrac{\sin B\cos C}{\sin C\cos B}, A,B\in(0,\pi)$，即$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，即

$2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，又$A,B\in(0,\pi)$，

化简得$\cos B=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{\pi}{3}$，则$A+C=\dfrac{2}{3}\pi$

$y=\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2(\dfrac{2\pi}{3}-A)=\sin^2 A+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)^2$

$y=\dfrac{5}{4}\sin^2 A+\dfrac{3}{4}\cos^2 A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A$

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\dfrac{1}{4}\cos 2A+1=\dfrac{1}{2}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})+1$

又$A\in(0,\dfrac{2}{3}\pi)$，$2A-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，故当$2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin^2 A+\sin^2 C$取最大值为$\dfrac{3}{2}$.

（2）由题意得$AD=\dfrac{1}{3}b, DC=\dfrac{2}{3}b$，$BD=1$

在$\triangle ADB$与$\triangle CDB$中，分别有$\cos\angle ADB=\dfrac{1+\dfrac{1}{9}b^2-c^2}{\dfrac{2}{3}b}$，$\cos\angle CDB=\dfrac{1+\dfrac{4}{9}b^2-a^2}{\dfrac{4}{3}b}$

又$\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$，化简得$a^2+2c^2-3=\dfrac{2}{3}b^2=\dfrac{2}{3}(a^2+c^2-ac)$

整理得：$a^2+4c^2+2ac=9=(a+c)^2+3c^2$

令$\begin{cases}a+c=3\cos\theta\\ \sqrt{3}c=3\sin\theta\end{cases}$，结合辅助角公式有$a+3c=2\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta\le\sqrt{(2\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21}$，所以$a+3c$的最大值为$\sqrt{21}$

故答案为：$\dfrac{3}{2}$；$\sqrt{21}$

四、解答题

【答案】（1）最小正周期为2π，最大值为2；（2）2.

由$\vec{a}//\vec{b}$得：$\dfrac{1}{2}f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

则：$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

（1）$f(x)$最小正周期为：$T=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$

当$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$时，$f(x)_{\max}=2$

（2）由$f\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$得：$2\sin A=\sqrt{3}$，则$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由正弦定理可知：$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即$AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$

18. 【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{19}}{3}$

(1)解：因为$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$，由正弦定理可得$\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin C\cdot\cos A$

在$\triangle ABC$，$\sin C>0$，$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=1$

$\therefore 2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

又$A\in(0,\pi)$，$\therefore A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$

(2)解：$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$且$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\times3^2+\frac{4}{9}\times1^2+\frac{4}{9}\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{19}{9}$

$\therefore \left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\sqrt{19}}{3}$

20. 【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$ (2)6 或 $5+\sqrt{13}$

(1)$\because a\sin(A+B-C)=c\sin(B+C)$，则$\sin A\sin(\pi-2C)=\sin C\sin A$

$\because 0<A<\pi,\sin A\neq0$

$\therefore \sin 2C=\sin C$，即$2\sin C\cos C=\sin C$

$\because 0<C<\pi,\sin C\neq0$，则$\cos C=\frac{1}{2}$

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$

(2)$\because \triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则$\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$

$\therefore ab=4$

根据题意得$\begin{cases}ab=4\\2a+b=6\end{cases}$，则$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

若$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$，则$\triangle ABC$为等边三角形，$\triangle ABC$的周长为 6；

若$\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$，则$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=13$，即$c=\sqrt{13}$，$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{13}$

∴$\triangle ABC$的周长为6或$5+\sqrt{13}$

21. 【答案】(1)$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ (2)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-1=(\sin 2x,2\cos x)\cdot(\sqrt{3},\cos x)-1=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x+\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in Z$．

(2)∵$f\left(\frac{B}{4}\right)=2\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，

∴$\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$B\in(0,\pi)$，$\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$

∴$\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，∴$B=\frac{\pi}{3}$

∵$b^2=ac$，∴$\sin^2 B=\sin A\cdot\sin C$．

∴$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin^2 B}=\frac{1}{\sin B}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

22. 【答案】(1)条件选择见解析，$B=\frac{\pi}{3}$ (2)$\left[\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(1)解：选①，由$2b\sin C=\sqrt{3}c\cos B+c\sin B$及正弦定理可得$2\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos B+\sin C\sin B$，

所以，$\sin C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos B$，

因为B、$C\in(0,\pi)$，所以，$\sin C>0$，则$\sin B=\sqrt{3}\cos B>0$，

所以，$\tan B=\sqrt{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$；

选②，由$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{b}{2a-c}$及正弦定理可得$\sin B\cos C=(2\sin A-\sin C)\cos B$，

所以，$2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$，

∵A、$B\in(0,\pi)$，$\therefore\sin A>0$，所以，$\cos B=\frac{1}{2}$，则$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)解：因为$a+c=\sqrt{3}$，所以，$0<a<\sqrt{3}$，

由已知$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，即$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$，所以，$2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

所以，$4\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，

即 $4BD^2=c^2+a^2+2ac\cos\dfrac{\pi}{3}=c^2+a^2+ac=\left(a+c\right)^2-ac=3-a\left(\sqrt{3}-a\right)$

$=a^2-\sqrt{3}a+3=\left(a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\in\left[\dfrac{9}{4},3\right)$，

所以，$\dfrac{3}{4}\le BD<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

第五章 平面向量及解三角形（提高卷）

一、单选题

1．【答案】C

由题意$m^2=3$，得$m=\pm\sqrt{3}$，

又$\vec{a}$与$\vec{b}$反向共线，故$m=-\sqrt{3}$，此时$\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}=(-2\sqrt{3},6)$，

故$\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|=4\sqrt{3}$.

故选：C.

3．【答案】C

由已知及正弦定理得$b^2+c^2=\dfrac{4}{3}a^2$，所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{a^2}{6bc}$，所以$\dfrac{\sin A\tan A}{\sin B\sin C}=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A\sin B\sin C}=\dfrac{6bc}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{bc}=6$.

故选：C.

4．【答案】B

如图所示，OP为塔体，AC,BD为李老师观察塔顶时的站位，Q为A,B在OP上的射影，

由已知得$\triangle PQA,\triangle PQB$为直角三角形，$\angle PAQ=45°$，$\angle PBQ=30°$，$AB=50$(米)，$OQ=CA=DB=1.7$(米),设$PQ=x$，

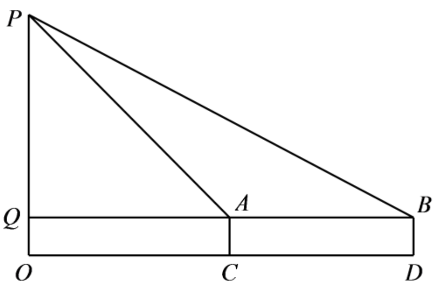
则$QA=x$，$QB=\sqrt{3}x$.

$\therefore AB=QB-QA=\sqrt{3}x-x=\left(\sqrt{3}-1\right)x=50$，

$\therefore x=\dfrac{50}{\sqrt{3}-1}=25\left(\sqrt{3}+1\right)\approx 25\times\left(1.732+1\right)=68.3$，

$\therefore$塔高$h=x+1.7\approx 70$(米),

故选：B



5．【答案】A

如图（1）所示，设$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AE},\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\overrightarrow{AF},\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AG}$，则$\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}$都是单位向量，

因为$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，所以$(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|})^2=(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})^2$，可得$\cos\angle BAD=-\dfrac{1}{2}$，

又因为$0\le\angle BAD\le\pi$，所以$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，且$AC$为$\angle BAD$的平分线，所以C不正确；

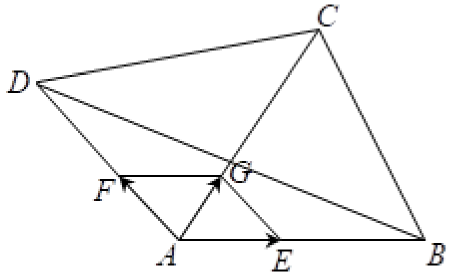
在$\triangle ABD$中，因为$AB=AD=2$，且$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，

可得$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

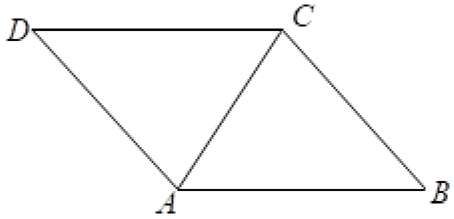
所以四边形 $ABCD$ 的面积大于 $\sqrt{3}$，所以 A 正确；

如图图（2）所示只有当 $AC=2$ 时，此时凸四边形 $ABCD$ 才能为平行四边形且为菱形，所以 B、D 不正确；

故选：A.



图（1）



图（2）

6. 【答案】A

因为 A，B，C 三点共线，所以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 共线，

所以存在 $\lambda \in \mathrm{R}$，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，即 $(a-1)\vec{e}_1+\vec{e}_2=\lambda\left(2b\vec{e}_1-\vec{e}_2\right)$，

即 $(a-1)\vec{e}_1+\vec{e}_2=2\lambda b\vec{e}_1-\lambda\vec{e}_2$，

因为 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}a-1=2b\lambda\\1=-\lambda\end{cases}$，消去 λ，得 $a+2b=1$，

因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+2b)=4+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 4+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4+2\times 2=8$，当且仅当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，等号成立.

故选：A

7. 【答案】C

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$C=\frac{\pi}{3}$，设 AB 边上的高为 h，

所以 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$

由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$，

所以 $a=4\sin A$，$b=4\sin B$，$c=2\sqrt{3}$，因为 $S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}$，

所以 $h=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}ab}{c}=4\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=2\sqrt{3}\sin A\cos A+2\sin^2 A=\sqrt{3}\sin 2A+1-\cos 2A=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1$

因为 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\frac{1}{2}<\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$，

所以 $2<2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1\leq 3$，所以高的取值范围为 $(2,3]$.

故选：C.

8. 【答案】C

设三角形的三条边为 a，b，c，设 BC 中点为 D，

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$，$\therefore 2b^2+2c^2-a^2=28$

同理，$2a^2+2b^2-c^2=28, 2a^2+2c^2-b^2=4$

$\therefore\begin{cases}a^2=\frac{28}{3}\\ b^2=\frac{100}{3}\\ c^2=\frac{28}{3}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=\frac{2\sqrt{21}}{3}\\ b=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ c=\frac{2\sqrt{21}}{3}\end{cases}$，$a+c=\frac{4\sqrt{21}}{3}>\frac{10\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$可以构成三角形

$a^2+c^2-b^2=\frac{56}{3}-\frac{100}{3}=-\frac{44}{3}$，$\therefore\cos B<0$，

$\therefore \triangle ABC$ 为钝角三角形，

故选：C

二、多选题

9. 【答案】ABC

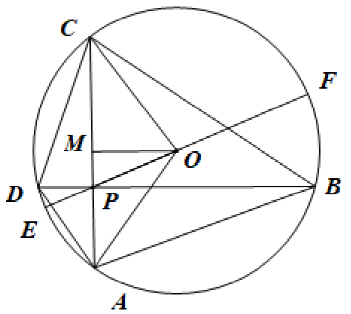
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+(-1)\times(-2)=5$，A 正确；$\mathbf{\vec{a}-\vec{b}=(2,1),\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}}$，B 正确；

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，则 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{4}$，C 正确；

$3\times(-2)\neq(-1)\times1$，D 错误.

故选：ABC.

11. 【答案】AC



如图，设直线 PO 与圆 O 于 E，F.

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|=-|EP||PF|=-\left(|OE|-|PO|\right)\left(|OE|+|PO|\right)=|PO|^2-|EO|^2=-2$,

故 A 正确.

取 AC 的中点为 M，连接 OM，则

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{MC}^2$

$=\overrightarrow{OM}^2-\left(4-\overrightarrow{OM}^2\right)=2\overrightarrow{OM}^2-4$，

而$0\le\overrightarrow{OM}^2\le\left|OP\right|^2=2$，故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$的取值范围是$\left[-4,0\right]$，故 B 错误.

当$AC\perp BD$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}\right)=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$

$=-\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{CP}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|\left|\overrightarrow{PD}\right|=-2\left|EP\right|\left|PF\right|=-4$，故 C 正确.

因为$\left|\overrightarrow{AC}\right|\le4,\left|\overrightarrow{BD}\right|\le4$，故$\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\le16$，故 D 错误.

故选：AC

12．【答案】ACD

对于 A 选项，重心为中线交点，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，即$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，

因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\mu\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$，

则$\overrightarrow{AO}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda-\mu}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\mu}{1-\lambda-\mu}\overrightarrow{OC}$，

所以$\dfrac{\lambda}{1-\lambda-\mu}=1$，$\dfrac{\mu}{1-\lambda-\mu}=1$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$，故 A 正确；

对于 B 选项，内心为角平分线交点，则$BC\cdot\overrightarrow{OA}+AC\cdot\overrightarrow{OB}+AB\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

即$4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，所以$\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OC}$，

由 A 选项，则$\dfrac{\lambda}{1-\lambda-\mu}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{\mu}{1-\lambda-\mu}=\dfrac{3}{4}$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{3}{5}$，故 B 错误；

对于 C 选项，外心为垂直平分线交点，即$\triangle ABC$的外接圆圆心，

因为$AB=AC=3$，设D为边BC的中点，

所以$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AO}//\overrightarrow{AD}$，

所以$\lambda=\mu$，

因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AO}^2=\lambda^2\overrightarrow{AB}^2+\lambda^2\overrightarrow{AC}^2+2\lambda^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

在$\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$，则$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\dfrac{BC}{\sin A}=2R=2\left|\overrightarrow{AO}\right|$，

所以$\left(\dfrac{4}{2\times\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}\right)^2=9\lambda^2+9\lambda^2+2\lambda^2\cdot3\times3\times\dfrac{1}{9}$，易知$\lambda>0$，所以$\lambda=\dfrac{9}{20}$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{9}{10}$，故 C 正确；

对于 D 选项，垂心为高线交点，设$BE\perp AC$，垂足为边AC上点E，则B，E，O共线，

由 C 选项，因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，$\lambda=\mu$，

所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AC}^2$，

因为$OB\perp AC$，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=-\lambda\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AC}^2$，即$(1-\lambda)\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AC}^2$，

因为$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}$，所以$(1-\lambda)\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AC}^2$，即$(1-\lambda)\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AC}^2$，

因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}AC\cdot BE$，所以$BE=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$，

所以$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$，

所以$(1-\lambda)\times\dfrac{1}{3}\times3=\lambda\times3^2$，解得$\lambda=\dfrac{1}{10}$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{1}{5}$，故 D 正确；

故选：ACD

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．【答案】$(3,3)$

解：$\because A(-2,-1)$，$B(3,4)$，$C(-1,1)$，$D(3,3)$，

$\therefore\overrightarrow{AB}=(3,4)-(-2,-1)=(5,5)$，$\overrightarrow{CD}=(3,3)-(-1,1)=(4,2)$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=5\times4+5\times2=30$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

所以$\therefore\overrightarrow{CD}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影向量为$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{30}{5\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{5\sqrt{2}}(5,5)=(3,3)$；

故答案为：$(3,3)$

14．【答案】$A=B=\dfrac{\pi}{6}$（答案不唯一）

由正弦定理得：$a=2R\sin A,b=2R\sin B$，

$\because\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$，$\therefore\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$，

$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

$\therefore\sin 2A=\sin 2B$，

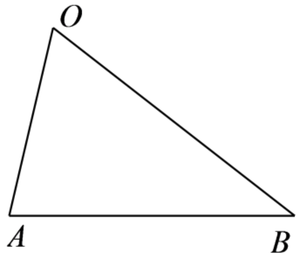
$\because A\in(0,\pi),B\in(0,\pi)$

$\therefore A=B=\dfrac{\pi}{6}$（答案不唯一）.

故答案为：$A=B=\dfrac{\pi}{6}$（答案不唯一）.

15．【答案】$\frac{9}{8}$

解：不妨设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，则向量问题可转化为如下解三角形问题：

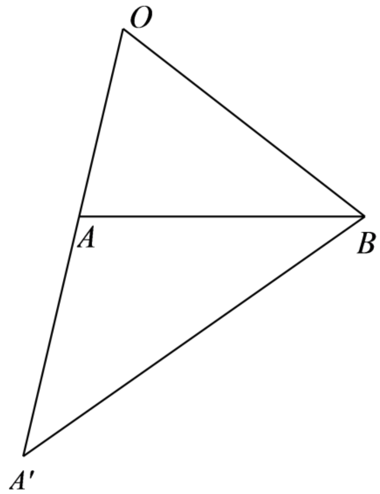


由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB\Rightarrow\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$，为锐角，

同时由余弦定理，$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB}=1$

而 $\vec{c_i}=\vec{a}+t_i\vec{a_0}\left(t_i>0\right)$ 实际上表示的是 OA 的延长线 OA'．

故 $\vec{c_i}-\vec{b}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA'}$，而 $-\vec{b}=\overrightarrow{BO}$，则 $\vec{c_i}-\vec{b}$ 与 $-\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\angle A'BO$．



可知，随着 $|OA'|$ 的增大，$\angle A'BO$ 也在增大，则 $\cos\theta$ 在减小，

由题意，只需求 $\cos\theta$ 所趋近的最大值和最小值即可．

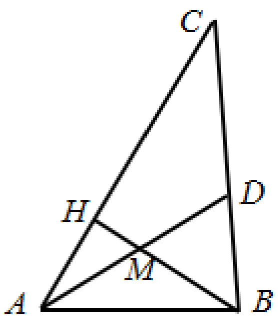
第一种极限情况，当 A' 与 A 重合时，$\cos\theta=\cos\angle ABO=\frac{|BO|^2+|BA|^2-|OA|^2}{2\cdot|BO|\cdot|BA|}=\frac{7}{8}$

第二种极限情况，当 A' 位于 OA 的延长线无穷远处时，BA' 可看作与 OA' 平行，根据两条平行直线同旁内角互补的性质，$\cos\theta=\cos(\pi-\angle AOB)=-\cos\angle AOB=-\frac{1}{4}$，

由于 $k>\left|\cos\theta_1-\cos\theta_2\right|$ 恒成立，则 $k\geq\left|\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right|=\frac{9}{8}$，则 k 的最小值为 $\frac{9}{8}$．

故答案为：$\frac{9}{8}$

16．【答案】　$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　$\frac{5}{21}$



在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的角平分线，所以$\angle BAD=\angle DAC\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

因为$|AD|=|CD|$，所以$\angle C=\angle DAC$.

因为$\tan\angle DAC=\dfrac{1}{2}$，又$\sin^2\angle DAC+\cos^2\angle DAC=1$，解得

$\sin\angle DAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos\angle DAC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以$\cos C=\cos\angle DAC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\triangle ADC$中，设$AC=m,AD=n$则$CD=n$，由余弦定理得：$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos C$，即

$n^2=m^2+n^2-2mn\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即$m=n\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，所以$\dfrac{|AC|}{|AD|}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

在$\triangle ABC$中，$\sin\angle C=\sin\angle DAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos C=\cos\angle DAC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为AD是$\angle BAC$的角平分线，所以$\sin\angle CAB=\sin 2\angle DAC$

所以$\sin\angle CAB=2\sin\angle DAC\cos\angle DAC=2\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\angle CAB=1-2\sin^2\angle DAC=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{3}{5}$

所以$\sin\angle CBA=\sin\left(\angle BAC+\angle C\right)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

由正弦定理得：$\dfrac{AC}{\sin\angle CBA}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

所以$BC=\dfrac{\sin\angle CAB}{\sin\angle CBA}AC=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{11}{25}\sqrt{5}}m=\dfrac{4\sqrt{5}}{11}m$.而$CD=AD=\dfrac{\sqrt{5}}{4}m$，

所以$\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{4\sqrt{5}}{11}}=\dfrac{11}{16}$.

取$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$为基底，则由$H$、$M$、$B$三点共线可得：$\overrightarrow{AM}=(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+\lambda\overrightarrow{AB}$ ①；、

由C、D、B三点共线可得：$\overrightarrow{AD}=(1-\mu)\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AB}$；

即$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\mu\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$，所以$\overrightarrow{CD}=\mu\overrightarrow{CB}$,所以$\mu=\dfrac{11}{16}$.

即 $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{16}\overrightarrow{AC}+\frac{11}{16}\overrightarrow{AB}$ ②.

因为 M 是 AD 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$，①式可化为：$2\overrightarrow{AM}=2(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+2\lambda\overrightarrow{AB}$，

即 $\overrightarrow{AD}=2(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+2\lambda\overrightarrow{AB}$ ③

设 $\frac{|AH|}{|AC|}=t$，则 $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC}$

②③对照得：$\begin{cases}2\lambda=\frac{11}{16}\\2(1-\lambda)t=\frac{5}{16}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{11}{32}\\t=\frac{5}{21}\end{cases}$，即 $\frac{|AH|}{|AC|}=\frac{5}{21}$.

故答案为：$\frac{4\sqrt{5}}{5}$；$\frac{5}{21}$

四、解答题

17. 【答案】(1) $B=\frac{\pi}{4}$；(2) $\frac{17}{8}$

(1) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，

$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore A-B=\frac{\pi}{6}$，

又 $\because A+B=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore B=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\vec{m}\cdot\vec{n}=3\sin A+\cos 2A=-2\sin^2 A+3\sin A+1$，

$\because C=\frac{\pi}{3}$，$\therefore A\in(0,\frac{2\pi}{3})$，$\sin A\in(0,1]$，

$\therefore$ 当 $\sin A=\frac{3}{4}$ 时，$\vec{m}\cdot\vec{n}$ 有最大值 $\frac{17}{8}$.

18. 【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\sqrt{7}$

(1)解：（1）若选①，即 $\cos 2A=\cos(B+C)$，得 $2\cos^2 A-1=-\cos A$，

$\therefore 2\cos^2 A+\cos A-1=0$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$（舍去），

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

若选②：$a\sin C=\sqrt{3}c\cos A$，

由正弦定理，得 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos A$，

$\because A$，$C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C>0$，则 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

(2)解：AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$

$=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$

$=\frac{1}{4}(c^2+2c\cdot b\cos\frac{\pi}{3}+b^2)$，

$=\frac{1}{4}(4^2+2\times4\times2\times\cos\frac{\pi}{3}+2^2)=7$，

$\therefore AD=\sqrt{7}$．

19.　【答案】(1) $B=\frac{2\pi}{3}$ (2) $\left(0,2\right)$

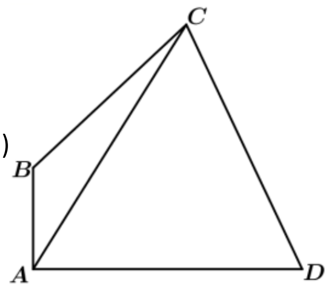
(1)由 $2S=-\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，

可得 $2\times\frac{1}{2}ac\sin B=-\sqrt{3}ac\cos B$，

即 $\sin B=-\sqrt{3}\cos B$，可得 $\tan B=-\sqrt{3}$，

因为 $B\in\left(0,\pi\right)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$，

(2)



$\because \angle BAC=\theta$，则 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\angle CDA=\theta+\frac{\pi}{6}$，

在三角形 ACD 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，

可得 $AC=\frac{AD\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

在三角形 ABC 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\theta}$，

可得 $BC=f\left(\theta\right)=\frac{AC\cdot\sin\theta}{\sin B}=\frac{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\theta}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\theta$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\times\frac{1-\cos2\theta}{2}+\sin2\theta\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin2\theta-\sqrt{3}\cos2\theta\right)+1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+1$，

因为$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，

可得$-\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$，

当$2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$时，即$\theta=\frac{\pi}{3}$，

可得$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}+1=2$，

当$2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$时，即$\theta=0$，

可得$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$，

所以$f(\theta)$的值域为$(0,2)$.

20.　【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$ (2)6

(1)选① $b\cos A+a\cos B=2c\cos C$，得$\sin B\cos A+\sin A\cos B=2\sin C\cos C$

$\therefore \sin(A+B)=\sin C=2\sin C\cos C$

$\because C\in(0,\pi)$

$\therefore \sin C\neq 0$

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}(0<C<\pi)\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$

选② $(a+b+c)(a+b-c)=3ab\Rightarrow(a+b)^2-c^2=3ab\Rightarrow c^2=a^2+b^2-ab$

$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}(0<C<\pi)\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$

选③ $\cos 2C+\cos C=0\Rightarrow 2\cos^2 C+\cos C-1=0\Rightarrow(2\cos C-1)(\cos C+1)=0$

又$0<C<\pi$

所以$\cos C=\frac{1}{2}$，

所以$C=\frac{\pi}{3}$

(2)由余弦定理知：$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$

由基本不等式知：$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

所以$c^2=(a+b)^2-3ab\geq(a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2=\frac{1}{4}(a+b)^2$

所以：$a+b\leq 2c=4$ (当且仅当$a=b$时，等号成立)，

所以$a+b+c\leq 6$

综上：$\triangle ABC$的周长的最大值为6.

21．【答案】(1) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(1)解：由题意可知 $\angle AON=\frac{2\pi}{3},\angle OAB=\theta$，

若 P 在 O 的正北方向，则 $OP\perp OA$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$OA=\frac{2}{\tan\theta}$，

在 $\triangle OPB$ 中，$\angle B=\frac{\pi}{3}-\theta,\angle OPB=\frac{\pi}{2}+\theta$，

由正弦定理可得 $\frac{OP}{\sin\angle B}=\frac{OB}{\sin\angle OPB}$，

所以 $OB=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{2\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}=\frac{4}{\sqrt{3}-\tan\theta}$，

则 $OA+OB=\frac{2}{\tan\theta}+\frac{4}{\sqrt{3}-\tan\theta}=\frac{2\tan\theta+2\sqrt{3}}{-\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta}$

$$=\frac{2}{\frac{-\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{3}\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)-6}{\tan\theta+\sqrt{3}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}-\left(\tan\theta+\sqrt{3}+\frac{6}{\tan\theta+\sqrt{3}}\right)}$$

$$\geq\frac{2}{3\sqrt{3}-2\sqrt{\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{6}{\tan\theta+\sqrt{3}}}}=\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{3},$$

当且仅当 $\tan\theta+\sqrt{3}+\frac{6}{\tan\theta+\sqrt{3}}$，即 $\tan\theta=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ 时，取等号，

所以 A，B 到市中心 O 的距离和最小时 $\tan\theta=\sqrt{6}-\sqrt{3}$；

(2)解：因为 $\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{BP}^2\geq 11\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，

所以 $\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{BP}^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}\geq 9\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，

即 $\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{BP}\right)^2\geq 9\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，

即 $\overrightarrow{OB}^2\geq 9\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)$，

因为 OP 平分 $\angle AOB$，

所以 $\angle AOP=\angle BOP=\frac{\pi}{3}$，

则 $100\geq 9\overrightarrow{OP}^2-45\left|\overrightarrow{OP}\right|$，

所以 $0<\left|\overrightarrow{OP}\right|\leq\frac{20}{3}$，

因为 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}$，

所以 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $10\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|+10\left|\overrightarrow{OP}\right|$，

所以$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{10\left|\overrightarrow{OP}\right|}{10-\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \dfrac{10}{\dfrac{10}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}-1}$，

因为$0 < \left|\overrightarrow{OP}\right| \le \dfrac{20}{3}$，

所以当$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \dfrac{20}{3}$时，$\left|\overrightarrow{OA}\right|$有最大值 20，

此时在$\triangle AOP$中，$\dfrac{20}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)} = \dfrac{\dfrac{20}{3}}{\sin\theta}$，

即$\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta} = \dfrac{1}{3\sin\theta}$，

所以$3 = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{1}{2}$，

所以$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$，

所以当A到市中心O的距离最大时$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

22. 【答案】(1) $\dfrac{27}{28}$；(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$.

(1) $b\sin A = a\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$，由正弦定理得：

$\sin B\sin A = \sin A\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\sin A\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B$，

所以$\dfrac{1}{2}\sin A\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B = 0$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A \ne 0$，

所以$\dfrac{1}{2}\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B = 0$，即$\tan B = \sqrt{3}$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B = \dfrac{\pi}{3}$，

因为$a = 3$，$c = 2$，由余弦定理得：$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B = 9+4-6 = 7$，

因为$b > 0$，所以$b = \sqrt{7}$，

其中$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以$BD = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$，

因为点E为线段BD的中点，所以$BE = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，

由题意得：$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}$，

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BE}\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{BE}^2+0=\dfrac{27}{28}$.

(2)由（1）知：$B=\dfrac{\pi}{3}$，又 $c=2$，

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}$，

所以 $a=\dfrac{2\sin A}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{2\sin A}{\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A}=\dfrac{4}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}}$，

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\C=\dfrac{2\pi}{3}-A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，解得：$A\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $\tan A\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，$\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}\in(0,3)$，$1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}\in(1,4)$，

故 $a=\dfrac{4}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}}\in(1,4)$，

$\triangle ABC$ 面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$

故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.

第 01 讲 平面向量的概念及其线性运算（精练）

一、单选题

1【答案】D

【详解】

单位向量的方向不一定相同，故 A 错误；

当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，显然 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不一定平行，故 B 错误；

非零向量 $\vec{a}$ 共线的单位向量有 $\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，故 C 错误；

由共线定理可知，若存在非零实数 λ,μ，使得 $\lambda\vec{a}=u\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，故 D 正确.

故选：D.

2【答案】B

【详解】

对于 A 选项，由于任意两个向量不能比大小，故 A 错；

对于 B 选项，$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，故 B 对；

对于 C 选项，$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同，故 C 错；

对于 D 选项，若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$，但 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的方向不确定，故 D 错.

故选：B.

3．【答案】A

【详解】

$\overrightarrow{AB}=(3,-4)$，设与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 (x,y)

则 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\3y-(-4)x=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\y=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$

当 $\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\y=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 时，所求向量为 $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，向量 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)=5\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，符合题意；

当 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$ 时，所求向量为 $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，向量 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)=-5\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，不符合题意，舍去.故选：A

4．【答案】D

【详解】

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

故选：D

5．【答案】D

【详解】

$\because \overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b},\overrightarrow{BD}=2\vec{a}+10\vec{b}$ 不满足共线定理，A 错误；

$\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b},\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$ 不满足共线定理，B 错误；

$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{a}+8\vec{b}=-\vec{a}+13\vec{b}$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+5\vec{b}+2\vec{a}+10\vec{b}=3\vec{a}+15\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 不满足共线定理，C 错误；

$\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+10\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，D 正确.

故选：D.

6．【答案】C

【详解】

解：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

故选：C.

7．【答案】B

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 表示 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向上的单位向量，

由 $\vec{a}=2\vec{b}$ 可知，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同，所以 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立；

所以充分性成立，

若 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同，即 $\vec{a}=\lambda\vec{b}\left(\lambda>0\right)$，得不出 $\vec{a}=2\vec{b}$

所以必要性不成立，

所以 $\vec{a}=2\vec{b}$ 是 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分不必要条件，

故选：B.

8．【答案】B

【详解】

因平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，则 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

而 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AD},(m>0,n>0)$，于是得 $\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2n}\overrightarrow{AN}$，又点 M，O，N 共线，

因此，$\frac{m}{2}+\frac{1}{2n}=1$，即 $mn+1=2n$，又 $mn=\frac{1}{3}$，解得 $m=\frac{1}{2},n=\frac{2}{3}$，

所以 $\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$.

故选：B

9．【答案】B

【详解】

由题设，$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{9}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{CB}$，

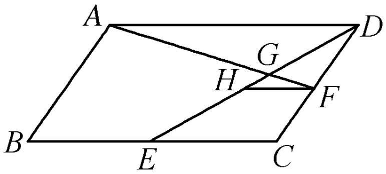
所以 C,P,B 共线且 P 在 CB 延长线上，$\frac{BP}{CB}=\frac{2}{9}$.

故选：B

10．【答案】B

【详解】

解：如图，



过点 F 作 BC 的平行线交 DE 于 H，

则 H 是 DE 的中点，且 $HF=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{4}BC$，

$\therefore HF=\frac{1}{4}AD$，

又 $\triangle AGD\sim\triangle FGH$，

所以 $\frac{AG}{GF}=\frac{AD}{FH}$，即 $FG=\frac{1}{4}AG$，

所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AF}$，

又 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$

故选：B

二、填空题

11．【答案】$\frac{\sqrt{5}}{6}$

【解析】

【详解】

$\because \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+4n\overrightarrow{AE}$，

又$\because$ P 为 BE 上一点，

所以 $m+4n=1$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+4n)=5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geq 5+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=9$，

当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$ 即 $m=\frac{1}{3}$ 且 $n=\frac{1}{6}$ 时，取等号，

$\therefore$向量$\vec{a}=(m,n)$的模为$\sqrt{m^2+n^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

12．【答案】$\sqrt{5}-1$

【详解】

由题意可知，$\because \dfrac{MN}{AM}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore \dfrac{QN}{AN}=\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$\overrightarrow{QN}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{NA}$，$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CP},\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}$，

$\overrightarrow{QN}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{NA}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MN}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CP}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{NM}$，

又$\overrightarrow{QN}=x\overrightarrow{CP}+y\overrightarrow{NM}$，所以$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

所以$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}-1$.

故答案为：$\sqrt{5}-1$.

三、解答题

13．【答案】(1) $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ (2) $\lambda=\dfrac{5}{6}$，$\mu=\dfrac{2}{5}$

(1)解：因为$2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}$，

所以$2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}$，即$3\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2)解：若$\dfrac{DF}{DE}=\lambda$，$\dfrac{AE}{AC}=\mu$，则$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DE}$

所以$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AF}=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AE}=4(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\mu\overrightarrow{AC}=4(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\mu\vec{b}$

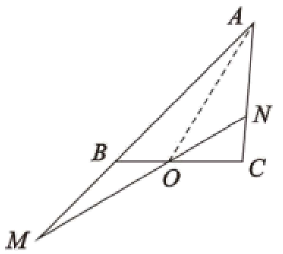
由于$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$，

所以$4(1-\lambda)=\dfrac{2}{3}$，$\lambda\mu=\dfrac{1}{3}$，解得$\lambda=\dfrac{5}{6}$，$\mu=\dfrac{2}{5}$.

所以$\lambda=\dfrac{5}{6}$，$\mu=\dfrac{2}{5}$.

14．【答案】(1)3(2)2

(1)连接AO.



因为$OC=2OB$，$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，

所以$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}m\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}n\overrightarrow{AN}$.

因为M，O，N共线，

所以$\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}n=1$，$2m+n=3$.

(2)

显然$t>0$，所以$\frac{t}{m}+\frac{t}{n}\geq 2+\sqrt{2}$等价于$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq\frac{2+\sqrt{2}}{t}$，

即$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)_{\min}\geq\frac{2+\sqrt{2}}{t}$.

因为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(2m+n)=\frac{1}{3}\left(3+\frac{2m}{n}+\frac{n}{m}\right)\geq 1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$，当且仅当$n=\sqrt{2}m$，

即$m=3-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$n=3\sqrt{2}-3$时，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$取到最小值$1+\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{3}$.

于是$\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{3}\geq\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}}{t}$，

∴$t\geq 6-3\sqrt{2}$.

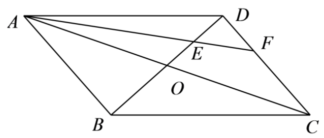
故实数t的最小整数值是 2.

第 02 讲 平面向量基本定理及坐标表示（精练）

一、单选题

1． 【答案】A

解：依题意$\triangle DEF \backsim \triangle BEA$，所以$\dfrac{DF}{AB}=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{1}{3}$，即$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，



所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$；

故选：A

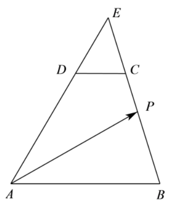
2．【答案】A

【详解】

解：延长AD、CB交于点E，则B、P、E三点共线，于是可得$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AE}$，

因为$AB//CD$且$AB=4CD$，所以$\overrightarrow{AE}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AD}$，故$\lambda=\dfrac{4}{5}$；



故选：A

3．【答案】A

因为点D是线段BC的中点，E是线段AD的靠近A的三等分点，

所以$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD})$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{BA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，

故选：A

4． 【答案】A

因为$\vec{a}=\left(-1,2\right),\vec{b}=\left(1,-2\lambda\right)$，

所以$\vec{a}+3\vec{b}=\left(2,2-6\lambda\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-2,2+2\lambda\right)$.

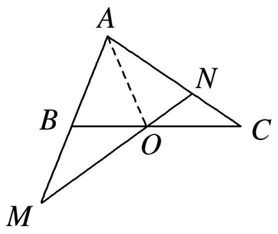
因为$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)//\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，

所以$2\times\left(2+2\lambda\right)=\left(-2\right)\times\left(2-6\lambda\right)$，解得：$\lambda=1$.

故选：A

5. 【答案】C

如图，连接AO，由O为BC的中点可得，$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$

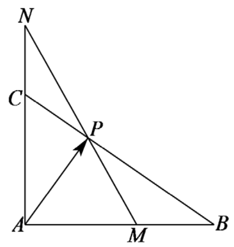


$\because M$，O，N三点共线，则$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$,即$m+n=2$

故选： C

6. 【答案】B

如下图所示：



由$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$，可得$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

若$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，$\left(m>0,n>0\right)$，

则$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{n}\overrightarrow{AN}$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3m}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3n}\overrightarrow{AN}$，

$\because M$、P、N三点共线，

$\therefore\frac{1}{3m}+\frac{2}{3n}=1$，$\therefore\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=3$，

故A正确；

所以$m=\frac{1}{2}$，$n=2$时，也满足$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=3$，则D选项正确；

$\because m+2n=\left(m+2n\right)\left(\frac{1}{3m}+\frac{2}{3n}\right)=\frac{2n}{3m}+\frac{2m}{3n}+\frac{5}{3}\geq2\sqrt{\frac{2n}{3m}\cdot\frac{2m}{3n}}+\frac{5}{3}=3$，当且仅当$m=n$时，等号成立，C选项成立；

$\because m+n=\left(m+n\right)\left(\frac{1}{3m}+\frac{2}{3n}\right)=\frac{n}{3m}+\frac{2m}{3n}+1\geq2\sqrt{\frac{n}{3m}\cdot\frac{2m}{3n}}+1=\frac{2\sqrt{2}}{3}+1$，当且仅当$n=\sqrt{2}m$时，即$m=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$，$n=\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

时等号成立，故 B 选项错误.

故选：B

二、多选题

7. 【答案】ABD

【详解】

解：由三角形重心性质得 $BG=2GE$，

所以 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，A 正确；

因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}=2\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}$，B 正确；

由重心性质得，$\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$，C 错误；

因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$，

所以 $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}$，

即 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，D 正确.

故选：ABD.

8. 【答案】ABD

【详解】

解：如图 1，补全图形，则在直角 $\triangle ABG$ 中，$AG=AB\cdot\tan\angle B=2\sqrt{3}$，则 $GD=\sqrt{3}$，$CD=\frac{1}{2}GD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$CG=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，

又 $BG=2AB=4$，所以 $BC=\frac{5}{2}$，A 正确；

故以点 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 方向为 x,y 轴建立平面直角坐标系，如图 2.

所以，$A(0,0),B(2,0),D\left(0,\sqrt{3}\right),C\left(\frac{3}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4}\right),E\left(\frac{3}{8},\frac{9\sqrt{3}}{8}\right),F\left(x_0,0\right),x_0\in[0,2]$，

所以，当 F 为线段 AB 的中点时，$F(1,0)$，此时 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{5}{8},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right),\overrightarrow{DA}=\left(0,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{CB}=\left(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$，故由

$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{CB}$ 得 $\begin{cases}\frac{5}{8}=\mu\frac{5}{4}\\-\frac{9\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}\lambda-\frac{5\sqrt{3}}{4}\mu\end{cases}$，解得 $\mu=\lambda=\frac{1}{2}$，故 $\lambda+\mu=1$，B 正确；

$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=\left(\frac{3}{4}-x_0,\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(-x_0,\sqrt{3}\right)=x_0^2-\frac{3}{4}x_0+\frac{15}{4}=\left(x_0-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{231}{64}$，所以当 $x_0=\frac{3}{8}$ 时，$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}$ 取得最小值 $\frac{231}{64}$，故 C 错误；

$\overrightarrow{EF}=\left(x_0-\frac{3}{8},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right),\overrightarrow{DA}=\left(0,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{CB}=\left(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$，故由 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{CB}$ 得 $\begin{cases}x_0-\frac{3}{8}=\mu\frac{5}{4}\\-\frac{9\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}\lambda-\frac{5\sqrt{3}}{4}\mu\end{cases}$，故当 $x_0=0$ 时，μ 取得最小值 $\mu_{\min}=-\frac{3}{10}$，$x_0=2$ 时，μ 取得最大值 $\mu_{\max}=\frac{13}{10}$，故 $\mu_{\max}-\mu_{\min}=\frac{8}{5}$，D 正确.

故选：ABD

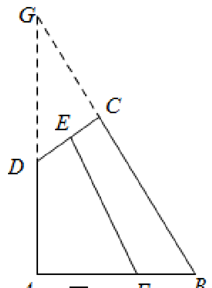


图1

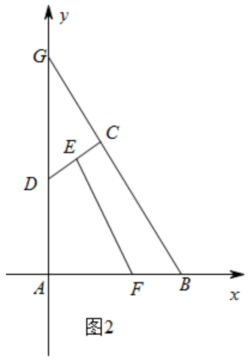


图2

三、填空题

9. 【答案】$(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})$

由已知 $\vec{a}-\vec{b}=(2,-1)$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$，

所以与 $\vec{a}-\vec{b}$ 同方向的单位向量是 $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}=(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})$.

故答案为：$(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})$

10. 【答案】$-\frac{1}{3}$

因为 D 为线段 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

又因为 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=-\frac{1}{6},y=-\frac{1}{6}$，所以 $x+y=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$.

故答案为：$-\frac{1}{3}$.

11. 【答案】$-\frac{10}{27}$

因为 $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{OA}=-\lambda\overrightarrow{AO}=-\frac{\lambda}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$，所以 $\overrightarrow{AK}=-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{7}{5}\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{AF}\right)=-\frac{7}{10}\lambda\overrightarrow{AE}-2\lambda\overrightarrow{AF}$. 又 E，F，K 三点共线，

所以 $-\frac{7}{10}\lambda-2\lambda=1$，解得：$\lambda=-\frac{10}{27}$.

故答案为：$-\frac{10}{27}$

12. 【答案】$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

$\because \vec{a}//\vec{b}$，$\therefore 2m=4-n\Leftrightarrow 2m+n=4\ (m>0,n>0)$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)(2m+n)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(6+\frac{n}{m}+\frac{8m}{n}\right)\geq\frac{1}{4}\left(6+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{8m}{n}}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{8m}{n}$ 时取等号.

故答案为：$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

四、解答题

13．【答案】(1) $\lambda=\frac{2}{3}$， $\mu=-\frac{1}{3}$ (2) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

(1)以 A 点为原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则 $D(0,1),B(2,0),M\left(\frac{2}{3},1\right),N\left(2,\frac{2}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),\overrightarrow{AB}=(2,0),\overrightarrow{AD}=(0,1)$

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=(2\lambda,\mu)$，

所以 $\begin{cases}2\lambda=\frac{4}{3}\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{cases}$

解得 $\lambda=\frac{2}{3},\mu=-\frac{1}{3}$

(2)设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，

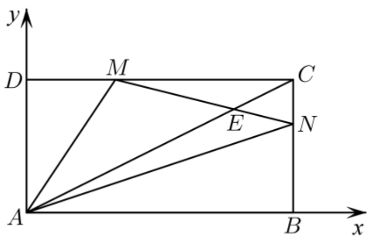
因为 $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2}{3},1\right),\overrightarrow{AN}=\left(2,\frac{2}{3}\right)$， $\overrightarrow{AC}=(2,1)$

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,1)=\left(\frac{2}{3}m+2n,m+\frac{2}{3}n\right)$. 解得 $m=\frac{3}{7},n=\frac{6}{7}$，

即 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AN}$，所以 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}t\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}t\overrightarrow{AN}$，

又因为 M，E，N 三点共线，所以 $\frac{3}{7}t+\frac{6}{7}t=1,t=\frac{7}{9}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.



第 03 讲 平面向量的数量积（精练）

一、单选题

1. 【答案】C

由题意得$\vec{a}\cdot\vec{b}=-m-1+2m=0$，解得$m=1$

故选：C.

2. 【答案】C

因为$|\vec{a}|=2$，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为 1，所以$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=1$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$；

所以$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为$\dfrac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{4+2}{2}=3$；

故选：C.

3. 【答案】B

由$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，平方得$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$.

故选：B.

4. 【答案】D

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{4-2\times2\times1\times\dfrac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$.

故选：D.

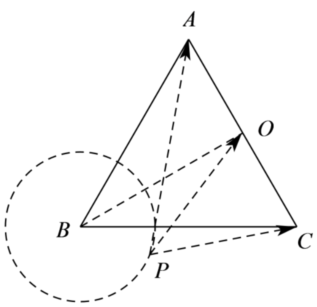
5. 【答案】D

由$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ为锐角知$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，即$1-2\lambda>0$且$\lambda\neq-2$，即$\lambda<\dfrac{1}{2}$且$\lambda\neq-2$.

故选：D.

6. 【答案】A

设AC中点为O，连接OB，则$OB=3$，



因为$BP=1$，所以P点在以B为圆心，1 为半径的圆上，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}\left[(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})^2\right]=\overrightarrow{PO}^2-\frac{\overrightarrow{AC}^2}{4}=\overrightarrow{PO}^2-3$，

显然，当B，P，O三点共线时，PO取得最小值2，

$\therefore(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP})_{\min}=4-3=1$.

故选：A

二、多选题

7. 【答案】AC

由$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,3)$，可知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+1\times3=6$，

对于A选项，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10-10=0$，故$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，故A正确；

对于B选项，设θ为$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角，则$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3}{5}\neq\frac{1}{2}$，故B错误；对于C选项，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$|\vec{a}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{3}{5}\vec{b}$，故C正确；对于D选项，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$|\vec{b}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{3}{5}\vec{a}$，故D错误.

故选：AC.

8. 【答案】ABC

由题意，分别以HD,BF所在的直线为x轴和y轴，建立如图所示的平面直角坐标系，

因为正八边形$ABCDEFGH$，所以$\angle AOH=\angle HOG=\angle AOB=\angle EOF=\angle FOG$

$=\angle DOE=\angle COB=\angle COD=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$，

作$AM\perp HD$，则$OM=AM$，

因为$OA=2$，所以$OM=AM=\sqrt{2}$，所以$A(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

同理可得其余各点坐标，$B(0,-2)$，$E(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(2,0)$，$H(-2,0)$，

对于A中，$\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=(0+\sqrt{2}+(-\sqrt{2}),-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})=\vec{0}$，故A正确；

对于B中，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2})\times2+(-\sqrt{2})\times0=-2\sqrt{2}$，故B正确；

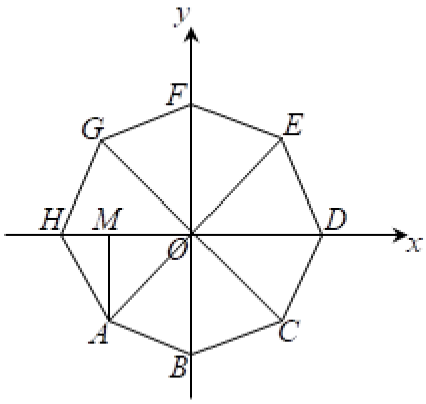
对于C中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EH}=(-2-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}=(-4,0)$，

所以$|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$，故C正确；

对于D中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{GH}=(-2+\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}=(-4+2\sqrt{2},0)$，

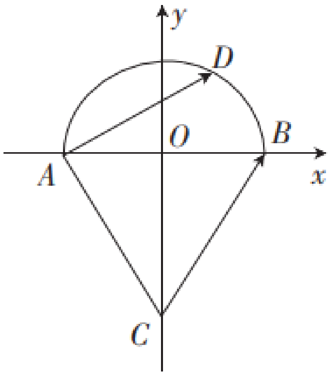
$|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}|=\sqrt{(-4+2\sqrt{2})^2+0^2}=4-2\sqrt{2}$，故D不正确.

故选：ABC.



9．【答案】BC

如图所示，以 AB 所在直线为 x 轴，以 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,-\sqrt{3})$.



令 $D(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\le\theta\le\pi$，则 $\overrightarrow{AD}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$，$\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\cos\theta+1+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

因为 $0\le\theta\le\pi$，所以 $\frac{\pi}{6}\le\theta+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，所以 $-\frac{1}{2}\le\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\le1$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1\in[0,3]$.

故选：BC.

三、填空题

11．【答案】$\frac{5}{2}$ ##2.5

因为 $(\lambda\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，

所以 $(\lambda\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，即 $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$，

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+1\times4=10$，$\vec{b}^2=3^2+4^2=25$，

所以$10\lambda-25=0$，解得$\lambda=\frac{5}{2}$，

故答案为：$\frac{5}{2}$.

12. 【答案】$\frac{\sqrt{5}}{6}$

$\because \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+4n\overrightarrow{AE}$，

又$\because P$为BE上一点，

所以$m+4n=1$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+4n)=5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geq 5+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=9$，

当且仅当$\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$即$m=\frac{1}{3}$且$n=\frac{1}{6}$时，取等号，

$\therefore$向量$\vec{a}=(m,n)$的模为$\sqrt{m^2+n^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{6}$.

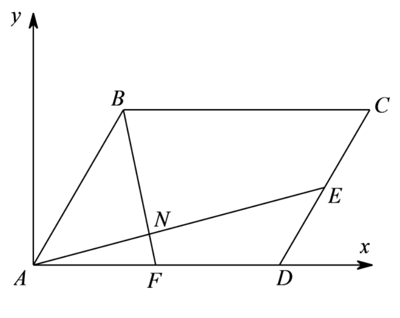
四、解答题

13. 【答案】(1)$\frac{10}{21}$；(2)$\left[-5,\frac{1}{16}\right]$.

【解析】

(1)在平行四边形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=AD=3$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore$建立如图坐标系，



则$A(0,0)$，$D(3,0)$，$B(1,\sqrt{3})$，$C(4,\sqrt{3})$，

$\because E$为CD中点，故$E\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\because \overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AD}$，故$F(3\lambda,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{BF}=(3\lambda-1,-\sqrt{3})$，

$\because \overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BF}$，$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，

所以$\frac{7}{2}\times(3\lambda-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

$\therefore \lambda=\frac{10}{21}$；

(2)由（1）可知，$B(1,\sqrt{3})$，$F(3\lambda,0)$，$E\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{BF}=(3\lambda-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FE}=\left(\frac{7}{2}-3\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}=(3\lambda-1)\left(\frac{7}{2}-3\lambda\right)-\frac{3}{2}=-9\lambda^2+\frac{27}{2}\lambda-5$，对称轴为$\lambda=\frac{3}{4}$．

$\because 0\leqslant\lambda\leqslant 1$，当$\lambda=\frac{3}{4}$时，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}$的最大值为$\frac{1}{16}$，

当$\lambda=0$时，最小值为-5，

所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}\in\left[-5,\frac{1}{16}\right]$．

14．【答案】(1)2；(2)$[-\frac{1}{4},2]$．

(1)由图知：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$，

所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD})$，

又$AB=2AD=2CD=4$，$AB//CD$，$\angle DAB=90°$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\times(0+2\times4-2^2-0)=2$．

(2)由（1）知：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})$，

令$\overrightarrow{EC}=\lambda\overrightarrow{DC}$且$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}-(1-\lambda)\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{EF}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，

所以$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-(1-\lambda)(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DC}^2+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}^2)$

$-\frac{1-\lambda}{2}(\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD})=4(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})+2=4(\lambda-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}$．

则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}\in[-\frac{1}{4},2]$．

第 04 讲 正弦定理和余弦定理（精练）

一、单选题

1. 【答案】D

【详解】

因为$a^2+b^2<c^2$，由余弦定理可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，

又由$C\in(0,\pi)$，所以$C\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，所以$\triangle ABC$是钝角三角形.

故选：D.

2. 【答案】B

根据三角形面积公式可得该三角形的面积为$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$.

故选：B.

3. 【答案】B

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore a=\dfrac{6\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=6\sqrt{2}$.

故选：B .

4. 【答案】B

因为$AC^2=6^2+2^2=40$，$AD^2=6^2+(5-2)^2=45$，

在$\triangle ACD$中，

由余弦定理得$\cos\angle CAD=\dfrac{AD^2+AC^2-CD^2}{2AD\cdot AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$0^\circ<\angle CAD<180^\circ$，

所以$\angle CAD=45^\circ$.

故选：B.

5. 【答案】D

设$DE=x$，则$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle DEF}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot AD\sin\angle ADB}{\frac{\sqrt{3}}{4}DE^2}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1\times(1+x)\sin 120^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}=\dfrac{1+x}{x^2}=\dfrac{3}{4}$，

解得$x=2$（$-\dfrac{2}{3}$舍去），

所以$S_{\triangle DEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$，

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}+\dfrac{9}{4}\times\sqrt{3}=\dfrac{13}{4}\sqrt{3}$，

故选：D.

6. 【答案】C

$\because$ $c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$，

∴ $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos C$，又 $A\in(0,\pi)$， $\sin A\neq 0$，

∴ $\tan C=\sqrt{3}$， $C\in(0,\pi)$，

∴ $C=\frac{\pi}{3}$，又 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， $c=3\sqrt{3}$， $ab=18$，

∴ $27=a^2+b^2-18$，

∴ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=81$，

∴ $a+b=9$，

故选：C.

7. 【答案】C

在$\triangle ABC$中，因为 $AB=4$， $BC=3$， $\angle ABC=60°$，

所以由余弦定理，得 $AC=\sqrt{4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{1}{2}}=\sqrt{13}$，

由正弦定理，得 $BD=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{13}}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$；

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle BCD$ 中，

$$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{\frac{52}{3}-16}=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{\frac{52}{3}-9}=\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

又 $\angle ADC=180°-\angle ABC=120°$，

所以$\triangle ACD$的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

故选：C.

8. 【答案】B

因为$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(8b^2-9a^2\right)$，

所以$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(8b^2-9a^2\right)$,即 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(8b^2-9a^2\right)$,

所以$\frac{\sqrt{3}}{12}\left(8b^2-9a^2\right)=\frac{1}{2}bc\sin A$,

由余弦定理， $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， 即 $a^2=b^2+c^2-bc$， 代入上式得，

$\frac{\sqrt{3}}{12}\left[8b^2-9(b^2+c^2-bc)\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$， 化简得 $b^2-6bc+9c^2=0$，

即 $(b-3c)^2=0$， $\therefore b=3c$， 此时 $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}=\sqrt{7}c.$

$$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7+1-9}{2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

故选：B

二、多选题

9. 【答案】BCD

选项 A. 在$\triangle ABC$中，若$\sin 2A=\sin 2B$,则$2A=2B$或$2A+2B=\pi$

所以$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，所以$\triangle ABC$为等腰或直角三角形. 故 A 不正确.

选项 B. 在$\triangle ABC$中，若$A>B$,则$a>b$，

由正弦定理可得$2R\sin A>2R\sin B$,即$\sin A>\sin B$，故 B 正确.

选项 C. 若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$A+B>\frac{\pi}{2}$

所以$\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$，所以$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,故 C 正确.

选项 D. 在$\triangle ABC$中,若$\sin A>\sin B$，由正弦定理可得$\frac{a}{2R}>\frac{b}{2R}$，

即$a>b$，所以$A>B$，故 D 正确.

故选：BCD

10. 【答案】ACD

对于 A，由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$，故 A 正确；

对于 B，若$A>B$，当$A=120°$，$B=30°$时，则$\sin 2A<\sin 2B$，故 B 不正确；

对于 C，$c=a\cos B+b\cos A\Rightarrow\sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，

故 C 正确；

对于 D，由$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，可得$\angle BAC$的角平分线与$BC$垂直，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形

又$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，可得$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABC$为等边三角形，故 D 正确；

故选：ACD

11. 【答案】ABD

因为$\cos\angle CDB=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\angle CDB=\sqrt{1-\cos^2\angle CDB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 A 正确；

设$CD=a$，则$BC=2a$，

在$\triangle BCD$中，$BC^2=CD^2+BD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle CDB$，解得$a=\sqrt{5}$，

所以$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}BD\cdot CD\cdot\sin\angle CDB=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=3$，故 B 正确；

因为$\angle ADC=\pi-\angle CDB$，

所以$\cos\angle ADC=\cos(\pi-\angle CDB)=-\cos\angle CDB=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

在$\triangle ADC$中，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$，解得$AC=2\sqrt{5}$，

所以$\triangle ABC$的周长为$AB+AC+BC=(3+5)+2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=8+4\sqrt{5}$，故 C 错误；

因为$AB=8$为最大边，所以$\cos C=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=-\frac{3}{5}<0$，即$C$为钝角，

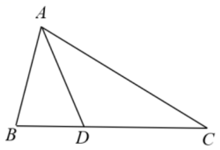
所以$\triangle ABC$为钝角三角形，故 D 正确.

故选：ABD.

三、填空题

12．【答案】9

由题意画图如下：



因为 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$ 所以

$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60°=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin 30°+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin 30°$ 化简得

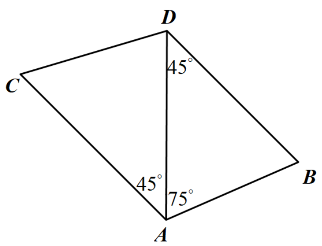
$\frac{1}{2}c\cdot b\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot b\frac{1}{2},bc=b+c,\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 利用基本不等式"1 的代换"得

$$b+4c=(b+4c)\times 1=(b+4c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=5+\frac{4c}{b}+\frac{b}{c}\geq 5+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=9$$

故答案为：9.

13．【答案】$3\sqrt{2}$

如图，在△ABD 中，因为在 A 处看灯塔 B 在货轮的北偏东 75°的方向上，距离为$2\sqrt{6}$海里，



货轮由 A 处向正北航行到 D 处时，再看灯塔 B 在南偏东 45°方向上，

所以 B＝180°−75°−45°＝60°

由正弦定理$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以 $AD=\frac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\frac{2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6$海里；

在△ACD 中，AD＝6，AC＝$3\sqrt{2}$，$\angle CAD$＝45°，

由余弦定理可得：

$$CD^2=AD^2+AC^2-2\cdot AD\cdot AC\cos 45°=6^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times 6\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=18,$$

所以 CD＝$3\sqrt{2}$海里；

故答案为：$3\sqrt{2}$.

四、解答题

14．【答案】(1) $B=\frac{\pi}{3}$ (2) $4+2\sqrt{3}$.

(1)由正弦定理得： $2\sin B\cdot\cos A=2\sin C-\sin A$,所以 $2\sin B\cdot\cos A+\sin A=2\sin(A+B)=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$

即 $\sin A=2\sin A\cdot\cos B$

$\because A\in(0,\pi),\therefore \sin A\neq 0\Rightarrow \cos B=\frac{1}{2}$,

$\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$

(2)由 $\sin A\cdot\sin C=\sin^2 B\ \therefore b^2=ac$

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=a^2+c^2-b^2$， $\therefore a^2+c^2=2b^2$

$\therefore (a-c)^2=a^2+c^2-2ac=a^2+c^2-2b^2=0$

$\therefore a=c$

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形，设 $AC=x$，$\angle ADC=\theta$，

在 $\triangle ADC$ 中， $\cos\theta=\frac{4+4-x^2}{2\times2\times2}$， 解得 $x^2=8-8\cos\theta$

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-8\cos\theta)+2\sin\theta$

$=4\sin(\theta-\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}$

当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$， 即 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，S 有最大值 $4+2\sqrt{3}$.

15．【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $2\sqrt{3}$

(1)由题 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

所以 $f(A)=2\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=1$， 即 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

又因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， 所以 $2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$， $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， 代入数据得： $3=b^2+c^2-bc$，

整理得到 $3=(b+c)^2-3bc\geq(b+c)^2-3\times\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(b+c)^2$

解得 $b+c\leq2\sqrt{3}$， 当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时， 等号成立.

故 $c+b$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$.

16．【答案】(1) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ (2) $2\sqrt{3}$

(1)解：$\because\triangle ABC$ 是锐角三角形， $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4},\therefore\cos A=\frac{1}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中， $a=2\sqrt{6},b=4$， 由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

$\because C=\pi-(A+B)$,

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

(2)解：由（1）知，$\sin B=\sin C,\therefore c=b=4$.

由题意得$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\dfrac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin A}=\dfrac{16}{AD\cdot AE}=2,\therefore AD\cdot AE=8$.

由余弦定理得，$DE^2=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos A\geq 2AD\cdot AE-\dfrac{1}{2}AD\cdot AE=\dfrac{3}{2}AD\cdot AE=12$，

当且仅当$AD=AE=2\sqrt{2}$时“=”成立.

所以DE的最小值为$2\sqrt{3}$.

第 05 讲 正弦定理和余弦定理的应用（精练）

一、单选题

1．【答案】B

【详解】

由∠ACB＝90°，又 AC＝BC，∴∠CBA＝45°，

而 β＝30°，∴α＝90°－45°－30°＝15°.∴点 A 在点 B 的北偏西 15°.

故答案为 B.

2．【答案】A

解:在三角形$\vee ABC$中,

$\angle ACB=30^{\circ}, \angle CAB=105^{\circ}$,

所以$\angle ABC=180^{\circ}-30^{\circ}-105^{\circ}=45^{\circ}$,

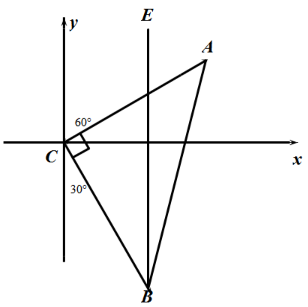
由正弦定理: $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$,

所以$AB=\frac{AC\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{50\cdot\sin 30^{\circ}}{\sin 45^{\circ}}=\frac{50\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=25\sqrt{2}$.

故选:A

3．【答案】A

由题意，点 *A* 在点 *C* 的北偏东 60°方向上，点 *B* 在点 *C* 的南偏东 30°方向上，且 *AC=BC*，可得几何位置关系如下图所示：



则$\angle CBE=30^{\circ}$，$\angle ABC=45^{\circ}$

所以$\angle ABE=15^{\circ}$,故点 *A* 在点 *B* 的北偏东15°方向上

故选：A

4．【答案】C

由题意，三角形空地的面积为$\frac{1}{2}\times 32\times 68\times\frac{1}{2}=544m^{2}$，

Q 改造费用为 50 元$/m^{2}$，

$\therefore$这块三角形空地的改造费用为：$544\times 50=27200$元.

故选：C.

5. 【答案】A

$PM=68,\angle PNM=45^\circ,\angle PMN=15^\circ$，

在ΔPMN 中有$\dfrac{MN}{\sin 120^\circ}=\dfrac{PM}{\sin 45^\circ}\Rightarrow MN=34\sqrt{6}$

$V=\dfrac{MN}{4}=\dfrac{17}{2}\sqrt{6}$海里/时，选 A.

6. 【答案】D

由$P_1P_2=a$，$\angle P_1P_2D=\alpha,\angle P_2P_1D=\beta$，

∴可求出DP_2、DP_1，

①$\angle DP_1C$和$\angle DCP_1$：△DP_1C中$\dfrac{DC}{\sin\angle DP_1C}=\dfrac{DP_1}{\sin\angle DCP_1}$，即可求$DC$；

②$\angle P_1P_2C$和$\angle P_1CP_2$：可求$\angle DP_1C$、P_1C，则在△DP_1C中$DC^2=DP_1^2+P_1C^2-2DP_1\cdot P_1C\cdot\cos\angle DP_1C$求$DC$；

③$\angle P_1DC$和$\angle DCP_1$：可求$\angle DP_1C$，则在△DP_1C中$\dfrac{DC}{\sin\angle DP_1C}=\dfrac{DP_1}{\sin\angle DCP_1}$，即可求$DC$；

∴①②③都可以求DC.

故选：D

二、多选题

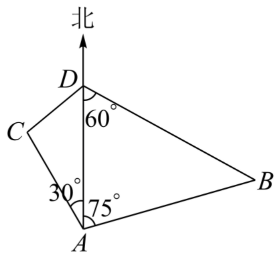
7. 【答案】ABC

因为A，C在河的同一侧，所以可以测量b，α与γ，

故选：ABC

8. 【答案】ABC

在△ABD中，由已知得$\angle ADB=60^\circ$，$\angle DAB=75^\circ$，



则$\angle B=45^\circ$，$AB=12\sqrt{6}$.

由正弦定理得$AD=\dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=24$，

所以A处与D处之间的距离为24 $n\ mile$ ，故 A 正确；

在VADC中，由余弦定理得，

$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 30^\circ$，

又$AC=8\sqrt{3}$，

解得$CD=8\sqrt{3}$.

所以灯塔C与D处之间的距离为$8\sqrt{3}$ $n\ mile$ ，故 B 正确，

Q $AC = CD = 8\sqrt{3}$，

$\therefore \angle CDA = \angle CAD = 30^\circ$，

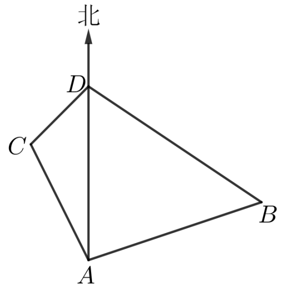
$\therefore$ 灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°，故 C 正确；

Q 灯塔 B 在 D 的南偏东 60°，

$\therefore D$ 在灯塔 B 的北偏西 60°，故 D 错误；

故选：ABC.

9．【答案】AC



由题意可知 $\angle ADB = 60^\circ, \angle BAD = 75^\circ, \angle CAD = 30^\circ$，所以 $\angle B = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$，$AB = 12\sqrt{6}, AC = 8\sqrt{3}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以 $AD = \dfrac{12\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 24(nmile)$，故 A 正确；

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD\cos\angle CAD}$，

即 $CD = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 + 24^2 - 2 \times 8\sqrt{3} \times 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}(nmile)$，故 B 错误；

因为 $CD = AC$，所以 $\angle CDA = \angle CAD = 30^\circ$，所以灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°，故 C 正确；

由 $\angle ADB = 60^\circ$，D 在灯塔 B 的北偏西 60° 处，故 D 错误.

故选：AC

三、填空题

10．【答案】$(22.5 + 2\pi)\text{km}$

连接 AD, BC，因为 $AB = \frac{3}{2}CD = 6$，所以 $AB = 6, CD = 4$，

在 $\triangle ABD$ 中，$AB \perp BD, \cos\angle BAD = \frac{3}{5}$，所以 $\tan\angle BAD = \frac{4}{3}$，

由直角三角形三角函数的定义知，$BD = AB \cdot \tan\angle BAD = 6 \times \frac{4}{3} = 8$，

所以 $BC = BD - CD = 8 - 4 = 4$，

所以半圆 $\overset{\frown}{BC}$ 的弧长为 $\frac{1}{2} \times 4\pi = 2\pi$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AB = 6, BD = 8$，

所以 $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$，

在 VADE 中，设 $AE = DE = t(t > 0)$，

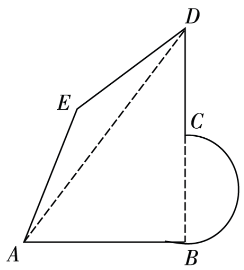
由余弦定理可得，$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot DE\cos E$，

即$50=t^2\left(1-\cos E\right)$，

因为$\angle E=2\angle BAD$，所以$\cos\angle E=\cos2\angle BAD=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$，

所以$50=t^2\left(1+\frac{7}{25}\right)$，解得：$t=\frac{25}{4}$，

所以健康步道的长度为$2\times\frac{25}{4}+6+4+2\pi=22.5+2\pi\left(\text{km}\right)$.



故答案为：$\left(22.5+2\pi\right)\text{km}$

11．【答案】$300+100\sqrt{3}$ m

在$Rt\triangle AEC$中，$AE=200\text{m},AC=\frac{AE}{\sin45^\circ}=200\sqrt{2}\text{m}$，由图知$\angle MAC=\angle MCA=75^\circ$，即$\angle AMC=30^\circ$，

在$\triangle AMC$中，由正弦定理得$\frac{AC}{\sin30^\circ}=\frac{MC}{\sin75^\circ}$，

$\because\sin75^\circ=\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)=\sin30^\circ\cos45^\circ+\cos30^\circ\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore MC=\frac{AC\times\sin75^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{200\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=200(\sqrt{3}+1)$ m，

在$Rt\triangle MNC$中，$MN=MC\sin60^\circ=200(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=300+100\sqrt{3}\text{m}$.

故答案为：$300+100\sqrt{3}$ m

四、解答题

12．【答案】(1) $\cos\theta=\frac{\sqrt{23}}{5}$

(2)1000米.

(1)在$\triangle BCD$中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}$，

即$\frac{1000}{\sin45^\circ}=\frac{400}{\sin\angle CDB}$，

所以$\sin\angle CDB=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

由题可知，$\angle CDB<90^\circ$，

所以$\cos\angle CDB=\frac{\sqrt{23}}{5}$，即$\cos\theta=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2)由（1）可知，$\cos\angle ADB=\sin\angle CDB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$，

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$AB^2=BD^2+AD^2-2\cdot BD\cdot AD\cdot\cos\angle ADB$

$=1000^2+(400\sqrt{2})^2-2\times1000\times400\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{5}=1000000$，

所以$AB=1000$，

故两隧道口AB间的距离为1000米.

13．【答案】(1)$\dfrac{3\pi}{4}$；(2)选① $AD=4$；选② $AD=4$.

(1)因为$\sqrt{2}b\cos B+a\cos C+c\cos A=0$，

所以$\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin A\cos C+\sin C\cos A=0$，

所以$\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin(A+C)=0$，

所以$\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin B=0$，

因为$0<B<\pi$，所以$\sin B\neq0$，

所以$\cos B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$B=\dfrac{3\pi}{4}$.

(2)选①，因为$\triangle ABC$的面积$S=2$，

所以$S=2=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{3\pi}{4}$，

即$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=2$，$a=2\sqrt{2}$，由余弦定理得

所以$AC=\sqrt{c^2+a^2-2ac\cdot\cos B}=2\sqrt{5}$，

所以$\cos\angle CAB=\dfrac{4+20-8}{2\times2\times2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

因为AC平分$\angle BAD$，

所以$\cos\angle CAD=\dfrac{AD^2+20-4}{2\cdot2\sqrt{5}\cdot AD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$AD=4$，

选②，因为$AC=2\sqrt{5}$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理：

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，

即$(2\sqrt{5})^2=2^2+BC^2-2\cdot2\cdot BC\cos\dfrac{3\pi}{4}$，

所以$BC=2\sqrt{2}$，

因为$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\angle BAC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sin\dfrac{3\pi}{4}}$，

所以$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

因为 AC 平分 $\angle BAD$，所以 $\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

因为 $CD=2$， $AC=2\sqrt{5}$，由正弦定理得，

$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle D}$，所以 $\sin\angle D=\frac{AC\cdot\sin\angle DAC}{CD}=\frac{2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=1$ ，

又 $\angle D\in(0,\pi)$，所以 $\angle D=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\triangle ADC$ 是直角三角形，且 $\angle ADC=90^\circ$，

所以 $AD=4$.

14. 【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $2\sqrt{3}-3$

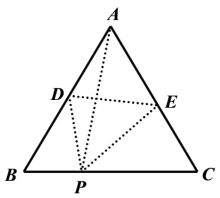
(1)由 $\tan B+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan B\cdot\tan C$ 得

$\therefore\tan B+\tan C=-\sqrt{3}(1-\tan B\cdot\tan C)\therefore\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=-\sqrt{3}=\tan(B+C)=-\tan A$

$\therefore\tan A=\sqrt{3}$，

由 $A\in(0,\pi)$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) $b=c=1$， $A=\frac{\pi}{3}$， $\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形，连接 AP，
由折叠性质可知 A,P 两点关于折线 DE 对称，$\therefore AD=PD,\angle BAP=\angle APD$
设 $\angle BAP=\angle APD=\alpha$， $AD=PD=x$， 则 $\angle BDP=2\alpha,DB=1-x$，



在 $\triangle ABC$ 中， $\angle APB=\pi-\angle ABP-\angle BAP=\frac{2\pi}{3}-\alpha$， $\angle BPD=\frac{2\pi}{3}-2\alpha$，

又 $\angle DBP=\frac{\pi}{3}$，则在 $\triangle BDP$ 中，由正弦定理得： $\frac{1-x}{\sin(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)}=\frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

整理可得： $x=\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)+\sqrt{3}}$，

$\because 0\le\alpha\le\frac{\pi}{3},0\le\frac{2\pi}{3}-2\alpha\le\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 当 $\frac{2\pi}{3}-2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 时， $\sin(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)=1$，则 x 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$，即 AD 的最小值为 $2\sqrt{3}-3$.