第 07 讲：第四章 三角函数（基础卷）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．教室里的钟表慢了 30 分钟，在同学将它校正的过程中，时针需要旋转多少弧度?（　　）

A．$-\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{12}$　　C．$-\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

2．已知角α的顶点与原点θ重合，始边与x轴的非负半轴重合，终边过点$P(m,4)(m\neq 0)$，且$\cos\alpha=\frac{m}{5}$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．$\pm\frac{4}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\pm\frac{3}{4}$　　D．$\frac{3}{4}$

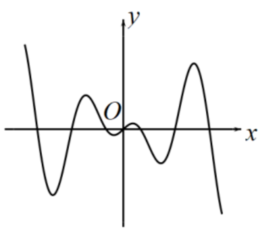
3．若$\frac{\sin(\pi-\theta)+\cos(\theta-2\pi)}{\sin\theta+\cos(\pi+\theta)}=\frac{1}{2}$，则$\tan\theta=$（　　）

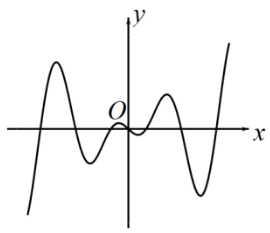
A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．-3　　D．3

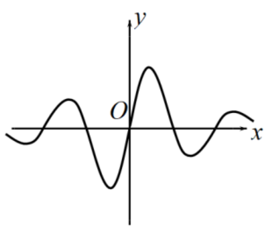
4．（2022·广西桂林·高一期中）下列函数中，在其定义域上是偶函数的是（　　）

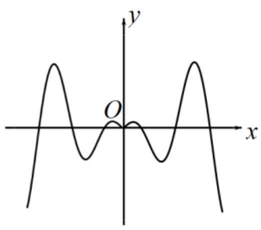
A．$y=\sin x$　　B．$y=|\sin x|$　　C．$y=\tan x$　　D．$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

5．函数$f(x)=x\cos x$的图像大致是（　　）

A．

B．

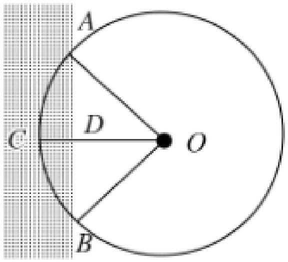
C．

D．

6．已知α,β都是锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，则$\cos\beta=$（　　）

A．$-\frac{56}{65}$　　B．$-\frac{16}{65}$　　C．$\frac{16}{65}$　　D．$\frac{56}{65}$

7．我国古代数学经典著作《九章算术》中记载了一个"圆材埋壁"的问题："今有圆材埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何?"现有一类似问题，不确定大小的圆柱形木材，部分埋在墙壁中，其截面如图所示.用锯去锯这木材，若锯口深$CD=2-\sqrt{3}$，锯道$AB=2$，则图中$\overset{\frown}{ACB}$与弦AB围成的弓形的面积为（　　）



A． $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B． $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$　　C． $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D． $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知 $f\left(x\right)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x$，（$\omega>0$），若函数在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内不存在对称轴，则 ω 的范围为（　　）

A． $\left(0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$　　B． $\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$

C． $\left(0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　D． $\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]$

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9．在 $-360°$：$360°$ 范围内，与 $-410°$ 角终边相同的角是（　　）

A． $-50°$　　B． $-40°$　　C． $310°$　　D． $320°$

10．为了得到函数 $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需将函数 $g(x)=\sin x$ 的图象（　　）

A．所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度

B．所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍，纵坐标不变，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度

C．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将所得图象所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变

D．向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度，再将所得图象所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变

11．给出下列命题中，正确的是（　　）

A．存在实数 α，使 $\sin\alpha\cos\alpha=1$

B．存在实数 α，使 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$

C．函数 $y=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)$ 是偶函数

D．若 α，β 是第一象限的角，且 $\alpha>\beta$，则 $\sin\alpha>\sin\beta$

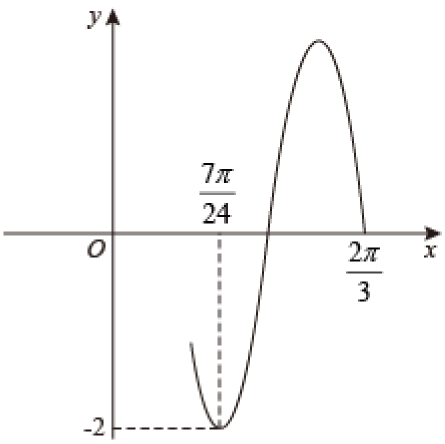
12．若 $\tan\alpha-\sqrt{3}=\tan6\alpha+\sqrt{3}\tan\alpha\tan6\alpha$，则 α 的值可能为（　　）

A． $-\frac{\pi}{15}$　　B． $\frac{2\pi}{15}$　　C． $\frac{4\pi}{15}$　　D． $\frac{14\pi}{15}$

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．已知 $f\left(x\right)=2\sin\left(3x+2\varphi\right)$ 是奇函数，则 $\varphi=$__________．（写出一个值即可）

14．函数 $f\left(x\right)=A\sin(\omega x+\varphi),(A,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图象如图，则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$___________.



15．已知 $\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{4}{5},\cos\left(\alpha-\beta\right)=-\frac{4}{5}$，则 $\cos\alpha\cos\beta$ 的值为________.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\omega>0\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 有且仅有 3 个零点，则函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上存在_____个极小值点，请写出一个符合要求的正整数 ω 的值______.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分，其中第 17 题 10 分，其它每题 12 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．已知 $f\left(\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-3\sin\left(\pi+\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\pi-\alpha\right)}$.

(1)化简 $f\left(\alpha\right)$.

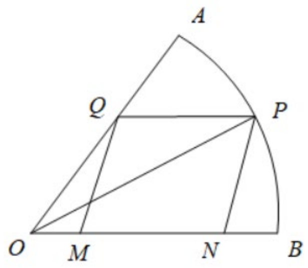
(2)已知 $\tan\alpha=3$，求 $f\left(\alpha\right)$ 的值.

18．已知 $\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=2a\sin x\cos x+2\cos^2 x+1$ 的一个零点.

(1)求实数 a 的值；

(2)求 $f(x)$ 单调递减区间.

19．如图，现要在一块半径为1m，圆心角为$\dfrac{\pi}{3}$的扇形白铁片AOB上剪出一个平行四边形$MNPQ$，使点P在圆弧AB上，点Q在OA上，点M,N在OB上，设$\angle BOP=\theta$，平行四边形$MNPQ$的面积为S．



(1)求S关于θ的函数关系式；

(2)求S的最大值及相应的θ角．

20．已知函数$f\left(x\right)=a\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x\left(x\in \mathbf{R}\right)$，若__________．

条件①：$a>0$，且$f\left(x\right)$在$x\in \mathbf{R}$时的最大值为$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

条件②：$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

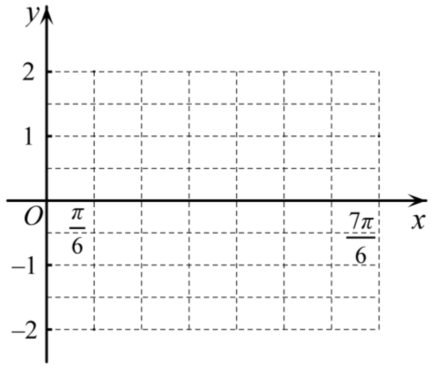
请写出你选择的条件，并求函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$上的最大值和最小值．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

21．已知函数$f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$．

(1)利用“五点法”完成下面的表格，并画出$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$上的图象；

$2x-\dfrac{\pi}{3}$					
x					
$f(x)$					

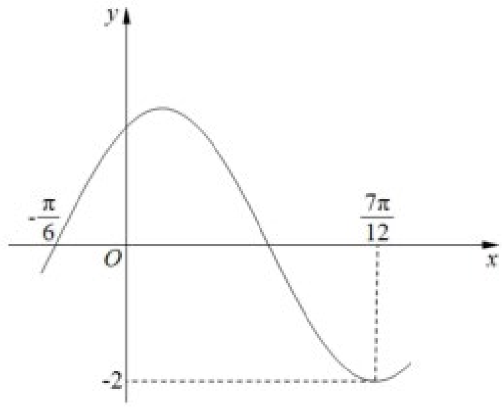


(2)解不等式 $f(x) \geq 1$.

22．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)先将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再将所得图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，得到 $g(x)$ 的图象.



（i）若 $m>0$，当 $x\in[0,m]$时，$g(x)$ 的值域为$[-\sqrt{3},2]$，求实数 m 的取值范围；

（ii）若不等式 $g^2(x)-(2t+1)g(x)-t-1\leq 0$ 对任意的 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$恒成立，求实数 t 的取值范围.

第四章 三角函数（提高卷）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

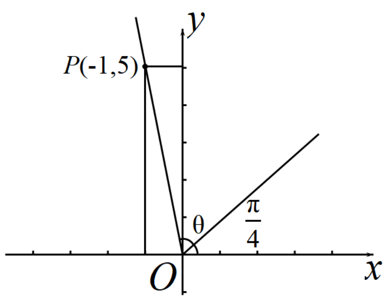
1．如图，时钟显示的时刻为 12：55，将时针与分针视为两条线段，则该时刻的时针与分针所夹的锐角为（　　）

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{23\pi}{72}$　　C．$\frac{11\pi}{36}$　　D．$\frac{3\pi}{10}$

2．$(\sqrt{2}-1)(\sin 22.5°+\cos 22.5°)^2=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　D．$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

3．已知角θ的大小如图所示，则$\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=$（　　）



A．-5　　B．5　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

4．设$a=\sin(-810°)$，$b=\tan\left(\frac{33\pi}{8}\right)$，$c=\lg\frac{1}{5}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

5．公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派研究过正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割约为 0.618，这一数值也可以表示为$m=2\sin 18°$，若$m^2+n=4$，则$\frac{m\sqrt{n}}{2\sin^2 27°-1}=$（　　）

A．－4　　B．－2　　C．2　　D．4

6．已知$f(x)=\cos\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}$，若存在$x_0\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，使不等式$f(x_0)\le m^2-\frac{5}{2}m-\frac{1}{2}$有解，则实数$m$的取值范围为（　　）

A．$\left[0,\frac{5}{2}\right]$　　B．$(-\infty,0]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

C. $\left[-\frac{1}{2},3\right]$　　　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

7．将函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x\left(x\in R\right)$ 的图像向右平移 $m(m>0)$ 个长度单位后，所得到的图像关于 y 轴对称，则 m 的最小值是（　　）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

8．法国数学家傅里叶（*Jean Baptiste Joseph Fourier*，1768—1830）证明了所有的乐声数学表达式是一些简单的正弦周期函数 $y=A\sin\omega x\left(A,\omega\neq 0\right)$ 之和，若某一乐声的数学表达式为 $f(x)=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin 3x$，则关于函数 $f(x)$ 有下列四个结论：

① $f(x)$ 的一个周期为 2π；

② $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

③ $f(x)$ 图像的一个对称中心为（$\frac{\pi}{3}$，0）；

④ $f(x)$ 在区间（$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$）内为增函数.

其中所有正确结论的编号为（　　）

A. ①③　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②④

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9．设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称　　B. $y=f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称

C. $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减　　D. $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 上的最小值为 0

10．若 $\tan\alpha+\tan\beta=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\alpha\tan\beta$，则 $\alpha+\beta$ 的值可能为（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $-\frac{2\pi}{3}$　　D. $-\frac{5\pi}{6}$

11．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\sin x\right|,\left(\sin x\geq\cos x\right)\\\left|\cos x\right|,\left(\cos x>\sin x\right)\end{cases}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是偶函数；

B. $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 2π；

C. $f\left(x\right)$ 在区间 $(\pi,\frac{5\pi}{4})$ 上单调递增；

D. 若方程 $f(x)=m$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 有四个不同的实根，则这四个实根之和为 π 或 3π .

12．已知 $f\left(x\right)=\sin^{2}\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x$，$\omega>0$，若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恰有 2 个零点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则下列说法正确的是（　　）

A．存在 ω 使 $f\left(x\right)$ 是奇函数

B．当 $\omega=\dfrac{3}{2}$ 时，$x_2=\dfrac{4\pi}{9}$

C．$\dfrac{4}{3}\le\omega<2$

D．$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．在半径为 r 的圆中，一条弦的长度为 $\sqrt{3}r$，则这条弦所对的圆心角是__________.

14．已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$，则 $\sin2\alpha=$________.

15．筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，既经济又环保．明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理（图 1）．假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水筒都做匀速圆周运动如图 2，将筒车抽象为一个半径为的圆，设筒车按逆时针方向每旋转一周用时 120 秒，当 $t=0$ 时，盛水筒 M 位于点 $P_0(3,-3\sqrt{3})$，经过 t 秒后运动到点 $P(x,y)$，点 P 的纵坐标满足 $y=f(t)=R\sin(\omega t+\varphi)\left(t\ge0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则当筒车旋转 100 秒时，盛水筒 M 对应的点 P 的纵坐标为____________.


图1

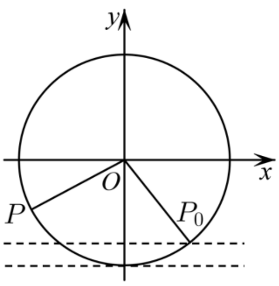


图2

16．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\sin^{2}x}+\dfrac{25}{\cos^{2}x}$ 的最小值为______，此时 $\tan^{2}x=$______.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分，其中第 17 题 10 分，其它每题 12 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．在① $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，② $\tan^{2}\alpha+\sqrt{2}\tan\alpha-4=0$ 这两个条件中任选一个，补充到下面的问题中，并解答.

已知角 a 是第一象限角，且___________.

(1)求 $\tan\alpha$ 的值；

(2)求 $\sqrt{2}\cos(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)\cos(\alpha-3\pi)$ 的值.

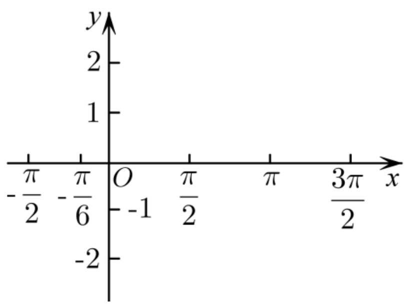
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π，图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$，若先把函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，然后再把所得图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象.

(1)求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式；

(2)设函数中 $\phi(x)=g(x)-2\cos^2 x+1$，试判断 $\phi(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的零点个数

19．已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.



(1)用五点法画出函数 $f\left(x\right)$ 的大致图像，并写出 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

(2)写出函数 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\mathrm{R}$ 上的单调递减区间；

(3)将 $y=f\left(x\right)$ 图像上所有的点向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，得到 $y=g\left(x\right)$ 的图像，求 $y=g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最值.

20．已知平面向量$\vec{m}=\left(2-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),-2\right)$，$\vec{n}=\left(1,\sin^2 x\right)$，$f\left(x\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，其中$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(1)求函数$f\left(x\right)$的单调增区间；

(2)将函数$f\left(x\right)$的图象所有的点向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位，再将所得图象上各点横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再向下平移 1 个单位得到$g\left(x\right)$的图象，若$g\left(x\right)=m$在$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{24}\right]$上恰有 2 个解，求 m 的取值范围.

21．已知函数$f\left(x\right)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

(1)若不等式$\left|f\left(x\right)-m\right|\le 3$对任意$x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$恒成立，求整数 m 的最大值；

(2)若函数$g\left(x\right)=f(\frac{\pi}{2}-x)$，将函数$g\left(x\right)$的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），再向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位，得到函数$y=h\left(x\right)$的图象，若关于$x$的方程$\frac{1}{2}h\left(x\right)-k=0$在$x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$上有 2 个不同实数解，求实数$k$的取值范围.

22．已知函数$f\left(x\right)=-x\left|x-3a\right|+a\left(a\in\mathbf{R}\right),g\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)若$f\left(x\right)$为奇函数，求实数a的值；

(2)若对任意$x_1\in\left[0,1\right]$，总存在$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$成立，求实数$a$的取值范围.