第 30 讲　平面向量的概念及线性运算

学校:＿＿＿＿＿＿姓名：＿＿＿＿＿＿班级：＿＿＿＿＿＿考号：＿＿＿＿＿＿

【基础巩固】

1.给出下列说法:

①两个有共同起点的相等向量,其终点必相同;

②两个有共同终点的向量,一定是共线向量;

③非零向量$\overrightarrow{AB}$与非零向量$\overrightarrow{CD}$是共线向量,则点 A,B,C,D 必在同一条直线上;

④有向线段就是向量,向量就是有向线段.

其中错误说法的个数是　(　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2.下列各式不能化简为$\overrightarrow{PQ}$的是　(　)

A.$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})$

B.$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})$

C.$\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}$

D.$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}$

3.在△ABC 中,D 是 AB 边上的中点,则$\overrightarrow{CB}$=(　)

A.$2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$　　B.$\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$

C.$2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$　　D.$\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

4.在四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,则四边形 $ABCD$ 的形状是　(　)

A.矩形　　B.平行四边形

C.梯形　　D.以上都不对

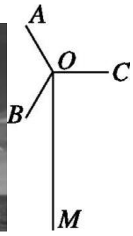
5.已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,则一定共线的三点是(　)

A.A,B,D　　B.A,B,C　　C.B,C,D　　D.A,C,D

6. 在△ABC 中,$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{10}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$D$ 为 BC 边的中点,则　(　)

A.$3\overrightarrow{AE}=7\overrightarrow{ED}$　　B.$7\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{ED}$　　C.$2\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{ED}$　　D.$3\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$

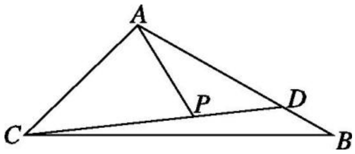
7.2020 年 10 月 27 日,在距离长江口南支航道 0.7 海里的风机塔上,东海航海保障中心上海航标处顺利完成临港海上风电场 AIS(船舶自动识别系统)基站的新建工作,该基站也是我国首个海上风机塔 AIS 基站.已知风机的每个转子叶片的长度为 20 米,每两个叶片之间的夹角相同,风机塔(杆)的长度为 60 米,叶片随风转动,假设叶片与风机塔在同一平面内,如图所示,则$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}|$的最小值为　(　)



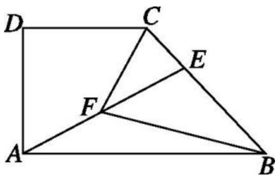
A.40　　B.$20\sqrt{7}$　　C.$20\sqrt{10}$　　D.80

8.如图,在$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$,$P$为$CD$上一点,且$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,则$m$的值为　(　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{5}$



9.(多选)如图,在四边形$ABCD$中,$AB\parallel CD$,$AB\perp AD$,$AB=2AD=2DC$,E为BC边上一点,且$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$,$F$为线段$AE$的中点,则下列结论正确的是(　)



A.$\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

B.$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

C.$\overrightarrow{BF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

D.$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

10.(多选)设点M是$\triangle ABC$所在平面内一点,则下列说法正确的是(　)

A.若$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,则点$M$是边$BC$的中点

B.若$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,则点$M$在边$BC$的延长线上

C.若$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}$,则点$M$是$\triangle ABC$的重心

D.若$2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$,则$\triangle MBC$的面积是$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{2}$

11.已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相反,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$________.

12.已知$\triangle ABC$所在的平面上有一点D满足$\overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$,且$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{CD}(\lambda\in \mathrm{R})$,则$\lambda=$________.

13.点M在$\triangle ABC$的内部,且满足$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,则$S_{\triangle MAC}\colon S_{\triangle MAB}=$________.

14.已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$不共线,$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}$.

(1)若$2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,求$k$的值;

(2)若A,B,C三点共线,求k的值.

15.已知点 G 是$\triangle ABO$ 的重心,M 是 AB 边的中点.

(1)求$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GO}$;

(2)若 PQ 过$\triangle ABO$ 的重心 G,且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OP}=m\boldsymbol{a},\overrightarrow{OQ}=n\boldsymbol{b}$,求证:$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

【素养提升】

1.已知 P 为$\triangle ABC$ 所在平面内一点,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=2$,则$\triangle ABC$ 的面积为( )

A.$\sqrt{3}$　　B.$2\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt{3}$

2.在矩形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$AD=4$,P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上一点,且 $PB\perp PD$,则$|\overrightarrow{PA}|$的最大值是________,$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=$________.

第 31 讲　平面向量基本定理及坐标表示

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

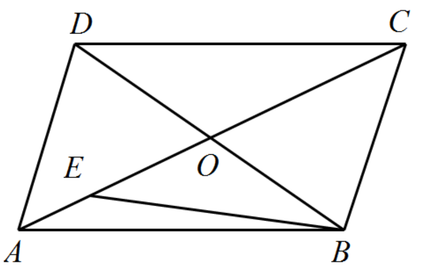
1．已知向量$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-2,4)$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2．若$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-1,1)$，$(2\vec{a}+\vec{b})//(\vec{a}+m\vec{b})$，则$m$的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．-2　　D．$-\frac{1}{2}$

3．如图，在平行四边形$ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，且$\overrightarrow{EO}=2\overrightarrow{AE}$，则$\overrightarrow{EB}=$（　　）



A．$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$　　C．$\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　D．$\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

4．在平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{b}$，$E$为$AD$的中点，$CE$与$BD$交于$F$，则$\overrightarrow{AF}=$（　　）

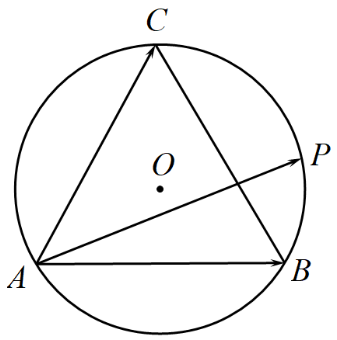
A．$-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$　　B．$-\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$　　C．$-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}$　　D．$-\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$

5．已知O为坐标原点，$\overrightarrow{P_1P}=-2\overrightarrow{PP_2}$，若$P_1(1,2)$、$P_2(2,-1)$，则与$\overrightarrow{OP}$共线的单位向量为（　　）

A．$(3,-4)$　　B．$(3,-4)$或$(-3,4)$

C．$\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$或$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

6．如图，边长为 2 的等边三角形的外接圆为圆O，P为圆O上任一点，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$2x+2y$的最大值为（　　）



A．$\frac{8}{3}$　　　　B．2　　　　C．$\frac{4}{3}$　　　　D．1

7．已知在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则$\mu=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{3}{4}$　　　　D．1

8．在平行四边形$ABCD$中，点E、F分别满足$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{EF}=$（　　）

A．$\frac{5}{12}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$　　　　B．$\frac{11}{12}\vec{a}-\frac{5}{4}\vec{b}$　　　　C．$\frac{13}{12}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$　　　　D．$\frac{19}{12}\vec{a}-\frac{5}{4}\vec{b}$

9．（多选）已知向量$\vec{m}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\vec{n}=(\cos\beta,\sin\beta)(\alpha,\beta\in[0,2\pi),\alpha>\beta)$，且$\vec{m}+\vec{n}=(0,1)$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\vec{m}^2+\vec{n}^2=1$　　　　B．$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$　　　　C．$|\vec{m}-\vec{n}|$的值为2　　　　D．$\sin(\alpha+\beta)=0$

10．（多选）已知向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(m,m-2)$，其中$m\in\mathbf{R}$，下列说法正确的是（　　）

A．若$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=\frac{2}{3}$　　　　B．若$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则$|\vec{b}|=\sqrt{5}$

C．若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$m<4$　　　　D．若$m=2$，向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为-1

12．设向量$\vec{a}=(x,2-x)$，$\vec{b}=(-1,2)$，若$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则$x=$__________.

14．在边长为4的等边$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，点$P$在线段$CD$上，且$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，则$|\overrightarrow{AP}|=$________.

15．已知正三角形ABC的边长为2，D是边BC的中点，动点P满足$|\overrightarrow{PD}|\le 1$，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，其中$x+y\ge 1$，则$2x+y$的最大值为___________.

16．平面内给定两个向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(-1,2)$.

(1)求$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|$；

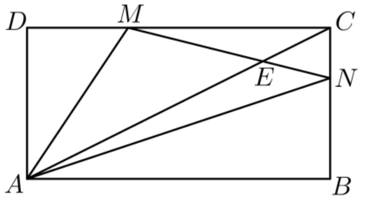
(2)若$\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)//\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，求实数$k$的值.

17．已知$A(1,3)$，$B(2,-2)$，$C(4,1)$.

(1)若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，求$D$点的坐标；

(2)设向量$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，若$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行，求实数$k$的值.

18．如图所示，已知矩形$ABCD$中，$AB=2, AD=1, \overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$AC$与$MN$相交于点$E$.



(1)若$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，求$\lambda$和$\mu$的值；

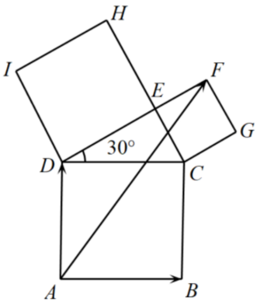
(2)用向量$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$表示$\overrightarrow{AE}$.

【素养提升】

1．在$\triangle ABC$中，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60^{\circ}$，P是$\triangle ABC$的外接圆上的一点，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则$m+n$的最小值是（　　）

A．-1　　　　B．$-\frac{1}{2}$　　　　C．$-\frac{1}{3}$　　　　D．$-\frac{1}{6}$

2．根据毕达哥拉斯定理，以直角三角形的三条边为边长作正方形，从斜边上作出的正方形的面积正好等于在两直角边上作出的正方形面积之和．现在对直角三角形CDE按上述操作作图后，得如图所示的图形，若$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则$x-y=$____________．



第32讲　平面向量的数量积及应用举例

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

1．已知向量$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-2,4)$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2．已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．30°　　B．60°　　C．120°　　D．150°

3．已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．定义：$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中$\theta$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角．若$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|$等于（　　）

A．6　　B．-6　　C．-8　　D．8

5．已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．3

6．已知△ABC中，$\angle A=60°$，AB=4，AC=6，且$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}=$（　　）

A．12　　B．14　　C．16　　D．18

7．在△ABC中，$AC=3,BC=4,\angle C=90°$．P为△ABC所在平面内的动点，且$PC=1$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是（　　）

A．$[-5,3]$　　B．$[-3,5]$　　C．$[-6,4]$　　D．$[-4,6]$

9．（多选）已知向量$\vec{a}=(-2,1),\vec{b}=(-1,t)$，则下列说法正确的是（　　）

A．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则t的值为-2

B．若$\vec{a}//\vec{b}$则t的值为$\frac{1}{2}$

C．若$0<t<2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角

D．若$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则$\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=1$

10．（多选）在平面四边形$ABCD$中，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=1$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}$，则

（　　）

A．$\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$

B．$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right|$

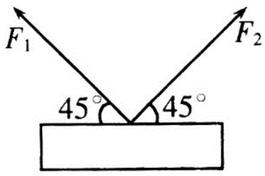
C．$\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{BC}$

D．$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

11．已知向量$\vec{a}=(m,3),\vec{b}=(1,m+1)$．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$______________.

12．设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，且$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=3$，则$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$_________.

13．如图所示，一个物体被两根轻质细绳拉住，且处于平衡状态.已知两条绳上的拉力分别是$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$，且$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$与水平夹角均为$45°$，$\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=10\sqrt{2}\mathrm{N}$，则物体的重力大小为_________$N$.



14．若$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，AD为BC边上的中线，M为AD的中点，则$\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$的值为___________.

15．已知$|\vec{a}-2\vec{e}|=|\vec{b}-\vec{e}|=1,|\vec{e}|=1$，则向量$\vec{a}\cdot\vec{b}$的范围是____________.

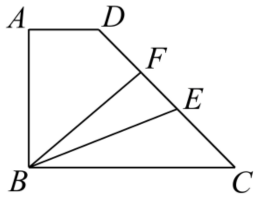
16．菱形$ABCD$中，$AB=1,A\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，点$E$，$F$分别是线段$AD,CD$上的动点（包括端点），$AE=CF$，则$(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF})\cdot\overrightarrow{AC}=$___________，$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}$的最小值为___________.

【素养提升】

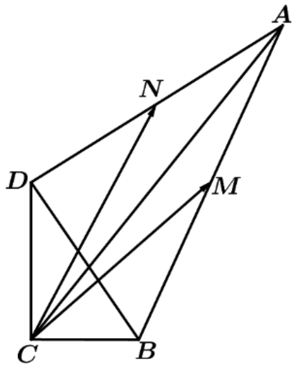
2．设直角$\triangle ABC$，P_0是斜边AB上一定点．满足$P_0B=\dfrac{1}{6}AB=1$，则对于边AB上任一点P，恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geq\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则斜边$AB$上的高是________.

3．已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2,\vec{a}\perp\vec{b},|\vec{b}+2\vec{c}|=2$，若$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}+2\vec{b})\leq4$，则$|\vec{c}+\vec{d}|$的最大值是__________.

4．如图直角梯形$ABCD$中，EF是CD边上长为6 的可移动的线段，$AD=4$，$AB=8\sqrt{3}$，$BC=12$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$的取值范围为________________.



5．如图，已知B，D是直角C两边上的动点，$AD\perp BD$，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{3}$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，$\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$，则$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最大值为__________.



6．（已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是非零平面向量，$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，$\left(\sqrt{2}\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$，$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$，则$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|}$的最大值是_________.

7．定义两个向量组$X=\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}\right),Y=\left(\vec{y_1},\vec{y_2},\vec{y_3}\right)$的运算$X\cdot Y=\vec{x_1}\cdot\vec{y_1}+\vec{x_2}\cdot\vec{y_2}+\vec{x_3}\cdot\vec{y_3}$，设$\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$为单位向量，向量组$X=\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}\right),Y=\left(\vec{y_1},\vec{y_2},\vec{y_3}\right)$分别为$\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$的一个排列，则$X\cdot Y$的最小值为_______.

第 33 讲　数系的扩充与复数的引入

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

1．$(2+2i)(1-2i)=$（　　）

A．$-2+4i$　　B．$-2-4i$　　C．$6+2i$　　D．$6-2i$

2．（**2022·浙江·高考真题**）已知$a,b\in\mathbf{R},a+3i=(b+i)i$（$i$为虚数单位），则（　　）

A．$a=1,b=-3$　　B．$a=-1,b=3$　　C．$a=-1,b=-3$　　D．$a=1,b=3$

3．若复数z满足$i\cdot z=3-4i$，则$|z|=$（　　）

A．1　　B．5　　C．7　　D．25

4．复数$\dfrac{2i}{1-i}$（i是虚数单位）的虚部是（　　）

A．1　　B．$-i$　　C．2　　D．$-2i$

5．复数$\dfrac{2-i}{1-3i}$在复平面内对应的点所在的象限为（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

6．已知$(1-i)^2z=3+2i$，则$z=$（　　）

A．$-1-\dfrac{3}{2}i$　　B．$-1+\dfrac{3}{2}i$　　C．$-\dfrac{3}{2}+i$　　D．$-\dfrac{3}{2}-i$

7．已知复数z在复平面内对应的点为$(1,1)$，$\overline{z}$是z的共轭复数，则$\dfrac{1}{\overline{z}}=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　B．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　C．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　D．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

8．已知$z=1-2i$，且$z+a\overline{z}+b=0$，其中a，b为实数，则（　　）

A．$a=1,b=-2$　　B．$a=-1,b=2$　　C．$a=1,b=2$　　D．$a=-1,b=-2$

9．设$2\left(z+\overline{z}\right)+3\left(z-\overline{z}\right)=4+6i$，则$z=$（　　）

A．$1-2i$　　B．$1+2i$　　C．$1+i$　　D．$1-i$

10．设复数z的模长为1，在复平面对应的点位于第一象限，且满足$|z+\overline{z}|=1$，则$\overline{z}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　C．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

12．（多选）已知复数z满足方程$\left(z^2+9\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$，则（　　）

A．z 可能为纯虚数　　　　　　　　　　　　B．该方程共有两个虚根

C．z 可能为 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　　　　　　　　　　　D．该方程的各根之和为 2

13．（多选）设复数 $z=\dfrac{1}{a+2\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$，当 a 变化时，下列结论正确的是（　　）

A．$|z|=|\overline{z}|$ 恒成立　　　　　　　　　　B．z 可能是纯虚数

C．$z+\dfrac{1}{z}$ 可能是实数　　　　　　　　　D．$|z|$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$

14．（多选）已知复数 z_1 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，复数 z_2 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_2}$，则（　　）

A．若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$

B．若 $\left(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right)\perp\left(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right)$，则 $|z_1|=|z_2|$

C．若 z_1 与 z_2 在复平面上对应的点关于实轴对称，则 $z_1z_2=|z_1z_2|$

D．若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1^2=z_2^2$

15．已知 i 是虚数单位，化简 $\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的结果为______．

16．已知复数 z 满足 $(4+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})=25$，则 $|z|=$______

17．已知复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$，则 $z\cdot\overline{z}=$______．

18．若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=|1-\mathrm{i}|$，则 z 的模为______，虚部为______．

19．中国古代数学著作《九章算术》中记载了平方差公式，平方差公式是指两个数的和与这两个数差的积，等于这两个数的平方差.若复数 $a=5+3\mathrm{i},b=4+3\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 $a^2-b^2=$______．

20．请写出一个同时满足①$|z-2\mathrm{i}|=|z-2|$；②$|z|^2=2$ 的复数 z，z=______．

21．设 m 为实数，复数 $z_1=1+2\mathrm{i},z_2=m+3\mathrm{i}$（这里 i 为虚数单位），若 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 为纯虚数，则 $|z_1+z_2|$ 的值为______．

22．如果复数 z 满足 $|z+1-\mathrm{i}|=2$，那么 $|z-2+\mathrm{i}|$ 的最大值是______．

【素养提升】

1．已知复数 z 对应的点在第二象限，$\overline{z}$ 为 z 的共轭复数，有下列关于 z 的四个命题：

甲：$z+\overline{z}=-2$；　　乙：$z-\overline{z}=2\mathrm{i}$；　　丙：$z\cdot\overline{z}=4$；　　丁：$z\div\overline{z}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$．

如果只有一个假命题，则该命题是（　　）

A．甲　　　　B．乙　　　　C．丙　　　　D．丁

2．若i为虚数单位，复数z满足$1 \le |z+1+\mathrm{i}| \le \sqrt{2}$，则$|z-1-\mathrm{i}|$的最大值为_______.

3．已知$|z|=1$，$k \in \mathbf{R}$且z是复数，当$|z^2+kz+1|$的最大值为3，则$k=$_______.

4．若非零复数x,y满足$x^2+xy+y^2=0$，则$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2020}$的值是___________.

5．任何一个复数$z=a+b\mathrm{i}$（其中a、$b \in \mathrm{R}$，i为虚数单位）都可以表示成：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的形式，通常称之为复数$z$的三角形式．法国数学家棣莫弗发现：$z^n=\left[r\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\right)\left(n \in \mathrm{N}^*\right)$，我们称这个结论为棣莫弗定理．根据以上信息，若$r=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$时，则$z^{2022}=$________；对于$\forall n \in \mathrm{N}^*, n \ge 2$，

$\sum_{k=2}^{n}[\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+\sin\frac{(k-1)\pi}{n}]=$________.

第 30 讲　平面向量的概念及线性运算

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

7. A　[解析] 由题知,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,即$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}$,则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{CM}$,则当叶片 OC 旋转到最低点时,$|\overrightarrow{CM}|$最小,且其值为 60-20=40.

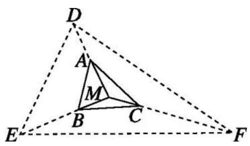
8. B　[解析] ∵$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$,∴$\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$,又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,∴$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,又 C,P,D 三点共线,∴$m+\frac{2}{3}=1$,解得 $m=\frac{1}{3}$.故选 B.

9. ABC　[解析] 连接 BD(图略),∵ $AB\parallel CD,AB\perp AD,AB=2AD=2DC$,∴$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,A 正确;∵$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$,∴$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,∴$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,又 F 为线段 AE 的中点,∴$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,B 正确;$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,C 正确;$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,D 错误.故选 ABC.

10. ACD　[解析] 若$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,则点 M 是边 BC 的中点,故 A 正确;若$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,则$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,即$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$,则点 M 在边 CB 的延长线上,故 B 错误;若$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}$,即$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=0$,则点 M 是△ABC 的重心,故 C 正确;由 $2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$,可得 M 为边 AB 的中点,则△MBC 的面积是△ABC 面积的$\frac{1}{2}$,故 D 正确.故选 ACD.

13. 点 M 在△ABC 的内部,且满足 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,则 $S_{\triangle MAC}∶S_{\triangle MAB}=$________.

3∶4　[解析] 根据题意,分别延长 MA 至 D,MB 至 E,MC 至 F,使得 $MD=2MA,ME=3MB,MF=4MC$,如图所示:



由 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,得$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\mathbf{0}$,连接 DE,DF,EF,所以点 M 是△DEF 的重心,所以 $S_{\triangle MDE}=S_{\triangle MEF}=S_{\triangle MFD}$,设 $S_{\triangle MDE}=1$,则 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$,$S_{\triangle MAC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{8}$,所以 $S_{\triangle MAC}∶S_{\triangle MAB}=\frac{1}{8}∶\frac{1}{6}=3∶4$.

14.已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线,$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}$.

(1)若 $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,求 k 的值;

(2)若 A,B,C 三点共线,求 k 的值.

解:(1) ∵$2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,

∴$2(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}=(1+k)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,

又 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,∴$k+1=0$,∴$k=-1$.

(2) ∵A,B,C 三点共线,∴设$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

即$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,

∴$(k-1)\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}+5\lambda\boldsymbol{b}$,

又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,∴$\begin{cases}k-1=-\lambda,\\10=5\lambda,\end{cases}$消去 λ 得 $k=-1$.

15.已知点 G 是△ABO 的重心,M 是 AB 边的中点.

(1)求$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GO}$;

(2)若 PQ 过△ABO 的重心 G,且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OP}=m\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OQ}=n\boldsymbol{b}$,求证:$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

解:(1)连接 GM(图略),因为$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$,$2\overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GO}$,

所以$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GO}=-\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GO}=\boldsymbol{0}$.

(2)证明:易知$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(a+b)$,

因为 G 是△ABO 的重心,

所以$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(a+b)$.

由 P,G,Q 三点共线,设$\overrightarrow{QG}=t\overrightarrow{QP}$,

所以$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OQ}=t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})$,

即$\overrightarrow{OG}=t\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OQ}$,

即$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=mt\boldsymbol{a}+(1-t)n\boldsymbol{b}$.

由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,得$\begin{cases}mt=\frac{1}{3},\\(1-t)n=\frac{1}{3},\end{cases}$

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

【素养提升】

1. B [解析] 设 BC 边的中点为 D,AC 边的中点为 M,连接 PD,MD,BM(图略),则有$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$.由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$,得$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{PD}$,又 D 为 BC 边的中点,M 为 AC 边的中点,所以$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{DM}$,则$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DM}$,则 P,D,M 三点共线且 D 为线段 PM 的中点.又 D 为 BC 边的中点,所以四边形 $CPBM$ 为平行四边形.因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=2$,所以$|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BP}|=2$,则 $AC=4$,且 $BM=PC=2$,所以△AMB 为等边三角形,所以∠$BAC=60°$,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.故选 B.

2. 5 5 [解析] 连接 AC,BD,设对角线 AC,BD 的交点为 O,∵$AB=3$,$AD=4$,∴$AC=BD=\sqrt{9+16}=5$.∵P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上一点,且 $PB\perp PD$,∴点 P 在以线段 BD 为直径的圆上,即点 P 的轨迹是以 O 为圆心,$\frac{AC}{2}=\frac{5}{2}$为半径的圆(除去 B,D 两点),A,C 两点也在圆上,则$|\overrightarrow{PA}|$的最大值为圆的直径,即$|\overrightarrow{PA}|$的最大值为 5.连接 PO,则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$,∴$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=2|\overrightarrow{PO}|=5$.

第 31 讲　平面向量基本定理及坐标表示

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

3．【答案】C

【分析】根据平面向量线性运算法则计算可得；

【详解】解：因为$\overrightarrow{EO}=2\overrightarrow{AE}$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$，

所以$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

故选：C.

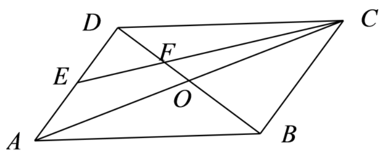
4．【答案】B

【分析】根据题意得$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$，再分析求解即可.

【详解】如下图所示，连接AC与BD交于O，则O为AC的中点，因为E为AD的中点，

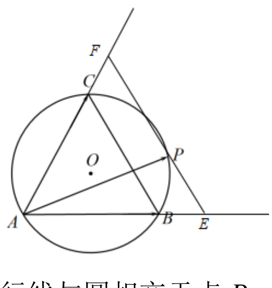
所以F为三角形ACD的重心，所以$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(-\vec{a}-\vec{b}-\vec{a}\right)=-\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

故选：B.



6．【答案】A

【分析】等和线的问题可以用共线定理，或直接用建系的方法解决.

【详解】

作BC的平行线与圆相交于点P，与直线AB相交于点E，与直线AC相交于点F，

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，则$\lambda+\mu=1$，

∵BC//EF，∴设$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=k$，则$k\in[0,\frac{4}{3}]$

∴$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}=\lambda k\overrightarrow{AB}+\mu k\overrightarrow{AC}$

$\therefore x=\lambda k, y=\mu k$

$\therefore 2x+2y=2(\lambda+\mu)k=2k\le\dfrac{8}{3}$

故选：A.

7.【答案】A

【分析】根据 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{BD}$， $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，得到 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{4\mu}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，再根据 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CE}$ 求解.

【详解】解：因为 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{BD}$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$，

因为 $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{4\mu}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CE}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}+\dfrac{\lambda-1}{\lambda}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{4}{3}\mu\\ \dfrac{\lambda-1}{\lambda}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$，

得 $\mu=\dfrac{1}{4}$.

故选：A

9. 【答案】BD

【分析】先根据向量加法，可直接求出 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6},\beta=\dfrac{\pi}{6}$.

对选项A，直接求出向量 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的模，然后验证即可；

对选项B，直接求出余弦值；

对选项C，直接求出向量 $\vec{m}-\vec{n}$ 的模；

对选项D，直接求出正弦值.

【详解】根据向量的加法可得：$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=0\\ \sin\alpha+\sin\beta=1\end{cases}$

根据诱导公式及同角三角函数的关系，且 $\alpha\in[0,2\pi),\beta\in[0,2\pi),\alpha>\beta$，解得：

$\alpha=\frac{5\pi}{6},\beta=\frac{\pi}{6}$.

对选项A，$\vec{m}^2=1,\vec{n}^2=1$，则有：$m^2+n^2=2$，故选项A错误；

对选项B，则有：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，故选项B正确；

对选项C，$\vec{m}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则有：$\vec{m}-\vec{n}=\left(-\sqrt{3},0\right)$

故有：$\left|\vec{m}-\vec{n}\right|=\sqrt{3}\neq 2$，故选项C错误；

对选项D，则有：$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi)=0$，故选项D正确.

故选：BD.

10.　【答案】ABD

【分析】利用共线向量的坐标表示可判断A选项；利用向量垂直结合向量的模长公式可判断B选项；由已知$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$且$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，求出m的取值范围，可判断C选项；利用平面向量的几何意义可判断D选项.

【详解】对于A选项，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$2m=2-m$，解得$m=\frac{2}{3}$，A对；

对于B选项，若$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，

所以，$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5}$，B对；

对于C选项，若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=-m+2(m-2)=m-4<0$，可得$m<4$，

且$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，则$m\neq\frac{2}{3}$，故当$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$m<4$且$m\neq\frac{2}{3}$，C错；

对于D选项，若$m=2$，则$\vec{b}=(2,0)$，所以，向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{-2}{2}=-1$.

故选：ABD.

14.【答案】$\sqrt{7}$

【分析】根据题意得$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，求出$m=\frac{1}{4}$，所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，即$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2}$，求解即可.

【详解】因为$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

即$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，因为点$P$在线段$CD$上，

所以P，C，D三点共线，由平面向量三点共线定理得，$m+\frac{3}{4}=1$，即$m=\frac{1}{4}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，又$\triangle ABC$是边长为4的等边三角形，

所以$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 60^\circ+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

$=\frac{1}{16}\times 16+\frac{1}{4}\times 4\times 4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 16=7$，故$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{7}$.

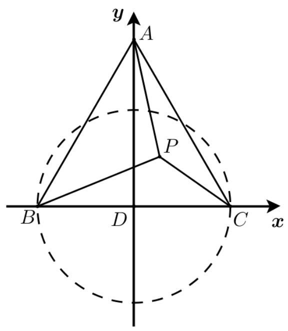
故答案为：$\sqrt{7}$.

15．【答案】$\frac{5}{2}$

【分析】构建以D为原点，BC,AD为x、y轴的直角坐标系，确定相关点坐标并设$P(a,b)$且$\begin{cases}a=t\cos\theta\\b=t\sin\theta\end{cases}(-1\le t\le 1)$，由向量线性关系的坐标表示列方程得到$2x+y$关于$t,\theta$的三角函数式，应用正弦型函数性质求最大值.

【详解】由题设，P在以D为圆心，1为半径的圆上或圆内，

构建以D为原点，BC,AD为x、y轴的直角坐标系，如下图示：



所以$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，令$P(a,b)$且$\begin{cases}a=t\cos\theta\\b=t\sin\theta\end{cases}(-1\le t\le 1)$，

所以$\overrightarrow{AP}=(a,b-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3})$，

又$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，即$(a,b-\sqrt{3})=x\cdot(-1,-\sqrt{3})+y\cdot(1,-\sqrt{3})$，

所以$\begin{cases}y-x=a\\x+y=1-\frac{\sqrt{3}b}{3}\end{cases}$，而$2x+y=\frac{3}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(y-x)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}a$，

则$2x+y=\frac{3}{2}-t(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)=\frac{3}{2}-t\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，

故当$t\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=-1$时，$2x+y$有最大值$\frac{5}{2}$.

故答案为：$\frac{5}{2}$

16．平面内给定两个向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(-1,2)$.

(1)求$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|$；

(2)若$(\vec{a}+k\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$，求实数$k$的值.

解：(1)由已知$3\vec{a}+2\vec{b}=3(3,1)+2(-1,2)=(7,7)$，因此，$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{2\times7^2}=7\sqrt{2}$.

(2)由已知$\vec{a}+k\vec{b}=(3,1)+k(-1,2)=(3-k,1+2k)$，$2\vec{a}-\vec{b}=2(3,1)-(-1,2)=(7,0)$，

因为$(\vec{a}+k\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$，则$1+2k=0$，解得$k=-\frac{1}{2}$.

17．已知$A(1,3)$，$B(2,-2)$，$C(4,1)$.

(1)若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，求$D$点的坐标；

(2)设向量$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，若$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行，求实数$k$的值.

解：(1)设$D(x,y)$，又因为$A(1,3),B(2,-2),C(4,1)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(1,-5),\overrightarrow{CD}=(x-4,y-1)$，

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，

所以$\begin{cases}x-4=1\\y-1=-5\end{cases}$，得$\begin{cases}x=5\\y=-4\end{cases}$，

所以$D(5,-4)$.

(2)由题意得，$\vec{a}=(1,-5)$，$\vec{b}=(2,3)$，

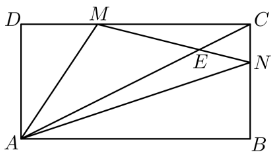
所以$k\vec{a}-\vec{b}=(k-2,-5k-3)$，$\vec{a}+3\vec{b}=(7,4)$，

因为$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行，

所以$4(k-2)-7(-5k-3)=0$，解得$k=-\frac{1}{3}$.

所以实数k的值为$-\frac{1}{3}$.

18．如图所示，已知矩形$ABCD$中，$AB=2,AD=1,\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$AC$与$MN$相交于点$E$.



(1)若$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，求$\lambda$和$\mu$的值；

(2)用向量$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$表示$\overrightarrow{AE}$.

解：(1)以A点为原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y轴，建立平面直角坐标系，

则 $D(0,1),B(2,0),M\left(\frac{2}{3},1\right),N\left(2,\frac{2}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),\overrightarrow{AB}=(2,0),\overrightarrow{AD}=(0,1)$

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=(2\lambda,\mu)$，

所以 $\begin{cases}2\lambda=\frac{4}{3}\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{cases}$

解得 $\lambda=\frac{2}{3},\mu=-\frac{1}{3}$

(2)设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，

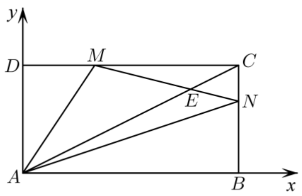
因为 $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2}{3},1\right),\overrightarrow{AN}=\left(2,\frac{2}{3}\right)$， $\overrightarrow{AC}=(2,1)$

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,1)=\left(\frac{2}{3}m+2n,m+\frac{2}{3}n\right)$．解得 $m=\frac{3}{7},n=\frac{6}{7}$，

即 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AN}$， 所以 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}t\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}t\overrightarrow{AN}$，

又因为 M，E，N 三点共线，所以 $\frac{3}{7}t+\frac{6}{7}t=1,t=\frac{7}{9}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$ ．



【素养提升】

1． 【答案】B

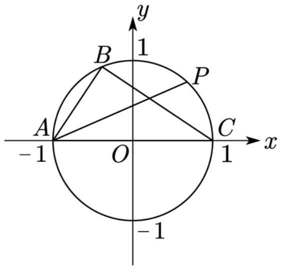
【详解】由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=1+4-2\times1\times2\times\cos60^{\circ}=3$，所以 $BC=\sqrt{3}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $AB\perp BC$．以 AC 的中点为原点，建立如图所示的平面直角坐标系，易得 A（－1，0），C（1，0），B（$-\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），设 P 的坐标为

$(\cos\theta,\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{AC}=(2,0)$， $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$， 又

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以 $(\cos\theta+1,\sin\theta)=m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+n(2,0)=\left(\frac{m}{2}+2n,\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$，所以

$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，$n=\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$，所以$m+n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\geq -1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，当且仅当$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$时，等号成立．



故选：B．

2．【答案】$-\frac{1}{2}$

【详解】如图，以A为原点，分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$为$x,y$轴建立平面直角坐标系，

设正方形$ABCD$的边长为$2a$，则正方形$DEHI$的边长为$\sqrt{3}a$，正方形$EFGC$边长为a

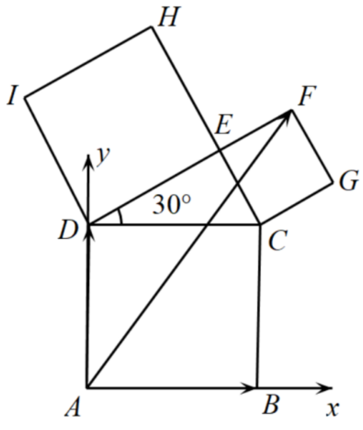
可知$A(0,0)$，$B(2a,0)$，$D(0,2a)$，$DF=\left(\sqrt{3}+1\right)a$

则$x_F=\left(\sqrt{3}+1\right)a\cdot\cos 30^\circ$，$y_F=\left(\sqrt{3}+1\right)a\cdot\sin 30^\circ+2a$，即$F\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\right)$

又$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，$\therefore\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\right)=x(2a,0)+y(0,2a)=(2ax,2ay)$

即$\begin{cases}2ax=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a\\2ay=\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\end{cases}$，即$2ax-2ay=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a-\frac{5+\sqrt{3}}{2}a$，化简得$x-y=-\frac{1}{2}$

故答案为：$-\frac{1}{2}$



第32讲　平面向量的数量积及应用举例

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

6.　【答案】B

【分析】以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$为基底表示$\overrightarrow{NM}$，再与$\overrightarrow{AC}$求数量积即可.

【详解】解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=4\times6\times\frac{1}{2}=12$，

且$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

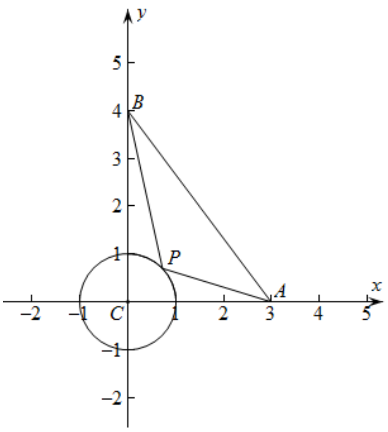
所以：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{6}\times12+\frac{1}{3}\times36=14$.

故选：B.

7.　【答案】D

【分析】依题意建立平面直角坐标系，设$P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，表示出$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则$C\left(0,0\right)$，$A\left(3,0\right)$，$B\left(0,4\right)$，



因为$PC=1$，所以P在以C为圆心，1为半径的圆上运动，

设$P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，$\theta\in\left[0,2\pi\right]$，

所以$\overrightarrow{PA}=\left(3-\cos\theta,-\sin\theta\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(-\cos\theta,4-\sin\theta\right)$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(-\cos\theta\right)\times\left(3-\cos\theta\right)+\left(4-\sin\theta\right)\times\left(-\sin\theta\right)$

$=\cos^2\theta-3\cos\theta-4\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-3\cos\theta-4\sin\theta$

$=1-5\sin\left(\theta+\varphi\right)$，其中$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

因为$-1\le\sin\left(\theta+\varphi\right)\le1$，所以$-4\le1-5\sin\left(\theta+\varphi\right)\le6$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in\left[-4,6\right]$；

故选：D

9. 【答案】AB

【分析】根据向量的数量积、向量的模的坐标表示及向量共线的坐标表示一一判断即可；

【详解】解：对于 A：若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times(-1)+1\times t=0$，解得$t=-2$，故 A 正确；

对于 B：若$\vec{a}//\vec{b}$，则$-2t=-1\times1$，解得$t=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C：当$t=\frac{1}{2}$时$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，此时$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$0°$，故 C 错误；

对于 D：若$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，即$\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，即

$\left(-2\right)^2+1^2=\left(-1\right)^2+t^2$，解得$t=\pm2$，

当$t=2$时$\vec{a}=\left(-2,1\right),\vec{b}=\left(-1,2\right)$，$\vec{a}+\vec{b}=\left(-3,3\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-1,-1\right)$，显然$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\ne\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，

当$t=-2$时$\vec{a}=\left(-2,1\right),\vec{b}=\left(-1,-2\right)$，$\vec{a}+\vec{b}=\left(-3,-1\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-1,3\right)$，此时$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，故

D 错误；

故选：AB

10. 【答案】ABD

【分析】根据所给的条件，判断出四边形$ABCD$内部的几何关系即可.

【详解】因为$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos B=\frac{1}{2}$，可得$B=\frac{\pi}{3}$，

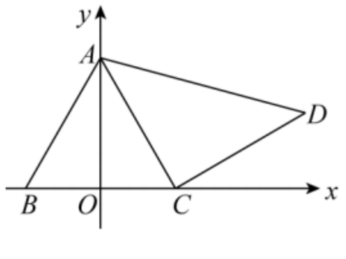
所以$\triangle ABC$为等边三角形，则$\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$，故 A 正确；

因为$\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，所以$\overrightarrow{CD}^2=1$，又$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=1$，所以$\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$，

得$\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

所以$AC\perp CD$，则$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right|$，故 B 正确；

根据以上分析作图如下：



由于BC与AD不平行，故 C 错误；

建立如上图所示的平面直角坐标系，

则 $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{1}{2},0\right)$，$D\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确；

故选：ABD.

15. 【答案】$\left[-\frac{1}{4},6\right]$

【分析】设出 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{e},\vec{d}=\vec{b}-\vec{e}$，利用向量数量积运算法则得到 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2$，利用 $-\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|\le\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})\le\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|$ 求出取值范围.

【详解】设 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{e},\vec{d}=\vec{b}-\vec{e},|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{c}+2\vec{e})\cdot(\vec{d}+\vec{e})=\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2$ ①，

一方面，$\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2\le\vec{c}\cdot\vec{d}+|2\vec{d}+\vec{c}|+2=1+3+2=6$，

当且仅当 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向，$\vec{e}$ 与 $(2\vec{d}+\vec{c})$ 同向时取得最大值，

另一方面，$\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2\ge\vec{c}\cdot\vec{d}-\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|+2=\frac{1}{4}\left(t^2-5\right)-t+2=\frac{1}{4}t^2-t+\frac{3}{4}\ge-\frac{1}{4}$，

其中 $t=\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|\in[0,3]$，当且仅当 $|2\vec{d}+\vec{c}|=2,\vec{e}$ 与 $(2\vec{d}+\vec{c})$ 反向时取得最小值.

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}\in\left[-\frac{1}{4},6\right]$.

故答案为：$\left[-\frac{1}{4},6\right]$

16.【答案】 0 $-\frac{1}{4}$

【分析】建立坐标系，用坐标表示向量，第一个空利用向量数量积坐标公式进行相应计算，第二个空设出 $AE=m\in[0,1]$，表达出 $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=\left(m-\frac{1+\cos A}{2}\right)^2-\frac{(\cos A-1)^2}{4}$，利用二次函数的性质求最小值 $-\frac{(\cos A-1)^2}{4}$，再结合 $\cos A\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 求出最小值.

【详解】以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，垂直 AB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，故 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$D(\cos A,\sin A)$，$C(1+\cos A,\sin A)$，设 $AE=m\in[0,1]$，则 $E(m\cos A,m\sin A)$，$F(1-m+\cos A,\sin A)$，则 $\overrightarrow{AE}=(m\cos A,m\sin A)$，$\overrightarrow{CF}=(-m,0)$，$\overrightarrow{AC}=(1+\cos A,\sin A)$，

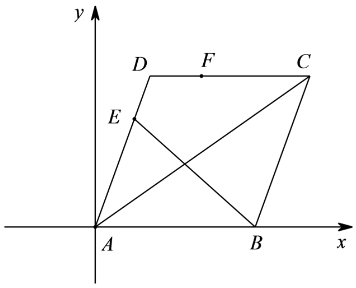
$(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF})\cdot\overrightarrow{AC}=\left(m\cos A-m,m\sin A\right)\cdot\left(1+\cos A,\sin A\right)=-m\sin^2 A+m\sin^2 A=0$；

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=m^2-\left(1+\cos A\right)m+\cos A=\left(m-\frac{1+\cos A}{2}\right)^2-\frac{\left(\cos A-1\right)^2}{4}$

因为$A\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\cos A\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$\frac{1+\cos A}{2}\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\subseteq\left[0,1\right]$，故当$m=\frac{1+\cos A}{2}$时，

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}$取得最小值为$-\frac{\left(\cos A-1\right)^2}{4}$，因为$\cos A\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，所以当$\cos A=0$，即$A=\frac{\pi}{2}$时，

$-\frac{\left(\cos A-1\right)^2}{4}$最小，最小值为$-\frac{1}{4}$



故答案为：0，$-\frac{1}{4}$

【素养提升】

3．【答案】$\sqrt{10}+4$

【分析】由已知条件可设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,0),\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(0,2)$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC},\vec{d}=\overrightarrow{OD},-2\vec{b}=\overrightarrow{OE}$．由已知可确定点$C$在以$N(0,-1)$为圆心，1为半径的圆上，$D$在以$M(1,-2)$为圆心3为半径的圆内（含边界），则所求即为圆面$M$内一点与圆$P$上一点之间的距离，从而可得答案.

【详解】∵$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，∴$\vec{a}\perp\vec{b}$，又$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，则可设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,0),\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(0,2)$，

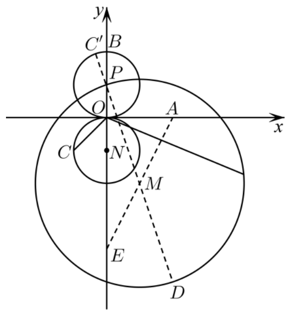
设$\vec{c}=\overrightarrow{OC},\vec{d}=\overrightarrow{OD},-2\vec{b}=\overrightarrow{OE}$．由$|\vec{b}+2\vec{c}|=2\Rightarrow\left|\vec{c}-\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\right|=1$知$C$在以$N(0,-1)$为圆心，1为半径的圆上，取$AE$的中点为$M(1,-2)$，

由$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}+2\vec{b})=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD})\cdot(\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MD})$

$=-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DM})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{DM})=\overrightarrow{DM}^2-\overrightarrow{MA}^2$,又$AE=2\sqrt{5}$，

所以$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}+2\vec{b})=\overrightarrow{DM}^2-\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{DM}^2-5\le4\Rightarrow|DM|\le3$

所以D在以$M(1,-2)$为圆心3为半径的圆内（含边界），如图所示.



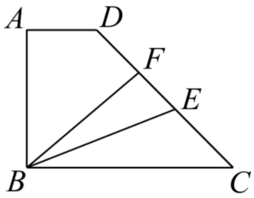
作圆 N 关于 x 轴的对称圆圆 P，其中 $P(0,1)$，

则 $|\vec{c}+\vec{d}|=|\vec{d}-(-\vec{c})|$ 表示圆面 M 内一点与圆 P 上一点之间的距离，

所以 $|\vec{c}+\vec{d}|=|\vec{d}-(-\vec{c})|\le|C'D|=|MP|+r_1+r_2=\sqrt{10}+1+3=\sqrt{10}+4$，

即 $|\vec{c}+\vec{d}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}+4$.

故答案为：$\sqrt{10}+4$.

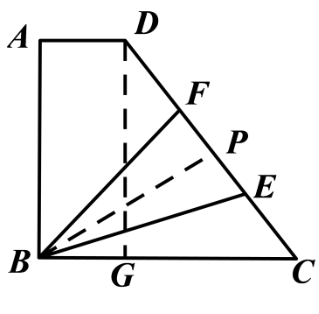
4. 

【答案】$[99,148]$

【分析】首先在 BC 上取一点 G，使得 $BG=4$，取 EF 的中点 P，连接 DG，BP，根据题意得到 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\right)^2-\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}\right)^2\right]=\overrightarrow{BP}^2-9$，再根据 $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 的最值求解即可.

【详解】在 BC 上取一点 G，使得 $BG=4$，取 EF 的中点 P，连接 DG，BP，

如图所示：



则 $DG=8\sqrt{3}$，$GC=8$，$CD=\sqrt{8^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=16$，

$\tan\angle BCD=\frac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}$，即 $\angle BCD=60^\circ$.

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\right)^2-\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{BP}\right)^2-\overrightarrow{FE}^2\right]=\overrightarrow{BP}^2-9$，

当 $BP\perp CD$ 时，$\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 取得最小值，此时 $\left|\overrightarrow{BP}\right|=12\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$，

所以$\left(\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}\right)_{\min}=\left(6\sqrt{3}\right)^2-9=99$.

当F与D重合时，$CP=13$，$BC=12$，

则$\left|\overrightarrow{BP}\right|^2=12^2+13^2-2\times12\times13\times\frac{1}{2}=157$，

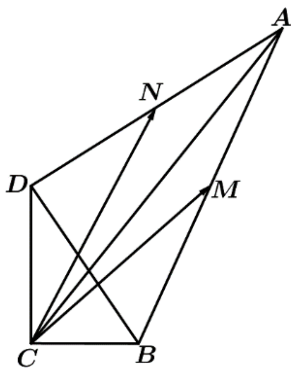
当E与C重合时，$CP=3$，$BC=12$，

则$\left|\overrightarrow{BP}\right|^2=12^2+3^2-2\times12\times3\times\frac{1}{2}=117$，

所以$\left(\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}\right)_{\max}=157-9=148$，即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$的取值范围为$[99,148]$.

故答案为：$[99,148]$

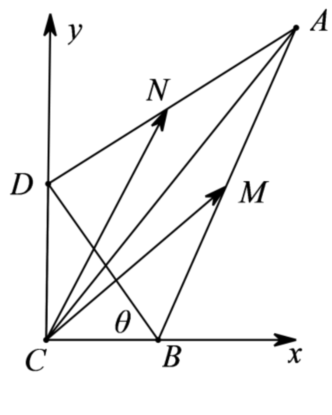
5．



【答案】$\frac{\sqrt{13}}{4}+1$

【分析】以点C为原点，CB，CD所在直线为x轴，y轴建立平面直角坐标系，设$\angle CBD=\theta$，利用三角函数关系表示A，B，D的坐标，由题干条件分析可知M为AB的中点，N为AD的中点，即可得到M，N的坐标，进而得到$\overrightarrow{CM}$与$\overrightarrow{CN}$，整理可得$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$为关于$\theta$的函数，利用正弦型函数的性质即可求得最大值.

【详解】如图，以点C为原点，CB，CD所在直线为x轴，y轴建立平面直角坐标系，



设$\angle CBD=\theta$，则$\angle ABD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$\angle ABx=\pi-\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\theta$，

在Rt△ABD中，$AB=\dfrac{AD}{\cos\angle BAD}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=2$，$BD=AB\sin\angle BAD=1$，

所以设$B(\cos\theta,0)$，$D(0,\sin\theta)$，$A\left(\cos\theta+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right),2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)\right)$，即

$A\left(\sqrt{3}\sin\theta,\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)$.

由题意可知M为AB的中点，N为AD的中点，

所以$M\left(\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right),\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\right)$，$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)$，

所以$\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right),\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\right)$，$\overrightarrow{CN}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)$，

所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3}{4}\sin^2\theta+\dfrac{1}{4}\left(3\cos^2\theta+3\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\right)$

$=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\sin^2\theta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\dfrac{1}{4}\cos 2\theta+1$

$=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}\sin(2\theta-\varphi)+1$

$=\dfrac{\sqrt{13}}{4}\sin(2\theta-\varphi)+1$（其中$\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\varphi$为锐角），

所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最大值为$\dfrac{\sqrt{13}}{4}+1$，此时$2\theta-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，即$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{13}}{4}+1$

6.【答案】$\sqrt{2}+1$

【分析】分析题目条件，利用向量的数量积结合几何性质解题

【详解】由题，令$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1\Rightarrow\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=1\Rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=1$，

因为$\left|\vec{a}\right|=2$，令$\vec{a}=(2,0)$，根据几何性质，点B在以$(2,0)$为圆心，1为半径的圆上，

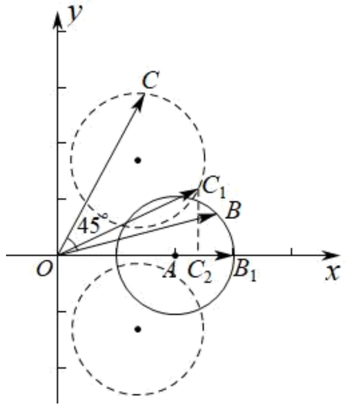
$\left(\sqrt{2}\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\sqrt{2}\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，又因为$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$，利用数量积公式展开可得

$\cos\left\langle \vec{b},\vec{c}\right\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left\langle \vec{b},\vec{c}\right\rangle=45^{\circ}$，

所以点 C 的轨迹为以 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ 为圆心，半径为 1 的圆，

所以 C 的横坐标的最大值为 $\sqrt{2}+1$，

$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\left\langle \vec{a},\vec{c}\right\rangle}{\left|\vec{a}\right|}=\left|\vec{c}\right|\cos\left\langle \vec{a},\vec{c}\right\rangle$，即为 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影，最大值为 $\sqrt{2}+1$.



故答案为：$\sqrt{2}+1$.

7.　【答案】$-\dfrac{3}{2}$

【分析】讨论 $\vec{x_i}\neq\vec{y_i},i=1,2,3$、$\vec{x_i}=\vec{y_i}=\vec{e_i}$ 且 $i=1,2,3$、$\vec{x_i}=\vec{y_i}=\vec{e_i}$ 且 $i=1$ 或 2 或 3，根据 $X\cdot Y$ 的定义及向量数量积的运算律，分别求最小值，即可得结果.

【详解】当 $\vec{x_i}=\vec{y_i}=\vec{e_i}$ 且 $i=1,2,3$ 时，$X\cdot Y=3$；

当 $\vec{x_1}=\vec{y_1}=\vec{e_1}$ 且 $\vec{x_2}\neq\vec{y_2}$、$\vec{x_3}\neq\vec{y_3}$ 时，则 $X\cdot Y=\vec{e_1}^{2}+2\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}\geq 1-2=-1$，当且仅当 $\langle\vec{e_2},\vec{e_3}\rangle=\pi$ 时等号成立；

同理 $\vec{x_2}=\vec{y_2}=\vec{e_2}$ 且 $\vec{x_1}\neq\vec{y_1}$、$\vec{x_3}\neq\vec{y_3}$ 或 $\vec{x_3}=\vec{y_3}=\vec{e_3}$ 且 $\vec{x_1}\neq\vec{y_1}$、$\vec{x_2}\neq\vec{y_2}$ 时，$X\cdot Y$ 的最小值也为 -1；

当 $\vec{x_i}\neq\vec{y_i},i=1,2,3$ 时，则 $X\cdot Y=\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}+\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_2}\cdot\left(\vec{e_1}+\vec{e_3}\right)+\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}\geq\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}-|\vec{e_1}+\vec{e_3}|$，

由 $\left|\vec{e_1}+\vec{e_3}\right|^{2}=2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}$，设 $t=\left|\vec{e_1}+\vec{e_3}\right|,0\leq t\leq 2$，则 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=\dfrac{t^{2}-2}{2}$，

所以 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}-|\vec{e_1}+\vec{e_3}|=\dfrac{1}{2}t^{2}-t-1\geq-\dfrac{3}{2}$，当 $t=1$ 时等号成立.

综上，$X\cdot Y$ 的最小值为 $-\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$-\dfrac{3}{2}$.

第33讲　数系的扩充与复数的引入

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

12．【答案】ACD

【分析】依题意可得$z^2+9=0$或$z^2-2z+4=0$，即$z^2=-9$或$(z-1)^2=-3$，从而求出z，即可判断；

【详解】解：由$\left(z^2+9\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$，得$z^2+9=0$或$z^2-2z+4=0$，即$z^2=-9$或$(z-1)^2=-3$，

解得$z=\pm 3\mathrm{i}$或$z=1\pm\sqrt{3}i$，

即方程的根分别为$z_1=3\mathrm{i}$、$z_2=-3\mathrm{i}$、$z_3=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$、$z_4=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，

所以$z_1+z_2+z_3+z_4=3\mathrm{i}+\left(-3\mathrm{i}\right)+\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)+\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)=2$

故选：ACD.

13．　【答案】ABD

【分析】首先根据题意得到$z=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，再结合复数的定义和运算性质依次判断选项即可.

【详解】$z=\frac{1}{a+2\mathrm{i}}=\frac{a-2\mathrm{i}}{(a+2\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})}=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，

对选项A，$\overline{z}=\frac{a}{a^2+4}+\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，$|z|=|\overline{z}|=\sqrt{\frac{a^2}{\left(a^2+4\right)^2}+\frac{4}{\left(a^2+4\right)^2}}$，

故A正确.

对选项B，$z=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，

当$a=0$时，$z=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$为纯虚数，故B正确.

对选项C，$z+\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}+a+2\mathrm{i}=\left(\frac{a}{a^2+4}+a\right)+\left(2-\frac{2}{a^2+4}\right)\mathrm{i}$

令$2-\frac{2}{a^2+4}=0$，即$a^2+3=0$无解，故C错误.

对选项D，$|z|^2=\frac{a^2}{\left(a^2+4\right)^2}+\frac{4}{\left(a^2+4\right)^2}=\frac{1}{a^2+4}\le\frac{1}{4}$，当且仅当$a=0$时取等号.

所以$|z|$的最大值为$\frac{1}{2}$，故D正确.

故选：ABD

14. 【答案】ABC

【分析】利用向量数量积的运算法则及复数的几何意义即可求解.

【详解】因为 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，所以$\left|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right|=\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|$，

则$\left|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|^2$，即$4\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=0$，则$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，故选项A 正确；

因为$\left(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right)\perp\left(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right)$，所以$\left(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right)=0$，

即$\overrightarrow{OZ_1}^2=\overrightarrow{OZ_2}^2$，则$|z_1|=|z_2|$，故选项B 正确；

设$z_1=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，因为$z_1$与$z_2$在复平面上对应的点关于实轴对称，

则$z_2=a-b\mathrm{i}\left(a,b\in R\right)$，所以$z_1z_2=a^2+b^2$，$|z_1z_2|=a^2+b^2$，则$z_1z_2=|z_1z_2|$，

故选项C 正确；

若$z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$满足$|z_1|=|z_2|$，而$z_1^2\neq z_2^2$，故选项D 错误；

故选：ABC.

15. 【答案】$1-5\mathrm{i}$

【分析】根据复数代数形式的运算法则即可解出.

【详解】$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{11-6-25\mathrm{i}}{5}=1-5\mathrm{i}$.

故答案为：$1-5\mathrm{i}$.

16.【答案】4

【分析】根据复数的运算公式求出复数z的代数形式，再由复数模的公式求$|z|$.

【详解】因为$(4+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})=25$，所以$z=\dfrac{25}{4+3\mathrm{i}}+3\mathrm{i}=\dfrac{25(4-3\mathrm{i})}{25}+3\mathrm{i}=4$，

所以$|z|=\sqrt{4^2+0^2}=4$，

故答案为：4

20. 【答案】$\pm(1+\mathrm{i})$

【分析】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathrm{R}$，根据模长公式得出$a=b=\pm1$，进而得出z.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathrm{R}$，由条件①可以得到$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}$，两边平方化简可得$a=b$，故$|z|^2=2\Rightarrow a^2+b^2=2\Rightarrow a=b=\pm1$，$z=\pm(1+\mathrm{i})$；

故答案为：$\pm(1+\mathrm{i})$

22. 【答案】$2+\sqrt{13}$

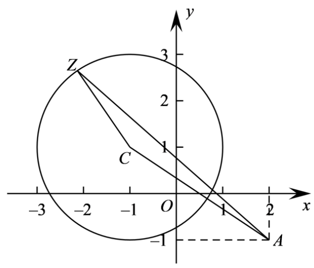
【分析】根据复数的几何意义$|z_1-z_2|$表示Z_1，Z_2两点间距离，结合图形理解运算.

【详解】设复数 z 在复平面中对应的点为 Z

$\because |z+1-\mathrm{i}|=2$，则点 Z 到点 $C(-1,1)$ 的距离为 2，即点 Z 的轨迹为以 C 为圆心，半径为 2 的圆

$|z-2+\mathrm{i}|$ 表示点 Z 到点 $A(2,-1)$ 的距离，结合图形可得 $|ZA|\le|AC|+2=2+\sqrt{13}$

故答案为：$2+\sqrt{13}$.



【素养提升】

1. 【答案】B

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i},\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，根据复数所在象限、复数加法、减法、乘法和除法，结合"只有一个假命题"进行分析，由此确定正确选项.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i},\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

由于 z 对应点在第二象限，所以 $a<0,b>0$，

$z+\overline{z}=2a<0$，$z-\overline{z}=2b\mathrm{i}$，

$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$，$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{a-b\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})^2}{(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})}=\dfrac{a^2-b^2+2ab\mathrm{i}}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\mathrm{i}$.

甲 $\Rightarrow 2a=-2,a=-1$，

乙 $\Rightarrow 2b=2,b=1$，

丙 $\Rightarrow a^2+b^2=4$，

丁 $\Rightarrow \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=-\dfrac{1}{2},\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=-\sqrt{3}a$，

由于"只有一个假命题"，所以乙是假命题，b 的值应为 $\sqrt{3}$.

故选：B

2.【答案】$3\sqrt{2}$

【分析】利用复数的几何意义知复数 z 对应的点 Z 到点 $C(-1,-1)$ 的距离 d 满足 $1\le d\le\sqrt{2}$，$|z-1-\mathrm{i}|$ 表示复数 z 对应的点 Z 到点 $P(1,1)$ 的距离，数形结合可求得结果.

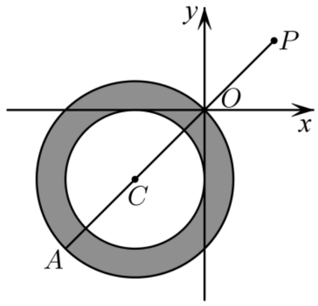
【详解】复数 z 满足 $1\le|z+1+i|\le\sqrt{2}$，即 $1\le|z-(-1-\mathrm{i})|\le\sqrt{2}$

即复数z对应的点Z到点$C(-1,-1)$的距离d满足$1\le d\le\sqrt{2}$

设$P(1,1)$，$|z-1-\mathrm{i}|$表示复数z对应的点Z到点$P(1,1)$的距离

数形结合可知$|z-1-\mathrm{i}|$的最大值$|AP|=|CP|+\sqrt{2}=\sqrt{2^2+2^2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

故答案为：$3\sqrt{2}$



3．【答案】±1

【分析】由$|z|=1$可知，$z\cdot\overline{z}=1$，化简$|z^2+kz+1|$可得其最值为$|k|+2$，进而求出k的值.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in R$，因为$|z|=1$，所以$|z|^2=1$，$z\cdot\overline{z}=1$，

所以$|z^2+kz+1|=|z^2+kz+z\cdot\overline{z}|=\left|z\left(z+\overline{z}+k\right)\right|$，

因为$z+\overline{z}=a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}=2a\in R$，

所以$|z^2+kz+1|=\left|z\left(z+\overline{z}+k\right)\right|=|z+\overline{z}+k|\cdot|z|=|2a+k|$，

因为$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$，所以$a\in[-1,1]$，

所以$|z^2+kz+1|_{\max}=|k|+2=3$，

解得，$k=\pm1$，

故答案为：±1.

4．【答案】-1

【分析】由题设有$\frac{x}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$、$\frac{x}{y}+1=-(\frac{x}{y})^2$易得 $(\frac{x}{y})^{3n}=1$，同理$(\frac{y}{x})^{3n}=1$，$n\in N^*$，而

$\frac{x}{x+y}=-\frac{y}{x}$，$\frac{y}{x+y}=-\frac{x}{y}$，由此可知$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2020}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$，即可求值.

【详解】由题设有：$(\frac{x}{y})^2+\frac{x}{y}+1=0$，解得$\frac{x}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，且$\frac{x}{y}+1=-(\frac{x}{y})^2$，

$\therefore(\frac{x}{y})^3=1$，即$(\frac{x}{y})^{3n}=1$，同理有$(\frac{y}{x})^{3n}=1$，$n\in N^*$，

$\frac{x}{x+y}=\frac{x(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$，$\frac{y}{x+y}=\frac{y(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{y^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$，又$x^2+xy+y^2=0$，

$\therefore \frac{x}{x+y}=-\frac{y^2}{xy}=-\frac{y}{x}$， $\frac{y}{x+y}=-\frac{x^2}{xy}=-\frac{x}{y}$，

$\therefore \left(\frac{x}{x+y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2020}=(\frac{y}{x})^{2020}+(\frac{x}{y})^{2020}=(\frac{y}{x})^{3\times673+1}+(\frac{x}{y})^{3\times673+1}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-1$，

故答案为：-1.

5. 【答案】 $-\mathrm{i}$ $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$

【分析】利用给定定理直接计算即得 z^{2022}；令 $w=\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}$，求出等比数列 $\{w^{n-1}\}(n\ge2)$ 前 $n-1$ 项的和，再利用复数相等求解作答.

【详解】当 $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$z=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$，所以

$z^{2022}=(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})^{2022}=\cos(504\pi+\frac{3\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(504\pi+\frac{3\pi}{2})=-\mathrm{i}$；

$\forall n\in\mathrm{N}^*$，令 $w=\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}$，则 $w^n=(\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})^n=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，

$\forall n\in\mathrm{N}^*,n\ge2$， $w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}=\frac{w(1-w^{n-1})}{1-w}=\frac{w-w^n}{1-w}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}$

$=\frac{(1+\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})(1-\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})}{(1-\cos\frac{\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})(1-\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})}=\frac{2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}{2-2\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}\mathrm{i}$，

而 $w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}=\sum_{k=2}^{n}\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sum_{k=}^{n}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$，则 $\sum_{k=2}^{n}\cos\frac{(k-1)\pi}{n}=0$，

$\sum_{k=}^{n}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$，

所以 $\sum_{k=2}^{n}[\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+\sin\frac{(k-1)\pi}{n}]=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$.

故答案为：-i；$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$