空间向量与立体几何章末检测卷（一）

说明：1．本试题共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2．答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、试室号、座位号填写在答题卷上。

3. 答题必须使用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷上各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卷整洁，考试结束后，将答题卷交回，试卷自己保存。

第 I 卷(选择题　共 60 分)

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

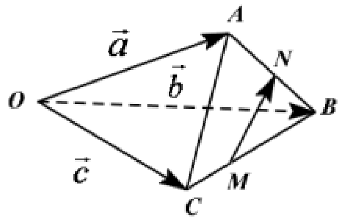
1．已知空间向量 $\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(m,-1,n)$，若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则 $m+n=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【解析】由 $\frac{m}{1}=\frac{-1}{2}=\frac{n}{3}$，解得 $m=-\frac{1}{2},n=-\frac{3}{2}$，则 $m+n=-2$.

故选：A.

2．如图，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，若 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）



A．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$　　B．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

C．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$　　D．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

【解析】由题意得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$.

故选：A

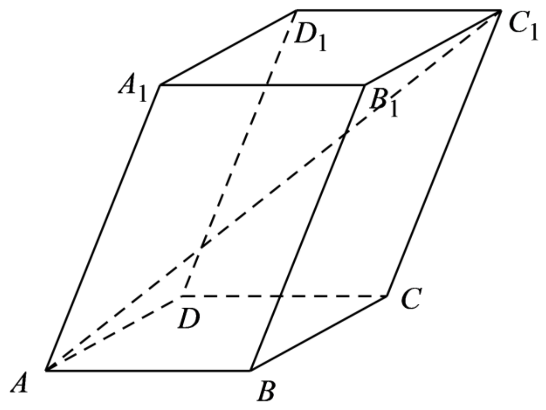
3．已知向量 $\vec{a}=(1,1,2k)$，$\vec{b}=(-1,0,-1)$，$\vec{c}=(0,2,1)$，且向量 $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 互相垂直，则 k 的值是（　　）

A．1　　B．-2　　C．-4　　D．0

【解析】$\vec{a}-2\vec{b}=(3,1,2k+2)$，因为向量$\vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{c}$互相垂直，故$3\times0+1\times2+2k+2=0$，故$k=-2$，

故选：B

4. 如图，平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面$ABCD$是边长为 1 的正方形，且$\angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ$，$AA_1=2$，则线段$AC_1$的长为（　　）



A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\sqrt{11}$　　D. $2\sqrt{3}$

【解析】$\overrightarrow{AC_1}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)^2$，

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$，

$=1+1+4+2\times1\times2\times\cos60^\circ+2\times1\times2\times\cos60^\circ$，

$=10$，

所以$AC_1=\sqrt{10}$，

故选：B

5．四面体$ABCD$中，$AB=AC=AD=2,\angle BAD=90^\circ,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-2$，则$\angle BAC=$（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

【解析】因为$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$，$\angle BAD=90^\circ$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

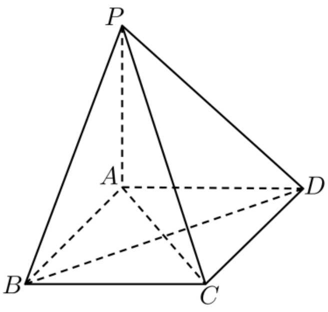
所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，又$AB=AC=2$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC=2$，

所以$\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，因为$\angle BAC\in(0,\pi)$，所以$\angle BAC=60^\circ$；

故选：C

6．如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形且$PA\perp$平面$ABCD$，连接AC与BD，下面各组向量中，数量积不一定为零的是（　　）



A．$\overrightarrow{PD}$与$\overrightarrow{AB}$　　B．$\overrightarrow{PB}$与$\overrightarrow{DA}$

C．$\overrightarrow{PC}$与$\overrightarrow{BD}$　　D．$\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{CD}$

【解析】对于A,因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp AB$,因为底面$ABCD$为矩形，所以$AB\perp AD$,$PA\cap AD=A$,$AD, AP\subset$平面PAD,所以$AB\perp$平面PAD，$PD\subset$平面PAD,所以$AB\perp PD$,即$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PD}$，所以$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，故A不正确；

对于B，因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp AD$,因为底面$ABCD$为矩形，所以$AB\perp AD$,

$PA\cap AB=A$,$AB,AP\subset$平面PAB,所以$AD\perp$平面PAB，

$PB\subset$平面PAB,所以$PB\perp AD$,即$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DA}=0$，故B不正确；

对于C，因为底面$ABCD$为矩形，所以AC与BD不垂直，所以PC与BD不一定垂直，所以$\overrightarrow{PC}$与$\overrightarrow{BD}$不一定垂直，所以$\overrightarrow{PC}$与$\overrightarrow{BD}$的数量积不一定为0，故C正确．

对于D,因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp CD$,因为底面$ABCD$为矩形，所以$CD\perp AD$,

$PA\cap AD=A$,$AD, AP\subset$平面PAD,所以$CD\perp$平面PAD，

$PA\subset$平面PAD,所以$PA\perp CD$,即$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{CD}$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，故D不正确．

故选：C．

7．已知$\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(x,1,2)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．60°　　B．120°　　C．30°　　D．150°

【解析】由$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+0+2=3$，解得$x=1$，

所以$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，所以$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0^\circ\le\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le 180^\circ$，所以$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=30^\circ$．

故选：C

8．在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AD=2$，$AA_1=4$，$\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60^\circ$，则 BC_1 与 CA_1 所成角的正弦值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{21}}{42}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{42}$　　C．$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　　D．$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

【解析】$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

则 $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$，

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=6$，

$\left|\overrightarrow{BC_1}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)^2}=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}^2}=2\sqrt{7}$，

$\left|\overrightarrow{CA_1}\right|^2=\sqrt{\left(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2}$，

$=\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}=2\sqrt{3}$，

$\cos\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$，

所以 $\sin\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

故选：D

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9．已知 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(-1,2,-3)$，$\vec{c}=(2,-4,6)$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　B．$\vec{b}\,//\,\vec{c}$

C．$\left\langle\vec{a},\vec{c}\right\rangle$ 为钝角　　D．$\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $(4,0,4)$

【解析】因为 $1\times(-1)+0\times2+1\times(-3)=-4\neq0$，所以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不垂直，A 错，

因为 $\vec{c}=-2\vec{b}$，所以 $\vec{b}\,//\,\vec{c}$，B 对，

因为 $\vec{a}\cdot\vec{c}=1\times2+0\times(-4)+1\times6=8$，所以 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{c}\right\rangle>0$，所以 $\left\langle\vec{a},\vec{c}\right\rangle$ 不是钝角，C 错，

因为 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量 $\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left\langle\vec{a},\vec{c}\right\rangle\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}=\dfrac{8}{2}(1,0,1)=(4,0,4)$，D 对，

故选：BD.

10．关于空间向量，以下说法正确的是（　　）

A．空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面

B．若对空间中任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则 P，A，B，C 四点共面

C．已知向量 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 是空间的一个基底，若 $\vec{m}=\vec{a}+\vec{c}$，则 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{m}\}$ 也是空间的一个基底

D．若 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，则 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 是钝角

【解析】对于 A，根据共线向量的概念，可知空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面，所以 A 正确；

对于 B，若对空间中任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ 因为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$，根据空间向量的基本定理，可得 P，A，B，C 四点一定共面，所以 B 正确；

对于 C，由于 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 是空间的一个基底，则向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面

$\because \vec{m}=\vec{a}+\vec{c}$，则 $\vec{a},\vec{c},\vec{m}$ 共面

$\therefore$ 可得向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{m}$ 不共面，所以 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{m}\}$ 也是空间的一个基底，所以 C 正确；

对于 D，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle<0$，即 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle<0$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，所以 D 不正确.

故选：ABC.

11．已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $AB\perp AC$，$AB=3$，$AC=4$，$AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AC=60°$，则（　　）

A．$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{7}$

B．$|\overrightarrow{B_1C}|=3\sqrt{3}$

C．$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}=-9$

D．异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$

【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=4$，

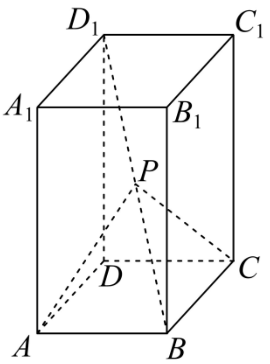
$\overrightarrow{AC_1}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{B_1C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}=-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2=9$，

$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}}=2\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}}=3\sqrt{3}$，

所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{B_1C} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\left|\overrightarrow{B_1C}\right|} = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

故选：BD.

12．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$|AB|=|AD|=1$，$|AA_1|=2$，动点 P 在体对角线 BD_1 上（含端点），则下列结论正确的有（　　）



A．顶点 B 到平面 APC 的最大距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　B．存在点 P，使得 $BD_1 \perp$ 平面 APC

C．$|AP|+|PC|$ 的最小值 $\frac{\sqrt{30}}{3}$　　　D．当 P 为 BD_1 中点时，$\angle APC$ 为钝角

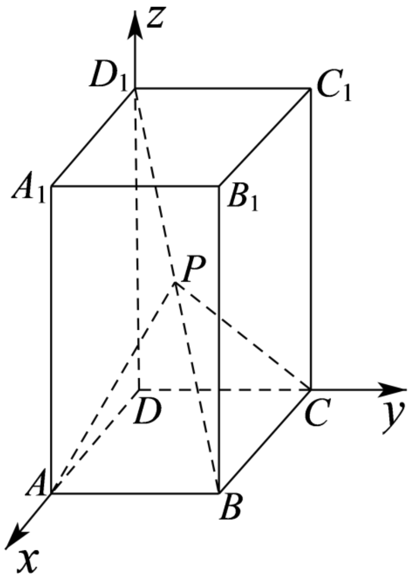
【解析】如图，以点 D 为原点建立空间直角坐标系，设 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BD_1}\ (0 \le \lambda \le 1)$，

则 $A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), D_1(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{BD_1} = (-1,-1,2)$，故 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BD_1} = (-\lambda,-\lambda,2\lambda)$，

则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = (0,1,0) + (-\lambda,-\lambda,2\lambda) = (-\lambda,1-\lambda,2\lambda)$，

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = (1,0,0) + (-\lambda,-\lambda,2\lambda) = (1-\lambda,-\lambda,2\lambda)$，



对于 A，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0),\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，

设平面 APC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-\lambda x+(1-\lambda)y+2\lambda z=0\end{cases}$，

可取 $\vec{n}=(2\lambda,2\lambda,2\lambda-1)$，

则点 B 到平面 APC 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|2\lambda|}{\sqrt{12\lambda^2-4\lambda+1}}$，

当 $\lambda=0$ 时，点 B 到平面 APC 的距离为 0，

当 $0<\lambda\le1$ 时，

$$\frac{|2\lambda|}{\sqrt{12\lambda^2-4\lambda+1}}=\frac{1}{\sqrt{3-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4\lambda^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda}-2\right)^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，取等号，

所以点 B 到平面 APC 的最大距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 正确.

当 $BD_1\perp$ 平面 APC，

因为 $AP,CP\subset$ 平面 APC，所以 $BD_1\perp AP,BD_1\perp CP$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AP}=\lambda+\lambda-1+4\lambda=0\\ \overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CP}=\lambda-1+\lambda+4\lambda=0\end{cases}$，解得$\lambda=\frac{1}{6}$，

故存在点P，使得$BD_1\perp$平面APC，故 B 正确；

对于 C，当$BD_1\perp AP,BD_1\perp CP$时，$|AP|+|PC|$取得最小值，

由 B 得，此时$\lambda=\frac{1}{6}$，

则$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$，

所以$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{CP}|=\frac{\sqrt{30}}{6}$，

即$|AP|+|PC|$的最小值为$\frac{\sqrt{30}}{3}$，故 C 正确；

对于 D，当P为BD_1中点时，

则$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，

则$\overrightarrow{PA}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，

所以$\cos\angle APC=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}=\frac{1}{3}>0$，

所以$\angle APC$为锐角，故 D 错误；

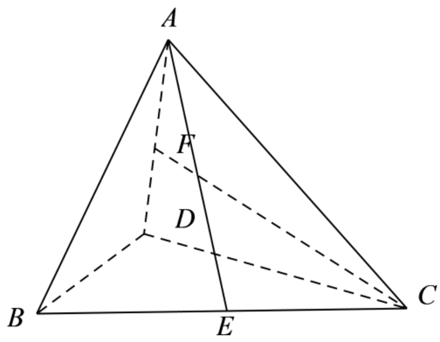
故选：ABC.

第II卷(非选择题　共 90 分)

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知空间四边形$ABCD$的每条边和对角线的长都等于 1，点E，F分别是BC，AD的中点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}$的值为_________.

【解析】



根据题意 $ABCD$ 为正四面体，

$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}$ 两两成 60° 角，

所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$

14．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$，$\left|\vec{b}\right|=2$，且 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.则 $\vec{a}+\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量的坐标为_________.

【解析】$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 两边平方化简得：$2\vec{a}^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=0$，①

因为 $\vec{a}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$，所以 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1+1+2}=2$，

又 $\left|\vec{b}\right|=2$，代入①得：$8-8\vec{a}\cdot\vec{b}+8=0$，解得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，

所以 $\vec{a}+\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量坐标为

$\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}\cdot\frac{\left(1,1,\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{4+2}{2}\cdot\frac{\left(1,1,\sqrt{2}\right)}{2}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

故答案为：$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

15．正方体 $ABCD$－$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 M 在线段 CC_1 上，且 $\overrightarrow{MC_1}=2\overrightarrow{CM}$．点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP\perp$ 平面 MBD_1，则线段 AP 的长为________.

【解析】如图，分别以 DA,DC,DD_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，

$\overrightarrow{MC_1}=2\overrightarrow{CM}$，则 M 是靠近 C 的线段 CC_1 的三等分点，$M(0,1,\frac{1}{3})$，

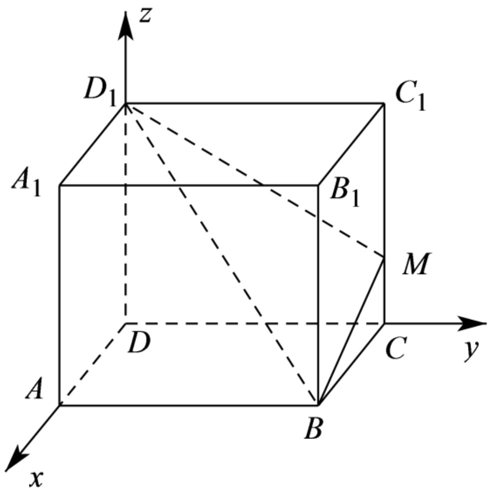
$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,0,\frac{1}{3})$，

P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，设 $P(x,y,1)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y,1)$，

由 $AP\perp$ 平面 MBD_1，得 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD_1}=1-x-y+1=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}=1-x+\frac{1}{3}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$，$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+1^2}=\frac{\sqrt{14}}{3}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{14}}{3}$．



16．已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，$\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$，且 $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AP}$，则实数 $x+y+z$ 的值为____________.

【解析】因为 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$，则 $\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BP}=2\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}\right)$，

所以，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$，

所以，$x=-1$，$y=\frac{2}{3}$，$z=\frac{1}{3}$，因此，$x+y+z=0$．

故答案为：0．

四、解答题（本题共 6 个小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．已知$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$、$\vec{e_3}$是不共面的向量，且$\overrightarrow{OP}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3}$，$\overrightarrow{OA}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}$，$\overrightarrow{OB}=-3\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}$.

(1)判断P、A、B、C四点是否共面；

(2)能否用$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OP}$？并说明理由.

【解析】(1)假设P、A、B、C四点共面，则存在实数x、y、z，

使$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且$x+y+z=1$，

即$2\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3}=x\left(\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}\right)+y\left(-3\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}\right)+z\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}\right)$.

比较对应的系数，得到关于x、y、z的方程组$\begin{cases}x-3y+z=2\\2x+y+z=-1\\-x+2y-z=3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=17\\y=-5\\z=-30\end{cases}$，这与$x+y+z=1$矛盾，

故P、A、B、C四点不共面；

(2)能用$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OP}$，理由如下：

若$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$共面，则存在实数m、n，使$\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，

同（1）可证，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$不共面，即$\overrightarrow{OP}$是向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的线性组合，

令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，

由$\begin{cases}\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}=\vec{a}\\-3\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}=\vec{b}\\\vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}=\vec{c}\end{cases}$，得$\begin{cases}\vec{e_1}=3\vec{a}-\vec{b}-5\vec{c}\\\vec{e_2}=\vec{a}-\vec{c}\\\vec{e_3}=4\vec{a}-\vec{b}-7\vec{c}\end{cases}$，

所以$\overrightarrow{OP}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3}=2\left(3\vec{a}-\vec{b}-5\vec{c}\right)-\left(\vec{a}-\vec{c}\right)+3\left(4\vec{a}-\vec{b}-7\vec{c}\right)=17\vec{a}-5\vec{b}-30\vec{c}$

$=17\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}-30\overrightarrow{OC}$.

18．已知$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(1,2,2)$.

(1)求$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$的值；

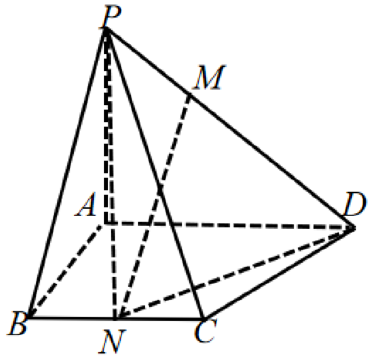
(2)当$\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)$时，求实数$k$的值.

【解析】(1)因为$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，故$\vec{a}+\vec{b}=(3,1,5)$，$2\vec{a}-\vec{b}=(4,-2,6)-(1,2,2)=(3,-4,4)$，故$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=3\times3-1\times4+5\times4=25$

(2)$\vec{a}^2=2^2+(-1)^2+3^2=4+1+9=14$，$\vec{b}^2=1^2+2^2+2^2=9$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1-1\times2+3\times2=6$，因为$(k\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+k\vec{b})$，故$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$，即$k\vec{a}^2+(k^2-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k\vec{b}^2=0$，故$14k+6(k^2-1)-9k=0$，即$(2k+3)(3k-2)=0$，故$k=-\frac{3}{2}$或$k=\frac{2}{3}$

19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，其中$AD\parallel BC$.

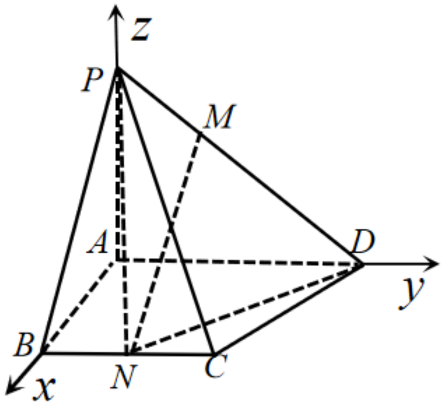
$AD\perp AB, AD=3, AB=BC=2, PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=3$，点$M$在棱$PD$上，点$N$为$BC$中点.



(1)若$DM=2MP$，证明：直线$MN//$平面PAB;

(2)线段PD上是否存在点M，使NM与平面PCD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{18}$？若存在求出$\frac{PM}{PD}$值；若不存在，说明理由

【解析】(1)如图所示，以点A为坐标原点，以AB为x轴，AD为y轴，AP为z轴建立空间直角坐标系，则$P(0,0,3), B(2,0,0), D(0,3,0), C(2,2,0), N(2,1,0)$



若$DM=2MP$，则$M(0,1,2)$，$\overrightarrow{MN}=(2,0,-2)$

因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$AD\perp PA$

又因为 $AD \perp AB, PA \cap AB = A$

所以 $AD \perp$ 平面 PAB

平面 PAB 的其中一个法向量为 $\overrightarrow{AD} = (0,3,0)$

所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$，即 $AD \perp MN$

又因为 $MN \not\subset$ 平面 PAB

所以 $MN //$ 平面 PAB

(2)不存在符合题意的点 M，理由如下：

$\overrightarrow{PD} = (0,3,-3), \overrightarrow{CD} = (-2,1,0), \overrightarrow{DN} = (2,-2,0),$

设平面 PCD 的法向量 $\vec{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$

则 $\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n} = 3y_1 - 3z_1 = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = -2x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$

不妨令 $x_1 = 1$，则 $\vec{n_1} = (1,2,2)$

设 $\dfrac{PM}{PD} = \lambda$，即 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD}, \lambda \in [0,1]$

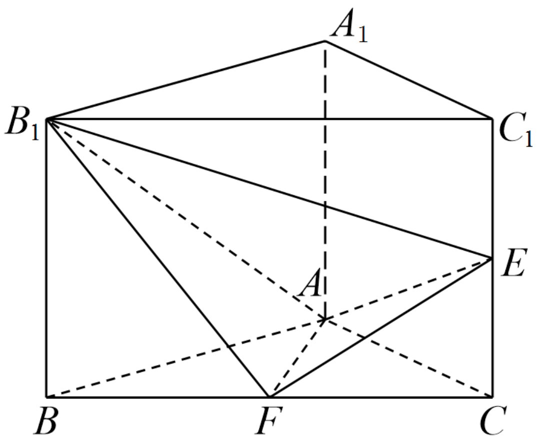
$\overrightarrow{PM} = (0, 3\lambda, -3\lambda)$ 则 $M(0, 3\lambda, 3-3\lambda)$

$\overrightarrow{MN} = (2, 1-3\lambda, 3\lambda-3), \sin\theta = \left|\cos\left\langle \overrightarrow{MN}, \vec{n_1} \right\rangle\right| = \left| \dfrac{2+2(1-3\lambda)+2(3\lambda-3)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2} \cdot \sqrt{2^2+(1-3\lambda)^2+(3\lambda-3)^2}} \right|$

$= \dfrac{2}{3\sqrt{18\lambda^2-24\lambda+14}} = \dfrac{\sqrt{6}}{18}$

解得 $\lambda = \dfrac{5}{3}$ 或 $\lambda = -\dfrac{1}{3}$，不满足 $\lambda \in [0,1]$，故不存在符合题意的点 M.

20. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，$\angle BAC = 90^o$，$AB = AC = AA_1 = 1$，E、F 分别是棱 C_1C、BC 的中点.

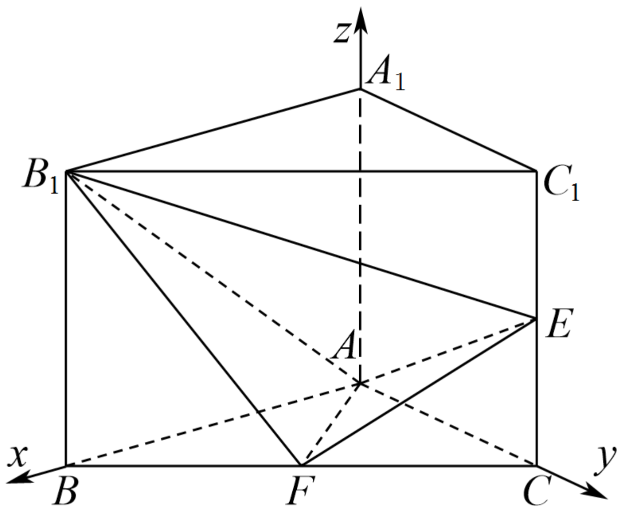


(1)求证：$B_1F\perp$平面AEF；

(2)求点A_1到直线B_1E的距离.

【解析】(1)∵三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱垂直于底面，$\angle BAC=90^\circ$，

∴以A为坐标原点，建立如图空间直角坐标系，



∵ $AB=AC=AA_1=1$，E、F分别是棱C_1C、BC的中点，

∴ $A(0,0,0),B_1(1,0,1),E\left(0,1,\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{B_1F}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right),\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

∵ $\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，∴ $\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AF}$，

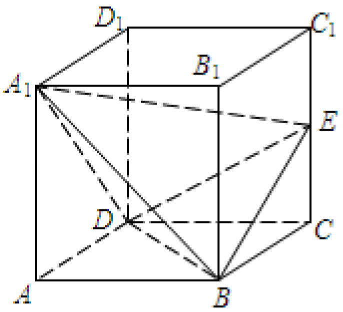
∵ $AE\cap AF=A$，$AE\subset$平面AEF，$AF\subset$平面AEF，∴ $B_1F\perp$平面AEF.

(2)∵ $A_1(0,0,1)$，∴ $\overrightarrow{A_1B_1}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{B_1E}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1E} \right\rangle = \dfrac{-1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}} = -\dfrac{2}{3}$，$\therefore \sin\left\langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1E} \right\rangle = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

故点 A_1 到直线 B_1E 的距离为 $d = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \cdot \sin\left\langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1E} \right\rangle = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$．

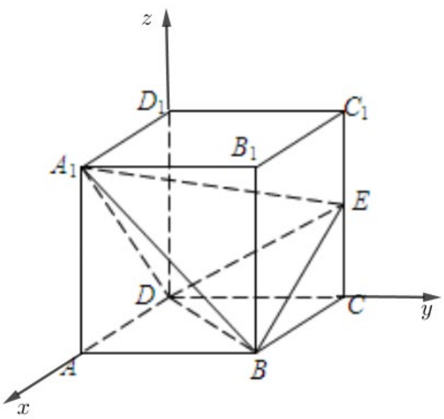
21．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CC_1 上的动点．



（1）求证：$A_1E\perp BD$；

（2）若平面 $A_1BD\perp$ 平面 EBD，试确定 E 点的位置．

【解析】以 D 为坐标原点，以 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，如图，



设正方体的棱长为 a，则 $A(a，0，0)$，$B(a，a，0)$，$C(0，a，0)$，$A_1(a，0，a)$，$C_1(0，a，a)$．

设 $E(0，a，e)(0\le e\le a)$．

（1）$\overrightarrow{A_1E}=(-a，a，e-a)$，$\overrightarrow{BD}=(-a，-a，0)$，

∵ $\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BD}=a^2-a^2+(e-a)\cdot 0=0$，

$\therefore \overrightarrow{A_1E}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $A_1E\perp BD$；

（2）设平面 A_1BD，平面 EBD 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1，y_1，z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2，y_2，z_2)$．

∵ $\overrightarrow{DB}$＝(a，a，0)，$\overrightarrow{DA_1}$＝(a，0，a)，$\overrightarrow{DE}$＝(0，a，e)

∴ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$，$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0$．

∴ $\begin{cases}ax_1+ay_1=0,\\ax_1+az_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}ax_2+ay_2=0,\\ay_2+ez_2=0.\end{cases}$

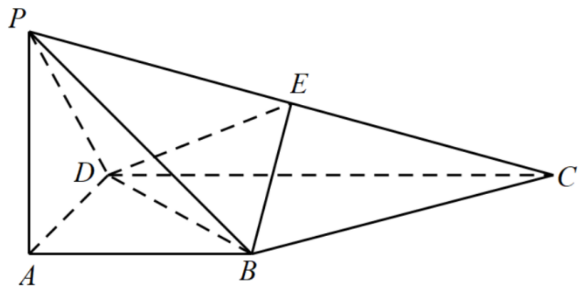
取 x_1＝x_2＝1，得 $\overrightarrow{n_1}$＝(1，－1，－1)，$\overrightarrow{n_2}$＝(1，－1，$\frac{a}{e}$)．

由平面 A_1BD⊥平面 EBD 得 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$．

∴2－$\frac{a}{e}$＝0，即 e＝$\frac{a}{2}$．

∴当 E 为 CC_1 的中点时，平面 A_1BD⊥平面 EBD.

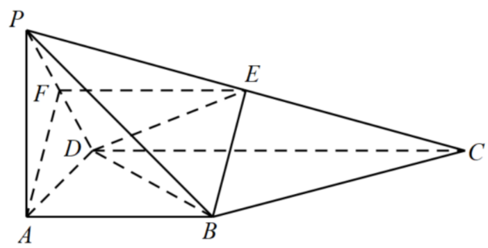
22．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 PAD⊥平面 $ABCD$，点 E 为 PC 的中点，$AB /\!/ CD$，CD⊥AD，CD＝2AB＝2，PA＝AD＝1，PA⊥AD.



(1)证明：BE⊥平面 PCD；

(2)求二面角 $P-BD-E$ 的余弦值.

【解析】(1)证明：取 PD 的中点 F，连接 AF，EF，



则 $EF//CD$，$EF=\frac{1}{2}CD$．

又 $AB//CD$，$AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $EF//AB$，$EF=AB$，

所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形，所以 $AF//BE$．

因为 $PA=AD=1$，$PF=FD$，所以 $AF\perp PD$．

所以 $BE \perp PD$

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$， $PA \perp AD$，

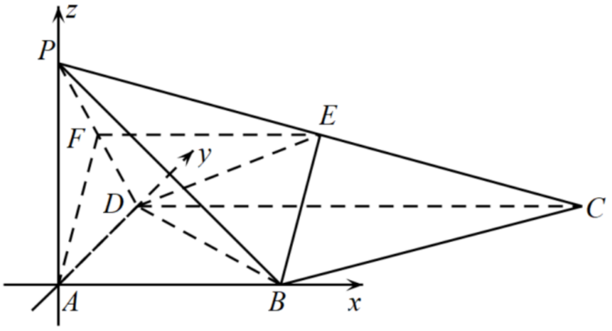
所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp AB$，

所以 $PB = BC = \sqrt{2}$.

又点 E 为 PC 的中点，所以 $BE \perp PC$

又 $PC \cap PD = D$， 所以 $BE \perp$ 平面 PCD.

(2)以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则 A（0，0，0），P（0，0，1），B（1，0，0），D（0，1，0），C（2，1，0），E（1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）． .....

于是 $\overrightarrow{PB} = (1,0,-1), \overrightarrow{BD} = (-1,1,0), \overrightarrow{BE} = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n_1} = (x_1,y_1,z_1)$， 则 $\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_1 - z_1 = 0 \\ -x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$. 取 $x_1 = 1$. 得 $\vec{n_1} = (1,1,1)$

设平面 EBD 的法向量为 $\vec{n_2} = (x_2,y_2 z_2)$， 则 $\begin{cases} \vec{n_2} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$,

得 $\begin{cases} \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}z_2 = 0 \\ -x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$ 取 $x_2 = 1$. 得 $\vec{n_2} = (1,1,-1)$.

所以 $\cos\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| |\vec{n_2}|} = \frac{1}{3}$，

所以二面角 $P\text{−}BD\text{−}E$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.