第五章 平面向量及解三角形（基础卷）

一、单选题

1. 【答案】D

由题意$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+x=0$，$x=-3$.

故选：D.

2. 【答案】C

由正弦定理得：$\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{4c}{4c+c}=\dfrac{4}{5}$.

故选：C.

3. 【答案】D

由题意知：$2\vec{a}+\vec{b}=\left(0,5\right)$，则$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=5$.

故选：D.

4. 【答案】A

【详解】

因为AD是角A的平分线，$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{1}$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

故选：A.

5. 【答案】A

由题意，$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合余弦定理可知$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\because 0<B<\pi$,$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：A.

6. 【答案】C

根据正弦定理得：$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，所以$AC=\dfrac{BC\times\sin B}{\sin A}=6\sqrt{3}$，

因为$C=180^\circ-B-A=30^\circ$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times CA\times CB\times\sin C=9\sqrt{3}$.

故选：C.

7. 【答案】B

因为$\sin C=2\sin\left(B+C\right)\cos B$，$\sin(B+C)=\sin A$，

所以$\sin C=2\sin A\cos B$，

所以由正余弦定理得$c=2a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，化简得$a^2=b^2$，

所以$a=b$，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

故选：B.

8. 【答案】D

解：由题意得：

$\because \overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{NC}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AN}$

$\because \overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB}+4m\overrightarrow{AN}$

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BN}$，则

$\therefore \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})=\lambda\overrightarrow{AN}-\lambda\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AN}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$

又由 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AN}$ 不共线

$\therefore \begin{cases}\lambda=4m\\ 1-\lambda=\dfrac{3}{11}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=\dfrac{2}{11}\\ \lambda=\dfrac{8}{11}\end{cases}$

故选：D

二、多选题

9. 【答案】ABD

据题意,$\vec{a}^2=\vec{b}^2=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

因为$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$

所以$|\vec{a}+\vec{b}|=1$,所以A对

因为$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$,所以$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$,所以B对.

因为$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$,$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

所以$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\dfrac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{\sqrt{3}\times1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以C错

因为$\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $2\vec{a}+\vec{b}$ 不共线,所以可以作为平面内的一组基底,所以D正确

故选：ABD

10. 【答案】ABD

【详解】

对于选项 A：$b\sin A$＝4sin30°＝2，则 $b\sin A<a<b$，

所以，$\triangle ABC$ 有两解，A 选项正确；

对于选项 B：设 $\overrightarrow{AB}=\vec{c},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ （以 $\vec{c},\vec{b}$ 为基底），则 $\overrightarrow{CB}=\vec{c}-\vec{b}$，

$\because \left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{CB}\ \therefore \left(\vec{c}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$=0

则 $4\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{c}^2+3\vec{b}^2$，即 $4bc\cos A=c^2+3b^2$

$\therefore \cos A=\dfrac{c^2+3b^2}{4bc}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{c}{b}+\dfrac{3b}{c})\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because A\in$（0，π），$\therefore A\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，B 选项正确；

对于选项 C：$\because a^2+b^2>c^2$，$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，又 $0<C<\pi$ $\therefore C$ 为锐角

若 C 为最大角， 则△ABC 为锐角三角形，否则△ABC 为锐角三角形或直角三角形或钝角三角形，C 选项错误；

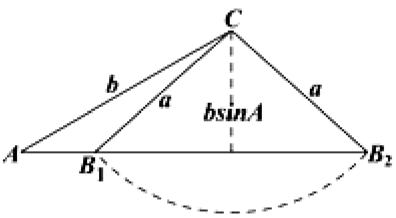
对于选项 D：$\because \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AC}$ 同向单位向量

又$\because \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线

$\therefore \overrightarrow{AP}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$ 与菱形对角线向量共线

∴直线 AP 为角 A 的角平分线，即直线 AP 必过△ABC 内心， D 选项正确.

故选：ABD.



11． 【答案】ABD

【详解】

由 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 容易得到 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，由 $\dfrac{AC}{\sin B}=2R$ 得 $R=3$， $S=\pi R^2=9\pi$，A 正确；

由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\geqslant\dfrac{2ac-b^2}{2ac}$ 得 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\geqslant\dfrac{2ac-4}{2ac}$，解得 $ac\leqslant 6\left(3+2\sqrt{2}\right)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B\leq\dfrac{1}{2}\times 6\left(3+2\sqrt{2}\right)\times\dfrac{1}{3}=3+2\sqrt{2}$，B 正确.

若 $k=3\sqrt{3}$，由 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$ 得 $\sin C=\dfrac{AB\cdot\sin B}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore C=60^\circ$ 或 $C=120^\circ$（均符合题意），C 错误.

由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-4}{2ac}$ 得

$c^2-\dfrac{4\sqrt{2}a}{3}c+a^2-4=0$，$\Delta=\left(-\dfrac{4\sqrt{2}a}{3}\right)^2-4\left(a^2-4\right)=\dfrac{4\left(36-a^2\right)}{9}$，此方程有唯一正解等价于 $\Delta=0$ 或 $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ a^2-4\leq 0\end{cases}$，又由于 $a>0$，$\therefore 0<k\leq 2$ 或 $k=6$，D 正确.

故选：ABD.

12． 【答案】BC

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 得 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos B=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos C$，

$\therefore |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos B=|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos C$，即 $c\cdot\cos B=b\cdot\cos C$，

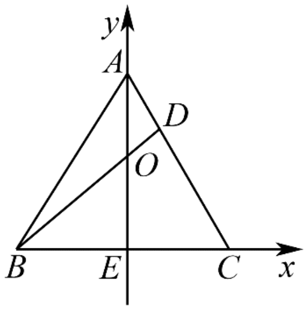
由正弦定理得：$\sin C\cdot\cos B=\sin B\cdot\cos C$，即 $\sin(B-C)=0$，

又 $A+B+C=\pi$，$B\in(0,\pi)$、$C\in(0,\pi)$，$\therefore B-C=0$，即 $B=C$，

同理可得 $A=C$，$\therefore A=B=C$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\because \overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}$，$\therefore D$ 为 AC 的三等分点，

$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，$\therefore E$ 为 BC 的中点，



如图建立平面直角坐标系，则 $A\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$B\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$、$C\left(\dfrac{1}{2},0\right)$、$D\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{1}{6}\neq 0$，故 A 错误；

设 $O(0,y)$，则 $\overrightarrow{BO}=\left(\dfrac{1}{2},y\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\because \overrightarrow{BO}\,//\,\overrightarrow{BD}$，$\therefore \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}y\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow O$ 为 AE 的中点，$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$，故 B 正确；

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故 C 正确；

$\overrightarrow{ED}=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\cos\left\langle\overrightarrow{ED},\overrightarrow{BA}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{ED}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$，故 D 错误.

故选：BC.

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．【答案】$\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$

因向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,\lambda)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角，于是得 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，

因此，$2+2\lambda>0$ 且 $\lambda-4\neq 0$，解得 $\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$，

所以实数 λ 的取值范围是 $\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$.

故答案为：$\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq 4$

14．【答案】$2\sqrt{13}$

由题意 $\angle ADB=120^\circ$，$BD=AF=2$，$AD=6$，

所以 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB}=\sqrt{36+4-2\times 6\times 2\cos 120^\circ}=2\sqrt{13}$.

故答案为：$2\sqrt{13}$.

15.【答案】②③

对于①，由正弦定理可得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，则 $\sin B=\dfrac{AC\sin A}{BC}$，

若 $AC>BC$ 且 $\angle A$ 为锐角，则 $\sin B=\dfrac{AC\sin A}{AB}>\sin A$，此时 $\angle B$ 有两解，

则 $\angle C$ 也有两解，此时 AB 也有两解；

对于②，若已知 $\angle A$、$\angle B$，则 $\angle C$ 确定，由正弦定理 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$ 可知 AB 唯一确定；

对于③，若已知 $\angle C$、AC、BC，由余弦定理可得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C}$，

则 AB 唯一确定；

对于④，若已知 $\angle A$、$\angle C$、$\angle B$，则 AB 不确定.

故答案为：②③.

16. 【答案】 $\frac{\pi}{6}$##$30°$　$\sqrt{2}$

当 $k=2$ 时，

$\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{n}=2\vec{b}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

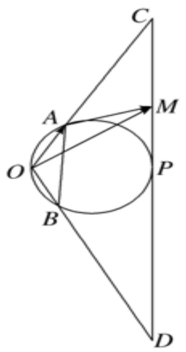
$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1-2+4=3$，

$\therefore\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，

$\therefore$ $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 夹角 θ 的余弦值 $\cos\theta=\dfrac{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot2\vec{b}}{\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\cdot\left|2\vec{b}\right|}=\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

如图所示：



分别延长 OA，OB 到 C，D 使 $OC=OD=3OA$.

$\vec{m}=(3-k)\vec{a}+k\vec{b}=3\vec{a}+k\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，

故 $\vec{m}$ 终点在 CD 上运动，

又 $\vec{n}=\vec{m}-\vec{a}$.

即向量 $\overrightarrow{AM}$，

$\therefore$ $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 夹角为 $\angle AMO$，

当 $\triangle OAM$ 外接圆与 CD 相切时 $\angle AMO$ 最大（即 M 在 P 点时），

由 $CP^2 = CA \cdot CO = 6$，

$\vec{m} = (3-k)\vec{a} + k\vec{b}$，

$= \frac{3-k}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OD}$，

$= \frac{3-k}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{3}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}\right)$，

$= \overrightarrow{OC} + \frac{k}{3}\overrightarrow{CD}$，

易求 $CD = 3\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{k}{3} = \frac{CP}{CD} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$，

$\therefore k = \sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{\pi}{6}$，$\sqrt{2}$

四、解答题

17. 【答案】(1) $k = -\frac{2}{3}$ (2) $k = -\frac{11}{2}$

(1) $k\vec{a} + 2\vec{b} = (k-2, 2k+8)$，$\vec{a} - 3\vec{b} = (1+3, 2-12) = (4, -10)$，

由题意得：$-10(k-2) - 4(2k+8) = 0$，解得：$k = -\frac{2}{3}$

(2)由题意得：$4(k-2) - 10(2k+8) = 0$，

解得：$k = -\frac{11}{2}$

18. 【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$ (2) $CD = \frac{\sqrt{39}}{2}$

(1)由正弦定理及余弦定理有 $\frac{a^2 b \sin C}{a} = \frac{\sqrt{3}\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2ab} = \sqrt{3}\cos C$

$\Rightarrow \tan C = \sqrt{3}$，又因为 $0 < C < \pi$，$\therefore C = \frac{\pi}{3}$.

(2)$\because CD$ 是 AB 边上的中线，$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$

$\therefore \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}\left(CA^2 + CB^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 4 + 2 \times 5 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{39}{4}$.

$\therefore CD = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

19. 【答案】(1) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{26}{7}$

(1)$\because \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = 61$，$\therefore 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 61$，

又$\because |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$，$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$，$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{2}$.

$\because \theta\in[0,\pi]$，$\therefore \theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)$\because \left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=49$，$\therefore \left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=7$，

$\therefore$向量$\vec{a}$在向量$2\vec{a}+\vec{b}$上的投影为$|\vec{a}|\cdot\dfrac{\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}||2\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}{|2\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{2\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|2\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{26}{7}$.

20.　【答案】(1)$\dfrac{2\pi}{3}$(2)$\dfrac{45}{14}$

(1)在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即$\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{5}{\sin\angle CAD}$，解得$\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}$，

$\because AC>CD$，且$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore 0<\angle CAD<\dfrac{\pi}{3}$，即$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore \angle BAC=\angle BAD-\angle CAD=\dfrac{2\pi}{3}$；

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$

$=(3\sqrt{3})^2+(5\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}\times5\sqrt{3}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}=147$，解得$BC=7\sqrt{3}$，

又$\because\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times5\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore\triangle ABC$的边BC上高的大小为$\dfrac{\frac{45\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}\times7\sqrt{3}}=\dfrac{45}{14}$.

21.　【答案】(1)$\tan\theta=-\sqrt{35}$

(2)$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|$的最小值为$\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}$与$x\vec{a}+\vec{b}$垂直

(1)解：$\because \vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{a}+4\vec{b}$垂直，$\therefore(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{b})=0$，

$\therefore \vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}^2=0$，即$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$.

$\because|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$\therefore 9+6\cos\theta-8=0$，$\therefore\cos\theta=-\dfrac{1}{6}$.

$\because\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\sin\theta=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$，$\therefore\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{35}$.

(2)解：当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=1\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|^2=x^2\vec{a}^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=x^2|\vec{a}|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9x^2+2x\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=9x^2+3\sqrt{3}x+1$，

$\therefore x=-\dfrac{3\sqrt{3}}{18}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|$的最小值为$\dfrac{1}{2}$，

此时 $\vec{a}\cdot\left(x\vec{a}+\vec{b}\right)=x\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=x\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=9x+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

$\therefore \vec{a}$ 与 $x\vec{a}+\vec{b}$ 垂直.

22. 【答案】(1) $\left[-1,2\right]$；(2) $\left(2,3\right]$.

(1)（1）依题意，$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$，

由 $x\in\left[0,\pi\right]$ 得 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\sin(x+\frac{\pi}{6})\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $f\left(x\right)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的值域为 $\left[-1,2\right]$.

(2)由 $f\left(A\right)=2\sin(A+\frac{\pi}{6})=2$ 得，$\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$，$A\in\left(0,\pi\right)$，则有 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $A=\frac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$1=a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geq(b+c)^2-\frac{3(b+c)^2}{4}=\frac{(b+c)^2}{4}$，

当且仅当 $b=c=1$ 时取“=”，即有 $0<b+c\leq 2$，又因为 $b+c>a=1$，则 $1<b+c\leq 2$，

因此 $2<b+c+a\leq 3$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $\left(2,3\right]$.

第五章 平面向量及解三角形（中档卷）

一、单选题

1．【答案】B

由$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，平方得$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$.

故选：B.

3．【答案】B

由正弦定理可知，$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C\Leftrightarrow a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow\cos C>0$，

$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$不能得到$\triangle ABC$是锐角三角形,但$\triangle ABC$是锐角三角形,则$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$.

故“$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$”是“$\triangle ABC$是锐角三角形”的必要不充分条件，

故选:B.

4．【答案】D

由题意得，在$Rt\triangle ABM$中，$AM=\dfrac{AB}{\sin15^\circ}$，

在$\triangle ACM$中，$\angle CAM=30^\circ+15^\circ=45^\circ$，$\angle AMC=180^\circ-15^\circ-60^\circ=105^\circ$，

所以$\angle ACM=30^\circ$，由正弦定理$\dfrac{AM}{\sin\angle ACM}=\dfrac{CM}{\sin\angle CAM}$，

得$CM=\dfrac{\sin\angle CAM}{\sin\angle ACM}\cdot AM=\dfrac{\sqrt{2}AB}{\sin15^\circ}$，

又$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

在$Rt\triangle CDM$中，$CD=CM\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{6}AB}{2\sin15^\circ}=\dfrac{12\sqrt{6}}{2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=36+12\sqrt{3}\approx57$.

故选：D.

6．【答案】D

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得：$\cos C=\dfrac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\dfrac{49+9-25}{2\times7\times3}=\dfrac{11}{14}$，

因为$C\in(0,\pi)$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得：$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即$\dfrac{AB}{\dfrac{5\sqrt{3}}{14}}=\dfrac{7}{\sin45^\circ}$，

解得：$AB=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

故选：D

7．【答案】B

因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{15}{2}$，$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{CB}$方向上的投影为$-\frac{5}{2}$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{5}{2}\times\left|\overrightarrow{CB}\right|=-\frac{15}{2}$，解得：$\left|\overrightarrow{CB}\right|=3$.

因为$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=\sqrt{19}$，所以$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=19$，即$|\overrightarrow{CA}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=19$，所以$|\overrightarrow{CA}|^2+2\times\left(-\frac{15}{2}\right)+3^2=19$，解得：$|\overrightarrow{CA}|=5$.

因为P为线段AB上的一点，且$\overrightarrow{CP}=\frac{\lambda\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\mu\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}(\lambda,\mu\in\mathrm{R})$，所以$\frac{\lambda}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\mu}{|\overrightarrow{CB}|}=1$，即$\frac{\lambda}{5}+\frac{\mu}{3}=1$.

所以$\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}=\left(\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{5}+\frac{\mu}{3}\right)=1+\frac{5\mu}{3\lambda}+\frac{3\lambda}{5\mu}+1\geq 2+2\sqrt{\frac{5\mu}{3\lambda}\times\frac{3\lambda}{5\mu}}=4$（当且仅当$\frac{5\mu}{3\lambda}=\frac{3\lambda}{5\mu}$时取等号）.

所以$\frac{5}{\lambda}+\frac{3}{\mu}$的最小值为 4.

故选：B

8. 【答案】C

$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}+2=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2=4$(当且仅当$a=b$时取等号)

由$c=3b\sin A$，可得$\sin C=3\sin B\sin A$

$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}+2=\frac{c^2+2ab\cos C}{ab}+2$

$=2+\frac{c^2}{ab}+2\cos C=2+\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}+2\cos C$

$=2+\frac{\sin^2 C}{\frac{1}{3}\sin C}+2\cos C=2+2\cos C+3\sin C$

$=2+\sqrt{13}\sin\left(C+\varphi\right)\leq 2+\sqrt{13}$， 其中$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}},\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$ ，当且仅当$C+\varphi=\frac{\pi}{2}$时取得等号,

所以$4\leq\frac{(a+b)^2}{ab}\leq 2+\sqrt{13}$

故选：C

二、多选题

9. 【答案】BD

对于选项 A：若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\sqrt{2}=\sin\theta\cos\theta$，即$\sin 2\theta=2\sqrt{2}>1$，

所以不存在这样的θ，故 A 错误；

对于选项 B：若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=0$，即$\cos\theta=-\sqrt{2}\sin\theta$，得$\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 B 正确；

对于选项 C：$|\vec{a}|=\sqrt{1+\sin^2\theta},|\vec{b}|=\sqrt{2+\cos^2\theta}$，当$|\vec{a}|=|\vec{b}|$时，$\cos 2\theta=-1$，

此时$\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，故 C 错误；

对于选项 D：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=-\sqrt{3}$，两边同时平方得$\cos^2\theta+2\sin^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sin\theta=3\cos^2\theta+3\sin^2\theta$，化简得$2\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta=0$，等式两边同除以$\cos^2\theta$得$\tan^2\theta-2\sqrt{2}\tan\theta+2=0$，

即 $(\tan\theta-\sqrt{2})^2=0$，所以 $\tan\theta=\sqrt{2}$，故 D 正确.

故选：BD.

10. 【答案】ACD

对于 A，由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=7$，解得 $c=\sqrt{7}$，故 A 正确；

对于 B，根据正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $b>a$，所以 $\angle B>\angle A$，所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$，故 B 不正确；

对于 C，由三角形的内角和可知 $\angle A=105^\circ$，又 $a=1$，利用正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，可知 b,c 均有唯一值，故 C 正确；

对于 D，根据正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，

又因为 $a>b$，所以 $\angle A>\angle B$，所以 $\angle B$ 只能是锐角，故 D 正确；

故选：ACD

11. 【答案】ABC

由题意，分别以 HD,BF 所在的直线为 x 轴和 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，

因为正八边形 $ABCDEFGH$，所以 $\angle AOH=\angle HOG=\angle AOB=\angle EOF=\angle FOG$

$=\angle DOE=\angle COB=\angle COD=\dfrac{360^\circ}{8}=45^\circ$，

作 $AM\perp HD$，则 $OM=AM$，

因为 $OA=2$，所以 $OM=AM=\sqrt{2}$，所以 $A(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

同理可得其余各点坐标，$B(0,-2)$，$E(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(2,0)$，$H(-2,0)$，

对于 A 中，$\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=(0+\sqrt{2}+(-\sqrt{2}),-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})=\vec{0}$，故 A 正确；

对于 B 中，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2})\times 2+(-\sqrt{2})\times 0=-2\sqrt{2}$，故 B 正确；

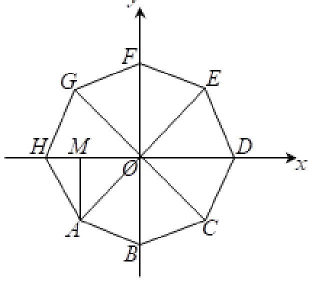
对于 C 中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EH}=(-2-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}=(-4,0)$，

所以 $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}\right|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$，故 C 正确；

对于 D 中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{GH}=(-2+\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}=(-4+2\sqrt{2},0)$，

$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}\right|=\sqrt{(-4+2\sqrt{2})^2+0^2}=4-2\sqrt{2}$，故 D 不正确.

故选：ABC.



12. 【答案】BCD

解：因为在$\triangle ABC$中，$(a+b)$：$(a+c)$：$(b+c)$＝9：10：11，

所以$\begin{cases}a+b=9x\\a+c=10x\\b+c=11x\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4x\\b=5x\\c=6x\end{cases}$，

所以 sin A：sin B：sin C＝$a:b:c=4:5:6$，故 A 错误；

易角 C 为最大角，则$\cos C=\dfrac{16x^2+25x^2-36x^2}{2\cdot 4x\cdot 5x}=\dfrac{1}{8}>0$，所以角 C 为锐角，故$\triangle ABC$是锐角三角形，故 B 正确；

易角A为最小角，则$\cos C=\dfrac{36x^2+25x^2-16x^2}{2\cdot 6x\cdot 5x}=\dfrac{3}{4}$，所以$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{8}$，即$\cos 2A=\cos C$，又$2A\in(0,\pi)$，所以$2A=C$，故 C 正确；

设外接圆的半径为 R，则由正弦定理得$2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$，解得$R=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$，故正确；

故选：BCD

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．【答案】$\pm\dfrac{1}{2}$

解：因为$\vec{p}=\vec{a}+\dfrac{4}{3}m\vec{b}$与$\vec{q}=\vec{b}+3m\vec{a}$共线，可设$\vec{p}=\lambda\vec{q}$，

即$\vec{a}+\dfrac{4}{3}m\vec{b}=\lambda\left(\vec{b}+3m\vec{a}\right)$，因为$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，所以$\begin{cases}3m\lambda=1\\\dfrac{4}{3}m=\lambda\end{cases}$，所以$m=\pm\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\pm\dfrac{1}{2}$

14．【答案】$(1,\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},6)$

解：$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)$与$\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)$夹角为锐角时，$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)=2\lambda\vec{a}^2-\left(6+\lambda^2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+3\lambda\vec{b}^2=4\lambda-\left(6+\lambda^2\right)+3\lambda>0$；

解得$1<\lambda<6$；

当$\lambda=\sqrt{6}$时，$\left(2\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)$与$\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)$分别为$\left(2\vec{a}-\sqrt{6}\vec{b}\right)$与$\left(\sqrt{6}\vec{a}-3\vec{b}\right)$同向，夹角为零，不合题意，舍去；

∴实数λ的取值范围为$\left(1,\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},6\right)$.

故答案为：$\left(1,\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},6\right)$.

15．【答案】直角三角形

因为$b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cos C$，

所以$\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 B=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

所以$2\sin^2 B\sin^2 C=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

因为$\sin B\neq 0$，$\sin C\neq 0$，

所以$\sin B\sin C=\cos B\cos C$，

所以$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$，

所以$\cos(B+C)=0$，

因为$0<B+C<\pi$，所以$B+C=\frac{\pi}{2}$，则$A=\frac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$为直角三角形.

故答案为：为直角三角形.

16. 【答案】 $\frac{3}{2}$ $\sqrt{21}$

（1）由余弦定理知：$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C, a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$

又由正弦定理化简得：$\frac{2\sin A-\sin C}{\sin C}=\frac{b\cos C}{c\cos B}=\frac{\sin B\cos C}{\sin C\cos B}, A,B\in(0,\pi)$，即$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，即

$2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，又$A,B\in(0,\pi)$，

化简得$\cos B=\frac{1}{2}, B=\frac{\pi}{3}$，则$A+C=\frac{2}{3}\pi$

$y=\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2(\frac{2\pi}{3}-A)=\sin^2 A+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)^2$

$y=\frac{5}{4}\sin^2 A+\frac{3}{4}\cos^2 A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A$

$y=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\frac{1}{4}\cos 2A+1=\frac{1}{2}\sin(2A-\frac{\pi}{6})+1$

又$A\in(0,\frac{2}{3}\pi)$，$2A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，故当$2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，$\sin^2 A+\sin^2 C$取最大值为$\frac{3}{2}$.

（2）由题意得$AD=\frac{1}{3}b, DC=\frac{2}{3}b$，$BD=1$

在$\triangle ADB$与$\triangle CDB$中，分别有$\cos\angle ADB=\frac{1+\frac{1}{9}b^2-c^2}{\frac{2}{3}b}$，$\cos\angle CDB=\frac{1+\frac{4}{9}b^2-a^2}{\frac{4}{3}b}$

又$\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$，化简得$a^2+2c^2-3=\frac{2}{3}b^2=\frac{2}{3}(a^2+c^2-ac)$

整理得：$a^2+4c^2+2ac=9=(a+c)^2+3c^2$

令$\begin{cases}a+c=3\cos\theta\\ \sqrt{3}c=3\sin\theta\end{cases}$，结合辅助角公式有$a+3c=2\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta\le\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{21}$，所以$a+3c$的最大值为$\sqrt{21}$

故答案为：$\frac{3}{2}$；$\sqrt{21}$

四、解答题

【答案】（1）最小正周期为2π，最大值为2；（2）2.

由$\vec{a}//\vec{b}$得：$\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

则：$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

（1）$f(x)$最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

当$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$时，$f\left(x\right)_{\max}=2$

（2）由$f\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$得：$2\sin A=\sqrt{3}$，则$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由正弦定理可知：$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即$AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$

18．　【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{19}}{3}$

(1)解：因为$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$，由正弦定理可得$\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin C\cos A$

在$\triangle ABC$，$\sin C>0$，$\therefore\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$

$\therefore 2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

又$A\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$

(2)解：$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$且$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\times3^2+\frac{4}{9}\times1^2+\frac{4}{9}\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{19}{9}$

$\therefore\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\sqrt{19}}{3}$

20．　【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$ (2)6 或 $5+\sqrt{13}$

(1)$\because a\sin\left(A+B-C\right)=c\sin\left(B+C\right)$，则$\sin A\sin\left(\pi-2C\right)=\sin C\sin A$

$\because 0<A<\pi,\sin A\neq0$

$\therefore\sin 2C=\sin C$，即$2\sin C\cos C=\sin C$

$\because 0<C<\pi,\sin C\neq0$，则$\cos C=\frac{1}{2}$

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$

(2)$\because\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则$\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$

$\therefore ab=4$

根据题意得$\begin{cases}ab=4\\2a+b=6\end{cases}$，则$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

若$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$，则$\triangle ABC$为等边三角形，$\triangle ABC$的周长为 6；

若$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$，则$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=13$，即$c=\sqrt{13}$，$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{13}$

$\therefore$ $\triangle ABC$的周长为 6 或$5+\sqrt{13}$

21.　【答案】(1)$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ (2)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-1=(\sin 2x,2\cos x)\cdot(\sqrt{3},\cos x)-1=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x+\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in Z$．

(2)$\because f\left(\frac{B}{4}\right)=2\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，

$\therefore \sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$B\in(0,\pi)$，$\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$

$\therefore \frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$

$\because b^2=ac$，$\therefore \sin^2 B=\sin A\cdot\sin C$．

$$\therefore \frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin^2 B}=\frac{1}{\sin B}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

22.　【答案】(1)条件选择见解析，$B=\frac{\pi}{3}$ (2)$\left[\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(1)解：选①，由$2b\sin C=\sqrt{3}c\cos B+c\sin B$及正弦定理可得$2\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos B+\sin C\sin B$，

所以，$\sin C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos B$，

因为B、$C\in(0,\pi)$，所以，$\sin C>0$，则$\sin B=\sqrt{3}\cos B>0$，

所以，$\tan B=\sqrt{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$；

选②，由$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{b}{2a-c}$及正弦定理可得$\sin B\cos C=(2\sin A-\sin C)\cos B$，

所以，$2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$，

$\because A$、$B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A>0$，所以，$\cos B=\frac{1}{2}$，则$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)解：因为$a+c=\sqrt{3}$，所以，$0<a<\sqrt{3}$，

由已知$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，即$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$，所以，$2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

所以，$4\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，

即 $4BD^2=c^2+a^2+2ac\cos\frac{\pi}{3}=c^2+a^2+ac=\left(a+c\right)^2-ac=3-a\left(\sqrt{3}-a\right)$

$=a^2-\sqrt{3}a+3=\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\in\left[\frac{9}{4},3\right)$，

所以，$\frac{3}{4}\le BD<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

第五章 平面向量及解三角形（提高卷）

一、单选题

1．【答案】C

由题意 $m^2=3$，得 $m=\pm\sqrt{3}$，

又 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向共线，故 $m=-\sqrt{3}$，此时 $\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}=(-2\sqrt{3},6)$，

故 $\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|=4\sqrt{3}$.

故选：C.

3．【答案】C

由已知及正弦定理得 $b^2+c^2=\dfrac{4}{3}a^2$，所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{a^2}{6bc}$，所以 $\dfrac{\sin A\tan A}{\sin B\sin C}=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A\sin B\sin C}=\dfrac{6bc}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{bc}=6$.

故选：C.

4．【答案】B

如图所示，OP 为塔体，AC,BD 为李老师观察塔顶时的站位， Q 为 A,B 在 OP 上的射影，

由已知得 $\triangle PQA,\triangle PQB$ 为直角三角形，$\angle PAQ=45°$，$\angle PBQ=30°$，$AB=50$(米)，$OQ=CA=DB=1.7$(米),设 $PQ=x$，

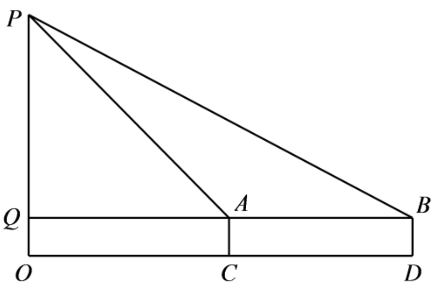
则 $QA=x$，$QB=\sqrt{3}x$.

$\therefore AB=QB-QA=\sqrt{3}x-x=\left(\sqrt{3}-1\right)x=50$，

$\therefore x=\dfrac{50}{\sqrt{3}-1}=25\left(\sqrt{3}+1\right)\approx25\times\left(1.732+1\right)=68.3$，

$\therefore$塔高 $h=x+1.7\approx70$(米),

故选：B



5．【答案】A

如图（1）所示，设 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AE},\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\overrightarrow{AF},\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AG}$，则 $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}$ 都是单位向量，

因为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，所以 $(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|})^2=(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})^2$，可得 $\cos\angle BAD=-\dfrac{1}{2}$，

又因为 $0\le\angle BAD\le\pi$，所以 $\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，且 AC 为 $\angle BAD$ 的平分线，所以 C 不正确；

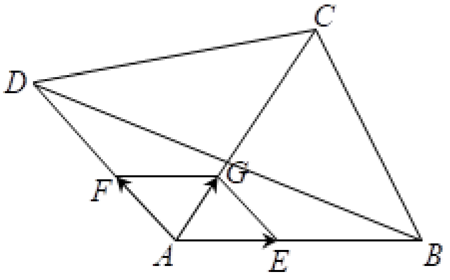
在 $\triangle ABD$ 中，因为 $AB=AD=2$，且 $\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，

可得 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

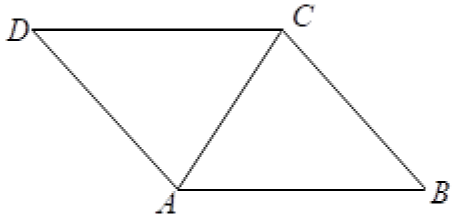
所以四边形 $ABCD$ 的面积大于 $\sqrt{3}$，所以 A 正确；

如图图（2）所示只有当 $AC=2$ 时，此时凸四边形 $ABCD$ 才能为平行四边形且为菱形，所以 B、D 不正确；

故选：A.



图（1）



图（2）

6. 【答案】A

因为 A，B，C 三点共线，所以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 共线，

所以存在 $\lambda\in\mathrm{R}$，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，即 $(a-1)\vec{e}_1+\vec{e}_2=\lambda\left(2b\vec{e}_1-\vec{e}_2\right)$，

即 $(a-1)\vec{e}_1+\vec{e}_2=2\lambda b\vec{e}_1-\lambda\vec{e}_2$，

因为 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}a-1=2b\lambda\\1=-\lambda\end{cases}$，消去 λ，得 $a+2b=1$，

因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+2b)=4+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 4+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4+2\times 2=8$，当且仅当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，

等号成立.

故选：A

7. 【答案】C

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$C=\frac{\pi}{3}$，设 AB 边上的高为 h，

所以 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$

由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$，

所以 $a=4\sin A$，$b=4\sin B$，$c=2\sqrt{3}$，因为 $S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}$，

所以 $h=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}ab}{c}=4\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=2\sqrt{3}\sin A\cos A+2\sin^2 A=\sqrt{3}\sin 2A+1-\cos 2A=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1$

因为 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\frac{1}{2}<\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$，

所以 $2<2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1\leq 3$，所以高的取值范围为 $(2,3]$.

故选：C.

8. 【答案】C

设三角形的三条边为 a，b，c，设 BC 中点为 D，

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$，$\therefore 2b^2+2c^2-a^2=28$

同理，$2a^2+2b^2-c^2=28,2a^2+2c^2-b^2=4$

$\therefore\begin{cases}a^2=\frac{28}{3}\\ b^2=\frac{100}{3}\\ c^2=\frac{28}{3}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=\frac{2\sqrt{21}}{3}\\ b=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ c=\frac{2\sqrt{21}}{3}\end{cases}$，$a+c=\frac{4\sqrt{21}}{3}>\frac{10\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$可以构成三角形

$a^2+c^2-b^2=\frac{56}{3}-\frac{100}{3}=-\frac{44}{3}$，$\therefore\cos B<0$，

$\therefore\triangle ABC$ 为钝角三角形，

故选：C

二、多选题

9. 【答案】ABC

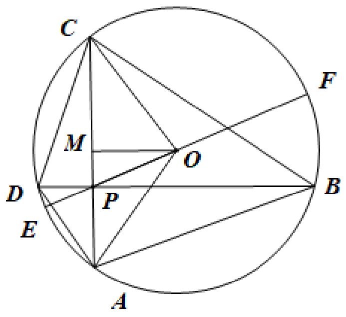
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+(-1)\times(-2)=5$，A 正确；$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}=(2,1),\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}}$，B 正确；

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，则 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{4}$，C 正确；

$3\times(-2)\neq(-1)\times1$，D 错误.

故选：ABC.

11. 【答案】AC



如图，设直线 PO 与圆 O 于 E，F.

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|=-|EP||PF|=-\left(|OE|-|PO|\right)\left(|OE|+|PO|\right)=|PO|^2-|EO|^2=-2$，

故 A 正确.

取 AC 的中点为 M，连接 OM，则

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{MC}^2$

$=\overrightarrow{OM}^2-\left(4-\overrightarrow{OM}^2\right)=2\overrightarrow{OM}^2-4$，

而$0\le\overrightarrow{OM}^2\le|OP|^2=2$，故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$的取值范围是$[-4,0]$，故 B 错误.

当$AC\perp BD$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}\right)=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$

$=-\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{CP}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|\left|\overrightarrow{PD}\right|=-2|EP||PF|=-4$，故 C 正确.

因为$\left|\overrightarrow{AC}\right|\le4,\left|\overrightarrow{BD}\right|\le4$，故$\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\le16$，故 D 错误.

故选：AC

12．【答案】ACD

对于 A 选项，重心为中线交点，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，即$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，

因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\mu\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$，

则$\overrightarrow{AO}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda-\mu}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\mu}{1-\lambda-\mu}\overrightarrow{OC}$，

所以$\dfrac{\lambda}{1-\lambda-\mu}=1$，$\dfrac{\mu}{1-\lambda-\mu}=1$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$，故 A 正确；

对于 B 选项，内心为角平分线交点，则$BC\cdot\overrightarrow{OA}+AC\cdot\overrightarrow{OB}+AB\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

即$4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，所以$\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OC}$，

由 A 选项，则$\dfrac{\lambda}{1-\lambda-\mu}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{\mu}{1-\lambda-\mu}=\dfrac{3}{4}$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{3}{5}$，故 B 错误；

对于 C 选项，外心为垂直平分线交点，即$\triangle ABC$的外接圆圆心，

因为$AB=AC=3$，设D为边BC的中点，

所以$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AO}//\overrightarrow{AD}$，

所以$\lambda=\mu$，

因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AO}^2=\lambda^2\overrightarrow{AB}^2+\lambda^2\overrightarrow{AC}^2+2\lambda^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

在$\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$，则$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\dfrac{BC}{\sin A}=2R=2\left|\overrightarrow{AO}\right|$，

所以$\left(\dfrac{4}{2\times\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}\right)^2=9\lambda^2+9\lambda^2+2\lambda^2\cdot3\times3\times\dfrac{1}{9}$，易知$\lambda>0$，所以$\lambda=\dfrac{9}{20}$，

所以$\lambda+\mu=\frac{9}{10}$，故 C 正确；

对于 D 选项，垂心为高线交点，设$BE\perp AC$，垂足为边AC上点E，则B，E，O共线，

由 C 选项，因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，$\lambda=\mu$，

所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AC}^2$，

因为$OB\perp AC$，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=-\lambda\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AC}^2$，即$(1-\lambda)\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AC}^2$，

因为$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}$，所以$(1-\lambda)\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AC}^2$，即$(1-\lambda)\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AC}^2$，

因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}AC\cdot BE$，所以$BE=\frac{4\sqrt{5}}{3}$，

所以$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$，

所以$(1-\lambda)\times\frac{1}{3}\times3=\lambda\times3^2$，解得$\lambda=\frac{1}{10}$，

所以$\lambda+\mu=\frac{1}{5}$，故 D 正确；

故选：ACD

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．　【答案】$(3,3)$

解：$\because A(-2,-1)$，$B(3,4)$，$C(-1,1)$，$D(3,3)$，

$\therefore\overrightarrow{AB}=(3,4)-(-2,-1)=(5,5)$，$\overrightarrow{CD}=(3,3)-(-1,1)=(4,2)$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=5\times4+5\times2=30$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

所以$\therefore\overrightarrow{CD}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影向量为$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{30}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}(5,5)=(3,3)$；

故答案为：$(3,3)$

14．　【答案】$A=B=\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）

由正弦定理得：$a=2R\sin A,b=2R\sin B$，

$\because\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，$\therefore\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

$\therefore\sin 2A=\sin 2B$，

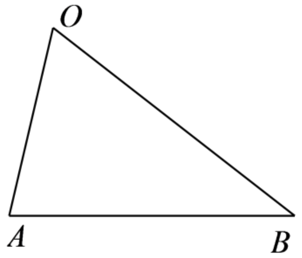
$\because A\in(0,\pi),B\in(0,\pi)$

$\therefore A=B=\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）.

故答案为：$A=B=\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）.

15. 【答案】$\frac{9}{8}$

解：不妨设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，则向量问题可转化为如下解三角形问题：

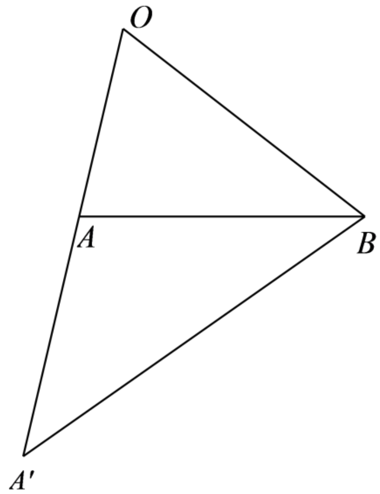


由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB\Rightarrow\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$，为锐角，

同时由余弦定理，$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB}=1$

而 $\vec{c_i}=\vec{a}+t_i\vec{a_0}\left(t_i>0\right)$ 实际上表示的是 OA 的延长线 OA' .

故 $\vec{c_i}-\vec{b}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA'}$，而 $-\vec{b}=\overrightarrow{BO}$，则 $\vec{c_i}-\vec{b}$ 与 $-\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\angle A'BO$.



可知，随着 $\left|OA'\right|$ 的增大，$\angle A'BO$ 也在增大，则 $\cos\theta$ 在减小，

由题意，只需求 $\cos\theta$ 所趋近的最大值和最小值即可.

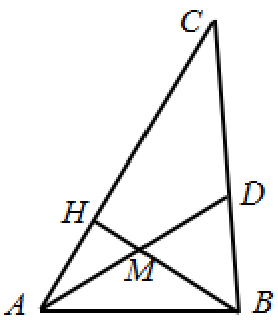
第一种极限情况，当 A' 与 A 重合时，$\cos\theta=\cos\angle ABO=\frac{|BO|^2+|BA|^2-|OA|^2}{2\cdot|BO|\cdot|BA|}=\frac{7}{8}$

第二种极限情况，当 A' 位于 OA 的延长线无穷远处时，BA' 可看作与 OA' 平行，根据两条平行直线同旁内角互补的性质，$\cos\theta=\cos(\pi-\angle AOB)=-\cos\angle AOB=-\frac{1}{4}$，

由于 $k>\left|\cos\theta_1-\cos\theta_2\right|$ 恒成立，则 $k\geq\left|\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right|=\frac{9}{8}$，则 k 的最小值为 $\frac{9}{8}$.

故答案为：$\frac{9}{8}$

16. 【答案】 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　$\frac{5}{21}$



在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的角平分线，所以$\angle BAD=\angle DAC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

因为$|AD|=|CD|$，所以$\angle C=\angle DAC$.

因为$\tan\angle DAC=\frac{1}{2}$，又$\sin^2\angle DAC+\cos^2\angle DAC=1$，解得

$\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\angle DAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以$\cos C=\cos\angle DAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\triangle ADC$中，设$AC=m,AD=n$则$CD=n$，由余弦定理得：$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos C$，即

$n^2=m^2+n^2-2mn\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即$m=n\times\frac{4\sqrt{5}}{5}$，所以$\frac{|AC|}{|AD|}=\frac{m}{n}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

在$\triangle ABC$中，$\sin\angle C=\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos C=\cos\angle DAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为AD是$\angle BAC$的角平分线，所以$\sin\angle CAB=\sin 2\angle DAC$

所以$\sin\angle CAB=2\sin\angle DAC\cos\angle DAC=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$，

$\cos\angle CAB=1-2\sin^2\angle DAC=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$

所以$\sin\angle CBA=\sin\left(\angle BAC+\angle C\right)=\frac{4}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

由正弦定理得：$\frac{AC}{\sin\angle CBA}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$，

所以$BC=\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle CBA}AC=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{11}{25}\sqrt{5}}m=\frac{4\sqrt{5}}{11}m$.而$CD=AD=\frac{\sqrt{5}}{4}m$，

所以$\frac{CD}{CB}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{4\sqrt{5}}{11}}=\frac{11}{16}$.

取$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$为基底，则由$H$、$M$、$B$三点共线可得：$\overrightarrow{AM}=\left(1-\lambda\right)\overrightarrow{AH}+\lambda\overrightarrow{AB}$ ①；、

由C、D、B三点共线可得：$\overrightarrow{AD}=\left(1-\mu\right)\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AB}$；

即$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\mu\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$，所以$\overrightarrow{CD}=\mu\overrightarrow{CB}$,所以$\mu=\frac{11}{16}$.

即 $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{16}\overrightarrow{AC}+\frac{11}{16}\overrightarrow{AB}$ ②.

因为 M 是 AD 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$,①式可化为：$2\overrightarrow{AM}=2(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+2\lambda\overrightarrow{AB}$，

即 $\overrightarrow{AD}=2(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+2\lambda\overrightarrow{AB}$ ③

设 $\frac{|AH|}{|AC|}=t$，则 $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC}$

②③对照得：$\begin{cases}2\lambda=\frac{11}{16}\\2(1-\lambda)t=\frac{5}{16}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{11}{32}\\t=\frac{5}{21}\end{cases}$，即 $\frac{|AH|}{|AC|}=\frac{5}{21}$.

故答案为：$\frac{4\sqrt{5}}{5}$；$\frac{5}{21}$

四、解答题

17. 【答案】(1) $B=\frac{\pi}{4}$；(2) $\frac{17}{8}$

(1) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$， $\therefore C=\frac{\pi}{3}$，

$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because A,B\in(0,\pi)$, $\therefore A-B=\frac{\pi}{6}$，

又 $\because A+B=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore B=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\vec{m}\cdot\vec{n}=3\sin A+\cos 2A=-2\sin^2 A+3\sin A+1$，

$\because C=\frac{\pi}{3}$， $\therefore A\in(0,\frac{2\pi}{3})$， $\sin A\in(0,1]$，

$\therefore$ 当 $\sin A=\frac{3}{4}$ 时，$\vec{m}\cdot\vec{n}$ 有最大值 $\frac{17}{8}$.

18. 【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\sqrt{7}$

(1)解：（1）若选①，即 $\cos 2A=\cos(B+C)$，得 $2\cos^2 A-1=-\cos A$，

$\therefore 2\cos^2 A+\cos A-1=0$， $\therefore \cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$（舍去），

$\because A\in(0,\pi)$， $\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

若选②：$a\sin C=\sqrt{3}c\cos A$，

由正弦定理，得 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos A$，

$\because A$， $C\in(0,\pi)$， $\therefore \sin C>0$，则 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$， $\therefore \tan A=\sqrt{3}$， $\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

(2)解：AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$

$=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$

$=\frac{1}{4}(c^2+2c\cdot b\cos\frac{\pi}{3}+b^2)$，

$=\frac{1}{4}(4^2+2\times4\times2\times\cos\frac{\pi}{3}+2^2)=7$，

$\therefore AD=\sqrt{7}$．

19．　【答案】(1) $B=\frac{2\pi}{3}$ (2) $\left(0,2\right)$

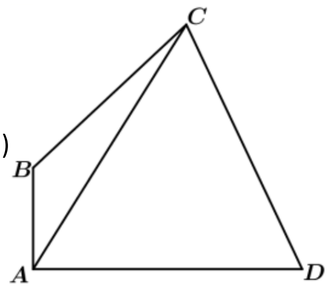
(1)由 $2S=-\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，

可得 $2\times\frac{1}{2}ac\sin B=-\sqrt{3}ac\cos B$，

即 $\sin B=-\sqrt{3}\cos B$，可得 $\tan B=-\sqrt{3}$，

因为 $B\in\left(0,\pi\right)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$，

(2)



$\because \angle BAC=\theta$，则 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\theta$， $\angle CDA=\theta+\frac{\pi}{6}$，

在三角形 ACD 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，

可得 $AC=\frac{AD\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

在三角形 ABC 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\theta}$，

可得 $BC=f\left(\theta\right)=\frac{AC\cdot\sin\theta}{\sin B}=\frac{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\theta}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\theta$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\times\frac{1-\cos2\theta}{2}+\sin2\theta\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin2\theta-\sqrt{3}\cos2\theta\right)+1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+1$，

因为$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$，

可得$-\frac{\pi}{3} < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$，

当$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$时，即$\theta = \frac{\pi}{3}$，

可得$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3} + 1 = 2$，

当$2\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$时，即$\theta = 0$，

可得$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$，

所以$f(\theta)$的值域为$(0,2)$.

20.　【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$ (2)6

(1)选① $b\cos A + a\cos B = 2c\cos C$，得$\sin B\cos A + \sin A\cos B = 2\sin C\cos C$

$\therefore \sin(A+B) = \sin C = 2\sin C\cos C$

$\because C \in (0,\pi)$

$\therefore \sin C \neq 0$

$\therefore \cos C = \frac{1}{2}(0 < C < \pi) \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$

选② $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab$

$\because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\therefore \cos C = \frac{1}{2}(0 < C < \pi) \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$

选③ $\cos 2C + \cos C = 0 \Rightarrow 2\cos^2 C + \cos C - 1 = 0 \Rightarrow (2\cos C - 1)(\cos C + 1) = 0$

又$0 < C < \pi$

所以$\cos C = \frac{1}{2}$，

所以$C = \frac{\pi}{3}$

(2)由余弦定理知：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab$

由基本不等式知：$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

所以$c^2 = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2$

所以：$a + b \leq 2c = 4$ (当且仅当$a = b$时，等号成立)，

所以$a + b + c \leq 6$

综上：$\triangle ABC$的周长的最大值为 6.

21．【答案】(1) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(1)解：由题意可知 $\angle AON=\frac{2\pi}{3},\angle OAB=\theta$，

若 P 在 O 的正北方向，则 $OP\perp OA$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$OA=\frac{2}{\tan\theta}$，

在 $\triangle OPB$ 中，$\angle B=\frac{\pi}{3}-\theta,\angle OPB=\frac{\pi}{2}+\theta$，

由正弦定理可得 $\frac{OP}{\sin\angle B}=\frac{OB}{\sin\angle OPB}$，

所以 $OB=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{2\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}=\frac{4}{\sqrt{3}-\tan\theta}$，

则 $OA+OB=\frac{2}{\tan\theta}+\frac{4}{\sqrt{3}-\tan\theta}=\frac{2\tan\theta+2\sqrt{3}}{-\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta}$

$$=\frac{2}{\frac{-\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{3}\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)-6}{\tan\theta+\sqrt{3}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}-\left(\tan\theta+\sqrt{3}+\frac{6}{\tan\theta+\sqrt{3}}\right)}$$

$$\geq\frac{2}{3\sqrt{3}-2\sqrt{\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{6}{\tan\theta+\sqrt{3}}}}=\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{3},$$

当且仅当 $\tan\theta+\sqrt{3}+\frac{6}{\tan\theta+\sqrt{3}}$，即 $\tan\theta=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ 时，取等号，

所以 A，B 到市中心 O 的距离和最小时 $\tan\theta=\sqrt{6}-\sqrt{3}$；

(2)解：因为 $\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{BP}^2\geq 11\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，

所以 $\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{BP}^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}\geq 9\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，

即 $\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{BP}\right)^2\geq 9\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$，

即 $\overrightarrow{OB}^2\geq 9\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)$，

因为 OP 平分 $\angle AOB$，

所以 $\angle AOP=\angle BOP=\frac{\pi}{3}$，

则 $100\geq 9\overrightarrow{OP}^2-45\left|\overrightarrow{OP}\right|$，

所以 $0<\left|\overrightarrow{OP}\right|\leq\frac{20}{3}$，

因为 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}$，

所以 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $10\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|+10\left|\overrightarrow{OP}\right|$，

所以$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{10\left|\overrightarrow{OP}\right|}{10-\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\dfrac{10}{\dfrac{10}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}-1}$，

因为$0<\left|\overrightarrow{OP}\right|\le\dfrac{20}{3}$，

所以当$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\dfrac{20}{3}$时，$\left|\overrightarrow{OA}\right|$有最大值 20，

此时在$\triangle AOP$中，$\dfrac{20}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{\dfrac{20}{3}}{\sin\theta}$，

即$\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta}=\dfrac{1}{3\sin\theta}$，

所以$3=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{1}{2}$，

所以$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$，

所以当A到市中心O的距离最大时$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

22. 【答案】(1)$\dfrac{27}{28}$；(2)$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.

(1)$b\sin A=a\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$，由正弦定理得：

$\sin B\sin A=\sin A\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\sin A\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B$，

所以$\dfrac{1}{2}\sin A\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B=0$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A\ne0$，

所以$\dfrac{1}{2}\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=0$，即$\tan B=\sqrt{3}$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$，

因为$a=3$，$c=2$，由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+4-6=7$，

因为$b>0$，所以$b=\sqrt{7}$，

其中$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以$BD=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$，

因为点E为线段BD的中点，所以$BE=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，

由题意得：$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}$，

所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BE}\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{BE}^2+0=\dfrac{27}{28}$.

(2)由（1）知：$B=\dfrac{\pi}{3}$，又$c=2$，

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}$，

所以$a=\dfrac{2\sin A}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{2\sin A}{\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A}=\dfrac{4}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}}$，

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\begin{cases}A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\C=\dfrac{2\pi}{3}-A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，解得：$A\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则$\tan A\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，$\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}\in(0,3)$，$1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}\in(1,4)$，

故$a=\dfrac{4}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan A}}\in(1,4)$，

$\triangle ABC$面积为$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$

故$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.