

第 22 讲 任意角和弧度制及任意角的三角函数

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

【基础巩固】

- 下列与 $\frac{9\pi}{4}$ 的终边相同的角的集合中正确的是 ()
A. $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + 45^\circ (k \in \mathbb{Z})\}$
B. $\left\{\alpha \left| \alpha = k \cdot 360^\circ + \frac{9}{4}\pi (k \in \mathbb{Z}) \right.\right\}$
C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 315^\circ (k \in \mathbb{Z})\}$
D. $\left\{\alpha \left| \alpha = k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}) \right.\right\}$
- 若角 α 是第一象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ()
A. 第一象限角
B. 第二象限角
C. 第一或第三象限角
D. 第二或第四象限角
- 已知圆锥的底面直径为 $\sqrt{2}$, 母线长为 $2\sqrt{2}$, 则其侧面展开图扇形的圆心角为 ()
A. $\frac{\pi}{4}$
B. $\frac{3\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{2}$
D. π
- 终边与直线 $y=x$ 重合的角可表示为 ()
A. $45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
B. $45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
C. $135^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
D. $225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- 半径为 3 的圆的边沿有一点 A, 半径为 4 的圆的边沿有一点 B, A、B 两点重合后, 小圆沿着大圆的边沿滚动, A、B 两点再次重合小圆滚动的圈数为 ()
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
- 若角 α 满足 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$, $\cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 则 α 在 ()
A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限
- 已知角 α 的顶点在坐标原点 O, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 将角 α 的终边绕 O 点顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后, 经过点 $(-3, 4)$, 则 $\sin \alpha =$ ()
A. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$
B. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$
C. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$
D. $-\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$
- (多选) 下列与角 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边不相同的角是 ()

A. $\frac{11\pi}{3}$

B. $2k\pi - \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

C. $2k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

D. $(2k+1)\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

9. (多选) 已知扇形的周长是12，面积是8，则扇形的中心角的弧度数可能是 ()

A. 1

B. 4

C. 2

D. 2或4

10. (多选) 下列说法正确的有 ()

A. 经过 30 分钟，钟表的分针转过 π 弧度

B. $1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{rad}$

C. 若 $\sin \theta > 0$ ， $\cos \theta < 0$ ，则 θ 为第二象限角

D. 若 θ 为第二象限角，则 $\frac{\theta}{2}$ 为第一或第三象限角

11. (多选) 已知角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点

$P(m, 1-m)$ ，若 $m > 0$ ，则下列各式的符号无法确定的是 ()

A. $\sin \alpha$

B. $\cos \alpha$

C. $\sin \alpha - \cos \alpha$

D. $\sin \alpha + \cos \alpha$

12. 已知角 α 的终边过点 $P(-1, 2)$ ，则 $\tan \alpha$ 的值为_____.

13. 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上一点 $A(2\sin \alpha, 3)$ ，则 $\cos \alpha =$ _____.

14. 与 2021° 终边相同的最小正角是_____.

15. 若一个扇形的周长是 4 为定值，则当该扇形面积最大时，其圆心角的弧度数是_____.

16. 屏风文化在我国源远流长，可追溯到汉代某屏风工艺厂设计了一款造型优美的扇环形屏风，如图，扇环外环弧长为 3.6m，内环弧长为 1.2m，径长（外环半径与内环半径之差）为 1.2m，则该扇环形屏风的面积为_____ m^2 .



17. 已知扇形 AOB 的周长为 8.

(1) 若这个扇形的面积为 3，求其圆心角的大小.

(2) 求该扇形的面积取得最大时，圆心角的大小和弦长 AB.

18. 已知角 α 的终边在直线 $y = -3x$ 上, 求 $10\sin \alpha + \frac{3}{\cos \alpha}$ 的值.

【素养提升】

1. 已知角 α 的终边在直线 $y = -3x$ 上, 则 $10\sin \alpha + \frac{3}{\cos \alpha}$ 的值为 ()

A. $-6\sqrt{10}$ B. $6\sqrt{10}$ C. 0 D. $-3\sqrt{10}$

2. 设点 P 是以原点为圆心的单位圆上的一个动点, 它从初始位置 $P_0(0,1)$ 出发, 沿单位圆顺时针方向旋转角 $\theta(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 后到达点 P_1 , 然后继续沿单位圆顺时针方向旋转角 $\frac{\pi}{3}$ 到达点

P_2 , 若点 P_2 的纵坐标是 $-\frac{1}{2}$, 则点 P_1 的坐标是_____.

3. 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 P , 且点 P 在圆 $C: (x+3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 上.

(1) 若 P 点的横坐标为 -3 , 求 $\sin 2\alpha$ 的值;

(2) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$, 求 $\sin \beta$ 的最大值.

第 23 讲 同角三角函数的基本关系与诱导公式

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

【基础巩固】

1. 下列各数中，与 $\cos 1030^\circ$ 相等的是（ ）
A. $\sin 50^\circ$ B. $-\cos 50^\circ$ C. $\cos 50^\circ$ D. $-\sin 50^\circ$
2. 已知 $\tan \alpha = -3$ ，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin \alpha =$ （ ）
A. $-\frac{9}{10}$ B. $-\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{9}{10}$
3. 若 $\frac{1+\sin 2\alpha}{1-2\sin^2 \alpha} = 5$ ，则 $\tan \alpha =$ （ ）
A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
4. 若 $\frac{\sin(\pi - \theta) + \cos(\theta - 2\pi)}{\sin \theta + \cos(\pi + \theta)} = \frac{1}{2}$ ，则 $\tan \theta =$ （ ）
A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3
5. 已知函数 $f(x) = a \sin(\pi x + \alpha) + b \cos(\pi x + \beta)$ ，且 $f(3) = 3$ ，则 $f(2020)$ 的值为（ ）
A. -1 B. 1 C. 3 D. -3
6. 已知 $\tan \theta = 2$ ，则 $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta =$ （ ）
A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. 1 D. $\frac{3}{5}$
7. 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = 3$ ， $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ ，则 $\tan(2\pi - \beta)$ 等于（ ）
A. 1 B. $-\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{7}$ D. 2 或 6
8. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ，则 $\frac{\sin \alpha}{1 + \tan \alpha}$ 的值为（ ）
A. $\frac{4\sqrt{14}}{51}$ B. $\frac{2\sqrt{14}}{13}$ C. $\frac{4\sqrt{17}}{51}$ D. $\frac{2\sqrt{17}}{13}$
9. (多选) 已知 $\tan \theta = 2$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. $\tan(\pi - \theta) = -2$ B. $\tan(\pi + \theta) = -2$ C. $\frac{\sin \theta - 3 \cos \theta}{2 \sin \theta + 3 \cos \theta} = -\frac{1}{7}$ D. $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$

10. 若 $\cos \theta = \frac{1}{5}$, 则 $\sin \theta \sin 2\theta + \cos 2\theta =$ _____.

11. 已知 $\tan \theta = -3$, 则 $\frac{\sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\sin 2\theta} =$ _____.

12. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $3 \sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = 0$, 则 $\frac{\cos \alpha \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ _____.

13. 已知 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 则 $\sin x - \cos x =$ _____.

14. 化简: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} + \frac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)} =$ _____.

15. 若 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha + 1} = 3$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

16. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$ _____, 若角 β 与角 α 关于 x 轴对称, 则 $\sin \beta =$ _____.

17. 已知 $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = 0$.

(1) 求 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha - 5 \sin \alpha}$ 的值; (2) 求 $\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}$ 的值.

18. 已知 $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)x + k^2 - 3 = 0$ 的两个实根, 且 $-\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $\frac{\sin(\pi - \theta) + 5 \cos(2\pi - \theta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \sin(-\theta)}$ 的值;

(2) 求 $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 1$ 的值.

19. 已知角 α 的终边经过点 $P(3m, -6m) (m \neq 0)$.

(1) 求 $\frac{\sin(\alpha + \pi) + \cos(\alpha - \pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ 的值;

(2) 若 α 是第二象限角, 求 $\sin^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(\pi - \alpha)\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值.

【素养提升】

1. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, $P(1, 2)$ 为角 θ 终边上的一

点, 将角 θ 终边逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到角 β 的终边, 则 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\beta\right)} =$ ()

A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. 2

2. 函数 $f(x) = \frac{\cos 2x + 2\sin x \cdot \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos x}{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ 的值域为 ()

A. $(-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1)$ B. $[-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1]$ C. $\left[-\frac{5}{4}, \sqrt{2} + 1\right]$ D. $\left[-\frac{5}{4}, \sqrt{2} + 1\right)$

3. (多选) 已知角 α 满足 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0$, 则表达式 $\frac{\sin(\alpha + k\pi)}{\sin\alpha} + \frac{\cos(\alpha + k\pi)}{\cos\alpha} (k \in \mathbb{Z})$ 的取值可能为 ()

A. -2 B. -1 或 1 C. 2 D. -2 或 2 或 0

4. 已知 $\tan\alpha = 2$, 则 $\frac{\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 1} + \frac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + 2} =$ _____.

5. 已知角 $\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})$, 若角 θ 与角 α 的终边相同, 则 $y = \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} + \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} + \frac{\tan \theta}{|\tan \theta|}$

的值为_____.

6. 已知 $\sin x + \cos y = \frac{1}{4}$, 则 $\sin x - \sin^2 y$ 的最大值为_____

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{6}(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和在 $[0, 2\pi]$ 的单调递增区间;

(2) 已知 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(\alpha) = 2\sqrt{3}$, 先化简后计算求值:

$$\frac{-2\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + [\sin(-\alpha)]^2 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

第 24 讲 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

【基础巩固】

1. 若 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$, 则 ()
A. $\tan(\alpha - \beta) = 1$ B. $\tan(\alpha + \beta) = 1$
C. $\tan(\alpha - \beta) = -1$ D. $\tan(\alpha + \beta) = -1$
2. 若 $\tan \theta = -2$, 则 $\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} =$ ()
A. $-\frac{6}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{6}{5}$
3. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()
A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$
4. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(-1, 2)$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$ ()
A. $-\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ B. $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ C. $\frac{-3\sqrt{3}+4}{10}$ D. $\frac{-4\sqrt{3}+3}{10}$
5. 已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 且 $\sqrt{2} \cos 2\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()
A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. -1 D. 1
6. 已知 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) =$ ()
A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
7. 已知 $m \sin 20^\circ + \tan 20^\circ = \sqrt{3}$, 则实数 m 的值为 ()
A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 4 D. 8
8. 我国古代数学家僧一行应用“九服晷影算法”在《大衍历》中建立了晷影长 l 与太阳天顶距 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 的对应数表, 这是世界数学史上较早的一张正切函数表. 根据三角学知识可知, 晷影长度 l 等于表高 h 与太阳天顶距 θ 正切值的乘积, 即 $l = h \tan \theta$. 对同一“表高”两次

测量，第一次和第二次太阳天顶距分别为 α ， β ，若第一次的“晷影长”是“表高”的3倍，

且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ ，则第二次的“晷影长”是“表高”的（ ）倍.

- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

9. 已知 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sin(\beta - \alpha) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ， α, β 均为锐角，则 $\beta =$ （ ）

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

10. 已知 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ ，函数 $f(x) = 5\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，若 $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ ，则 $\cos(\beta - \alpha) =$ （ ）

- A. $\frac{23}{25}$ B. $-\frac{23}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

11. (多选) 已知 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ ，其中 α, β 为锐角，则以下命题正确的是（ ）

- A. $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ B. $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{10}$ D. $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{3}$

12. $\tan 10^\circ + \tan 35^\circ + \tan 10^\circ \tan 35^\circ =$ _____.

13. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ ， $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\cos 2\alpha =$ _____.

14. 已知 α 为锐角，且 $\tan \alpha + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{5}{3}$ ，则 $\frac{\sin 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} =$ _____.

15. 若 $3\sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{10}$ ， $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin \alpha =$ _____， $\cos 2\beta =$ _____.

16. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ，则 $\frac{\sin \alpha}{1 + \tan \alpha} =$ _____.

17. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

(1)求 $\sin \alpha$ 的值；

(2)若 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ ， $\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求 $\alpha - \beta$ 的值.

18. 在① $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 4\sqrt{3}\cos(-\alpha)$ ；② $\tan \alpha = 7\sin \alpha$ ；③ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 这三个条件中任选

一个，补充在下面横线上，并解答问题.

已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, _____, 求 $\cos \beta$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【素养提升】

1. 已知 $\alpha + \beta = 15^\circ$, 则 $\frac{1 + \tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha - \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta} =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

2. 已知双曲线 $C: x^2 - 3y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A 、 B , P 是 C 在第一象限的图象上的点, 记 $\angle PAB = \alpha$, $\angle PBA = \beta$, $\angle APB = \gamma$, 则 ()

- A. $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = 0$ B. $\tan \alpha + \tan \beta - \tan \gamma = 0$
C. $3 \tan \alpha + 3 \tan \beta + 4 \tan \gamma = 0$ D. $2 \tan \alpha + 2 \tan \beta + 3 \tan \gamma = 0$

3. $8 \sin 12^\circ (2 \cos^2 12^\circ - 1) + \tan 12^\circ =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

4. 英国化学家、物理学家亨利·卡文迪许被称为第一个能测出地球质量的人, 卡文迪许是从小孩玩的游戏(用一面镜子将太阳光反射到墙面上, 我们只要轻轻晃动一下手中的镜子, 墙上的光斑就会出现大幅度的移动, 如图 1) 得到灵感, 设计了卡文迪许扭秤实验来测量万有引力, 由此计算出地球质量, 他在扭秤两端分别固定一个质量相同的铅球, 中间用一根韧性很好的钢丝系在支架上, 钢丝上有个小镜子, 用激光照射镜子, 激光反射到一个很远的地方, 标记下此时激光所在的点, 然后用两个质量一样的铅球同时分别吸引扭秤上的两个铅球(如图 2), 由于万有引力作用, 根秤微微偏转, 但激光所反射的点却移动了较大的距离, 他用此计算出了万有引力公式中的常数 G , 从而计算出了地球的质量. 在该实验中, 光源位于刻度尺上点 P 处, 从 P 发出的光线经过镜面(点 M 处)反射后, 反射光线照射在刻度尺的点 Q 处, 镜面绕 M 点顺时针旋转 α 角后, 反射光线照射在刻度尺的点 Q' 处, 若 $\triangle PMQ$ 是正三角形. $PQ = a$, $QQ' = b$ (如图 3), 则下列等式中成立的是 ()



图1

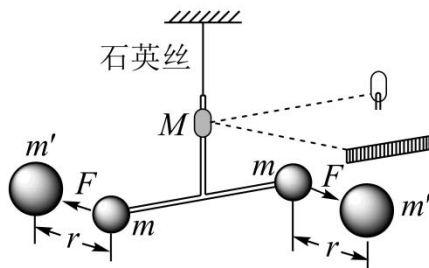


图2

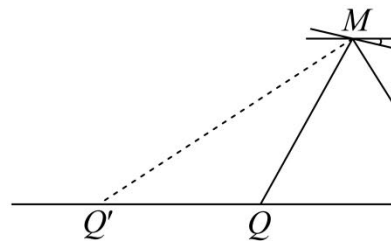


图3

A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}b}{2a+b}$

B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}a}{a+2b}$

C. $\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{3}b}{2a+b}$

D. $\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{3}a}{a+2b}$

5. 已知 $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ，且 $\sin 36^\circ(1 + \sin 2\alpha) = 2 \cos^2 18^\circ \cos 2\alpha$ ，则 $\alpha =$ ()

A. 18°

B. 27°

C. 54°

D. 63°

6. (多选) 已知 α 为第一象限角， β 为第三象限角，且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$ ，

$\cos\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{12}{13}$ ，则 $\cos(\alpha + \beta)$ 可以为 ()

A. $-\frac{33}{65}$

B. $-\frac{63}{65}$

C. $\frac{33}{65}$

D. $\frac{63}{65}$

7. $\sin(\theta + 75^\circ) + \cos(\theta + 45^\circ) - \sqrt{3} \cos(\theta + 15^\circ) =$ _____.

8. $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} - 1$ ，若 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，则 $\alpha =$ _____.

9. (1) 已知 $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ ， $\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{10}{3}$ ，求 $\frac{5 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 11 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 8}{\sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}$ 的值；

(2) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ， $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ ， $\cos(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ，求 β 的值.

第 25 讲 简单的三角恒等变换

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

【基础巩固】

1. 已知函数 $f(x) = \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}$, 则 $f(x)$ 的值不可能是 ()
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. 2
2. 若角 α 顶点与原点重合, 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边在直线 $2x + y = 0$ 上, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ ()
A. $\pm\frac{3}{5}$ B. $\pm\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{10}$ D. $\frac{3}{10}$
3. 已知角 α 为锐角, 角 β 为钝角, 且 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin\beta =$ ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\tan A \tan B < 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 函数 $f(x) = 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
6. 若将函数 $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 所得图象对应的函数在区间 $(-m, m)$ 上无极值点, 则 m 的最大值为 ()
A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{2}$
7. 若函数 $f(x) = 2\sin x + \cos x$ 在 $[0, \alpha]$ 上是增函数, 则当 α 取最大值时, $\sin 2\alpha$ 的值等于 ()
A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{5}$

8. 已知函数 $f(x) = \sin x + a \cos x$ 满足: $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调,

且满足 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

9. (多选) 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2\sqrt{3} \sin^2 x$, 则 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是曲线 $f(x)$ 的一个对称中心

C. $x = -\frac{\pi}{12}$ 是曲线 $f(x)$ 的一条对称轴 D. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增

10. (多选) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且满足

$\sin B(1 + 2 \cos C) = 2 \sin A \cos C + \cos A \sin C$, 则下列结论可能成立的是 ()

- A. $a = 2b$ B. $b = 2a$ C. $A = 2B$ D. $C = 90^\circ$

11. 若 $\theta = \theta_0$ 时, $f(\theta) = \sin 2\theta - \cos^2 \theta$ 取得最大值, 则 $\sin\left(2\theta_0 + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \sin 2x - \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ 的最小值为_____.

13. 若 $\sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = -3 \sin\left(\frac{3}{4}\pi + x\right)$, 则 $\frac{\sin 2x + \sin x \cos 2x + \sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} =$ _____.

14. 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两根, 且 $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为

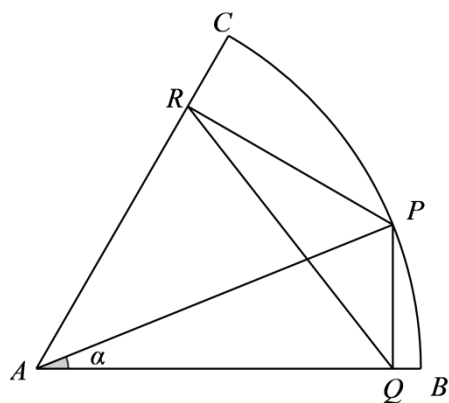
_____.

15. 某地进行老旧小区改造, 有半径为 60 米, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的一块扇形空地 (如图), 现

欲从中规划出一块三角形绿地 PQR , 其中 P 在 \widehat{BC} 上, $PQ \perp AB$, 垂足为 Q , $PR \perp AC$,

垂足为 R , 设 $\angle PAB = \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $PQ =$ _____ (用 α 表示); 当 P 在 \widehat{BC} 上运动

时, 这块三角形绿地的最大面积是_____.



16. 设函数 $f(x) = \sin x + \cos x (x \in \mathbb{R})$.

(1) 求函数 $y = \left[f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]^2$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $y = f(x)f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

17. 设函数 $f(x) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] \cdot \left[\sin(x - \pi) + \cos(x + \pi) \right]$.

(1) 求函数 $f(x)$ 单调递增区间;

(2) 求函数 $g(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值.

18. 已知函数 $f(x) = \sin x$.

(1) 若 $f(\varphi - x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 对于任意实数 x 恒成立, 其中 $|\varphi| \leq \pi$, 求 φ 的值;

(2) 设函数 $g(x) = f^2(x) + f^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 求 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的取值范围.

【素养提升】

1. 已知函数 $f(x) = \frac{(1 - \sqrt{1 + \sin 2x})\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]}}$, 当 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 的值域为

()

A. $(-1, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(-1, 0)$

D. $(-\sqrt{2}, 0)$

2. (已知 α, β, γ 是三个互不相同的锐角, 则在 $\sin \alpha + \cos \beta$, $\sin \beta + \cos \gamma$, $\sin \gamma + \cos \alpha$ 三个值中, 大于 $\sqrt{2}$ 的个数最多有 () 个

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x| - 2\sin 2x$, 以下结论错误的是 ()

A. π 是 $f(x)$ 的一个周期

B. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 单调递减

C. $f\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 恰有两个零点

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A \sin B \sin(C - \theta) = \lambda \sin^2 C$, 其中 $\tan \theta = \frac{1}{3}$ (其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 若

$\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{2}{\tan C}$ 为定值, 则实数 λ 的值是 ()

A. $\frac{\sqrt{10}}{20}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

5. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x$, 周期 $T < 2\pi$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, 且在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处取得最大

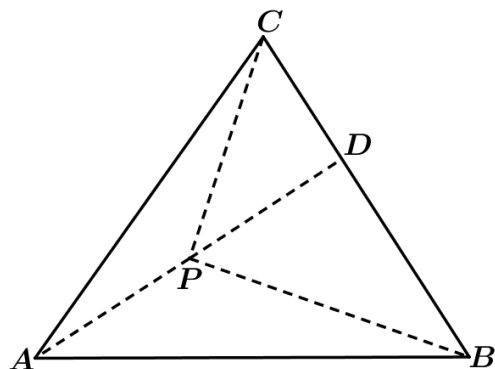
值, 则使得不等式 $\lambda|\omega| \geq a$ 恒成立的实数 λ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{11}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{13}$

6. 已知 $8 \tan^3 \theta + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos^2 \theta} > -3$, 则 $\tan\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$ 的取值范围为_____.

7. 如图, 正三角形 ABC 内有一点 P , $\angle BPC = \frac{\pi}{2}$, $\angle APC = \frac{5\pi}{6}$, 连接 AP 并延长交 BC 于

D , 则 $\frac{|CD|}{|CB|} =$ _____.



8. 已知 $\triangle ABC$ 中, 则 $2 \sin^2 A + \sin^2 B = 2 \sin^2 C$ 则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 最小值是
_____.