第 30 讲　平面向量的概念及线性运算

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

【基础巩固】

7. A　[解析] 由题知,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,即$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}$,则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{CM}$,则当叶片 OC 旋转到最低点时,$|\overrightarrow{CM}|$最小,且其值为 60-20=40.

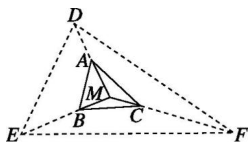
8. B　[解析] ∵$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$,∴$\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$,又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,∴$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,又 C,P,D 三点共线,∴$m+\frac{2}{3}=1$,解得 $m=\frac{1}{3}$.故选 B.

9. ABC　[解析] 连接 BD(图略),∵ $AB\parallel CD,AB\perp AD,AB=2AD=2DC$,∴ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,A 正确;∵$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$,∴$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,∴$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,又 F 为线段 AE 的中点,∴$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,B 正确;$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,C 正确;$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,D 错误.故选 ABC.

10. ACD　[解析] 若$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,则点 M 是边 BC 的中点,故 A 正确;若$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,则$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,即$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$,则点 M 在边 CB 的延长线上,故 B 错误;若$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}$,即$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=0$,则点 M 是△ABC 的重心,故 C 正确;由 $2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$,可得 M 为边 AB 的中点,则△MBC 的面积是△ABC 面积的$\frac{1}{2}$,故 D 正确.故选 ACD.

13. 点 M 在△ABC 的内部,且满足 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,则 $S_{\triangle MAC}∶S_{\triangle MAB}$=________.

3∶4　[解析] 根据题意,分别延长 MA 至 D,MB 至 E,MC 至 F,使得 $MD=2MA,ME=3MB,MF=4MC$,如图所示:



由 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,得$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\mathbf{0}$,连接 DE,DF,EF,所以点 M 是△DEF 的重心,所以 $S_{\triangle MDE}=S_{\triangle MEF}=S_{\triangle MFD}$,设 $S_{\triangle MDE}=1$,则 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$,$S_{\triangle MAC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{8}$,所以 $S_{\triangle MAC}∶S_{\triangle MAB}=\frac{1}{8}∶\frac{1}{6}=3∶4$.

14.已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线,$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}$.

(1)若 $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,求 k 的值;

(2)若 A,B,C 三点共线,求 k 的值.

解:(1) ∵$2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,

∴$2(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}=(1+k)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,

又 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,∴$k+1=0$,∴$k=-1$.

(2) ∵A,B,C 三点共线,∴设$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

即$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,

∴$(k-1)\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}+5\lambda\boldsymbol{b}$,

又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,∴$\begin{cases}k-1=-\lambda,\\10=5\lambda,\end{cases}$消去 λ 得 $k=-1$.

15.已知点 G 是△ABO 的重心,M 是 AB 边的中点.

(1)求$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GO}$;

(2)若 PQ 过△ABO 的重心 G,且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OP}=m\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OQ}=n\boldsymbol{b}$,求证:$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

解:(1)连接 GM(图略),因为$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$,$2\overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GO}$,

所以$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GO}=-\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GO}=\boldsymbol{0}$.

(2)证明:易知$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(a+b)$,

因为 G 是△ABO 的重心,

所以$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(a+b)$.

由 P,G,Q 三点共线,设$\overrightarrow{QG}=t\overrightarrow{QP}$,

所以$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OQ}=t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})$,

即$\overrightarrow{OG}=t\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OQ}$,

即$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=mt\boldsymbol{a}+(1-t)n\boldsymbol{b}$.

由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,得$\begin{cases}mt=\frac{1}{3},\\(1-t)n=\frac{1}{3},\end{cases}$

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

【素养提升】

1. B [解析] 设 BC 边的中点为 D,AC 边的中点为 M,连接 PD,MD,BM(图略),则有$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$.由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$,得$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{PD}$,又 D 为 BC 边的中点,M 为 AC 边的中点,所以$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{DM}$,则$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DM}$,则 P,D,M 三点共线且 D 为线段 PM 的中点.又 D 为 BC 边的中点,所以四边形 $CPBM$ 为平行四边形.因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=2$,所以$|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BP}|=2$,则 $AC=4$,且 $BM=PC=2$,所以△AMB 为等边三角形,所以∠$BAC=60°$,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.故选 B.

2. 5 5 [解析] 连接 AC,BD,设对角线 AC,BD 的交点为 O,∵$AB=3$,$AD=4$,∴$AC=BD=\sqrt{9+16}=5$.∵P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上一点,且 $PB\perp PD$,∴点 P 在以线段 BD 为直径的圆上,即点 P 的轨迹是以 O 为圆心,$\frac{AC}{2}=\frac{5}{2}$为半径的圆(除去 B,D 两点),A,C 两点也在圆上,则$|\overrightarrow{PA}|$的最大值为圆的直径,即$|\overrightarrow{PA}|$的最大值为 5.连接 PO,则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$,∴$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=2|\overrightarrow{PO}|=5$.

第 31 讲　平面向量基本定理及坐标表示

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

3．【答案】C

【分析】根据平面向量线性运算法则计算可得；

【详解】解：因为$\overrightarrow{EO}=2\overrightarrow{AE}$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$，

所以$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

故选：C.

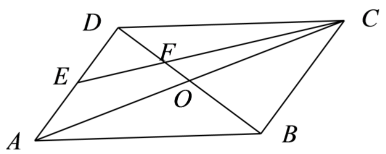
4．【答案】B

【分析】根据题意得$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$，再分析求解即可.

【详解】如下图所示，连接AC与BD交于O，则O为AC的中点，因为E为AD的中点，

所以F为三角形ACD的重心，所以$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(-\vec{a}-\vec{b}-\vec{a}\right)=-\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

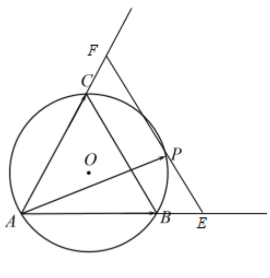
故选：B.



6．【答案】A

【分析】等和线的问题可以用共线定理，或直接用建系的方法解决.

【详解】



作BC的平行线与圆相交于点P，与直线AB相交于点E，与直线AC相交于点F，

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，则$\lambda+\mu=1$，

$\because$BC//EF，$\therefore$设$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=k$，则$k\in[0,\frac{4}{3}]$

$\therefore\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}=\lambda k\overrightarrow{AB}+\mu k\overrightarrow{AC}$

$\therefore x=\lambda k, y=\mu k$

$\therefore 2x+2y=2(\lambda+\mu)k=2k\le\frac{8}{3}$

故选：A.

7.【答案】A

【分析】根据 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，得到 $\overrightarrow{AE}=\frac{4\mu}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，再根据 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CE}$ 求解.

【详解】解：因为 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{BD}$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$，

因为 $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{4\mu}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CE}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}+\frac{\lambda-1}{\lambda}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{\lambda}=\frac{4}{3}\mu\\ \frac{\lambda-1}{\lambda}=\frac{2}{3}\end{cases}$，

得 $\mu=\frac{1}{4}$.

故选：A

9. 【答案】BD

【分析】先根据向量加法，可直接求出 $\alpha=\frac{5\pi}{6},\beta=\frac{\pi}{6}$.

对选项A，直接求出向量 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的模，然后验证即可；

对选项B，直接求出余弦值；

对选项C，直接求出向量 $\vec{m}-\vec{n}$ 的模；

对选项D，直接求出正弦值.

【详解】根据向量的加法可得：$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=0\\ \sin\alpha+\sin\beta=1\end{cases}$

根据诱导公式及同角三角函数的关系，且 $\alpha\in[0,2\pi),\beta\in[0,2\pi),\alpha>\beta$，解得：

$\alpha=\dfrac{5\pi}{6},\beta=\dfrac{\pi}{6}$.

对选项A，$\vec{m}^2=1,\vec{n}^2=1$，则有：$m^2+n^2=2$，故选项A错误；

对选项B，则有：$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，故选项B正确；

对选项C，$\vec{m}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right),\vec{n}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则有：$\vec{m}-\vec{n}=\left(-\sqrt{3},0\right)$

故有：$\left|\vec{m}-\vec{n}\right|=\sqrt{3}\neq 2$，故选项C错误；

对选项D，则有：$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\left(\pi\right)=0$，故选项D正确.

故选：BD.

10．【答案】ABD

【分析】利用共线向量的坐标表示可判断A选项；利用向量垂直结合向量的模长公式可判断B选项；由已知$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$且$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，求出m的取值范围，可判断C选项；利用平面向量的几何意义可判断D选项.

【详解】对于A选项，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$2m=2-m$，解得$m=\dfrac{2}{3}$，A对；

对于B选项，若$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，

所以，$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5}$，B对；

对于C选项，若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=-m+2\left(m-2\right)=m-4<0$，可得$m<4$，

且$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，则$m\neq\dfrac{2}{3}$，故当$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$m<4$且$m\neq\dfrac{2}{3}$，C错；

对于D选项，若$m=2$，则$\vec{b}=\left(2,0\right)$，所以，向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2}{2}=-1$.

故选：ABD.

14.【答案】$\sqrt{7}$

【分析】根据题意得$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，求出$m=\dfrac{1}{4}$，所以$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，即

$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2}$，求解即可.

【详解】因为$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

即$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，因为点$P$在线段$CD$上，

所以P，C，D三点共线，由平面向量三点共线定理得，$m+\frac{3}{4}=1$，即$m=\frac{1}{4}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，又$\triangle ABC$是边长为4的等边三角形，

所以$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 60^\circ+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

$=\frac{1}{16}\times 16+\frac{1}{4}\times 4\times 4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 16=7$，故$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{7}$.

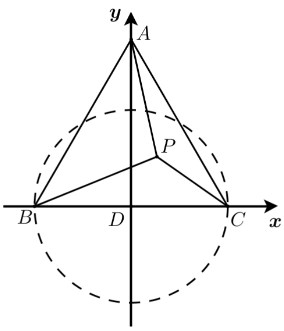
故答案为：$\sqrt{7}$.

15. 【答案】$\frac{5}{2}$

【分析】构建以D为原点，BC,AD为x、y轴的直角坐标系，确定相关点坐标并设$P(a,b)$且$\begin{cases}a=t\cos\theta\\b=t\sin\theta\end{cases}(-1\le t\le 1)$，由向量线性关系的坐标表示列方程得到$2x+y$关于$t,\theta$的三角函数式，应用正弦型函数性质求最大值.

【详解】由题设，P在以D为圆心，1为半径的圆上或圆内，

构建以D为原点，BC,AD为x、y轴的直角坐标系，如下图示：



所以$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，令$P(a,b)$且$\begin{cases}a=t\cos\theta\\b=t\sin\theta\end{cases}(-1\le t\le 1)$，

所以$\overrightarrow{AP}=(a,b-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3})$，

又$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，即$(a,b-\sqrt{3})=x\cdot(-1,-\sqrt{3})+y\cdot(1,-\sqrt{3})$，

所以$\begin{cases}y-x=a\\x+y=1-\frac{\sqrt{3}b}{3}\end{cases}$，而$2x+y=\frac{3}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(y-x)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}a$，

则$2x+y=\frac{3}{2}-t(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)=\frac{3}{2}-t\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，

故当$t\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=-1$时，$2x+y$有最大值$\frac{5}{2}$.

故答案为：$\frac{5}{2}$

16．平面内给定两个向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(-1,2)$.

(1)求$|3\vec{a}+2\vec{b}|$；

(2)若$(\vec{a}+k\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$，求实数$k$的值.

解：(1)由已知$3\vec{a}+2\vec{b}=3(3,1)+2(-1,2)=(7,7)$，因此，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{2\times 7^2}=7\sqrt{2}$.

(2)由已知$\vec{a}+k\vec{b}=(3,1)+k(-1,2)=(3-k,1+2k)$，$2\vec{a}-\vec{b}=2(3,1)-(-1,2)=(7,0)$，

因为$(\vec{a}+k\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$，则$1+2k=0$，解得$k=-\frac{1}{2}$.

17．已知$A(1,3)$，$B(2,-2)$，$C(4,1)$.

(1)若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，求$D$点的坐标；

(2)设向量$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，若$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行，求实数$k$的值.

解：(1)设$D(x,y)$，又因为$A(1,3),B(2,-2),C(4,1)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(1,-5),\overrightarrow{CD}=(x-4,y-1)$，

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，

所以$\begin{cases}x-4=1\\y-1=-5\end{cases}$，得$\begin{cases}x=5\\y=-4\end{cases}$，

所以$D(5,-4)$.

(2)由题意得，$\vec{a}=(1,-5)$，$\vec{b}=(2,3)$，

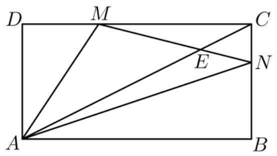
所以$k\vec{a}-\vec{b}=(k-2,-5k-3)$，$\vec{a}+3\vec{b}=(7,4)$，

因为$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$平行，

所以$4(k-2)-7(-5k-3)=0$，解得$k=-\frac{1}{3}$.

所以实数k的值为$-\frac{1}{3}$.

18．如图所示，已知矩形$ABCD$中，$AB=2,AD=1,\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$AC$与$MN$相交于点$E$.



(1)若$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，求$\lambda$和$\mu$的值；

(2)用向量$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$表示$\overrightarrow{AE}$.

解：(1)以A点为原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y轴，建立平面直角坐标系，

则 $D(0,1), B(2,0), M\left(\frac{2}{3},1\right), N\left(2,\frac{2}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}), \overrightarrow{AB}=(2,0), \overrightarrow{AD}=(0,1)$

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=(2\lambda,\mu)$，

所以 $\begin{cases}2\lambda=\frac{4}{3}\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{cases}$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}, \mu=-\frac{1}{3}$

(2)设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，

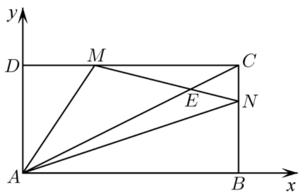
因为 $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2}{3},1\right), \overrightarrow{AN}=\left(2,\frac{2}{3}\right)$， $\overrightarrow{AC}=(2,1)$

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,1)=\left(\frac{2}{3}m+2n, m+\frac{2}{3}n\right)$. 解得 $m=\frac{3}{7}, n=\frac{6}{7}$，

即 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AN}$， 所以 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}t\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}t\overrightarrow{AN}$，

又因为 M，E，N 三点共线，所以 $\frac{3}{7}t+\frac{6}{7}t=1, t=\frac{7}{9}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.



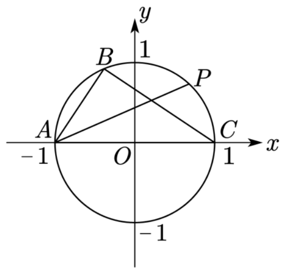
【素养提升】

1. 【答案】B

【详解】由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=1+4-2\times1\times2\times\cos60^\circ=3$，所以 $BC=\sqrt{3}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $AB\perp BC$. 以 AC 的中点为原点，建立如图所示的平面直角坐标系，易得 A（−1，0），C（1，0），B（$-\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），设 P 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{AC}=(2,0)$， $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$， 又 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以 $(\cos\theta+1,\sin\theta)=m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+n(2,0)=\left(\frac{m}{2}+2n,\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$，所以

$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，$n=\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$，所以$m+n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\geq -1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，当且仅当$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$时，等号成立．



故选：B．

2．【答案】$-\frac{1}{2}$

【详解】如图，以A为原点，分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$为$x,y$轴建立平面直角坐标系，

设正方形$ABCD$的边长为$2a$，则正方形$DEHI$的边长为$\sqrt{3}a$，正方形$EFGC$边长为a

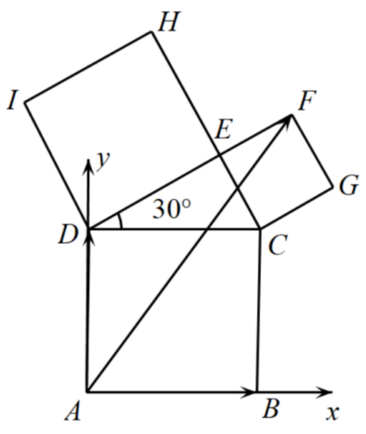
可知$A(0,0)$，$B(2a,0)$，$D(0,2a)$，$DF=\left(\sqrt{3}+1\right)a$

则$x_F=\left(\sqrt{3}+1\right)a\cdot\cos30^\circ$，$y_F=\left(\sqrt{3}+1\right)a\cdot\sin30^\circ+2a$，即$F\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\right)$

又$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，$\therefore\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\right)=x(2a,0)+y(0,2a)=(2ax,2ay)$

即$\begin{cases}2ax=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a\\2ay=\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\end{cases}$，即$2ax-2ay=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a-\frac{5+\sqrt{3}}{2}a$，化简得$x-y=-\frac{1}{2}$

故答案为：$-\frac{1}{2}$



第 32 讲　平面向量的数量积及应用举例

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

6. 【答案】B

【分析】以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为基底表示 $\overrightarrow{NM}$，再与 $\overrightarrow{AC}$ 求数量积即可.

【详解】解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=4\times6\times\frac{1}{2}=12$，

且 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

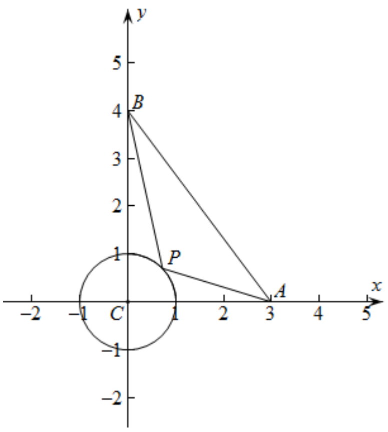
所以：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{6}\times12+\frac{1}{3}\times36=14$.

故选：B.

7. 【答案】D

【分析】依题意建立平面直角坐标系，设 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，表示出 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则 $C\left(0,0\right)$，$A\left(3,0\right)$，$B\left(0,4\right)$，



因为 $PC=1$，所以 P 在以 C 为圆心，1为半径的圆上运动，

设 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，$\theta\in\left[0,2\pi\right]$，

所以 $\overrightarrow{PA}=\left(3-\cos\theta,-\sin\theta\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(-\cos\theta,4-\sin\theta\right)$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(-\cos\theta\right)\times\left(3-\cos\theta\right)+\left(4-\sin\theta\right)\times\left(-\sin\theta\right)$

$=\cos^2\theta-3\cos\theta-4\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-3\cos\theta-4\sin\theta$

$=1-5\sin\left(\theta+\varphi\right)$，其中 $\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

因为$-1 \le \sin(\theta+\varphi) \le 1$，所以$-4 \le 1-5\sin(\theta+\varphi) \le 6$，即$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-4,6]$；

故选：D

9. 【答案】AB

【分析】根据向量的数量积、向量的模的坐标表示及向量共线的坐标表示一一判断即可；

【详解】解：对于 A：若$\vec{a} \perp \vec{b}$，则$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\times(-1)+1\times t = 0$，解得$t=-2$，故 A 正确；

对于 B：若$\vec{a} // \vec{b}$，则$-2t = -1\times 1$，解得$t=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C：当$t=\frac{1}{2}$时$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，此时$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$0°$，故 C 错误；

对于 D：若$(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$，则$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0$，即$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$，即

$(-2)^2+1^2=(-1)^2+t^2$，解得$t=\pm 2$，

当$t=2$时$\vec{a}=(-2,1), \vec{b}=(-1,2)$，$\vec{a}+\vec{b}=(-3,3)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-1,-1)$，显然$|\vec{a}+\vec{b}| \ne |\vec{a}-\vec{b}|$，

当$t=-2$时$\vec{a}=(-2,1), \vec{b}=(-1,-2)$，$\vec{a}+\vec{b}=(-3,-1)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-1,3)$，此时$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$，故 D 错误；

故选：AB

10. 【答案】ABD

【分析】根据所给的条件，判断出四边形$ABCD$内部的几何关系即可.

【详解】因为$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = 1$，$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B = \frac{1}{2}$，可得$B=\frac{\pi}{3}$，

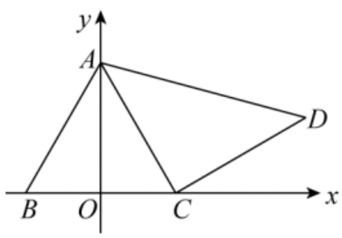
所以$\triangle ABC$为等边三角形，则$|\overrightarrow{AC}|=1$，故 A 正确；

因为$|\overrightarrow{CD}|=1$，所以$\overrightarrow{CD}^2=1$，又$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}=1$，所以$\overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$，

得$\overrightarrow{DC}^2 - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$，

所以$AC \perp CD$，则$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}|$，故 B 正确；

根据以上分析作图如下：



由于BC与AD不平行，故 C 错误；

建立如上图所示的平面直角坐标系，

则 $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{1}{2},0\right)$，$D\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确；

故选：ABD.

15. 【答案】$\left[-\frac{1}{4},6\right]$

【分析】设出 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{e},\vec{d}=\vec{b}-\vec{e}$，利用向量数量积运算法则得到 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2$，利用 $-\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|\le\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})\le\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|$ 求出取值范围.

【详解】设 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{e},\vec{d}=\vec{b}-\vec{e},|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{c}+2\vec{e})\cdot(\vec{d}+\vec{e})=\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2$ ①,

一方面，$\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2\le\vec{c}\cdot\vec{d}+|2\vec{d}+\vec{c}|+2=1+3+2=6$，

当且仅当 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向，$\vec{e}$ 与 $(2\vec{d}+\vec{c})$ 同向时取得最大值，

另一方面，$\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot(2\vec{d}+\vec{c})+2\ge\vec{c}\cdot\vec{d}-\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|+2=\frac{1}{4}\left(t^2-5\right)-t+2=\frac{1}{4}t^2-t+\frac{3}{4}\ge-\frac{1}{4}$，

其中 $t=\left|2\vec{d}+\vec{c}\right|\in[0,3]$，当且仅当 $|2\vec{d}+\vec{c}|=2,\vec{e}$ 与 $(2\vec{d}+\vec{c})$ 反向时取得最小值.

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}\in\left[-\frac{1}{4},6\right]$.

故答案为：$\left[-\frac{1}{4},6\right]$

16.【答案】 0 $-\frac{1}{4}$

【分析】建立坐标系，用坐标表示向量，第一个空利用向量数量积坐标公式进行相应计算，第二个空设出 $AE=m\in[0,1]$，表达出 $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=\left(m-\frac{1+\cos A}{2}\right)^2-\frac{(\cos A-1)^2}{4}$，利用二次函数的性质求最小值 $-\frac{(\cos A-1)^2}{4}$，再结合 $\cos A\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 求出最小值.

【详解】以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，垂直 AB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，故 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$D(\cos A,\sin A)$，$C(1+\cos A,\sin A)$，设 $AE=m\in[0,1]$，则 $E(m\cos A,m\sin A)$，$F(1-m+\cos A,\sin A)$，则 $\overrightarrow{AE}=(m\cos A,m\sin A)$，$\overrightarrow{CF}=(-m,0)$，$\overrightarrow{AC}=(1+\cos A,\sin A)$，

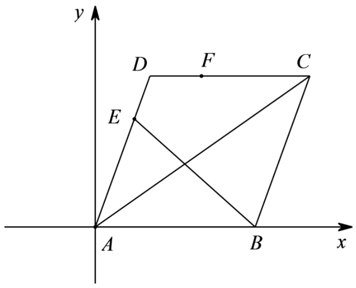
$(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF})\cdot\overrightarrow{AC}=(m\cos A-m,m\sin A)\cdot(1+\cos A,\sin A)=-m\sin^2A+m\sin^2A=0$；

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=m^2-(1+\cos A)m+\cos A=\left(m-\dfrac{1+\cos A}{2}\right)^2-\dfrac{(\cos A-1)^2}{4}$

因为$A\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$\cos A\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，$\dfrac{1+\cos A}{2}\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]\subseteq[0,1]$，故当$m=\dfrac{1+\cos A}{2}$时，

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}$取得最小值为$-\dfrac{(\cos A-1)^2}{4}$，因为$\cos A\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，所以当$\cos A=0$，即$A=\dfrac{\pi}{2}$时，

$-\dfrac{(\cos A-1)^2}{4}$最小，最小值为$-\dfrac{1}{4}$



故答案为：0，$-\dfrac{1}{4}$

【素养提升】

3．【答案】$\sqrt{10}+4$

【分析】由已知条件可设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,0),\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(0,2)$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC},\vec{d}=\overrightarrow{OD},-2\vec{b}=\overrightarrow{OE}$．由已知可确定点$C$在以$N(0,-1)$为圆心，1为半径的圆上，$D$在以$M(1,-2)$为圆心3为半径的圆内（含边界），则所求即为圆面$M$内一点与圆$P$上一点之间的距离，从而可得答案.

【详解】$\because\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore\vec{a}\perp\vec{b}$，又$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，则可设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,0),\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(0,2)$，

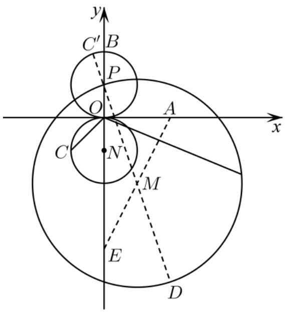
设$\vec{c}=\overrightarrow{OC},\vec{d}=\overrightarrow{OD},-2\vec{b}=\overrightarrow{OE}$．由$|\vec{b}+2\vec{c}|=2\Rightarrow\left|\vec{c}-\left(-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\right|=1$知$C$在以$N(0,-1)$为圆心，1为半径的圆上，取$AE$的中点为$M(1,-2)$，

由$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}+2\vec{b})=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD})\cdot(\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MD})$

$=-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DM})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{DM})=\overrightarrow{DM}^2-\overrightarrow{MA}^2$,又$AE=2\sqrt{5}$，

所以$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}+2\vec{b})=\overrightarrow{DM}^2-\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{DM}^2-5\le4\Rightarrow|DM|\le3$

所以D在以$M(1,-2)$为圆心3为半径的圆内（含边界），如图所示.



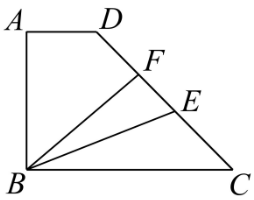
作圆 N 关于 x 轴的对称圆圆 P，其中 $P(0,1)$，

则 $|\vec{c}+\vec{d}|=|\vec{d}-(-\vec{c})|$ 表示圆面 M 内一点与圆 P 上一点之间的距离，

所以 $|\vec{c}+\vec{d}|=|\vec{d}-(-\vec{c})|\le\left|C'D\right|=|MP|+r_1+r_2=\sqrt{10}+1+3=\sqrt{10}+4$，

即 $|\vec{c}+\vec{d}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}+4$.

故答案为：$\sqrt{10}+4$.

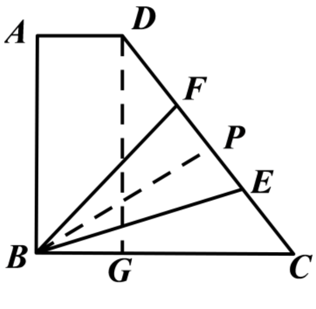
4. 

【答案】$\left[99,148\right]$

【分析】首先在 BC 上取一点 G，使得 $BG=4$，取 EF 的中点 P，连接 DG，BP，根据题意得到 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\right)^2-\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}\right)^2\right]=\overrightarrow{BP}^2-9$，再根据 $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 的最值求解即可.

【详解】在 BC 上取一点 G，使得 $BG=4$，取 EF 的中点 P，连接 DG，BP，

如图所示：



则 $DG=8\sqrt{3}$，$GC=8$，$CD=\sqrt{8^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=16$，

$\tan\angle BCD=\frac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}$，即 $\angle BCD=60^\circ$.

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\right)^2-\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{BP}\right)^2-\overrightarrow{FE}^2\right]=\overrightarrow{BP}^2-9$，

当 $BP\perp CD$ 时，$\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 取得最小值，此时 $\left|\overrightarrow{BP}\right|=12\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$，

所以$\left(\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}\right)_{\min}=\left(6\sqrt{3}\right)^2-9=99$.

当F与D重合时，$CP=13$，$BC=12$，

则$\left|\overrightarrow{BP}\right|^2=12^2+13^2-2\times12\times13\times\frac{1}{2}=157$，

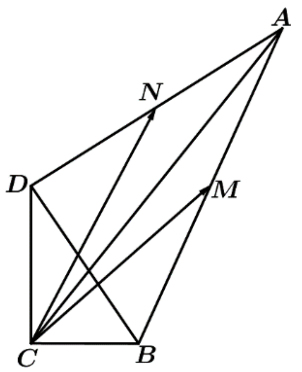
当E与C重合时，$CP=3$，$BC=12$，

则$\left|\overrightarrow{BP}\right|^2=12^2+3^2-2\times12\times3\times\frac{1}{2}=117$，

所以$\left(\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}\right)_{\max}=157-9=148$，即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$的取值范围为$\left[99,148\right]$.

故答案为：$\left[99,148\right]$

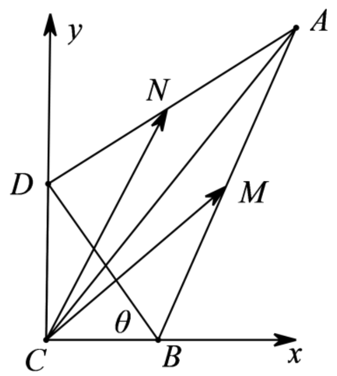
5．



【答案】$\frac{\sqrt{13}}{4}+1$

【分析】以点C为原点，CB，CD所在直线为x轴，y轴建立平面直角坐标系，设$\angle CBD=\theta$，利用三角函数关系表示A，B，D的坐标，由题干条件分析可知M为AB的中点，N为AD的中点，即可得到M，N的坐标，进而得到$\overrightarrow{CM}$与$\overrightarrow{CN}$，整理可得$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$为关于$\theta$的函数，利用正弦型函数的性质即可求得最大值.

【详解】如图，以点C为原点，CB，CD所在直线为x轴，y轴建立平面直角坐标系，



设$\angle CBD=\theta$，则$\angle ABD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$\angle ABx=\pi-\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\theta$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$AB=\dfrac{AD}{\cos\angle BAD}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=2$，$BD=AB\sin\angle BAD=1$，

所以设$B\left(\cos\theta,0\right)$，$D\left(0,\sin\theta\right)$，$A\left(\cos\theta+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right),2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)\right)$，即

$A\left(\sqrt{3}\sin\theta,\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)$.

由题意可知M为AB的中点，N为AD的中点，

所以$M\left(\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right),\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\right)$，$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)$，

所以$\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right),\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\right)$，$\overrightarrow{CN}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)$，

所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3}{4}\sin^2\theta+\dfrac{1}{4}\left(3\cos^2\theta+3\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\right)$

$=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\sin^2\theta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\dfrac{1}{4}\cos 2\theta+1$

$=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}\sin\left(2\theta-\varphi\right)+1$

$=\dfrac{\sqrt{13}}{4}\sin\left(2\theta-\varphi\right)+1$（其中$\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\varphi$为锐角），

所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最大值为$\dfrac{\sqrt{13}}{4}+1$，此时$2\theta-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，即$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{13}}{4}+1$

6.【答案】$\sqrt{2}+1$

【分析】分析题目条件，利用向量的数量积结合几何性质解题

【详解】由题，令$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1\Rightarrow\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=1\Rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=1$，

因为$\left|\vec{a}\right|=2$，令$\vec{a}=(2,0)$，根据几何性质，点B在以$\left(2,0\right)$为圆心，1为半径的圆上，

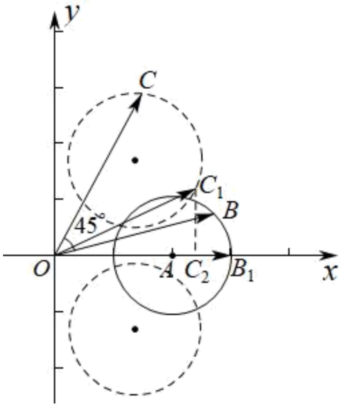
$\left(\sqrt{2}\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\sqrt{2}\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，又因为$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$，利用数量积公式展开可得

$\cos\left\langle \vec{b},\vec{c}\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left\langle \vec{b},\vec{c}\right\rangle=45^\circ$，

所以点 C 的轨迹为以 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ 为圆心，半径为 1 的圆，

所以 C 的横坐标的最大值为 $\sqrt{2}+1$，

$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{c}|\cos\left\langle \vec{a},\vec{c}\right\rangle}{|\vec{a}|}=|\vec{c}|\cos\left\langle \vec{a},\vec{c}\right\rangle$，即为 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影，最大值为 $\sqrt{2}+1$.



故答案为：$\sqrt{2}+1$.

7. 【答案】$-\frac{3}{2}$

【分析】讨论 $\vec{x_i}\neq\vec{y_i},i=1,2,3$、$\vec{x_i}=\vec{y_i}=\vec{e_i}$ 且 $i=1,2,3$、$\vec{x_i}=\vec{y_i}=\vec{e_i}$ 且 $i=1$ 或 2 或 3，根据 $X\cdot Y$ 的定义及向量数量积的运算律，分别求最小值，即可得结果.

【详解】当 $\vec{x_i}=\vec{y_i}=\vec{e_i}$ 且 $i=1,2,3$ 时，$X\cdot Y=3$；

当 $\vec{x_1}=\vec{y_1}=\vec{e_1}$ 且 $\vec{x_2}\neq\vec{y_2}$、$\vec{x_3}\neq\vec{y_3}$ 时，则 $X\cdot Y=\vec{e_1}^2+2\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}\geq1-2=-1$，当且仅当 $\langle\vec{e_2},\vec{e_3}\rangle=\pi$ 时等号成立；

同理 $\vec{x_2}=\vec{y_2}=\vec{e_2}$ 且 $\vec{x_1}\neq\vec{y_1}$、$\vec{x_3}\neq\vec{y_3}$ 或 $\vec{x_3}=\vec{y_3}=\vec{e_3}$ 且 $\vec{x_1}\neq\vec{y_1}$、$\vec{x_2}\neq\vec{y_2}$ 时，$X\cdot Y$ 的最小值也为 -1；

当 $\vec{x_i}\neq\vec{y_i},i=1,2,3$ 时，则 $X\cdot Y=\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}+\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_2}\cdot\left(\vec{e_1}+\vec{e_3}\right)+\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}\geq\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}-|\vec{e_1}+\vec{e_3}|$，

由 $\left|\vec{e_1}+\vec{e_3}\right|^2=2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}$，设 $t=\left|\vec{e_1}+\vec{e_3}\right|,0\leq t\leq2$，则 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=\frac{t^2-2}{2}$，

所以 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}-|\vec{e_1}+\vec{e_3}|=\frac{1}{2}t^2-t-1\geq-\frac{3}{2}$，当 $t=1$ 时等号成立.

综上，$X\cdot Y$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$.

故答案为：$-\frac{3}{2}$.

第33讲　数系的扩充与复数的引入

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

12．【答案】ACD

【分析】依题意可得$z^2+9=0$或$z^2-2z+4=0$，即$z^2=-9$或$(z-1)^2=-3$，从而求出z，即可判断；

【详解】解：由$\left(z^2+9\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$，得$z^2+9=0$或$z^2-2z+4=0$，即$z^2=-9$或$(z-1)^2=-3$，

解得$z=\pm 3\mathrm{i}$或$z=1\pm\sqrt{3}i$，

即方程的根分别为$z_1=3\mathrm{i}$、$z_2=-3\mathrm{i}$、$z_3=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$、$z_4=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，

所以$z_1+z_2+z_3+z_4=3\mathrm{i}+\left(-3\mathrm{i}\right)+\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)+\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)=2$

故选：ACD.

13．　【答案】ABD

【分析】首先根据题意得到$z=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，再结合复数的定义和运算性质依次判断选项即可.

【详解】$z=\frac{1}{a+2\mathrm{i}}=\frac{a-2\mathrm{i}}{(a+2\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})}=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，

对选项A，$\overline{z}=\frac{a}{a^2+4}+\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，$|z|=|\overline{z}|=\sqrt{\frac{a^2}{\left(a^2+4\right)^2}+\frac{4}{\left(a^2+4\right)^2}}$，

故A正确.

对选项B，$z=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}$，

当$a=0$时，$z=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$为纯虚数，故B正确.

对选项C，$z+\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+4}-\frac{2}{a^2+4}\mathrm{i}+a+2\mathrm{i}=\left(\frac{a}{a^2+4}+a\right)+\left(2-\frac{2}{a^2+4}\right)\mathrm{i}$

令$2-\frac{2}{a^2+4}=0$，即$a^2+3=0$无解，故C错误.

对选项D，$|z|^2=\frac{a^2}{\left(a^2+4\right)^2}+\frac{4}{\left(a^2+4\right)^2}=\frac{1}{a^2+4}\le\frac{1}{4}$，当且仅当$a=0$时取等号.

所以$|z|$的最大值为$\frac{1}{2}$，故D正确.

故选：ABD

14. 【答案】ABC

【分析】利用向量数量积的运算法则及复数的几何意义即可求解.

【详解】因为 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，所以$\left|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right|=\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|$，

则$\left|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|^2$，即$4\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=0$，则$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，故选项A 正确；

因为$\left(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right)\perp\left(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right)$，所以$\left(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right)=0$，

即$\overrightarrow{OZ_1}^2=\overrightarrow{OZ_2}^2$，则$|z_1|=|z_2|$，故选项B 正确；

设$z_1=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，因为$z_1$与$z_2$在复平面上对应的点关于实轴对称，

则$z_2=a-b\mathrm{i}\left(a,b\in R\right)$，所以$z_1z_2=a^2+b^2$，$|z_1z_2|=a^2+b^2$，则$z_1z_2=|z_1z_2|$，

故选项C 正确；

若$z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$满足$|z_1|=|z_2|$，而$z_1^2\neq z_2^2$，故选项D 错误；

故选：ABC.

15. 【答案】$1-5\mathrm{i}$

【分析】根据复数代数形式的运算法则即可解出.

【详解】$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{11-6-25\mathrm{i}}{5}=1-5\mathrm{i}$.

故答案为：$1-5\mathrm{i}$.

16.【答案】4

【分析】根据复数的运算公式求出复数z的代数形式，再由复数模的公式求$|z|$.

【详解】因为$(4+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})=25$，所以$z=\dfrac{25}{4+3\mathrm{i}}+3\mathrm{i}=\dfrac{25(4-3\mathrm{i})}{25}+3\mathrm{i}=4$，

所以$|z|=\sqrt{4^2+0^2}=4$，

故答案为：4

20. 【答案】$\pm(1+\mathrm{i})$

【分析】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathrm{R}$，根据模长公式得出$a=b=\pm1$，进而得出z.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathrm{R}$，由条件①可以得到$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}$，两边平方化简可得$a=b$，故$|z|^2=2\Rightarrow a^2+b^2=2\Rightarrow a=b=\pm1$，$z=\pm(1+\mathrm{i})$；

故答案为：$\pm(1+\mathrm{i})$

22. 【答案】$2+\sqrt{13}$

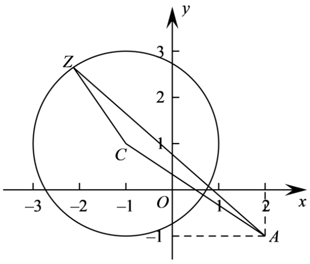
【分析】根据复数的几何意义$|z_1-z_2|$表示Z_1，Z_2两点间距离，结合图形理解运算.

【详解】设复数z在复平面中对应的点为Z

$\because |z+1-\mathrm{i}|=2$，则点$Z$到点$C(-1,1)$的距离为2，即点$Z$的轨迹为以$C$为圆心，半径为2的圆

$|z-2+\mathrm{i}|$表示点Z到点$A(2,-1)$的距离，结合图形可得$|ZA|\le|AC|+2=2+\sqrt{13}$

故答案为：$2+\sqrt{13}$．



【素养提升】

1. 【答案】B

【分析】设$z=a+b\mathrm{i},\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，根据复数所在象限、复数加法、减法、乘法和除法，结合“只有一个假命题”进行分析，由此确定正确选项.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i},\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，

由于z对应点在第二象限，所以$a<0,b>0$，

$z+\bar{z}=2a<0$，$z-\bar{z}=2b\mathrm{i}$，

$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$，$\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{a-b\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})^2}{(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})}=\dfrac{a^2-b^2+2ab\mathrm{i}}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\mathrm{i}$.

甲$\Rightarrow 2a=-2,a=-1$，

乙$\Rightarrow 2b=2,b=1$，

丙$\Rightarrow a^2+b^2=4$，

丁$\Rightarrow \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=-\dfrac{1}{2},\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=-\sqrt{3}a$，

由于“只有一个假命题”，所以乙是假命题，b的值应为$\sqrt{3}$.

故选：B

2.【答案】$3\sqrt{2}$

【分析】利用复数的几何意义知复数z对应的点Z到点$C(-1,-1)$的距离d满足$1\le d\le\sqrt{2}$，$|z-1-\mathrm{i}|$表示复数z对应的点Z到点$P(1,1)$的距离，数形结合可求得结果.

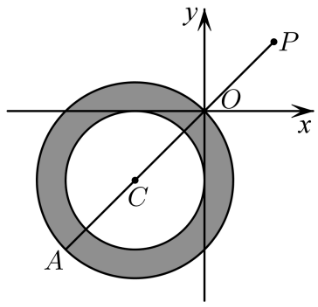
【详解】复数z满足$1\le|z+1+i|\le\sqrt{2}$，即$1\le|z-(-1-\mathrm{i})|\le\sqrt{2}$

即复数z对应的点Z到点$C(-1,-1)$的距离d满足$1\le d\le\sqrt{2}$

设$P(1,1)$，$|z-1-\mathrm{i}|$表示复数z对应的点Z到点$P(1,1)$的距离

数形结合可知$|z-1-\mathrm{i}|$的最大值$|AP|=|CP|+\sqrt{2}=\sqrt{2^2+2^2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

故答案为：$3\sqrt{2}$



3．【答案】±1

【分析】由$|z|=1$可知，$z\cdot\overline{z}=1$，化简$|z^2+kz+1|$可得其最值为$|k|+2$，进而求出k的值.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in R$，因为$|z|=1$，所以$|z|^2=1$，$z\cdot\overline{z}=1$，

所以$|z^2+kz+1|=|z^2+kz+z\cdot\overline{z}|=\left|z\left(z+\overline{z}+k\right)\right|$，

因为$z+\overline{z}=a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}=2a\in R$，

所以$|z^2+kz+1|=\left|z\left(z+\overline{z}+k\right)\right|=|z+\overline{z}+k|\cdot|z|=|2a+k|$，

因为$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$，所以$a\in[-1,1]$，

所以$|z^2+kz+1|_{\max}=|k|+2=3$，

解得，$k=\pm1$，

故答案为：±1.

4．【答案】-1

【分析】由题设有$\frac{x}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$、$\frac{x}{y}+1=-(\frac{x}{y})^2$易得 $(\frac{x}{y})^{3n}=1$，同理$(\frac{y}{x})^{3n}=1$，$n\in N^*$，而$\frac{x}{x+y}=-\frac{y}{x}$，$\frac{y}{x+y}=-\frac{x}{y}$，由此可知$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2020}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$，即可求值.

【详解】由题设有：$(\frac{x}{y})^2+\frac{x}{y}+1=0$，解得$\frac{x}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，且$\frac{x}{y}+1=-(\frac{x}{y})^2$，

$\therefore(\frac{x}{y})^3=1$，即$(\frac{x}{y})^{3n}=1$，同理有$(\frac{y}{x})^{3n}=1$，$n\in N^*$，

$\frac{x}{x+y}=\frac{x(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$，$\frac{y}{x+y}=\frac{y(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{y^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$，又$x^2+xy+y^2=0$，

$\therefore \dfrac{x}{x+y}=-\dfrac{y^2}{xy}=-\dfrac{y}{x}$， $\dfrac{y}{x+y}=-\dfrac{x^2}{xy}=-\dfrac{x}{y}$，

$\therefore \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{2020}+\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^{2020}=(\dfrac{y}{x})^{2020}+(\dfrac{x}{y})^{2020}=(\dfrac{y}{x})^{3\times673+1}+(\dfrac{x}{y})^{3\times673+1}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-1$，

故答案为：-1.

5．【答案】 $-\mathrm{i}$ $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$

【分析】利用给定定理直接计算即得 z^{2022}；令 $w=\cos\dfrac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{n}$，求出等比数列 $\{w^{n-1}\}(n\geq 2)$ 前 $n-1$ 项的和，再利用复数相等求解作答.

【详解】当 $r=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$，所以

$z^{2022}=(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})^{2022}=\cos(504\pi+\dfrac{3\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(504\pi+\dfrac{3\pi}{2})=-\mathrm{i}$；

$\forall n\in \mathrm{N}^*$，令 $w=\cos\dfrac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{n}$，则 $w^n=(\cos\dfrac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{n})^n=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，

$\forall n\in \mathrm{N}^*, n\geq 2$， $w+w^2+w^3+\mathrm{L}\ +w^{n-1}=\dfrac{w(1-w^{n-1})}{1-w}=\dfrac{w-w^n}{1-w}=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}$

$=\dfrac{(1+\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})(1-\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})}{(1-\cos\frac{\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})(1-\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})}=\dfrac{2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}{2-2\cos\frac{\pi}{n}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}\mathrm{i}$，

而 $w+w^2+w^3+\mathrm{L}\ +w^{n-1}=\sum\limits_{k=2}^{n}\cos\dfrac{(k-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sum\limits_{k=}^{n}\sin\dfrac{(k-1)\pi}{n}$， 则 $\sum\limits_{k=2}^{n}\cos\dfrac{(k-1)\pi}{n}=0$，

$\sum\limits_{k=}^{n}\sin\dfrac{(k-1)\pi}{n}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$，

所以 $\sum\limits_{k=2}^{n}[\cos\dfrac{(k-1)\pi}{n}+\sin\dfrac{(k-1)\pi}{n}]=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$.

故答案为：-i；$\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$