# 空间向量与立体几何章末检测卷（二）

## 第I卷(选择题　共60分)

**一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）**

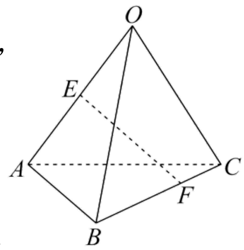
1．已知向量$\vec{a}=\left(0,-1,1\right)$与$\vec{b}=\left(0,k-2,k^2\right)$共线，则实数$k=$（　　）

A．0　　B．1　　C．$-1$或2　　D．$-2$或1

2．已知直线$l$的方向向量为$\left(1,2,3\right)$，平面$\alpha$的法向量为$\left(2,\ m,6\right)$，若$l\perp\alpha$，则$m=$（　　）

A．$-4$　　B．4　　C．$-10$　　D．10

3．如图，在三棱锥$O-ABC$中，$E$为$OA$的中点，点$F$在$BC$上，满足$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FC}$，记$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$分别为$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，则$\overrightarrow{EF}=$（　　）




A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　　B．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　C．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D．$\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

4．在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，棱长为2，点$M$为棱$DD'$上一点，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．设$x$、$y\in\mathbf{R}$，向量$\vec{a}=\left(x,1,1\right)$，$\vec{b}=\left(1,y,1\right)$，$\vec{c}=\left(3,-6,3\right)$且$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．3

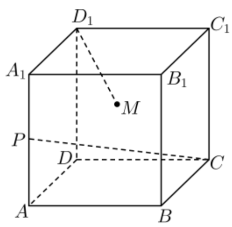
6．定义$\vec{a}\otimes\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$，若向量$\vec{a}=(1,-2,2)$，向量$\vec{b}$为单位向量，则$\vec{a}\otimes\vec{b}$的取值范围是（　　）

A．[6，12]　　B．[0，6]　　C．[-1，5]　　D．[0，12]

7．在四面体$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点$D$满足$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$E$为$AD$的中点，且$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．如图，已知正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，$P$是$AA_1$的中点，点$M$在侧面$AA_1B_1B$（含边界）内，若$D_1M\perp CP$.则△$BCM$面积的最小值为（　　）




A．8　　B．4　　C．$\frac{8\sqrt{3}}{5}$　　D．$\frac{8\sqrt{5}}{5}$

**二、多项选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）**

9．若向量$\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$构成空间的一个基底，则下列向量共面的是（　　）

A．$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}+2\vec{b}$　　B．$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{c}$，$\vec{b}+\vec{c}$

C．$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　　　D．$\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$

10．已知空间向量$\vec{a}=(1,-1,2)$，则下列说法正确的是（　　）

A．$|\vec{a}|=\sqrt{6}$

B．向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}=(-2,2,-4)$共线

C．向量$\vec{a}$关于$x$轴对称的向量为$(1,1,-2)$

D．向量$\vec{a}$关于$yOz$平面对称的向量为$(-1,1,-2)$

11．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=4,BC=BB_1=2$，$E$，$F$分别为棱$AB,A_1D_1$的中点，则下列结论中正确的是（　　）

A．$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}$　　　　B．$|\overrightarrow{EF}|=3$

C．$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC_1}=\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC}$　　　　D．$\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{EC_1}$

12．若正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，且$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AA_1}$，其中$m\in[0,1],n\in[0,1]$，则下列结论正确的是（　　）

A．当$m=\frac{1}{2}$时，三棱锥$P-BDB_1$的体积为定值

B．当$n=\frac{1}{2}$时，三棱锥$P-BDB_1$的体积为定值

C．当$m+n=1$时，$PA+PB$的最小值为$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

D．若$\angle PD_1B=\angle B_1D_1B$，点$P$的轨迹为一段圆弧

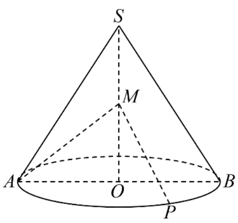
## 第II卷(非选择题　共90分)

**三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）**

13．已知$A(1,2,3)$，$B(4,5,9)$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，则$\overrightarrow{AC}$的坐标为______.

14．已知空间三点$A$(1，-1，-1)，$B$(-1，-2，2)，$C$(2，1，1)，则$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量的模是______.

15．如图，圆锥的轴截面$SAB$是边长为2的等边三角形，$O$为底面中心，$M$为$SO$中点，动点$P$在圆锥底面内(包括圆周).若$AM\perp MP$，则点$S$与$P$距离的最小值是__________.




16. 在空间直角坐标系O-xyz中，向量$\vec{a}=(1,-1,-2),\vec{b}=(1,1,3)$分别为异面直线$l_1,l_2$方向向量，则异面直线$l_1,l_2$所成角的余弦值为__________.

**四、解答题（本题共6个小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

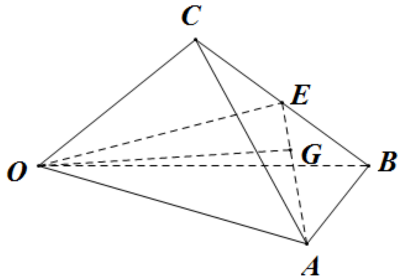
17．已知点$A(-2,0,2)$，$B(-1,1,2)$，$C(-3,0,4)$，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1)求 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角的余弦值.

(2)若向量 $k\vec{a}+\vec{b}$，$k\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，求 $k$ 的值.

(3)若向量 $\lambda\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 平行，求 $\lambda$ 的值.

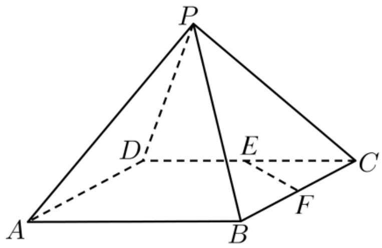
18．如图，在空间四边形 $OABC$ 中，已知 $E$ 是线段 $BC$ 的中点，$G$ 在 $AE$ 上，且 $AG=2GE$.




(1)试用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$；

(2)若 $OA=2$，$OB=3$，$OC=4$，$\angle AOC=\angle BOC=60^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$，求 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值.

19．如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱长为 $\sqrt{3}$，底面边长为 2．点 $E$，$F$ 分别 $CD$，$BC$ 中点．求证：




(1)$PA\perp EF$;

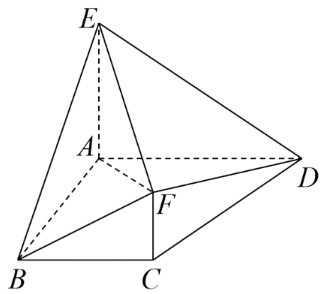
(2)平面 $PAB\perp$ 平面 $PCD$.

20．如图所示，在几何体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\,//\,BC$，$AB\perp AD$，$AE\perp$ 底面 $ABCD$，$AE\,//\,CF$，$AD=3$，$AB=BC=AE=2$，$CF=1$.

(1)求证：$BF\,//$ 平面 $ADE$;

(2)求直线 $BE$ 与直线 $DF$ 所成角的余弦值;

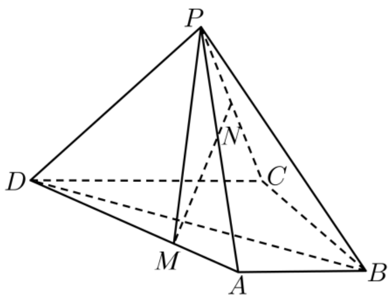
(3)求点 $D$ 到直线 $BF$ 的距离.



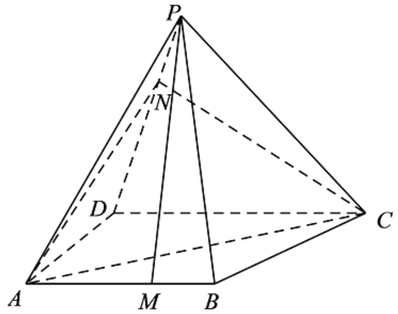

21．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB//CD$，$BC\perp CD$，$BC=CD=2AB=2$，$PB=PD=2$，$PC=\sqrt{2}$，$AD=3AM$，$N$ 为 $PC$ 中点.

(1)证明：$BD\perp PC$；

(2)求直线 $MN$ 与平面 $PBD$ 所成角的正弦值.



22. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知侧面 $PCD$ 为正三角形，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB \parallel CD$，$\angle ADC=90°$，$AB=AD=3$，$CD=4$，点 $M$，$N$ 分别在线段 $AB$ 和 $PD$ 上，且 $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{DN}{NP}=2$．




(1)求证：$PM //$ 平面 $ACN$；

(2)设二面角 $P-CD-A$ 大小为 $\theta$，若 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求直线 $AC$ 和平面 $PAB$ 所成角的正弦值

# 空间向量与立体几何章末检测卷（二）

## 第 I 卷(选择题　共 60 分)

**二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）**

12．若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，且 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AA_1}$，其中 $m\in[0,1],n\in[0,1]$，则下列结论正确的是（　　）

A．当 $m=\frac{1}{2}$ 时，三棱锥 $P-BDB_1$ 的体积为定值

B．当 $n=\frac{1}{2}$ 时，三棱锥 $P-BDB_1$ 的体积为定值

C．当 $m+n=1$ 时，$PA+PB$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

D．若 $\angle PD_1B=\angle B_1D_1B$，点 $P$ 的轨迹为一段圆弧

【解析】因为 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AA_1}$，其中 $m\in[0,1],n\in[0,1]$，

所以点 $P$ 在平面 $ADD_1A_1$ 内运动，

对于 A：取 $AD$ 中点 $E$、$A_1D_1$ 中点 $F$，连接 $EF$，

所以 $EF\ //AA_1\ //BB_1$，

因为 $EF\not\subset$ 平面 $BDB_1$，$BB_1\subset$ 平面 $BDB_1$，

所以 $EF//$ 平面 $BDB_1$，

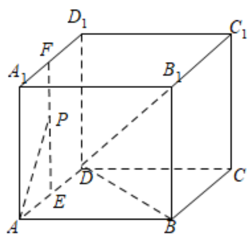
当 $m=\frac{1}{2}$ 时，则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AA_1}$，

所以点 $P$ 在线段 $EF$ 上运动，

因为 $EF//$ 平面 $BDB_1$，

所以无论点 $P$ 在 $EF$ 任何位置，$P$ 到平面 $BDB_1$ 的距离不变，即高不变，

所以三棱锥 $P-BDB_1$ 的体积为定值，故 A 正确；




对于 B：取 $AA_1$ 中点 $G$，$DD_1$ 中点 $H$，连接 $GH$，

当 $n=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，

所以点 $P$ 在 $GH$ 上运动，

假设 $GH // $ 平面 $BDB_1$，

又 $GA // BB_1$， $GA \not\subset$ 平面 $BDB_1$， $BB_1 \subset$ 平面 $BDB_1$，

所以 $GA //$ 平面 $BDB_1$，

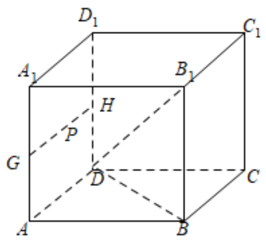
因为 $GA \cap GH = G, GH, GA \subset$ 平面 $GHDA$，

所以平面 $GHDA //$ 平面 $BDB_1$，与已知矛盾，故假设不成立，

所以 $GH$ 不平行平面 $BDB_1$，

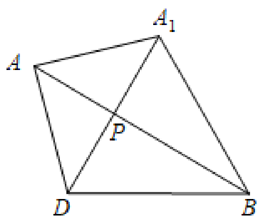
所以 $P$ 在 $GH$ 上运动时，$P$ 到平面 $BDB_1$ 的距离在变化，

所以三棱锥 $P-BDB_1$ 的体积不是定值，故 B 错误；




对于 C：连接 $A_1D$， $A_1B$， $BD$，当 $m+n=1$ 时，可得 $A_1$、$P$、$D$ 三点共线，

将 $\triangle AA_1D_1$ 沿 $A_1D$ 翻折至与平面 $A_1BD$ 共面，如下图所示




连接 $AB$，当 $P$ 为 $AB$ 与 $A_1D$ 交点时， $PA+PB$ 最小，即为 $AB$，

因为 $A_1B, A_1D, BD$ 均为面对角线，

所以 $A_1B = A_1D = BD=\sqrt{2}$，即 $\triangle A_1BD$ 为等边三角形，

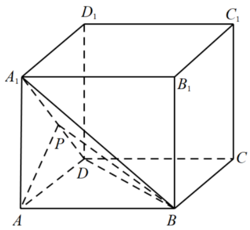
又 $\angle A_1AD=90°$， $A_1A = AD=1$，

所以 $\angle ADB = \angle AA_1B = 105°$， $\triangle ADB \cong \triangle AA_1B$，

所以 $\angle ABD = 30°$

在 $\triangle ADB$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB} = \dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$，

所以 $AB = \dfrac{1}{\sin 30°} \times \sin 105° = 2\left(\sin 45° \cos 60° + \cos 45° \sin 60°\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，故 C 正确；




对于 D：分别以 $DA$、$DC$、$DD_1$ 为 $x$，$y$，$z$ 轴正方向建系，如图所示，

则 $B(1,1,0), D_1(0,0,1)$，设 $P(x,0,z)$，

所以 $\overrightarrow{D_1P}=(x,0,z-1), \overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$，

所以 $\cos\angle PD_1B=\dfrac{\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{D_1B}}{\left|\overrightarrow{D_1P}\right|\left|\overrightarrow{D_1B}\right|}=\dfrac{x-z+1}{\sqrt{x^2+(z-1)^2}\cdot\sqrt{3}}$

因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $BB_1\perp B_1D_1$，

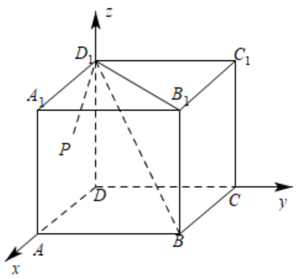
又 $B_1D_1=\sqrt{2}, BD_1=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle B_1D_1B=\dfrac{B_1D_1}{BD_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\dfrac{x-z+1}{\sqrt{x^2+(z-1)^2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，整理得 $x^2+z^2+2xz-2x-2z+1=0$，

所以 $(x+z-1)^2=0$，即 $x+z-1=0$，$x\in[0,1], z\in[0,1]$

所以 $P$ 点轨迹为线段，故 D 错误

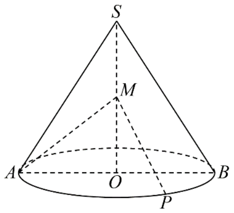



故选：AC

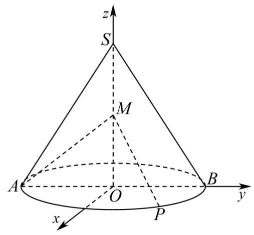
## 第II卷(非选择题　共 90 分)

**三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）**

15．如图，圆锥的轴截面 $SAB$ 是边长为 2 的等边三角形，$O$ 为底面中心，$M$ 为 $SO$ 中点，动点 $P$ 在圆锥底面内(包括圆周).若 $AM\perp MP$，则点 $S$ 与 $P$ 距离的最小值是____________.




【解析】如图，以 $O$ 为原点，$OB$ 为 $y$ 轴，$OS$ 为 $z$ 轴建立空间直角坐标系，




则 $A(0,-1,0)$， $B(0,1,0)$， $S(0,0,\sqrt{3})$， $M\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， 设 $P(x,y,0)$，

则 $\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{MP}=\left(x,y,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\because AM\perp MP$， $\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$， 解得 $y=\frac{3}{4}$，

$\therefore |SP|=\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-\sqrt{3})^2}$ 知，

当 $x=0$ 时， 点 S 与 $P$ 距离的最小， 其最小值为 $\frac{\sqrt{57}}{4}$.

故答案为： $\frac{\sqrt{57}}{4}$.

16. 在空间直角坐标系 $O$-$xyz$ 中，向量 $\vec{a}=(1,-1,-2),\vec{b}=(1,1,3)$ 分别为异面直线 $l_1,l_2$ 方向向量，则异面直线 $l_1,l_2$ 所成角的余弦值为__________.

【解析】因为 $\vec{a}=(1,-1,-2),\vec{b}=(1,1,3)$， 所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1-1-6}{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{1+1+3}}=-\frac{\sqrt{66}}{11}$.

因为异面直线 $l_1,l_2$ 所成角的范围为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$， 所以异面直线 $l_1,l_2$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{66}}{11}$.

故答案为： $\frac{\sqrt{66}}{11}$

**四、解答题（本题共 6 个小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

17． 已知点 $A(-2,0,2)$， $B(-1,1,2)$， $C(-3,0,4)$， 设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$， $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1)求 $\vec{a}$， $\vec{b}$ 夹角的余弦值.

(2)若向量 $k\vec{a}+\vec{b}$， $k\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直， 求 $k$ 的值.

(3)若向量 $\lambda\vec{a}-\vec{b}$， $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 平行， 求 $\lambda$ 的值.

【解析】(1) $\vec{a}=(1,1,0)$， $\vec{b}=(-1,0,2)$，

故 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{-1+0+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)由（1）可得

$k\vec{a}+\vec{b}=(k-1,k,2)$， $k\vec{a}-2\vec{b}=(k+2,k,-4)$，

因为向量 $k\vec{a}+\vec{b}$， $k\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，故 $(k+2)(k-1)+k^2-8=0$，

整理得到： $2k^2+k-10=0$，故 $k=2$ 或 $k=-\dfrac{5}{2}$.

(3)由（1）可得 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，故 $\lambda\vec{a}-\vec{b}$， $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 均不为零向量，

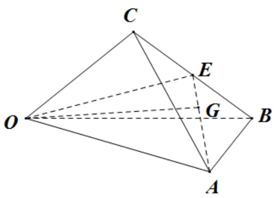
若向量 $\lambda\vec{a}-\vec{b}$， $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 平行，则存在非零常数 $t$， 使得 $\lambda\vec{a}-\vec{b}=t(\vec{a}-\lambda\vec{b})$，

整理得到： $(\lambda-t)\vec{a}+(t\lambda-1)\vec{b}=\vec{0}$，

因为 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，故 $\begin{cases}\lambda-t=0\\ t\lambda-1=0\end{cases}$， 故 $\lambda=t=-1$ 或 $\lambda=t=1$，

故 $\lambda=\pm1$.

18．如图，在空间四边形 $OABC$ 中，已知 $E$ 是线段 $BC$ 的中点， $G$ 在 $AE$ 上，且 $AG=2GE$ .




(1)试用 $\overrightarrow{OA}$， $\overrightarrow{OB}$， $\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$；

(2)若 $OA=2$， $OB=3$， $OC=4$， $\angle AOC=\angle BOC=60^\circ$， $\angle AOB=90^\circ$，求 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值.

【解析】(1) $\because \overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GE}$，

$\therefore \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OG})$，

$\therefore 3\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}$ 又 $2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

(2)由（1）可得知 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

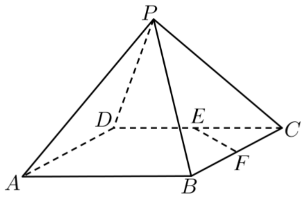
$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}^2+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=-\dfrac{1}{3}\times2^2+\dfrac{1}{3}\times3^2+\dfrac{1}{3}\times3\times4\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\times4\times2\times\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{4}{3}+3+2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{7}{3}$

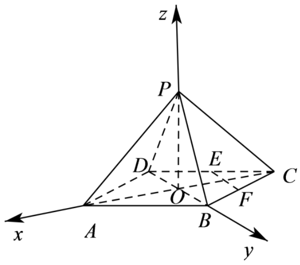
19．如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱长为$\sqrt{3}$，底面边长为2．点 $E$，$F$ 分别 $CD$，$BC$ 中点．求证：




(1)$PA\perp EF$；

(2)平面 $PAB\perp$ 平面 $PCD$．

【解析】(1)连接 $AC$，$BD$ 交于点 $O$，连接 $PO$，由正四棱锥性质 $OA$，$OB$，$OP$ 两两互相垂直，以 $OA$，$OB$，$OP$ 分别为 $x$，$y$，$z$ 轴建系如图．




易得 $OA=\sqrt{2}$，$OP=\sqrt{PA^2-OA^2}=1$，$\therefore A\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$P\left(0,0,1\right)$，$B\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$C\left(-\sqrt{2},0,0\right)$，

$D\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，$E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{PA}=\left(\sqrt{2},0,-1\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$\because \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，即 $PA\perp EF$；

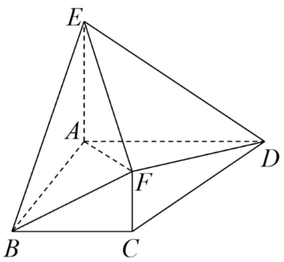
(2)设平面 $PAB$，平面 $PCD$ 法向量分别为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=\sqrt{2}x_1-z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}y_1-z_1=0\end{cases}$，取 $z_1=\sqrt{2}$，则 $x_1=y_1=1$，$\vec{m}=(1,1,\sqrt{2})$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=\sqrt{2}x_2+z_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\sqrt{2}y_2+z_2=0\end{cases}$，取 $z_2=-\sqrt{2}$，则 $x_1=y_1=1$，$\vec{n}=(1,1,-\sqrt{2})$，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=1+1-2=0$，$\therefore \vec{m}\perp\vec{n}$，$\therefore$平面 $PAB\perp$ 平面 $PCD$.

20．如图所示，在几何体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD/\!/BC$，$AB\perp AD$，$AE\perp$ 底面 $ABCD$，$AE/\!/CF$，$AD$=3，$AB$=$BC$=$AE$=2，$CF$=1．



(1)求证：$BF//$平面 $ADE$；

(2)求直线 $BE$ 与直线 $DF$ 所成角的余弦值；

(3)求点 $D$ 到直线 $BF$ 的距离.

【解析】(1)证明：∵$AE//CF$，$AE\not\subset$平面 $BFC$，$CF\subset$平面 $BFC$，

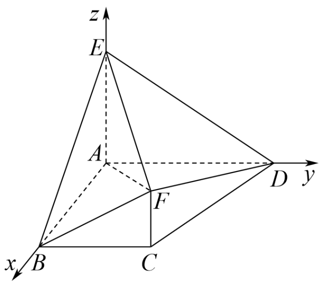
∴$AE//$平面 $BCF$，

∵$AD//BC$，同理可得 $AD//$平面 $BFC$，

又 $AD\cap AE=A$，∴平面 $BCF//$平面 $ADE$，

∵$BF\subset$平面 $BFC$，∴$BF//$平面 $ADE$；

(2)以 $A$ 为坐标原点，$AB$、$AD$、$AE$ 所在直线分别为 $x$，$y$，$z$ 轴，建立空间直角坐标系，




则 $B$（2，0，0），$C$（2，2，0），$D$（0，3，0），$E$（0，0，2），$F$（2，2，1），

则 $\overrightarrow{BE}$=（-2，0，2），$\overrightarrow{DF}$=（2，-1，1），$\cos\left\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DF}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{DF}\right|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

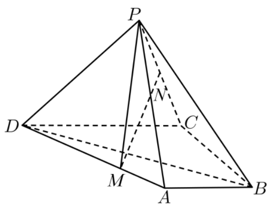
∴直线 $BE$ 与直线 $DF$ 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(3)根据（2）可知 $\overrightarrow{BF}$=（0，2，1），$\overrightarrow{DF}$=（2，-1，1），

$\cos\left\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DF}\right\rangle=\left|\dfrac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DF}}{\left|\overrightarrow{BF}\right|\left|\overrightarrow{DF}\right|}\right|=\left|\dfrac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$ $\therefore\sin\left\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DF}\right\rangle=\sqrt{1-\cos^2\left\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DF}\right\rangle}=\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{30}}$

$\left|\overrightarrow{DF}\right|\sin\left\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DF}\right\rangle=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{145}}{5}$

21．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB//CD$，$BC\perp CD$，$BC=CD=2AB=2$，$PB=PD=2$，$PC=\sqrt{2}$，$AD=3AM$，$N$ 为 $PC$ 中点.




(1)证明：$BD\perp PC$；

(2)求直线 $MN$ 与平面 $PBD$ 所成角的正弦值.

【解析】(1)连接 $CM$ 交 $BD$ 于点 $O$，连接 $PO$，

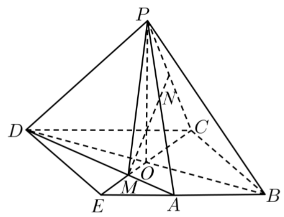
因为 $AD=3AM$，延长 $CM$ 交 $AB$ 于 $E$，

由 $AB//CD$，则 $\frac{AE}{CD}=\frac{AM}{MD}=\frac{1}{2}$，可得 $AE=1$，

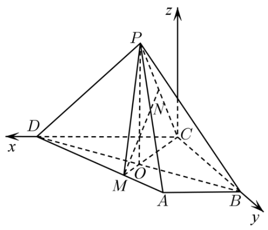
四边形 $EBCD$ 为正方形，则 $BD\perp CM$，且 $O$ 为 $BD$ 中点，

由 $PB=PD=2$，则 $BD\perp PO$，且 $CM\cap PO=O$，$CM,PO\subset$ 面 $PCM$，

所以 $BD\perp$ 面 $PCM$，$PC\subset$ 平面 $PCM$，则 $BD\perp PC$；




(2)以 $C$ 为原点，$CD$ 为 $x$ 轴，$CB$ 为 $y$ 轴建立如下图示的空间直角坐标系，




则 $M\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},0\right)$，$B(0,2,0)$，$D(2,0,0)$，$C(0,0,0)$，设 $P(x,y,z)$，

由 $BD\perp$ 面 $PCM$，$BD\subset$ 面 $ABCD$，所以面 $ABCD\perp$ 面 $PCM$，

由 $PB=PD=2$，则 $PO=\sqrt{2}$，由 $BC=CD=2AB=2$ 且 $BC\perp CD$，则 $OC=\sqrt{2}$，

又 $PC=\sqrt{2}$，故△ $POC$ 为等边三角形，且面 $ABCD\perp$ 面 $POC$，

所以 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则 $N\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，

综上，$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{13}{12},-\frac{13}{12},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{PD}=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})$，

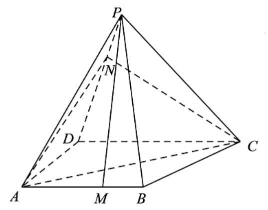
设平面 $PBD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=2x-2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{6}}{2}z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{6}$，解得

$\vec{n}=(\sqrt{6},\sqrt{6},2)$，

所以 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{5\sqrt{6}}{14\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

22．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知侧面 $PCD$ 为正三角形，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB\parallel CD$，

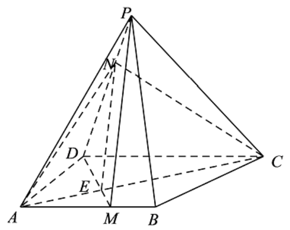
$\angle ADC=90^\circ$，$AB=AD=3$，$CD=4$，点 $M$，$N$ 分别在线段 $AB$ 和 $PD$ 上，且 $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NP}=2$.



(1)求证：$PM//$平面$ACN$；

(2)设二面角$P-CD-A$大小为$\theta$，若$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求直线$AC$和平面$PAB$所成角的正弦值.

【解析】(1)连接$MD$，交$AC$于点$E$，连接$NE$；



$\because AM=2MB$，$\therefore AM=\dfrac{2}{3}AB=2$，$\because AB//CD$，$\therefore \dfrac{AM}{CD}=\dfrac{ME}{DE}=\dfrac{1}{2}$，

又$DN=2NP$，$\therefore \dfrac{ME}{DE}=\dfrac{PN}{DN}$，$\therefore NE//PM$，

又$NE\subset$平面$ACN$，$PM\not\subset$平面$ACN$，$\therefore PM//$平面$ACN$.

(2)取$CD$中点$F$，连接$PF,MF$；作$PO\perp MF$，垂足为$O$；

$\because\triangle PCD$为正三角形，$\therefore PF\perp CD$；

$\because AM=DF=2$，$AM//DF$，$\therefore$四边形$AMFD$为平行四边形，$\therefore AD//FM$，

又$\angle ADC=90^\circ$，$\therefore CD\perp FM$，又$PF\cap FM=F$，$PF,FM\subset$平面$PFM$，

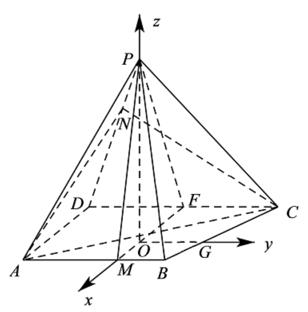
$\therefore CD\perp$平面$PFM$；

$\because PO\subset$平面$PFM$，$\therefore CD\perp PO$，

又$PO\perp FM$，$CD\cap FM=F$，$CD,FM\subset$平面$ABCD$，$\therefore PO\perp$平面$ABCD$；

作$OG//CD$，交$BC$于点$G$，则$OG\perp FM$，

以$O$为坐标原点，$\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OP}$正方向为$x,y,z$轴，可建立如下图所示空间直角坐标系，



$\because PF\perp CD$，$MF\perp CD$，$\therefore\angle PFO$即为二面角$P-CD-A$的平面角，

又 $PF=2\sqrt{3}$， $\cos\angle PFO=\frac{\sqrt{3}}{3}$， $\therefore OF=PF\cos\angle PFO=2$， $\therefore OP=2\sqrt{2}$；

则 $P\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$， $C\left(-2,2,0\right)$， $A\left(1,-2,0\right)$， $B\left(1,1,0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\left(-3,4,0\right)$， $\overrightarrow{AP}=\left(-1,2,2\sqrt{2}\right)$， $\overrightarrow{BP}=\left(-1,-1,2\sqrt{2}\right)$，

设平面 $PAB$ 的法向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=-x+2y+2\sqrt{2}z=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}=-x-y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$， 令 $z=1$，解得： $x=2\sqrt{2}$， $y=0$， $\therefore \vec{n}=\left(2\sqrt{2},0,1\right)$；

设直线 $AC$ 和平面 $PAB$ 所成角为 $\theta$， $\therefore \sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AC},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{6\sqrt{2}}{5\times 3}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$， 故直线

$AC$ 和平面 $PAB$ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$