第 5 章　三角函数　章末测试(基础)

一、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，共 8 题 40 分)

1.(2021·江西上饶·高一月考(理))已知扇形面积为$\frac{3\pi}{8}$,半径是 1,则扇形的圆心角是(　　)

A. $\frac{3\pi}{16}$　　B. $\frac{3\pi}{8}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

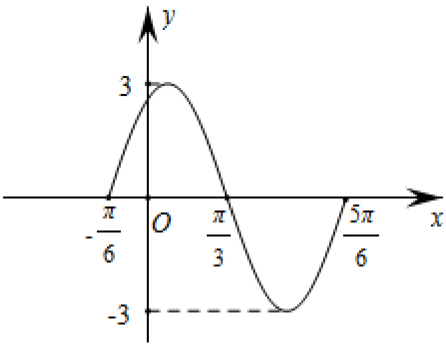
2. (2021·浙江高一期末)如果角α的终边过点$P(2\sin 30°,-2\cos 30°)$，则$\sin\alpha$的值等于(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. (2021·上海)若函数$y=3cos(2x+\varphi)$的图像关于点$(\frac{4\pi}{3},0)$中心对称，则$|\varphi|$的最小值为(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. (2021·天津市南开区南大奥宇培训学校高一月考)如图是函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图象，则其解析式是(　　)



A. $f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

5.(2021·福建福州市·福州四中高一期末)已知函数$f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,将 $f(x)$的图象经过下列哪种变换可以与$g(x)$的图象重合

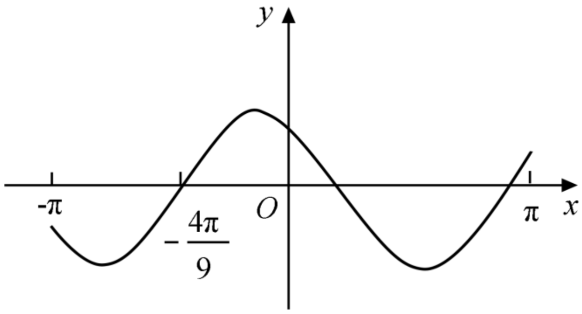
A．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再把各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$

B．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，再把各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$

C．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再把各点的横坐标伸长到原来的 2 倍

D．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，再把各点的横坐标伸长到原来的 2 倍

6．(2021·广东高一期中)设函数$f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$在$[-\pi,\pi]$的图像大致如下图，则$f(x)$的最小正周期为(　　)



A．$\frac{10\pi}{9}$　　B．$\frac{7\pi}{6}$

C．$\frac{4\pi}{3}$　　D．$\frac{3\pi}{2}$

7．(2021·江苏省丹阳高级中学高一月考)已知$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\sin2\alpha=\cos2\alpha+1$，则$\sin\alpha=$

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8．(2021·咸丰春晖学校高一月考)已知函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{2})(x\in R)$下列结论错误的是

A．函数$f(x)$的最小正周期为π

B．函数$f(x)$是偶函数

C．函数$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{4}$对称

D．函数$f(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上是增函数

二、多选题(每题至少有2个选项为正确答案，每题5分，4题共20分)

9．(2021·滨海县八滩中学)下列结论正确的是(　　)

A．$-\dfrac{7\pi}{6}$是第三象限角

B．若圆心角为$\dfrac{\pi}{3}$的扇形的弧长为π，则该扇形面积为$\dfrac{3\pi}{2}$

C．若角α的终边过点$P\left(-3,4\right)$，则$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$

D．若角α为锐角，则角2α为钝角

10．(2021·重庆北碚·西南大学附中高一月考)要得到$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)$的图象，可以将函数$y=\sin x$的图象上所有的点(　　)

A．向右平行移动$\dfrac{\pi}{5}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍

B．向右平行移动$\dfrac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍

C．横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍，再把所得各点向右平行移动$\dfrac{\pi}{5}$个单位长度

D．横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍，再把所得各点向右平行移动$\dfrac{\pi}{10}$个单位长度

11．(2021·湖南益阳市箴言中学高一期末)下列各式中，值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的是(　　)

A．$2\sin15°\cos15°$　　　　B．$\cos^2 15°-\sin^2 15°$

C．$1-2\sin^2 15°$　　　　D．$\sin^2 15°+\cos^2 15°$

12．(2021·全国高一单元测试)定义：角θ与φ都是任意角，若满足$\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，则称$\theta$与$\varphi$“广义互余”．已知$\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{4}$，则下列角$\beta$中，可能与角$\alpha$“广义互余”的是(　　)

A．$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　B．$\cos(\pi+\beta)=\dfrac{1}{4}$　　C．$\tan\beta=\sqrt{15}$　　D．$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

三、填空题(每题 5 分，共 20 分)

13．(2021·全国高一课时练习)已知$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则$\cos\alpha=$________，$\tan 2\alpha=$________.

14．(2021·上海高一期中)函数$f\left(x\right)=\sin 2x+\cos 2x$的最小正周期是______.

15．(2021·上海高一期中)已知$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，则$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=$______.

16．(2021·广东揭阳华侨高中)若$f\left(x\right)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}$，则$f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$上的最大值为______

四、解答题(17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分)

17．(2021·上海高一期中)已知$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$.

(1)求$\tan\alpha$的值；

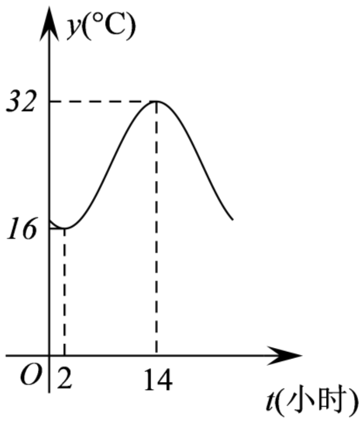
(2)求$\dfrac{\sin\left(2\alpha+2\pi\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\pi-2\alpha\right)+\sin^2\alpha}$的值.

18．(2021·浙江)已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的值域；

(2)求函数 $f(x)$ 单调递增区间.

19．(2021·全国高一课时练习)建设生态文明，是关系人民福祉，关乎民族未来的长远大计.某市通宵营业的大型商场，为响应节能减排的号召，在气温超过28℃时，才开放中央空调降温，否则关闭中央空调.如图是该市夏季一天的气温(单位：℃)随时间($0\le t\le 24$，单位：小时)的大致变化曲线，若该曲线近似的满足函数 $y=A\sin\left(\omega t+\varphi\right)+b\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\pi\right)$ 关系.



(1)求函数 $y=f\left(x\right)$ 的表达式；

(2)请根据(1)的结论，判断该商场的中央空调应在本天内何时开启？何时关闭？

20．(2021·佛山市南海区桂华中学高一月考)已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\left(\sin x+\cos x\right)-a$ 的图象经

过点$\left(\frac{\pi}{2},1\right), a\in R$.

(1)求a的值，并求函数$f\left(x\right)$的单调递增区间；

(2)若当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，不等式$f(x)\geq m$恒成立，求实数$m$的取值范围.

21．(2021·上海金山·华东师大附属枫泾中学高一期中)已知函数

$f\left(x\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$.

(1) 求$f\left(x\right)$的最小正周期和单调递增区间；

(2) 若关于x的方程$f\left(x\right)-m=2$在$\mathrm{x}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上有解, 求实数$m$的取值范围.

22．(2021·浙江)已知$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1)求$f(x)$的单调递增区间；

(2)若$af\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\geq 2$对任意的$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$恒成立，求$a$的取值范围.

第5章　三角函数　章末测试(提升)

一、单选题(每题5分，每题只有一个选项为正确答案，共8题40分)

1．(2021·上海高一专题练习)若$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)$等于(　　).

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{7}{9}$

2.(2021·河北石家庄二十三中高一月考)若$3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)=0$，则$\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$的值是(　　).

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

3．(2021·全国高一课时练习)若$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$0<\alpha<\pi$，则$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$(　　).

A．$\frac{-8-\sqrt{17}}{9}$　　B．$\frac{-8\pm\sqrt{17}}{9}$　　C．$\frac{-8+\sqrt{17}}{9}$　　D．$\frac{8+\sqrt{17}}{9}$

4．(2021·江西高安中学(文))已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$，则(　　)

A．$f(x)$的最大值为2　　B．$f(x)$的最小正周期为π

C．$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$为奇函数　　D．$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{2}$对称

5．(2021·浙江高一期末)设$a=2^{0.5}$，$b=\log_4 3$，$c=\cos\frac{3\pi}{4}$，则(　　)

A．$c>a>b$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$a>c>b$

6．(2021·江苏南通市·海安高级中学高三月考)已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$($\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)，满足$f(0)=\sqrt{3}$，将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到函数$g(x)$的图象，若$g(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$对称，则$\omega$的取值可以为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．(2021·浙江学军中学高一期中)《九章算术》中《方田》章有弧田面积计算问题，计算

术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一. 其大意是，弧田面积计算公式为：弧田面积$=\frac{1}{2}$(弦乘矢+矢乘矢)，弧田是由圆弧(简称为弧田的弧)和以圆弧的端点为端点的线段(简称（弧田的弦)围成的平面图形，公式中“弦”指的是弧田的弦长，“矢”等于弧田的弧所在圆的半径与圆心到弧田的弦的距离之差. 现有一弧田，其弦长AB等于$2\sqrt{3}$，其弧所在圆为圆O，若用上述弧田面积计算公式计算得该弧田的面积为$\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$，则$\angle AOB=$(　　)

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

8．(2021•全国高三专题练习(理)(文))关于函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数　　②$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$单调递增

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有4个零点　　④$f(x)$的最大值为2

其中所有正确结论的编号是

A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

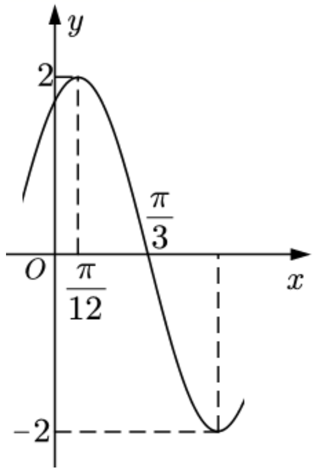
二．多选题(每题至少有2个选项为正确答案，每题5分，4题共20分)

9．(2021•湖南雅礼中学高二开学考试)若将函数$f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{12})$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，得到函数$g(x)$的图象，则下列说法正确的是(　　)

A．$g(x)$的最小正周期为π　　B．$g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减

C．$x=\frac{\pi}{12}$是函数$g(x)$的对称轴　　D．$g(x)$在$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$上的最小值为$-\frac{1}{2}$

10．(2021•池州市江南中学高一期末)已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$部分图象如图所示，下列说法不正确是(　　)



A． $f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称

B． $f\left(x\right)$的图象关于点$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$对称

C．将函数$y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到函数$f\left(x\right)$的图象

D．若方程$f\left(x\right)=m$在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上有两个不相等的实数根，则$m$的取值范围是$\left(-2,-\sqrt{3}\right]$

11．(2021·长沙市明德中学高一开学考试)已知函数

$f\left(x\right)=A\sin wx-\cos wx(A>0,w>0),g\left(x\right)=2\sin x$，若$\forall x_1\in R$，$\exists x_2\in[0,\frac{\pi}{4}]$，使得

$f(x_1)\leq g(x_2)$成立，且$f\left(x\right)$在区间$[0,\frac{3\pi}{4}]$上的值域为$[-1,\sqrt{2}]$，则实数w的取值可能是(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．1　　D．$\frac{4}{3}$

12．(2021·武汉市钢城第四中学高一期中)关于函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$的叙述正确的是(　　)

A．$f(x)$是偶函数

B．$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递增

C．$f(x)$在[－π，π]有4个零点

D．$f(x)$的最大值为2

三、填空题(每题5分，共20分)

13．（2021·全国高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，其中$x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},a\right]$．若$f\left(x\right)$的值域是$\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，则实数$a$的最小值为______，最大值为______．

14．（2021·上海高一专题练习）若函数$y=2\sin x+\sqrt{a}\cos x+4$的最小值为1，则实数$a=$__________．

15．（2021·长沙市湖南师大第二附属中学有限公司高三开学考试）已知$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，则$\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}=$______．

16．(2021·全国高三专题练习(理)(文))设函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\omega>0\right)$，若$f\left(x\right)\le f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$对任意的实数$x$都成立，则$\omega$的最小值为__________．

四、解答题(17题10分，其余每题12分，共70分)

17．（2021·北京清华附中高二期末）已知函数$f\left(x\right)=2\cos x\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)+\sqrt{3}$．

(1)求$f\left(x\right)$的最小正周期和$f\left(x\right)$的单调递减区间；

(2)当$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，求函数$f\left(x\right)$的最小值及取得最小值时$x$的值.

18．（2021·全国高一课时练习）(1)已知$\cos\theta=-\dfrac{3}{5},\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，求$\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2$的值

(2)已知$\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{5}$，求$\sin\alpha$的值

(3) 已知 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{5}{9}$，求 $\sin 2\theta$ 的值；

(4) 已知 $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值.

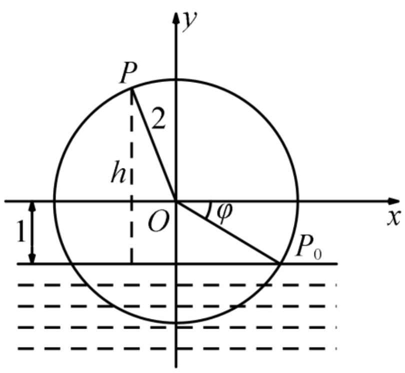
19．(2021·云南省下关第一中学高一月考) 已知函数 $f(x)=\cos x\left(2\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-\sin^2 x$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间和最小正周期；

(Ⅱ) 若当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geq m$ ______，求实数 m 的取值范围.

请选择①和②中的一个条件，补全问题(Ⅱ)，并求解．其中，①有解；②恒成立.

20．(2021·全国高一课时练习) 一半径为 2 米的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面 1 米；已知水轮按逆时针做匀速转动，每 3 秒转一圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时(图中点 P_0)开始计算时间.



(1) 以水轮所在平面与水面的交线为x轴，以过点O且与水面垂直的直线为y轴，建立如图所示的直角坐标系，试将点P距离水面的高度h（单位：米）表示为时间t（单位：秒）的函数；

(2) 在水轮转动的任意一圈内，有多长时间点P距水面的高度超过2米？

21．(2021·六盘山高级中学) 已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象在$y$轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为$\left(x_0,2\right)$和$\left(x_0+\pi,-2\right)$. 若将函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度后得到的图象关于原点对称.

(1) 求函数$f\left(x\right)$的解析式；

(2) 若函数 $y=f\left(kx\right)+1\left(k>0\right)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，方程 $f\left(kx\right)+1=m$ 恰有两个不同的解，求实数 m 的取值范围.

22．(2021·张家口市第一中学高一月考) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\cdot\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)$，其中 $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求使得 $f(x)\geq\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围；

(2) 若函数 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，且对任意的 $x_1,x_2\in[0,t]$，当 $x_1<x_2$ 时，均有 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)$ 成立，求正实数 t 的最大值.

第 5 章　三角函数　章末测试(基础)

一、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，共 8 题 40 分)

1.(2021 •江西上饶 •高一月考(理))已知扇形面积为$\frac{3\pi}{8}$，半径是 1，则扇形的圆心角是(　　)

A．$\frac{3\pi}{16}$　　B．$\frac{3\pi}{8}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】设扇形的圆心角为α，

则$S=\frac{1}{2}\alpha r^2$，即$\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\alpha\times1^2$，解得$\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

故选：C.

2．(2021 • 浙江高一期末)如果角α的终边过点$P(2\sin30°,-2\cos30°)$，则$\sin\alpha$的值等于(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【解析】由题意得$P\left(1,-\sqrt{3}\right)$，它与原点的距离$r=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$，

所以$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C.

3．(2021 • 上海)若函数$y=3cos(2x+\varphi)$的图像关于点$(\frac{4\pi}{3},0)$中心对称，则$|\varphi|$的最小值为(　　)

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】因为函数$y=3cos(2x+\varphi)$的图像关于点$(\frac{4\pi}{3},0)$中心对称，

所以$\cos(\frac{8\pi}{3}+\varphi)=0$，

所以$\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

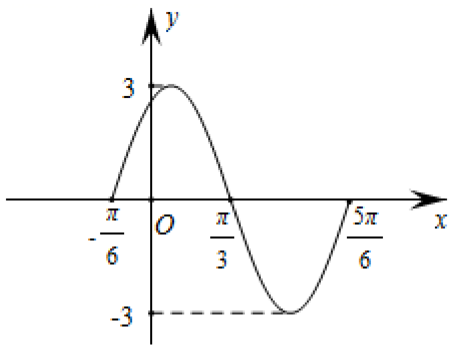
解得$\varphi=k\pi-\frac{13\pi}{6},k\in Z$，

所以$|\varphi|_{\min}=\frac{\pi}{6}$

故选：C

4．(2021·天津市南开区南大奥宇培训学校高一月考)如图是函数

$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图象，则其解析式是(　　)



A．$f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

B．$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C．$f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

D．$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

【答案】B

【解析】由函数的图象可知：A=3，$T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

所以$f(x)=3\sin(2x+\varphi)$，

又点$\left(\frac{\pi}{12},3\right)$在图象上，

所以$3\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=3$，

即$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

即$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$

所以$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

故选：B

5.(2021·福建福州市·福州四中高一期末)已知函数$f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，将 $f(x)$

的图象经过下列哪种变换可以与 $g(x)$ 的图象重合

A．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再把各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

B．向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，再把各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

C．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再把各点的横坐标伸长到原来的 2 倍

D．向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，再把各点的横坐标伸长到原来的 2 倍

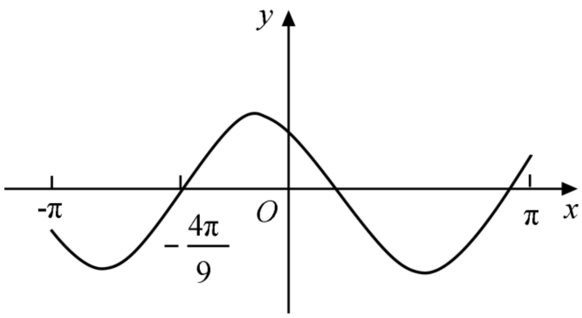
【答案】A

【解析】先将 $y=\sin x$ 的图像先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像，

再沿 x 轴将横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像.

故选：A.

6．(2021·广东高一期中)设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为(　　)



A．$\frac{10\pi}{9}$

B．$\frac{7\pi}{6}$

C．$\frac{4\pi}{3}$

D．$\frac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】由图可得：函数图象过点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$，

将它代入函数 $f(x)$ 可得：$\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$

又 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象与 x 轴负半轴的第一个交点，

所以$-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，解得：$\omega=\frac{3}{2}$

所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$

故选：C

7．(2021·江苏省丹阳高级中学高一月考)已知$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，2sin2α=cos2α+1，则sin α=

A．$\frac{1}{5}$

B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】$\because 2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，$\therefore 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cos^2\alpha$.$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\cos\alpha>0$.

$\sin\alpha>0$, $\therefore$ $2\sin\alpha=\cos\alpha$，又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\therefore 5\sin^2\alpha=1$, $\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，又$\sin\alpha>0$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故选B.

8．(2021·咸丰春晖学校高一月考)已知函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{2})(x\in R)$下列结论错误的是

A．函数$f(x)$的最小正周期为π

B．函数$f(x)$是偶函数

C．函数$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称

D．函数$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是增函数

【答案】C

【解析】原函数利用诱导公式化简为：$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$，此函数为最小正周期为$\pi$的偶函数，所以A,B正确，函数的对称轴由：$2x=k\pi(k\in Z)$得到：$x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，显然，无论$k$取任何整数，$x\neq\frac{\pi}{4}$，所以C错误，答案为C.

二、多选题(每题至少有2个选项为正确答案，每题5分，4题共20分)

9．(2021·滨海县八滩中学)下列结论正确的是(　　)

A．$-\frac{7\pi}{6}$是第三象限角

B．若圆心角为$\frac{\pi}{3}$的扇形的弧长为π，则该扇形面积为$\frac{3\pi}{2}$

C．若角α的终边过点$P\left(-3,4\right)$，则$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

D．若角α为锐角，则角2α为钝角

【答案】BC

【解析】对于 A 选项，$\because -\frac{7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\pi$且$\frac{5\pi}{6}$为第二象限角，故$-\frac{7\pi}{6}$为第二象限角，A 错；

对于 B 选项，扇形的半径为$r=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$，因此，该扇形的面积为$S=\frac{1}{2}\times\pi\times3=\frac{3\pi}{2}$，B 对；

对于 C 选项，由三角函数的定义可得$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{3}{5}$，C 对；

对于 D 选项，取$\alpha=\frac{\pi}{6}$，则角α为锐角，但$2\alpha=\frac{\pi}{3}$，即角2α为锐角，D 错.

故选：BC.

10．(2021•重庆北碚•西南大学附中高一月考)要得到$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$的图象，可以将函数$y$=sin$x$的图象上所有的点(　　)

A．向右平行移动$\frac{\pi}{5}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍

B．向右平行移动$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍

C．横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，再把所得各点向右平行移动$\frac{\pi}{5}$个单位长度

D．横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，再把所得各点向右平行移动$\frac{\pi}{10}$个单位长度

【答案】AD

【解析】将函数 y=sin$x$ 的图象上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{5}$个单位长度得到 y=sin(x−$\frac{\pi}{5}$)，

再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍得到 y=sin(2x−$\frac{\pi}{5}$).

也可以将函数 y=sin$x$ 的图象上所有的点横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍得到 y=sin2x，

再把所得各点向右平行移动$\frac{\pi}{10}$个单位长度得到 y=sin2(x−$\frac{\pi}{10}$)=sin(2x−$\frac{\pi}{5}$).

故选：AD.

11．(2021•湖南益阳市箴言中学高一期末)下列各式中，值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的是(　　)

A．$2\sin15°\cos15°$　　　　B．$\cos^2 15°-\sin^2 15°$

C．$1-2\sin^2 15°$　　　　　　　　　　D．$\sin^2 15°+\cos^2 15°$

【答案】BC

【解析】对 A，$2\sin 15°\cos 15°=\sin 30°=\frac{1}{2}$，故 A 错误；

对 B，$\cos^2 15°-\sin^2 15°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 B 正确；

对 C，$1-2\sin^2 15°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 C 正确；

对 D，$\sin^2 15°+\cos^2 15°=1$，故 D 错误；

故选：BC.

12．(2021·全国高一单元测试)定义：角θ与φ都是任意角，若满足$\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$，则称$\theta$与$\varphi$“广义互余”．已知$\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{4}$，则下列角$\beta$中，可能与角$\alpha$“广义互余”的是(　　)

A．$\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B．$\cos(\pi+\beta)=\frac{1}{4}$　　C．$\tan\beta=\sqrt{15}$　　D．$\tan\beta=\frac{\sqrt{15}}{5}$

【答案】AC

【解析】$\because \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{4}$，

若$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

A 中，$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，

故 A 符合条件；

B 中，$\cos(\pi+\beta)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，

故 B 不符合条件；

C 中，$\tan\beta=\sqrt{15}$，即$\sin\beta=\sqrt{15}\cos\beta$，

又$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，所以$\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，

故 C 符合条件；

D 中，$\tan\beta=\frac{\sqrt{15}}{5}$，即$\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{5}\cos\beta$，

又$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，所以$\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$，

故 D 不符合条件.

故选：AC.

三、填空题(每题 5 分，共 20 分)

13．(2021 • 全国高一课时练习)已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\cos\alpha=$________，$\tan2\alpha=$________.

【答案】$-\frac{3}{5}$　$\frac{24}{7}$

【解析】由已知得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$，$\tan2\alpha=\frac{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{24}{7}$.

故答案为：$-\frac{3}{5}$；$\frac{24}{7}$.

14．(2021 • 上海高一期中)函数 $f(x)=\sin2x+\cos2x$ 的最小正周期是______.

【答案】π

【解析】函数 $f(x)=\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

故答案为：π

15．(2021 • 上海高一期中)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=$______.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】因为 $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)=\frac{1}{4}$，则 $\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{6}-\alpha))=\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

16．(2021 • 广东揭阳华侨高中)若 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最大值为______

【答案】1

【解析】由题意，函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{1}{2}=\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{3}$时，函数$f\left(x\right)$取得最大值，最大值为$f\left(x\right)_{\max}=1$．

故答案为：1．

四、解答题(17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分)

17．(2021·上海高一期中)已知$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$．

(1)求$\tan\alpha$的值；

(2)求$\frac{\sin\left(2\alpha+2\pi\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\pi-2\alpha\right)+\sin^2\alpha}$的值．

【答案】(1)$-\frac{1}{3}$；(2)$-\frac{15}{19}$．

【解析】(1)$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，解得$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$；

(2)$\frac{\sin(2\alpha+2\pi)-\sin^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{1-\cos(\pi-2\alpha)+\sin^2\alpha}\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin^2\alpha}$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{2+\tan^2\alpha}=-\frac{15}{19}$．

18．(2021·浙江)已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x$．

(1)求函数$f(x)$的值域；

(2)求函数$f(x)$单调递增区间.

【答案】(1) $[-1,3]$，(2) $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$

【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+1$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$

(1)因为$-1\le\sin(2x+\frac{\pi}{6})\le 1$，

所以$-1\le 2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1\le 3$

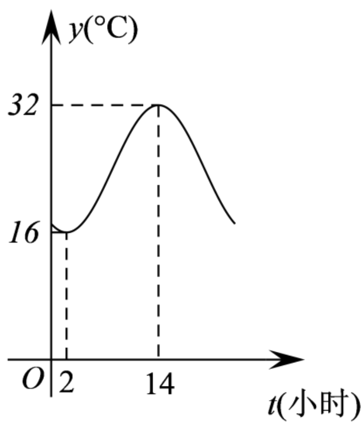
所以$f(x)$的值域为$[-1,3]$；

(2)由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，得

$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$

19．(2021·全国高一课时练习)建设生态文明，是关系人民福祉，关乎民族未来的长远大计.某市通宵营业的大型商场，为响应节能减排的号召，在气温超过28℃时，才开放中央空调降温，否则关闭中央空调. 如图是该市夏季一天的气温(单位：℃)随时间($0\le t\le 24$，单位：小时)的大致变化曲线，若该曲线近似的满足函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi\right)$ 关系.



(1)求函数 $y=f(x)$ 的表达式;

(2)请根据(1)的结论，判断该商场的中央空调应在本天内何时开启？何时关闭？

【答案】(1) $f(t)=24+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2}{3}\pi\right)(0\le t\le 24)$ (2)上午 10 时开启，下午 18 时关闭.

【解析】(1)由图知，$T=2(14-2)=24$，

所以 $\frac{2\pi}{\omega}=24$，得 $\omega=\frac{\pi}{12}$.

由图知，$b=\frac{16+32}{2}=24$，$A=\frac{32-16}{2}=8$，

所以 $f(t)=8\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right)+24$.

将点 $(2,16)$ 代入函数解析式得 $24+8\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 2+\varphi\right)=16$，

得 $\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$(k\in Z)$ 即 $\varphi=2k\pi-\frac{2}{3}\pi(k\in Z)$

又因为 $|\varphi|<\pi$，得 $\varphi=-\frac{2}{3}\pi$.

所以 $f\left(t\right)=24+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2}{3}\pi\right)\left(0\le t\le 24\right)$.

(2) 依题意，令 $24+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2}{3}\pi\right)>28$，

可得 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2}{3}\pi\right)>\frac{1}{2}$，

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{12}t-\frac{2}{3}\pi<2k\pi+\frac{5}{6}\pi\left(k\in Z\right)$

解得：$24k+10<t<24k+18\left(k\in Z\right)$，

令 $k=0$ 得，$10<t<18$，

故中央空调应在上午 10 时开启，下午 18 时关闭.

20．(2021·佛山市南海区桂华中学高一月考) 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\left(\sin x+\cos x\right)-a$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right),a\in R$.

(1) 求 a 的值，并求函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

(2) 若当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，不等式 $f\left(x\right)\ge m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $a=1$；$f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$.

(2) $m\in\left(-\infty,-1\right]$.

【解析】(1) $f\left(x\right)=2\sin x\left(\sin x+\cos x\right)-a$

$=2\sin^2x+2\sin x\cos x-a$

$=1-\cos2x+\sin2x-a$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1-a$

因为 $f\left(x\right)$ 经过点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+1-a=1$，$a=1$，

因为 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in Z$

所以 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$.

(2) 由 (1) 知 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$f\left(x\right)_{\min}=-1$,

因为 $f\left(x\right)\geq m$ 恒成立即 $m\leq f\left(x\right)_{\min}$，所以所 $m\in\left(-\infty,-1\right]$.

21．(2021 • 上海金山 • 华东师大附属枫泾中学高一期中) 已知函数

$f\left(x\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$.

(1) 求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和单调递增区间;

(2) 若关于 x 的方程 $f\left(x\right)-m=2$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有解, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $T=\pi$，单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]\left(k\in Z\right)$. (2) $m\in\left[0,1\right]$.

【解析】(1) $f\left(x\right)=2sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$

$=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$

$=1+\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,

最小正周期 $T=\pi$,

函数的单调递增区间满足：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,

解得 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]\left(k\in Z\right)$.

(2) $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,

所以 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[2,3\right]$.

而 $f\left(x\right)=m+2$，所以 $m+2\in\left[2,3\right]$，即 $m\in\left[0,1\right]$.

22．(2021 • 浙江) 已知 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $af\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\geq 2$ 对任意的 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left[-\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$ ($k\in Z$)；(2) $a\geq 2\sqrt{2}+1$.

【解析】(1) 化简得 $f(x)=\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{12},k\in Z$

所以单调递增区间为 $\left[-\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$.

(2) 由 (1) 可得 $af\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)=a\sin x-\cos x\geq 2$,

即 $a\geq\frac{2+\cos x}{\sin x}$，对任意的 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 恒成立,

只需要 $a\geq\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)_{\max}$ 即可,

$$\frac{2+\cos x}{\sin x}=\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{3\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}},$$

令 $t=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$，因为 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $\frac{x}{2}\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}\right]$,

所以 $t=\tan\frac{x}{2}\in\left[\sqrt{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

所以 $\frac{2+\cos x}{\sin x}=\frac{3+t^2}{2t}=\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}$,

由对勾函数性质可得，当 $t\in\left[\sqrt{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 时，$y=\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}$ 为减函数,

所以当 $t=\sqrt{2}-1$ 时，$\left(\frac{3}{2t}+\frac{1}{2}\right)_{\max}=2\sqrt{2}+1$,

所以 $a\geq 2\sqrt{2}+1$.

第 5 章　三角函数　章末测试(提升)

一、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，共 8 题 40 分)

1．(2021 • 上海高一专题练习)若$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)$等于(　　).

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{7}{9}$

【答案】A

【解析】因为$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)=\frac{1}{3}$,

所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$,

所以$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=\cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-1=-\frac{7}{9}$,

故选：A

2．(2021 •河北石家庄二十三中高一月考)若$3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)=0$，则$\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$的值是(　　).

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】∵$3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)=0$，由诱导公式可得$3\sin\theta-\cos\theta=0$，

即$\tan\theta=\frac{1}{3}$,

∴$\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{6}{5}$.

故选：C

3．(2021 • 全国高一课时练习)若$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$0<\alpha<\pi$，则$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$(　　).

A．$\frac{-8-\sqrt{17}}{9}$　　B．$\frac{-8\pm\sqrt{17}}{9}$　　C．$\frac{-8+\sqrt{17}}{9}$　　D．$\frac{8+\sqrt{17}}{9}$

【答案】A

【解析】∵$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，①

∴$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$，即$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=-\frac{8}{9}$,

$\therefore 1-2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\dfrac{17}{9}$.

$\because \sin\alpha\cos\alpha<0$，且 $0<\alpha<\pi$，$\therefore \sin\alpha>0$， $\cos\alpha<0$，

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

①×② 变形得 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha=-\dfrac{\sqrt{17}}{9}$，

$\therefore \sin2\alpha+\cos2\alpha=-\dfrac{8}{9}-\dfrac{\sqrt{17}}{9}=\dfrac{-8-\sqrt{17}}{9}$.

故选：A.

4. (2021·江西高安中学(文)) 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则(　　)

A. $f(x)$ 的最大值为 2

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. $f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 为奇函数

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{5\pi}{2}$ 对称

【答案】D

【解析】因为当 $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ 时， $f(x)$ 取得最大值为 $\sqrt{2}$，故 A 错误；

因为 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，故 B 错误；

因为 $f(x-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$，

$f(\dfrac{\pi}{4}-x)=\sqrt{2}\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\pi}{8}\right)$，则

$f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq-f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$，即 $f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 不是奇函数，故 C 错误；

因为 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的对称轴满足 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{p}{4}=\dfrac{p}{2}+kp,k?Z$，当 $k=1$ 时， $x=\dfrac{5\pi}{2}$，故 D 正确.

故选：D.

5. (2021·浙江高一期末) 设 $a=2^{0.5}$， $b=\log_4 3$， $c=\cos\dfrac{3\pi}{4}$，则(　　)

A. $c>a>b$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

【答案】C

【解析】 $a=2^{0.5}>2^0=1$，

由 $0=\log_4 1<\log_4 3<\log_4 4=1$，即 $0<b<1$，

$c=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a>b>c$．

故选：C

6．(2021·江苏南通市·海安高级中学高三月考)已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$），满足 $f\left(0\right)=\sqrt{3}$，将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，若 $g\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称，则 ω 的取值可以为(　　)

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】B

【解析】因为 $f\left(0\right)=\sqrt{3}$，即 $f\left(x\right)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，所以 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 $\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，

函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $g\left(x\right)=2\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$，

$\because g\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称，$\therefore\omega\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\omega\times\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=1$，得 $\omega=2$．

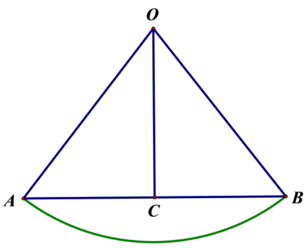
故选：*B.*

7．(2021·浙江学军中学高一期中)《九章算术》中《方田》章有弧田面积计算问题，计算术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一．其大意是，弧田面积计算公式为：弧田面积 $=\frac{1}{2}$（弦乘矢+矢乘矢)，弧田是由圆弧(简称为弧田的弧)和以圆弧的端点为端点的线段(简称（弧田的弦)围成的平面图形，公式中“弦”指的是弧田的弦长，“矢”等于弧田的弧所在圆的半径与圆心到弧田的弦的距离之差．现有一弧田，其弦长 AB 等于 $2\sqrt{3}$，其弧所在圆为圆 O，若用上述弧田面积计算公式计算得该弧田的面积为 $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$，则 $\angle AOB=$(　　)

A．$\frac{\pi}{4}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　　C．$\frac{\pi}{2}$　　　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【答案】D

【解析】由题意，作出示意图得



点 C 为弦 AB 的中点，则 $OC \perp AB$，设 $|OC| = d$，设该圆的半径为 r，

$\therefore \frac{|AB|^2}{4} + d^2 = r^2$，$\because |AB| = 2\sqrt{3}$，$\therefore r^2 - d^2 = 3$，

由题意，“弦”指 $|AB|$，“矢”指 $r-d$，

$\because$ 该弧田的面积为 $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}\left[|AB|\cdot(r-d)+(r-d)^2\right] = \frac{2\sqrt{3}(r-d)+(r-d)^2}{2} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}$，

即 $2\sqrt{3}(r-d)+(r-d)^2 = 2\sqrt{3}+1$，解得 $r-d=1$，或 $r-d=-\left(2\sqrt{3}+1\right)$（舍去），

$\therefore \begin{cases} r^2-d^2=3 \\ r-d=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} r=2 \\ d=1 \end{cases}$，

$\therefore \angle AOC = \frac{\pi}{3}$，$\therefore \angle AOB = \frac{2\pi}{3}$，

故选：D.

8．(2021・全国高三专题练习(理)(文))关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

①$f(x)$ 是偶函数　　　②$f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 单调递增

③$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点　　④$f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

【答案】C

【解析】Q $f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数，故①正确．当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$f(x)=2\sin x$，它在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减，故②错误．当 $0\le x\le\pi$ 时，$f(x)=2\sin x$，它有两个零点：$0,\pi$；当 $-\pi\le x<0$ 时，$f(x)=\sin(-x)-\sin x=-2\sin x$，它有一个零点：$-\pi$，故 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 3 个零点：$-\pi,0,\pi$，故③错误．当 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，$f(x)=2\sin x$；当 $x\in[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，$f(x)=\sin x-\sin x=0$，又 $f(x)$ 为偶函数，$\therefore f(x)$ 的最大值为 2，故④正确．综上所述，

①④　　正确，故选 C.

二．多选题(每题至少有 2 个选项为正确答案，每题 5 分，4 题共 20 分)

9．(2021•湖南雅礼中学高二开学考试)若将函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{12})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是(　　)

A．$g(x)$ 的最小正周期为 π

B．$g(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减

C．$x=\frac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 的对称轴

D．$g(x)$ 在$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$上的最小值为 $-\frac{1}{2}$

【答案】AD

【解析】函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{12})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得

$g(x)=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{12}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，最小正周期为 π，A 正确；

$\because 2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\pi+2k\pi(k\in Z)$

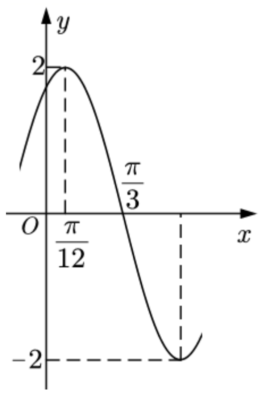
$\therefore k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in Z)$ 为 $g(x)$ 的所有减区间，其中一个减区间为$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，故 B 错；

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi,k\in Z$，故 C 错；

$\because x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore \cos(2x+\frac{\pi}{3})\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，故 D 对

故选：AD

10．(2021•池州市江南中学高一期末)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 部分图象如图所示，下列说法不正确是(　　)



A．$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

B．$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$对称

C．将函数$y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到函数$f\left(x\right)$的图象

D．若方程$f\left(x\right)=m$在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上有两个不相等的实数根，则$m$的取值范围是$\left(-2,-\sqrt{3}\right]$

【答案】ABC

【解析】由函数的图象可得$A=2$，由$\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$，求得$\omega=2$．

再根据五点法作图可得$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，求得$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

∴函数$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x=\frac{2\pi}{3}$时，$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$，不是最值，故A不成立；

当$x=-\frac{5\pi}{12}$时，$f\left(x\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$，不等于零，故B不成立；

将函数$y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到函数

$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$的图象，故C不成立；

当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，

∵$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，

故方程$f\left(x\right)=m$在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上有两个不相等的实数根时，则$m$的取值范围是$\left(-2,-\sqrt{3}\right]$，故D成立.

故选:ABC.

11．(2021·长沙市明德中学高一开学考试)已知函数

$f\left(x\right)=A\sin wx-\cos wx(A>0,w>0),g\left(x\right)=2\sin x$，若$\forall x_1\in R$，$\exists x_2\in[0,\frac{\pi}{4}]$，使得

$f\left(x_1\right)\le g\left(x_2\right)$成立，且$f\left(x\right)$在区间$[0,\frac{3\pi}{4}]$上的值域为$[-1,\sqrt{2}]$，则实数$w$的取值可能是(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．1　　D．$\frac{4}{3}$

【答案】CD

【解析】因为$\forall x_1\in R$，$\exists x_2\in[0,\frac{\pi}{4}]$，使得$f(x_1)\le g(x_2)$成立，

所以$f(x)_{\max}\le g(x)_{\max}$，即$\sqrt{A^2+1}\le\sqrt{2}$，

又由$f(x)$在区间$[0,\frac{3\pi}{4}]$上的值域为$[-1,\sqrt{2}]$，

则$f(x)_{\max}=\sqrt{A^2+1}\ge\sqrt{2}$，

综上$\sqrt{A^2+1}=\sqrt{2}$，解得$A=1$

此时$f(x)=\sin wx-\cos wx=\sqrt{2}\sin(wx-\frac{\pi}{4})$，

因为$f(x)$在区间$[0,\frac{3\pi}{4}]$上的值域为$[-1,\sqrt{2}]$，

所以$-1\le\sqrt{2}\sin(wx-\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$，即$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sqrt{2}\sin(wx-\frac{\pi}{4})\le 1$，

当$x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$时，$wx-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}w-\frac{\pi}{4}]$，

所以$\frac{\pi}{2}\le\frac{3\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\le\pi+\frac{\pi}{4}$，即$1\le w\le 2$.

故选：CD.

12．(2021·武汉市钢城第四中学高一期中)关于函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$的叙述正确的是(　　)

A．$f(x)$是偶函数

B．$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递增

C．$f(x)$在$[-\pi，\pi]$有4个零点

D．$f(x)$的最大值为2

【答案】AD

【解析】A.∵$f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$，∴$f(x)$是偶函数，故正确；

B.当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$f(x)=\sin|x|+|\sin x|=2\sin x$，$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减，故错误；

C.当$x\in[0，\pi]$时，令$f(x)=\sin|x|+|\sin x|=2\sin x=0$，得$x=0$或$x=\pi$，又$f(x)$在$[-\pi，\pi]$上为偶函数，∴$f(x)=0$在$[-\pi，\pi]$上的根为$-\pi$，0，$\pi$，有3个零点，故错误；

D.∵$\sin|x|\le 1$，$|\sin x|\le 1$，当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in Z)$或$x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi$ $(k\in Z)$时两等号同时成立，

∴ $f(x)$ 的最大值为 2，故正确.

故选：AD.

三、填空题(每题 5 分，共 20 分)

13．(2021・全国高三专题练习)已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，其中 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},a\right]$．若 $f\left(x\right)$ 的值域是 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，则实数 a 的最小值为______，最大值为______.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$　　π

【解析】当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},a\right]$ 时，$x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},a+\dfrac{\pi}{6}\right]$，

Q $f\left(x\right)$ 的值域是 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，

$\therefore \dfrac{\pi}{2}\le a+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$，$\therefore \dfrac{\pi}{3}\le a\le\pi$，

$\therefore a$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$，最大值为 π.

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$；π

14．(2021・上海高一专题练习)若函数 $y=2\sin x+\sqrt{a}\cos x+4$ 的最小值为 1，则实数 $a=$ __________.

【答案】5

【解析】$y=2\sin x+\sqrt{a}\cos x+4=\sqrt{4+a}\sin(x+\varphi)+4$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$，且 φ 终边过点 $(2,\sqrt{a})$.

所以 $y_{\min}=-\sqrt{4+a}+4=1$，解得 $a=5$.

故答案为：5.

15．(2021・长沙市湖南师大第二附属中学有限公司高三开学考试)已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，则 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}=$______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{26}}{8}$

【解析】Q $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，

$\therefore (2\sin\alpha-3\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=0$,

又 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore 2\sin\alpha=3\cos\alpha$,

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$,

$$\therefore \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cos\alpha}=\frac{\sqrt{26}}{8}.$$

故答案为 $\dfrac{\sqrt{26}}{8}$.

16.(2021 •全国高三专题练习(理)(文))设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$,若 $f(x)\le f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，则 ω 的最小值为__________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】因为 $f(x)\le f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，所以 $f(x)$ 取最大值 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,

所以 $\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi(k\in Z),\therefore \omega=8k+\dfrac{2}{3}(k\in Z)$,

因为 $\omega>0$，所以当 $k=0$ 时，ω 取最小值为 $\dfrac{2}{3}$.

四、解答题(17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分)

17.（2021 • 北京清华附中高二期末)已知函数 $f(x)=2\cos x\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)+\sqrt{3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时 x 的值.

【答案】(1) π；$\left[k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\right](k\in Z)$；(2) 当 $x=\dfrac{11\pi}{12}$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得最小值，最小值为 -2.

【解析】(1) $f(x)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}=\sin 2x-2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

所以，函数 $y=f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi\left(k\in Z\right)$，可得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\left(k\in Z\right)$，

函数 $y=f\left(x\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0\right)\left(k\in Z\right)$；

解不等式 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，解得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{11\pi}{12}\left(k\in Z\right)$.

因此，函数 $y=f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]\left(k\in Z\right)$；

(2) 当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\frac{2\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$ 时，即当 $x=\frac{11\pi}{12}$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 取得最小值，最小值为 -2.

18．（2021 • 全国高一课时练习）(1) 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{5},\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，求 $\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$ 的值

(2) 已知 $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$，求 $\sin\alpha$ 的值

(3) 已知 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$，求 $\sin 2\theta$ 的值；

(4) 已知 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值.

【答案】(1) $\frac{9}{5}$；(2) $\frac{24}{25}$；(3) $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$；(4) $\frac{17}{25}$

【解析】(1) 由 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，

得 $\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{4}{5}$，

所以 $\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1-\sin\theta=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$；

(2) 由 $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$，

所以 $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-\sin\alpha=\frac{1}{25}$，

解得 $\sin\alpha=\frac{24}{25}$；

(3) 由 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$，

得 $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1$，

解得$\sin^2 2\theta=\frac{8}{9}$，则$\sin 2\theta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

(4)由$\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，得：

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$=1-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2\theta\right)$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=\frac{17}{25}$.

19．(2021·云南省下关第一中学高一月考)已知函数$f(x)=\cos x\left(2\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-\sin^2 x$.

(Ⅰ)求函数$f\left(x\right)$的单调递增区间和最小正周期；

(Ⅱ)若当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，关于$x$的不等式$f(x)\geq m$______，求实数$m$的取值范围.

请选择①和②中的一个条件，补全问题(Ⅱ)，并求解．其中，①有解；②恒成立.

【答案】(Ⅰ)单调递增区间为：$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in Z$；$T=\pi$；(Ⅱ)答案见解析.

【解析】(Ⅰ)解：因为$f\left(x\right)=\cos x\left(2\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-\sin^2 x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以函数$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\pi$；

因为函数$y=\sin x$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in Z$，

所以$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$，

所以函数$f\left(x\right)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in Z$；

(Ⅱ)解：若选择①

由题意可知，不等式$f\left(x\right)\geq m$有解，即$m\leq f\left(x\right)_{\max}$；

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\frac{\pi}{6}\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{7\pi}{6}$，

故当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值，且最大值为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，

所以$m\le 2$；

若选择②

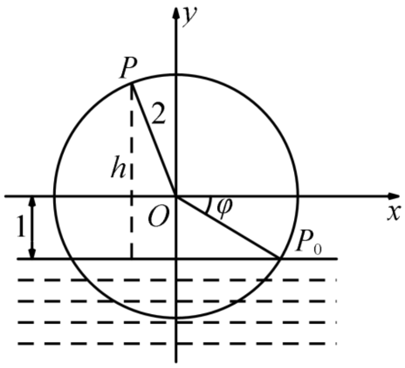
由题意可知，不等式$f(x)\ge m$恒成立，即$m\le f(x)_{\min}$．

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$．

故当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即$x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最小值，且最小值为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$．

所以$m\le -1$．

20．(2021·全国高一课时练习)一半径为2米的水轮如图所示，水轮圆心O距离水面1米；已知水轮按逆时针做匀速转动，每3秒转一圈，如果当水轮上点P从水中浮现时(图中点P_0)开始计算时间．

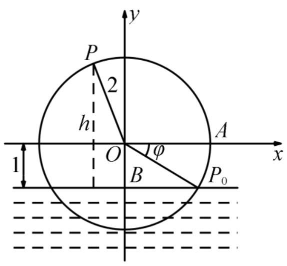


(1)以水轮所在平面与水面的交线为x轴，以过点O且与水面垂直的直线为y轴，建立如图所示的直角坐标系，试将点P距离水面的高度h(单位：米)表示为时间t(单位：秒)的函数；

(2)在水轮转动的任意一圈内，有多长时间点P距水面的高度超过2米？

【答案】(1) $h=2\sin\left(\frac{2\pi t}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+1(t\ge 0)$；(2)有$1s$时间点$P$距水面的高度超过2米.

【解析】(1)设水轮上圆心O正右侧点为A，y轴与水面交点为B，如图所示：



设$h=a\sin(\omega t+\varphi)+b$，由$OB=1$，$OP=2$，可得$\angle BOP_0=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle AOP_0=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore a=2$，$b=1$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

由题意可知，函数$h=2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)+1$的最小正周期为$T=3$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$，

所以点P距离水面的高度h关于时间t的函数为$h=2\sin\left(\frac{2\pi t}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+1(t\geq 0)$；

(2) 由$h=2\sin\left(\frac{2\pi t}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+1>2$，得$\sin\left(\frac{2\pi t}{3}-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$，

令$t\in[0,3]$，则$\frac{2\pi t}{3}-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，

由$\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，解得$\frac{1}{2}<t<\frac{3}{2}$，又$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$，

所以在水轮转动的任意一圈内，有$1s$时间点P距水面的高度超过2米.

21．(2021·六盘山高级中学) 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象在$y$轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为$(x_0,2)$和$(x_0+\pi,-2)$. 若将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到的图象关于原点对称.

(1) 求函数$f(x)$的解析式；

(2) 若函数$y=f(kx)+1(k>0)$的周期为$\frac{2\pi}{3}$，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时，方程$f(kx)+1=m$恰有两个不同的解，求实数$m$的取值范围.

【答案】(1) $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$；(2) $\left[\sqrt{3}+1,3\right)$

【解析】(1) 由题意可知函数$f(x)$的周期$T=2\pi$，且$A=2$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，故$f(x)=2\sin(x+\varphi)$. 将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到的图象对应的函数解析式为$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，因为函数$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$的图象关于原点对称，所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) 由 (1) 得函数$y=f(kx)+1=2\sin\left(kx-\frac{\pi}{3}\right)+1$，其周期为$\frac{2\pi}{3}$，

又 $k>0$，所以 $k=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$．令 $t=3x-\frac{\pi}{3}$，因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $t\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

若 $\sin t=s$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的解，则 $s\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

所以当 $m\in\left[\sqrt{3}+1,3\right)$ 时，方程 $f(kx)+1=m$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有两个不同的解，即实数 m 的取值范围是 $\left[\sqrt{3}+1,3\right)$.

22.（2021·张家口市第一中学高一月考）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\cdot\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)$，其中 $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求使得 $f(x)\geq\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围；

(2) 若函数 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，且对任意的 $x_1,x_2\in[0,t]$，当 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)$ 成立，求正实数 t 的最大值.

【答案】(1) $\left[k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$；(2) $\frac{\pi}{4}$.

【解析】(1) 由题意得，$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

令 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{1}{2}$，得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，故 x 的取值范围为 $\left[k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$

(2) 由题意得，$f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)$

令 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)=\sin 2x$

即 $h(x_1)<h(x_2)$

故 $h(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上为增函数

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$ 得出，$k\pi-\frac{\pi}{4}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$

则函数 $h(x)$ 包含原点的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 即 $t\leq\frac{\pi}{4}$，故正实数 t 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.