第四章 三角函数与解三角形

本模块在高考中常以选择题和解答题的形式出现，难度总体简单或中档，覆盖分值17分。

题型1 同角三角函数关系的应用

例1：已知α为第二象限角，且$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$（　）

A. $-\frac{7}{5}$　B. $-\frac{3}{4}$　C. $-\frac{1}{5}$　D. $\frac{1}{5}$

例2：已知$\tan\theta=2$，则$\cos 2\theta=$_____，$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

题型2 利用诱导公式化简求值

例3：已知$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$，则$\sin 2\alpha$的值是________.

题型3 利用和差公式求值

例4：$\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. 0　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

例5：已知$2\tan\theta-\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=7$，则$\tan\theta=$（　）

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

例6：已知$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

题型4 利用倍角公式求值

例7：(1)已知$\alpha\in(0,\pi)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则$\sin\alpha=$（　）

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2)若$\sin x=-\frac{2}{3}$，则$\cos 2x=$________.

例8：已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

题型5 三角函数的单调性

例9：若$f(x)=\cos x-\sin x$在$[-a,a]$上是减函数，则a的最大值为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

题型6 三角函数的周期性

例10：若$x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$是函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$两个相邻的极值点，则$\omega=$（　　）

A. 2　B. $\frac{3}{2}$　C. 1　D. $\frac{1}{2}$

题型7 周期性含绝对值

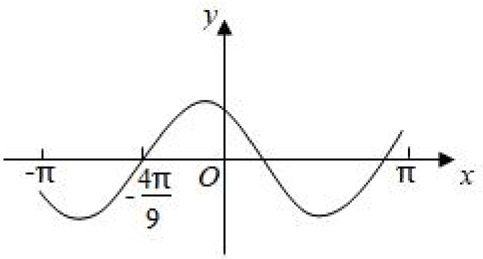
例11：下列函数中，以$\frac{\pi}{2}$为最小正周期且在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$单调递增的是（　）

A. $f(x)=|\cos 2x|$　B. $f(x)=|\sin 2x|$　C. $f(x)=\cos|x|$　D. $f(x)=\sin|x|$

题型8 相位对应法

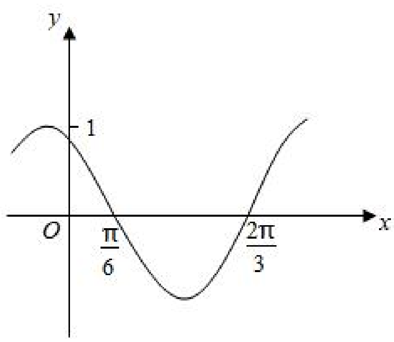
例12：设函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$在$[-\pi,\pi]$的图象大致如图，则$f(x)$的最小正周期为（　　）

A. $\frac{10\pi}{9}$　B. $\frac{7\pi}{6}$　C. $\frac{4\pi}{3}$　D. $\frac{3\pi}{2}$



例13：如图是函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象，则$\sin(\omega x+\varphi)=$（　　）

A. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$　B. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$　C. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　D. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)$



题型9 三角函数的对称性

例14：将函数$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，则平移后的图象中与$y$轴最近的对称轴的方程是________.

例15：设函数$f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若$f(x)\leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$对任意的实数$x$都成立，则$\omega$的最小值为______.

题型 10 三角函数的最值

例16：函数$f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的最大值为（　　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．1　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

例17：已知函数$f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$的最大值为________.

例18：函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$的最小值为________.

题型 11 三角函数的图象变换

例19：已知曲线C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则下面结论正确的是（　　）

A．把C_1上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线C_2

B．把C_1上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线C_2

C．把C_1上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线C_2

D．把C_1上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线C_2

例20：已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0，\omega>0，|\varphi|<\pi)$是奇函数，将$y=f(x)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为$g(x)$. 若$g(x)$的最小正周期为2π，且$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$（　　）

A. -2　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

题型 12 三角函数综合性质

例21：已知函数$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. 给出下列结论：

①$f(x)$的最小正周期为2π；　　②$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是$f(x)$的最大值；

③把函数$y=\sin x$的图象上的所有点向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，可得到函数$y=f(x)$的图象.

其中所有正确结论的序号是（　　）

A.①　B.①③　C.②③　D.①②③

例22：设函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$，已知$f(x)$在$[0，2\pi]$有且仅有5个零点. 下述四个结论：

①$f(x)$在$(0，2\pi)$有且仅有3个极大值点；　　③$f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{10}\right)$单调递增；

②$f(x)$在$(0，2\pi)$有且仅有2个极小值点；　　④ω的取值范围是$\left[\frac{12}{5}，\frac{29}{10}\right)$.

其中所有正确结论的编号是（　　）

A.①④　B.②③　C.①②③　D.①③④

例23：声音是由物体振动产生的声波，其中包含着正弦函数，纯音的数学模型是函数$y=A\sin\omega t$，我们听到的声音是由纯音合成的，称之为复合音．若一个复合音的数学模型是函数$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，则下列结论正确的是（　　）

A. 2π是$f(x)$的一个周期

B. $f(x)$在$[0，2\pi]$上有3个零点

C. $f(x)$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D. $f(x)$在$\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数

题型13 余弦定理的应用

例24：在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则$\cos B=$（　　）

A. $\frac{1}{9}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

例25：在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则$AB=$（　　）

A. $4\sqrt{2}$　B. $\sqrt{30}$　C. $\sqrt{29}$　D. $2\sqrt{5}$

题型14 三角齐次式与正弦定理

例26：$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

已知$b\sin A+a\cos B=0$，则$B=$______.

例27：$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

已知$a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则$\frac{b}{c}=$(　　)

A.6　　B.5　　C.4　　D.3

例28：$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

已知$b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，$b^2+c^2-a^2=8$，则$\triangle ABC$的面积为______.

题型 15 双三角问题

例29：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，

若$\angle BDC=45°$，则$BD=$________，$\cos\angle ABD=$__________.

例30：在平面四边形$ABCD$中，$\angle ADC=90°$，$\angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

(1)求$\cos\angle ADB$；(2)若$DC=2\sqrt{2}$，求BC.

题型 16 与面积有关的问题

例31：$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.若$\triangle ABC$的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$(　　)

A.$\frac{\pi}{2}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{6}$

例32：若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，且$\angle C$为钝角，则$\angle B=$______；$\frac{c}{a}$的取值范围是______.

题型 17 边长比问题

例33：$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

若$b=6$，$a=2c$，$B=\frac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$的面积为________.

例34：$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c. 已知$B=150°$.

(1)若$a=\sqrt{3}c$，$b=2\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积；(2)若$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$C$.

例35：在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$这三个条件中任选一个，

补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求c的值；若问题中的三角形不存在，

说明理由．

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，

$C=\frac{\pi}{6}$，____________？

题型 18 单个角的最值问题

例36：在$\triangle ABC$中,若$a:b:c=4:5:6$,则其最大内角的余弦值为(　　)

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{10}$　　D．$\frac{3}{5}$

例37：在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$a^2+b^2=2c^2$，则角C的最大值为（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

例38：在$\triangle ABC$中，$\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin B\sin C$，则$\cos C$的取值范围为________．

题型 19 两个角的最值问题

例39：在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c．已知$2b\sin A-\sqrt{3}a=0$．

（1）求角B的大小；

（2）求$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围．

例40：在$\triangle ABC$中，已知$\cos C+\left(\cos A-\sqrt{3}\sin A\right)\cos B=0$．求$\sin A\cdot\sin C$的最大值．

题型 20 对称型求最值问题

例41：在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$，若$a=3$，求$b+c$的取值范围．

例42：$\triangle ABC$中，$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$．

（1）求A；

（2）若$BC=3$，求$\triangle ABC$周长的最大值．

题型 21 非对称型求最值问题

例43：在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是角A,B,C所对的边，且满足$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A+\sqrt{3}c$．

（1）求A；

（2）若$a=\sqrt{3}$，求$b+2c$的取值范围．

例44：设$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$2b\cos B=a\cos C+c\cos A$．

（1）求B；

（2）若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\frac{c}{a}$的取值范围．

例45：已知$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别是a,b,c，且$a\cos B=b\cos A$，BC边上的中线AD的长为4．求$a+\sqrt{2}c$的最大值．

题型 22 面积的最值

例46：$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b+c=1$，且$(a+c)(a-c)=b(b-c)$．

（1）求角A的大小；

（2）求三角形面积$S_{\triangle ABC}$的最大值．

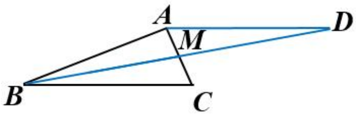
例47：在$\triangle ABC$中，已知内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，向量$\vec{m}=\left(\sqrt{3},-2\sin B\right)$，向量$\vec{n}=(\cos B,\cos 2B)$，且$\vec{m}/\!/\vec{n}$，角$B$为锐角．

（1）求角B的大小；

（2）若$b=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值．

例48：$\triangle ABC$中，三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c．且$\sin(A+C)=\dfrac{2\sqrt{3}S}{a^2+c^2-b^2}$．

若AC边上的中线BM的长为2，求$\triangle ABC$面积的最大值．



例49：在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\dfrac{b}{a}\cos C+\dfrac{c}{a}\cos B=3\cos B$．

（1）求$\sin B$；

（2）若D为AC边的中点，且$BD=1$，求$\triangle ABD$面积的最大值．

题型 23 面积的取值范围

例50：在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a-b\cos C=\sqrt{3}c\sin B$．

（1）求B；

（2）若$a=2$，且$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\triangle ABC$的面积S的取值范围．

例51：在锐角$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$2b-c=\dfrac{2abc\cos C}{b^2+c^2-a^2}$．

（1）求A的值；

（2）若$c=2$，求$\triangle ABC$面积的取值范围．