第 07 讲：第四章 三角函数（基础卷）

一、单选题

1. 【答案】A

将钟表校正的过程中，需要顺时针旋转时针$15°$，其大小为$-15°$，

故时针需要旋转$-\frac{\pi}{12}$弧度，

故选：A.

2. 【答案】A

解：$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+4^2}}=\frac{m}{5}$，解得：$m=\pm 3$，故$\tan\alpha=\frac{4}{m}=\pm\frac{4}{3}$，

故选：A

3. 【答案】C

$\frac{\sin(\pi-\theta)+\cos(\theta-2\pi)}{\sin\theta+\cos(\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{2}$，

分子分母同除以$\cos\theta$，

$\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\frac{1}{2}$，

解得：$\tan\theta=-3$

故选：C

4. 【答案】B

对于 A，Q $y=\sin x$定义域为$\mathbf{R}$，$\sin(-x)=-\sin x$，$\therefore y=\sin x$为奇函数，A 错误；

对于 B，Q $y=|\sin x|$定义域为$\mathbf{R}$，$|\sin(-x)|=|-\sin x|=|\sin x|$，$\therefore y=|\sin x|$为偶函数，B 正确；

对于 C，Q $y=\tan x$定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，即定义域关于原点对称，$\tan(-x)=-\tan x$，$\therefore y=\tan x$为奇函数，C 错误；

对于 D，Q $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$定义域为$\mathbf{R}$，$\sin(-x)=-\sin x$，$\therefore y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$为奇函数，D 错误.

故选：B.

5. 【答案】A

Q $f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$，

$\therefore$函数$f(x)$为奇函数，排除选项 D；

当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$x>0$，$0<\cos x<1$，

$\therefore 0<f(x)<x$，排除选项 BC.

故选：A.

6. 【答案】C

因为α,β都是锐角，

所以$0<\alpha+\beta<\pi$，

又 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$， $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$， $\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$，

所以 $\cos\beta=\cos\left[(\alpha+\beta)-\alpha\right]$，

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

$=-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{16}{65}$，

故选：C.

7． 【答案】B

解：设圆的半径为 r，则 $OD=r-CD=r-\left(2-\sqrt{3}\right)$， $AD=\frac{1}{2}AB=1$，

由勾股定理可得 $OD^2+AD^2=OA^2$，即 $\left[r-\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2+1=r^2$，

解得 $r=2$，所以 $OA=OB=2$， $AB=2$，

所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，因此 $S_{弓形}=S_{扇形AOB}-S_{\triangledown MBB}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

故选：B

8． 【答案】C

函数化简得 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin2wx+\cos2wx+1=2\sin\left(2wx+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

由 $2wx+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

可得函数的对称轴为 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{2w}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

由题意知， $\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{2w}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 且 $\frac{\left(k+1\right)\pi+\frac{\pi}{3}}{2w}\geqslant\pi$，

即 $k+\frac{1}{3}\leqslant w\leqslant\frac{3k+4}{6}$， $k\in\mathbf{Z}$，若使该不等式组有解，

则需满足 $k+\frac{1}{3}\leqslant\frac{3k+4}{6}$，即 $k\le\frac{2}{3}$，又 $w>0$，

故 $0\leqslant\frac{3k+4}{6}$，即 $k>-\frac{4}{3}$，所以 $-\frac{4}{3}<k\leqslant\frac{2}{3}$，又 $k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k=0$ 或 $k=1$，所以 $w\in\left(0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

二、多选题

9． 【答案】AC

因为 $-50°=-410°+360°$， $310°=-410°+2\times360°$，

所以与 $-410°$ 角终边相同的角是 $-50°$ 和 $310°$，

故选：AC.

10. 【答案】AC

将函数 $g(x)=\sin x$ 的图象所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度，可以得到函数 $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，A 正确.

将函数 $g(x)=\sin x$ 的图象所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍，纵坐标不变，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度，可以得到函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{54}\right)$ 的图象，B 不正确.

将函数 $g(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将所得图象所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，可以得到函数 $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，C 正确.

将函数 $g(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度，再将所得图象所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，可以得到函数 $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{18}\right)$， D 不正确.

故选：AC

11. 【答案】BC

对于 A，由 $\sin\alpha\cos\alpha=1$，得 $\sin2\alpha=2$，矛盾，错误；

对于 B，由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，得 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ 即成立，正确；

对于 C，Q $y=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\cos x$，显然是偶函数，正确；

对于 D，取 $\alpha=\frac{13}{6}\pi$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，α，β 是第一象限的角，且 $\alpha>\beta$，但 $\sin\alpha<\sin\beta$，错误.

故选：BC.

12. 【答案】ABD

由 $\tan\alpha-\sqrt{3}=\tan6\alpha+\sqrt{3}\tan\alpha\tan6\alpha$，可知 $\tan\alpha-\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\tan\alpha\right)\tan6\alpha$，

当 $1+\sqrt{3}\tan\alpha=0$，即 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，即 $\alpha=-\frac{\pi}{6}+k\pi,(k\in\mathbf{Z})$ 时，

$\tan\alpha-\sqrt{3}=-\frac{4\sqrt{3}}{4},\tan6\alpha+\sqrt{3}\tan\alpha\tan6\alpha=0$，

显然 $\tan\alpha-\sqrt{3}=\tan6\alpha+\sqrt{3}\tan\alpha\tan6\alpha$ 不成立，故 $1+\sqrt{3}\tan\alpha\neq0$；

所以 $\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=\tan6\alpha$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\tan6\alpha$，

所以 $6\alpha=\alpha-\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha=-\frac{\pi}{15}+\frac{k\pi}{5},(k\in\mathbf{Z})$，

当 $k=0$ 时，$\alpha=-\frac{\pi}{15}$，当 $k=1$ 时，$\alpha=\frac{2\pi}{15}$，当 $k=5$ 时，$\alpha=\frac{14\pi}{15}$，

令$-\frac{\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}=\frac{4\pi}{15}$，得$k=\frac{5}{3}\notin \mathbf{Z}$，故$\alpha$的值不可能为$\frac{4\pi}{15}$.

故选：ABD.

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 【答案】$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）

解：因为$f\left(x\right)=2\sin\left(3x+2\varphi\right)$是奇函数，所以$2\varphi=k\pi$，$k\in Z$，解得$\varphi=\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$.

故答案为：$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）

14. 【答案】$-\sqrt{3}$

由图可知$A=2$，$T=\frac{4}{3}(\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{24})=\frac{\pi}{2}$，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=4$，

将$(\frac{7\pi}{24},-2)$代入解析式得$\sin(\frac{7}{6}\pi+\varphi)=-1$，又$|\varphi|<\pi$，得$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

故$f\left(x\right)=2\sin(4x+\frac{\pi}{3})$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$

故答案为：$-\sqrt{3}$

15. 【答案】0

$\because \cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}$……（1）

$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}$……（2）

由（1）+（2）得：$2\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=0$

$\therefore \cos\alpha\cos\beta=0$

故答案为：0

16. 【答案】 1 3

$\because x\in\left[0,\pi\right]$，$\therefore t=\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，

由条件可知$y=\sin t$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$有 3 个零点，

$\therefore$由函数图象可知：有 1 个极小值点，两个极大值点，

且$2\pi\le\omega\pi-\frac{\pi}{6}<3\pi$，解得：$\frac{13}{6}\le\omega<\frac{19}{6}$，

其中满足条件的一个正整数是 3.

故答案为：1；3

四、解答题

17. 【答案】(1)$\frac{\cos\alpha+3\sin\alpha}{-2\sin\alpha+\cos\alpha}$；(2)$-2$.

(1) $f\left(\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-3\sin\left(\pi+\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\pi-\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha+3\sin\alpha}{-2\sin\alpha+\cos\alpha}$；

(2)∵ $\tan\alpha=3$，

∴ $f(\alpha)=\dfrac{\cos\alpha+3\sin\alpha}{-2\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1+3\tan\alpha}{1-2\tan\alpha}=\dfrac{1+3\times3}{1-2\times3}=-2$.

18．【答案】(1) $-\sqrt{3}$ (2) $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$

(1)解：因为 $f(x)=2a\sin x\cos x+2\cos^2 x+1$，所以 $f(x)=a\sin2x+\cos2x+2$

由题意可知 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，即 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a\sin\dfrac{2\pi}{3}+\cos\dfrac{2\pi}{3}+2=0$ ，

即 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{1}{2}+2=0$ ，解得 $a=-\sqrt{3}$.

(2)解：由（1）可得 $f\left(x\right)=\cos2x-\sqrt{3}\sin2x+2=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$，

函数 $y=\cos x$ 的递减区间为 $\left[2k\pi,2k\pi+\pi\right],k\in Z$.

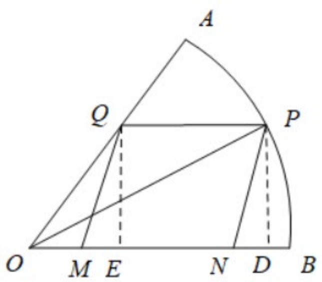
令 $2k\pi<2x+\dfrac{\pi}{3}<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$.

19．【答案】(1) $S=\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\cos2\theta,\theta\in(0,\dfrac{\pi}{3})$

(2) S 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{m}^2$，此时 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

(1)分别过 P,Q 作 $PD\perp OB$ 于 D，$QE\perp OB$ 于 E，则四边形 $QEDP$ 为矩形.



由扇形半径为 1m，得 $PD=\sin\theta$，$OD=\cos\theta$.

在 Rt△OEQ 中，

$OE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}QE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}PD$,

$MN=QP=ED=OD-OE=\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$,

$S=MN\cdot PD=(\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta)\sin\theta=\sin\theta\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta$

$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 2\theta$， $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$．

(2)由（1）得 $S=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{6}$．

$\because$ $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$， $\therefore$ $2\theta+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$， $\therefore$ $\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})\in(\frac{1}{2},1]$

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时， $S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{m}^2$．

20. 【答案】选①或选②结论相同，最大值为 0；最小值为 $-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$．

$f\left(x\right)=a\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x$

$=\frac{a}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{a}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{\frac{a^2+3}{4}}\sin\left(2x-\varphi\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{a}$，

若选①， $\sqrt{\frac{a^2+3}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=1$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)_{\min}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 时， $f(x)_{\max}=0$；

若选②， $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=1$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)_{\min}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

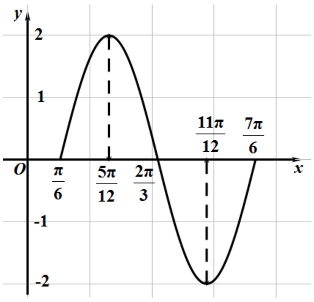
当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 时， $f(x)_{\max}=0$．

21. 【答案】(1)答案见解析(2) $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

(1)完成表格如下：

$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上的图象如图所示：



(2)不等式 $f(x)\ge 1$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{1}{2}$.

由 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

故不等式 $f(x)\ge 1$ 的解集为 $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

22．【答案】(1) $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ (2) $m\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$; $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$

(1)根据函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象可得：$A=2$，

$\frac{3}{4}T=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\omega=2$，又因为 $2\cdot\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以

$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

(2)由（1）知，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，先将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得：$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，再将所得图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，得到 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

（i）$x\in[0,m]$，$x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},m-\frac{\pi}{3}]$，$2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$，所以 $m-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$，所以 $m\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$.

（ii）不等式 $g^2(x)-(2t+1)g(x)-t-1\le 0$ 对任意的 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，令

$n=g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right),x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right],x-\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right],2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in[0,1]$，所以 $n\in[0,1]$，所以上式：不等式

$n^2-(2t+1)n-t-1\le 0$ 对任意的 $n\in[0,1]$ 恒成立，令

$h(n)=n^2-(2t+1)n-t-1, n\in[0,1]$，对称轴为 $n=t+\frac{1}{2}$，

①$t+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow t\le 0$，　$h(n)_{\max}=h(1)=1-(2t+1)-t-1\le 0$，则 $t\ge-\frac{1}{3}$，所以 $-\frac{1}{3}\le t\le 0$．

②$t+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\Rightarrow t>0$，$h(n)_{\max}=h(0)=-t-1\le 0$，则 $t\ge -1$，所以 $t>0$．

故实数 t 的取值范围为：$\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

第四章 三角函数（提高卷）

一、单选题

1. 【答案】B

由图可知，该时刻的时针与分针所夹的锐角为$\frac{2\pi}{12}+\frac{11}{12}\times\frac{2\pi}{12}=\frac{23\pi}{72}$.

故选：B.

2. 【答案】A

$(\sqrt{2}-1)(\sin 22.5^\circ+\cos 22.5^\circ)^2=(\sqrt{2}-1)(\sin^2 22.5^\circ+\cos^2 22.5^\circ+2\sin 22.5^\circ\cos 22.5^\circ)$

$=(\sqrt{2}-1)(1+\sin 45^\circ)=(\sqrt{2}-1)(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：A

3. 【答案】A

由图可知，$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-5$，

$$\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}{\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\left(\cos\theta+\sin\theta\right)}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-5;$$

故选：A.

4. 【答案】B

$\because a=\sin\left(-810^\circ\right)=-1$，$c=\lg\frac{1}{5}=-\lg 5<-\lg\sqrt{10}=-\frac{1}{2}$，$c=\lg\frac{1}{5}=-\lg 5>-\lg 10=-1$，$\therefore -1=a<c<-\frac{1}{2}$，

$b=\tan\left(\frac{33\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{8}$，因为$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=1$，$\therefore b=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$，所以$a<c<b$.

故选：B.

5. 【答案】B

$$\frac{m\sqrt{n}}{2\sin^2 27^\circ-1}=\frac{2\sin 18^\circ\sqrt{4-4\sin^2 18^\circ}}{2\sin^2 27^\circ-1}=\frac{2\sin 18^\circ\cdot 2\cos 18^\circ}{-\cos 54^\circ}=\frac{2\sin 36^\circ}{-\sin 36^\circ}=-2.$$

故选：B.

6. 【答案】B

$f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1+\cos x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{x}{6}\cos x$.

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\because \exists x_0\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，使不等式 $f(x_0)\le m^2-\frac{5}{2}m-\frac{1}{2}$ 有解

则 $f(x)_{\min}\le m^2-\frac{5}{2}m-\frac{1}{2}$，

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]\quad \therefore x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore -\frac{1}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$

当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

所以 $m^2-\frac{5}{2}m-\frac{1}{2}\ge-\frac{1}{2}$，

解之得：$m\geq\frac{5}{2}$ 或 $m\leq 0$

$\therefore m$ 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

故选：B

7. 【答案】D

$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，将图像向右平移 m 个单位长度后，变为 $y=2\sin(x-m+\frac{\pi}{3})$，

此时图像关于 y 轴对称，所以当 $x=0$ 时，$-m+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$，

则 $m=-\frac{\pi}{6}-k\pi$.

又 $\because m>0$，则 m 的最小值是 $\frac{5\pi}{6}$.

故选：D.

8. 【答案】D

因为 $f(x+2\pi)=\frac{3}{4}\sin(x+2\pi)+\frac{1}{4}\sin3(x+2\pi)=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin3x=f(x)$，

所以 2π 是 $f(x)$ 的一个周期，①正确；

$f(x)=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin3x=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}(\sin2x\cos x+\cos2x\sin x)=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\left[2\sin x\cos^2x+\left(1-2\sin^2x\right)\sin x\right]$
$=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\left[2\sin x\left(1-\sin^2x\right)+\sin x-2\sin^3x\right]=\frac{3}{2}\sin x-\sin^3x$，

令 $t=\sin x\in[-1,1]$，则 $h(t)=\frac{3}{2}t-t^3$，$h'(t)=\frac{3}{2}-3t^2$，

令 $h'(t)>0$，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$，令 $h'(t)<0$，解得 $-1\le t<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}<t\le1$，

所以 h（t）在区间[-1，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$）和区间（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1]内单调递减，

在区间（$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）内单调递增，

当$t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，h（t）取得极小值$h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又$h(1)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，

故$h(t)_{\min}=h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，②正确；

由于$f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\frac{1}{4}\sin\left[3\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right]=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\frac{1}{4}\sin(2\pi-3x)=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\frac{1}{4}\sin3x$

$\neq-\left(\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin3x\right)$，

即$f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\neq-f(x)$，所以$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$不是$f$（$x$）图像的一个对称中心，③错误；

当$x\in[0,\pi]$时，由$h'(t)>0$得$0\leq\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$0\leq x<\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}<x\leq\pi$，

由$h'(t)<0$得$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin x\leq1$，解之得$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$，

综合复合函数的单调性，所以$f(x)$在区间[0，$\frac{\pi}{4}$），（$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$）内单调递增，

在区间（$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$），（$\frac{3\pi}{4}$，π]上单调递减，④正确.

故选：D.

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分..）

9. 【答案】ABC

当$x=\frac{\pi}{6}$时，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\pi=0$，所以$y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称，A 正确；

当$x=-\frac{\pi}{12}$时，$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{12}$对称，B 正确；

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时，$u=2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，$f(u)=\sin u$在$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$上单调递减，故 C 正确；

当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$时，$u=2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$f(u)=\sin u$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，D 错误.

故选：ABC

10. 【答案】AC

解：由题意得$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{3}$，

所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以$\alpha+\beta$的值可能为$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{2\pi}{3}$.

故选：AC

11．　【答案】BC

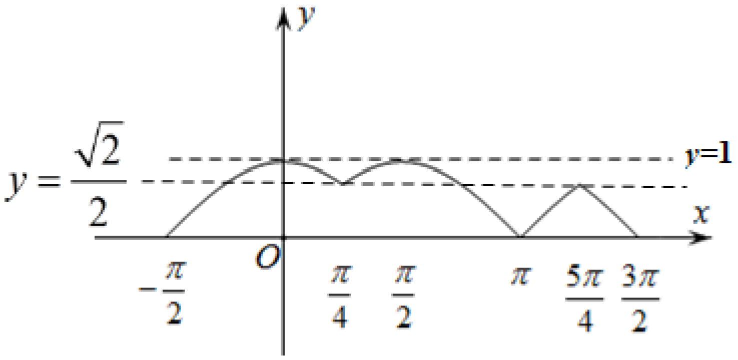
函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\sin x\right|,\left(\sin x\geq\cos x\right)\\\left|\cos x\right|,\left(\cos x>\sin x\right)\end{cases}$

所以 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\sin x\right|,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\dfrac{5\pi}{4},k\in Z\\\left|\cos x\right|,2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\end{cases}$

由 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，可知 A 错误；

画出函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 的图象，如图所示：

显然有 $f(x+2\pi)=f(x)$，结合图象 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，所以 B 正确；



在区间 $\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 上 $\sin x>\cos x$，$f\left(x\right)=\left|\sin x\right|=-\sin x$ 为增函数，C 正确.

当 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<1$ 时，四个实根之和为 π，当 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，四个实根之和为 2π，

当 $0<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，四个实根之和为 3π，所以 D 错误.

故选：BC.

12．　【答案】BCD

由 $f\left(-x\right)+f\left(x\right)=2\sin^2\omega x$，$\omega>0,x\in\mathbf{R}$，$f\left(-x\right)+f\left(x\right)=0$ 不恒成立，故不存在 ω 使 $f\left(x\right)$ 是奇函数，A 不正确；

当 $\omega=\dfrac{3}{2}$ 时，由 $f\left(x\right)=\sin^2\dfrac{3}{2}x+\sqrt{3}\sin\dfrac{3}{2}x\cdot\cos\dfrac{3}{2}x=\sin\dfrac{3}{2}x\left(\sin\dfrac{3}{2}x+\sqrt{3}\cos\dfrac{3}{2}x\right)=0$

得 $\sin\dfrac{3}{2}x=0$，或 $\sin\dfrac{3}{2}x+\sqrt{3}\cos\dfrac{3}{2}x=0$，又 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

解得 $x_1=0,x_2=\dfrac{4\pi}{9}$，则 B 正确；

由 $f\left(x\right)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos 2\omega x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x=\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

由 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，得 $-\dfrac{\pi}{6}\leq 2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\leq\pi\omega-\dfrac{\pi}{6}$，

若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恰有 2 个零点 x_1,x_2，

令 $f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=0$ 得 $\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，在 $-\frac{\pi}{6}\le 2\omega x-\frac{\pi}{6}\le \pi\omega-\frac{\pi}{6}$

仅有两个解，故 $\frac{7\pi}{6}\le \pi\omega-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，所以 $\frac{4}{3}\le\omega<2$，C 正确；

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 得 $-\frac{\pi}{6}\le 2\omega x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}$，又因为 $\frac{4}{3}\le\omega<2$，

所以 $\frac{5\pi}{18}\le\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增正确，

故选：BCD

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 【答案】$\frac{2\pi}{3}$##$120°$

若圆心角为 2θ，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $2\theta\in(0,\pi]$，故 $\theta=\frac{\pi}{3}$，

所以圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$

14. 【答案】$-\frac{24}{25}$

因为 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，

所以 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{49}{25}$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，故 $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$，

故答案为：$-\frac{24}{25}$.

15. 【答案】$-3\sqrt{3}$

因为筒车按逆时针方向每旋转一周用时 120 秒，

所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=120$，得 $\omega=\frac{\pi}{60}$，

所以 $y=f(t)=R\sin\left(\frac{\pi}{60}t+\varphi\right)$，

因为当 $t=0$ 时，盛水筒 M 位于点 $P_0(3,-3\sqrt{3})$，

所以 $R=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，

所以 $f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{60}t+\varphi\right)$，

因为 $f(0)=-3\sqrt{3}$，

所以 $6\sin\varphi=-3\sqrt{3}$，得 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

所以$f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{3}\right)$，

所以$f(100)=6\sin\left(\frac{\pi}{60}\times 100-\frac{\pi}{3}\right)=6\sin\frac{4\pi}{3}=-6\sin\frac{\pi}{3}=-6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$，

所以当筒车旋转 100 秒时，盛水筒M对应的点P的纵坐标为$-3\sqrt{3}$，

故答案为：$-3\sqrt{3}$

16. 【答案】 49 $\frac{2}{5}$##0.4

由题意得$f\left(x\right)=\left(\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{25}{\cos^2 x}\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=29+\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{25\sin^2 x}{\cos^2 x}\geq 29+2\sqrt{\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{25\sin^2 x}{\cos^2 x}}=49$，

当且仅当$\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{25\sin^2 x}{\cos^2 x}$，即$\tan^2 x=\frac{2}{5}$时，等号成立.

故答案为：49，$\frac{2}{5}$

四、解答题

17. 【答案】(1) $\tan\alpha=\sqrt{2}$ (2) $\frac{5}{3}$

(1)解：选①：因为$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{1}{3}$，所以$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为角α是第一象限角，所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

选②：因为$\tan^2\alpha+\sqrt{2}\tan\alpha-4=0$，所以$(\tan\alpha-\sqrt{2})(\tan\alpha+2\sqrt{2})=0$，

解得$\tan\alpha=\sqrt{2}$或$\tan\alpha=-2\sqrt{2}$，

因为角α是第一象限角，所以$\tan\alpha=\sqrt{2}$.

(2)解：由$\sqrt{2}\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)\cos(\alpha-3\pi)$

$=\sqrt{2}\sin 2\alpha+\cos^2\alpha=2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\quad=\frac{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}$

因为$\tan\alpha=\sqrt{2}$，所以$\frac{2\sqrt{2}\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2+1}=\frac{5}{3}$，

即$\sqrt{2}\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)\cos(\alpha-3\pi)=\frac{5}{3}$.

18. 【答案】(1) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$g(x)=\cos x$ (2)2

(1)根据题意可得：$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则$\omega=2$

∵图象的一个对称中心为$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$，则$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi,k\in Z$，即$\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6},k\in Z$

又∵$0<\varphi<\pi$，则$k=1,\varphi=\frac{\pi}{6}$

$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=f(x+\frac{\pi}{6})=\sin\left[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$

然后再把所得图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），得到 $g(x)=\cos x$

$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$g(x)=\cos x$

(2) $\phi(x)=g(x)-2\cos^2 x+1=-2\cos^2 x+\cos x+1=(2\cos x+1)(-\cos x+1)$

令 $\phi(x)=0$，则 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 或 $\cos x=1$

$\because x\in(0,2\pi)$，则有：

若 $\cos x=-\frac{1}{2}$，则 $x=\frac{2\pi}{3}$ 或 $x=\frac{4\pi}{3}$；若 $\cos x=1$，无解

$\therefore \phi(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内有 2 个零点

19. 【答案】(1)图象见解析，$T=\pi$；

(2) $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

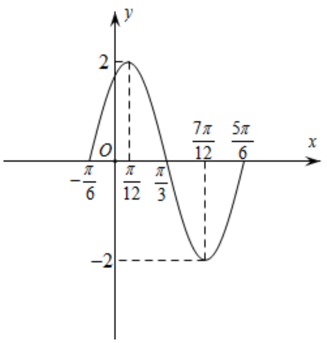
(3) $g(x)_{\max}=2$，$g(x)_{\min}=-2$；

(1)解：因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

列表如下：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

函数图象如下：



函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．

(2)解：令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

解得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以函数的单调递减区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

(3)解：将$y=f(x)$图像上所有的点向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

再$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$将横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变得到$g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$4x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$，所以$\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$，所以$g(x)\in[-2,2]$，

当$4x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{5\pi}{24}$时$g(x)_{\max}=2$，当$4x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即$x=\frac{11\pi}{24}$时$g(x)_{\min}=-2$；

20. 【答案】(1)$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right](2)\left[\frac{1}{2},1\right)$

(1)解：因为$\vec{m}=\left(2-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),-2\right)$，$\vec{n}=\left(1,\sin^2 x\right)$且$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，

所以$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=2-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin^2 x$，

$=2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)-(1-\cos 2x)$

$=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+1=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，

即$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，

令$2k\pi-\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi$，$k\in Z$，解得$k\pi-\frac{2\pi}{3}\le x\le k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

又因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以函数$f(x)$的单调增区间为：$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)解：因为$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，

所以将函数$f(x)$的图象所有的点向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到$f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+1=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

将所得图象上各点横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）再向下平移1个单位得到$g(x)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，

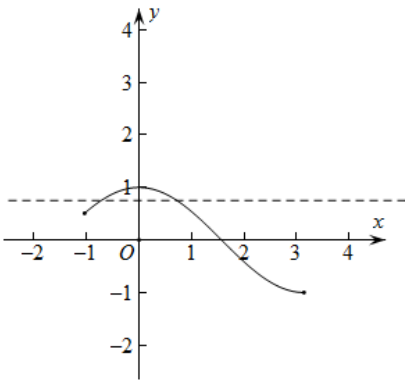
又因为$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{24}\right]$，所以$t=4x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\pi\right]$，

令$-\frac{\pi}{3}\le 4x+\frac{\pi}{6}\le 0$，解得$-\frac{\pi}{8}\le x\le -\frac{\pi}{24}$，

令$0\le 4x+\frac{\pi}{6}\le\pi$，解得$-\frac{\pi}{24}\le x\le\frac{5\pi}{24}$，

即函数$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{24}\right]$上单调递增，在$\left[-\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24}\right]$上单调递减，且$g\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

作出 $y=\cos t\left(-\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant \pi\right)$ 图像可得：



所以 m 的取值范围 $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

21. 【答案】(1)4；

(2) $\frac{1}{2}\le k<1$.

(1)当 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 时， $x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，则当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)_{\min}=1$，

当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)_{\max}=2$，

$|f(x)-m|\le 3\Leftrightarrow f(x)-3\le m\le f(x)+3$，于是得 $[f(x)-3]_{\max}=-1$， $[f(x)+3]_{\min}=4$，

依题意，任意 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$， $f(x)-3\le m\le f(x)+3$，因此有 $-1\le m\le 4$，

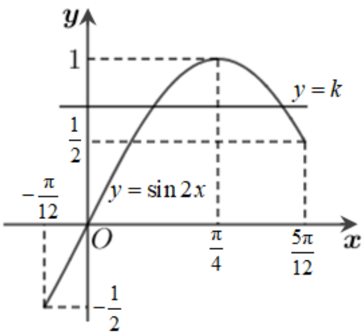
所以整数 m 的最大值是 4.

(2)依题意， $g(x)=2\sin(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{3})=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$，则 $h(x)=2\sin[2(x-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{6}]=2\sin 2x$，

当 $x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ 时， $2x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，当 $-\frac{\pi}{6}\le 2x\le\frac{\pi}{2}$，即 $-\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{4}$ 时，

函数 $y=\frac{1}{2}h(x)=\sin 2x$ 在 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，函数值从 $-\frac{1}{2}$ 递增到 1，

当 $\frac{\pi}{2}\le 2x\le\frac{5\pi}{6}$，即 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{12}$ 时，函数 $y=\frac{1}{2}h(x)=\sin 2x$ 在 $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}]$ 上单调递减，函数值从 1 递减到 $\frac{1}{2}$，如图，



方程 $\frac{1}{2}h(x)-k=0$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ 上有 2 个不同实数解，等价于函数 $y=\sin 2x$ 在 $[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ 上的图象与直线 $y=k$ 有两个公共点，

观察图象知，当$\frac{1}{2}\le k<1$时，函数$y=\sin 2x$在$[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$上的图象与直线$y=k$有两个公共点，所以实数$k$的取值范围是$\frac{1}{2}\le k<1$.

22．【答案】(1) $a=0$ (2) $\left[\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right]$

(1)若$f(x)$为奇函数，因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，所以$f(0)=0$，则$a=0$.

(2) $x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$2x_2+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以$g(x)=\sin\left(2x_2+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

设$f(x)$在$[0,1]$的值域为A，$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$B$，则$A\subseteq B=\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

当$a\le 0$时，$f(x)$在$[0,1]$单调递减，$A=[f(1),f(0)]$，$\begin{cases}f(1)\ge -\frac{1}{2}\\ f(0)\le 1\end{cases}$，$\therefore\frac{1}{8}\le a\le 1$（舍）

当$a>0$时，$f(0)\leqslant 1$，即$0<a\le 1$，

若$\frac{2}{3}\le a\le 1$，$f(x)$在$[0,1]$单调递减，只需$f(1)=1-2a\ge -\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{2}{3}\le a\le\frac{3}{4}$；

若$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$，$f(x)$在$\left[0,\frac{3a}{2}\right]$单调递减，在$\left[\frac{3a}{2},1\right]$单调递增，所以$f(x)_{\min}=f\left(\frac{3a}{2}\right)$，只需$f\left(\frac{3a}{2}\right)=-\frac{9a^2}{4}+a\ge -\frac{1}{2}$得$\frac{2-\sqrt{22}}{9}\le a\le\frac{2+\sqrt{22}}{9}$，$\therefore\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$；

若$0<a\le\frac{1}{3}$，$f(x)_{\min}=\left\{f\left(\frac{3a}{2}\right),\ f(1)\right\}$，所以只需$\begin{cases}f\left(\frac{3a}{2}\right)\ge -\frac{1}{2}\\ f(1)\ge -\frac{1}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{2-\sqrt{22}}{9}\le a\le\frac{2+\sqrt{22}}{9}\\ a\ge\frac{1}{8}\end{cases}$，$\therefore\frac{1}{8}\le a\le\frac{1}{3}$.

综上，实数a的取值范围为$\left[\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right]$.