第 01 讲 平面向量的概念及其线性运算（精练）

一、单选题

1【答案】D

【详解】

单位向量的方向不一定相同，故 A 错误；

当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，显然 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不一定平行，故 B 错误；

非零向量 $\vec{a}$ 共线的单位向量有 $\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，故 C 错误；

由共线定理可知，若存在非零实数 λ,μ，使得 $\lambda\vec{a}=u\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，故 D 正确.

故选：D.

2【答案】B

【详解】

对于 A 选项，由于任意两个向量不能比大小，故 A 错；

对于 B 选项，$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，故 B 对；

对于 C 选项，$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同，故 C 错；

对于 D 选项，若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$，但 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的方向不确定，故 D 错.

故选：B.

3．【答案】A

【详解】

$\overrightarrow{AB}=(3,-4)$，设与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 (x,y)

则 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\3y-(-4)x=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\y=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$

当 $\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\y=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 时，所求向量为 $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，向量 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)=5\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，符合题意；

当 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$ 时，所求向量为 $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，向量 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)=-5\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，不符合题意，舍去.故选：A

4．【答案】D

【详解】

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

故选：D

5. 【答案】D

【详解】

$\because \overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b},\overrightarrow{BD}=2\vec{a}+10\vec{b}$ 不满足共线定理，A 错误；

$\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b},\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$ 不满足共线定理，B 错误；

$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{a}+8\vec{b}=-\vec{a}+13\vec{b}$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+5\vec{b}+2\vec{a}+10\vec{b}=3\vec{a}+15\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 不满足共线定理，C 错误；

$\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+10\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，D 正确.

故选：D.

6. 【答案】C

【详解】

解：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

故选：C.

7. 【答案】B

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$表示$\vec{a}$，$\vec{b}$方向上的单位向量，

由$\vec{a}=2\vec{b}$可知，$\vec{a}$，$\vec{b}$方向相同，所以$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$成立；

所以充分性成立，

若$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$成立，则$\vec{a}$，$\vec{b}$方向相同，即$\vec{a}=\lambda\vec{b}\left(\lambda>0\right)$，得不出$\vec{a}=2\vec{b}$

所以必要性不成立，

所以$\vec{a}=2\vec{b}$是$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$成立的充分不必要条件，

故选：B.

8. 【答案】B

【详解】

因平行四边形$ABCD$的对角线相交于点O，则$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

而$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AD},(m>0,n>0)$，于是得$\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2n}\overrightarrow{AN}$，又点$M$，$O$，$N$共线，

因此，$\frac{m}{2}+\frac{1}{2n}=1$，即$mn+1=2n$，又$mn=\frac{1}{3}$，解得$m=\frac{1}{2},n=\frac{2}{3}$，

所以$\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$.

故选：B

9. 【答案】B

【详解】

由题设，$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{9}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{CB}$，

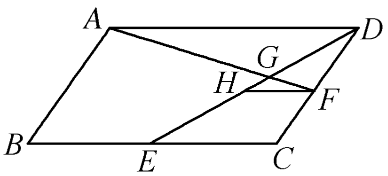
所以 C,P,B 共线且 P 在 CB 延长线上，$\frac{BP}{CB}=\frac{2}{9}$.

故选：B

10．【答案】B

【详解】

解：如图，



过点 F 作 BC 的平行线交 DE 于 H，

则 H 是 DE 的中点，且 $HF=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{4}BC$，

$\therefore HF=\frac{1}{4}AD$，

又 $\triangle AGD\sim\triangle FGH$，

所以 $\frac{AG}{GF}=\frac{AD}{FH}$，即 $FG=\frac{1}{4}AG$，

所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AF}$，

又 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$

故选：B

二、填空题

11．【答案】$\frac{\sqrt{5}}{6}$

【解析】

【详解】

$\because \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+4n\overrightarrow{AE}$，

又$\because$ P 为 BE 上一点，

所以 $m+4n=1$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+4n)=5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geq 5+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=9$，

当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$ 即 $m=\frac{1}{3}$ 且 $n=\frac{1}{6}$ 时，取等号，

∴向量 $\vec{a}=(m,n)$ 的模为 $\sqrt{m^2+n^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{6}$.

12．【答案】$\sqrt{5}-1$

【详解】

由题意可知，$\because \frac{MN}{AM}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore \frac{QN}{AN}=\frac{MN}{AM}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即 $\overrightarrow{QN}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{NA}$，$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CP},\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}$，

$\overrightarrow{QN}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{NA}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MN}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CP}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{NM}$，

又 $\overrightarrow{QN}=x\overrightarrow{CP}+y\overrightarrow{NM}$，所以 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

所以 $x+y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}-1$.

故答案为：$\sqrt{5}-1$.

三、解答题

13．【答案】(1) $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ (2) $\lambda=\frac{5}{6}$，$\mu=\frac{2}{5}$

(1)解：因为 $2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}$，

所以 $2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}$，即 $3\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2)解：若 $\frac{DF}{DE}=\lambda$，$\frac{AE}{AC}=\mu$，则 $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DE}$

所以 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AF}=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AE}=4(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\mu\overrightarrow{AC}=4(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\mu\vec{b}$

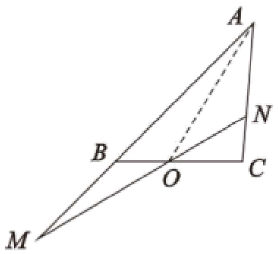
由于 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$，

所以 $4(1-\lambda)=\frac{2}{3}$，$\lambda\mu=\frac{1}{3}$，解得 $\lambda=\frac{5}{6}$，$\mu=\frac{2}{5}$.

所以 $\lambda=\frac{5}{6}$，$\mu=\frac{2}{5}$.

14．【答案】(1)3(2)2

(1)连接 AO.



因为$OC = 2OB$，$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$，

所以$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}m\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}n\overrightarrow{AN}$.

因为M，O，N共线，

所以$\frac{2}{3}m + \frac{1}{3}n = 1$，$2m + n = 3$.

(2)

显然$t > 0$，所以$\frac{t}{m} + \frac{t}{n} \geq 2 + \sqrt{2}$等价于$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq \frac{2+\sqrt{2}}{t}$，

即$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)_{\min} \geq \frac{2+\sqrt{2}}{t}$.

因为$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(2m+n) = \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2m}{n} + \frac{n}{m}\right) \geq 1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$，当且仅当$n = \sqrt{2}m$，

即$m = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$，$n = 3\sqrt{2} - 3$时，$\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$取到最小值$1 + \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{3}$.

于是$\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{3} \geq \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}}{t}$，

∴$t \geq 6 - 3\sqrt{2}$.

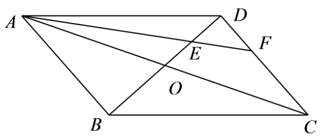
故实数t的最小整数值是 2.

第 02 讲 平面向量基本定理及坐标表示（精练）

一、单选题

1．【答案】A

解：依题意$\triangle DEF \backsim \triangle BEA$，所以$\frac{DF}{AB}=\frac{DE}{BE}=\frac{1}{3}$，即$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，



所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$；

故选：A

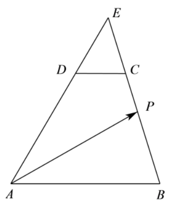
2．【答案】A

【详解】

解：延长AD、CB交于点E，则B、P、E三点共线，于是可得$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$，

因为$AB//CD$且$AB=4CD$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$，故$\lambda=\frac{4}{5}$；



故选：A

3．【答案】A

因为点D是线段BC的中点，E是线段AD的靠近A的三等分点，

所以$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，

故选：A

4．【答案】A

因为$\vec{a}=\left(-1,2\right),\vec{b}=\left(1,-2\lambda\right)$，

所以$\vec{a}+3\vec{b}=\left(2,2-6\lambda\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-2,2+2\lambda\right)$．

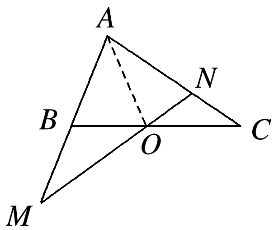
因为$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\mathbin{/\mkern-4mu/}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，

所以$2\times\left(2+2\lambda\right)=\left(-2\right)\times\left(2-6\lambda\right)$，解得：$\lambda=1$.

故选：A

5．【答案】C

如图，连接AO，由O为BC的中点可得，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\dfrac{n}{2}\overrightarrow{AN}$

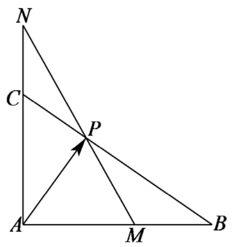


$\because M$，O，N三点共线，则$\dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{2}=1,$即$m+n=2$

故选： C

6．【答案】B

如下图所示：



由$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$，可得$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

若$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，$\left(m>0,n>0\right)$，

则$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{m}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{n}\overrightarrow{AN}$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3m}\overrightarrow{AM}+\dfrac{2}{3n}\overrightarrow{AN}$，

$\because M$、P、N三点共线，

$\therefore\dfrac{1}{3m}+\dfrac{2}{3n}=1$，$\therefore\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}=3$，

故 A 正确；

所以$m=\dfrac{1}{2}$，$n=2$时，也满足$\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}=3$，则 D 选项正确；

$\because m+2n=\left(m+2n\right)\left(\dfrac{1}{3m}+\dfrac{2}{3n}\right)=\dfrac{2n}{3m}+\dfrac{2m}{3n}+\dfrac{5}{3}\geq2\sqrt{\dfrac{2n}{3m}\cdot\dfrac{2m}{3n}}+\dfrac{5}{3}=3$，当且仅当$m=n$时，等号成立，C 选项成立；

$\because m+n=\left(m+n\right)\left(\dfrac{1}{3m}+\dfrac{2}{3n}\right)=\dfrac{n}{3m}+\dfrac{2m}{3n}+1\geq2\sqrt{\dfrac{n}{3m}\cdot\dfrac{2m}{3n}}+1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+1$，当且仅当$n=\sqrt{2}m$时，即$m=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$，$n=\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$

时等号成立，故 B 选项错误.

故选：B

二、多选题

7．【答案】ABD

【详解】

解：由三角形重心性质得 $BG=2GE$，

所以 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，A 正确；

因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}=2\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}$，B 正确；

由重心性质得，$\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$，C 错误；

因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$，

所以 $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}$，

即 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，D 正确.

故选：ABD.

8．【答案】ABD

【详解】

解：如图 1，补全图形，则在直角 $\triangle ABG$ 中，$AG=AB\cdot\tan\angle B=2\sqrt{3}$，则 $GD=\sqrt{3}$，$CD=\frac{1}{2}GD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$CG=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，

又 $BG=2AB=4$，所以 $BC=\frac{5}{2}$，A 正确；

故以点 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 方向为 x,y 轴建立平面直角坐标系，如图 2.

所以，$A(0,0),B(2,0),D\left(0,\sqrt{3}\right),C\left(\frac{3}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4}\right),E\left(\frac{3}{8},\frac{9\sqrt{3}}{8}\right),F\left(x_0,0\right),x_0\in[0,2]$，

所以，当 F 为线段 AB 的中点时，$F(1,0)$，此时 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{5}{8},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right),\overrightarrow{DA}=\left(0,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{CB}=\left(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$，故由

$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{CB}$ 得 $\begin{cases}\frac{5}{8}=\mu\frac{5}{4}\\-\frac{9\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}\lambda-\frac{5\sqrt{3}}{4}\mu\end{cases}$，解得 $\mu=\lambda=\frac{1}{2}$，故 $\lambda+\mu=1$，B 正确；

$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=\left(\frac{3}{4}-x_0,\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(-x_0,\sqrt{3}\right)=x_0^2-\frac{3}{4}x_0+\frac{15}{4}=\left(x_0-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{231}{64}$，所以当 $x_0=\frac{3}{8}$ 时，$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}$ 取得最小值 $\frac{231}{64}$，故 C 错误；

$\overrightarrow{EF}=\left(x_0-\frac{3}{8},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right),\overrightarrow{DA}=\left(0,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{CB}=\left(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$，故由 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{CB}$ 得 $\begin{cases}x_0-\frac{3}{8}=\mu\frac{5}{4}\\-\frac{9\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}\lambda-\frac{5\sqrt{3}}{4}\mu\end{cases}$，故当 $x_0=0$ 时，μ 取得最小值 $\mu_{\min}=-\frac{3}{10}$，$x_0=2$ 时，μ 取得最大值 $\mu_{\max}=\frac{13}{10}$，故 $\mu_{\max}-\mu_{\min}=\frac{8}{5}$，D 正确.

故选：ABD

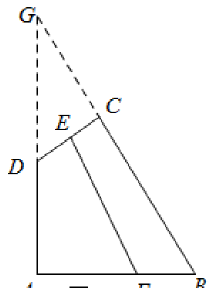


图1

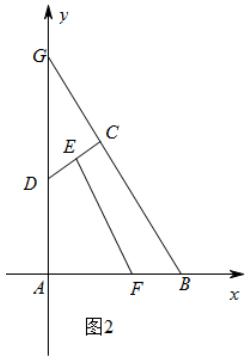


图2

三、填空题

9．【答案】$(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})$

由已知 $\vec{a}-\vec{b}=(2,-1)$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$，

所以与 $\vec{a}-\vec{b}$ 同方向的单位向量是 $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}=(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})$．

故答案为：$(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})$

10．【答案】$-\frac{1}{3}$

因为 D 为线段 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

又因为 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=-\frac{1}{6},y=-\frac{1}{6}$，所以 $x+y=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$．

故答案为：$-\frac{1}{3}$．

11．【答案】$-\frac{10}{27}$

因为 $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{OA}=-\lambda\overrightarrow{AO}=-\frac{\lambda}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$，所以 $\overrightarrow{AK}=-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{7}{5}\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{AF}\right)=-\frac{7}{10}\lambda\overrightarrow{AE}-2\lambda\overrightarrow{AF}$．又 E，F，K 三点共线，

所以 $-\frac{7}{10}\lambda-2\lambda=1$，解得：$\lambda=-\frac{10}{27}$．

故答案为：$-\frac{10}{27}$

12．【答案】$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

$\because \vec{a}/\!/\vec{b}$，$\therefore 2m=4-n\Leftrightarrow 2m+n=4\ (m>0,n>0)$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)(2m+n)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(6+\frac{n}{m}+\frac{8m}{n}\right)\geq\frac{1}{4}\left(6+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{8m}{n}}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{8m}{n}$ 时取等号.

故答案为：$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

四、解答题

13．【答案】(1) $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=-\frac{1}{3}$ (2) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

(1)以A点为原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y轴，建立平面直角坐标系，则$D(0,1),B(2,0),M\left(\frac{2}{3},1\right),N\left(2,\frac{2}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{MN}=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),\overrightarrow{AB}=(2,0),\overrightarrow{AD}=(0,1)$

所以$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=(2\lambda,\mu)$，

所以$\begin{cases}2\lambda=\frac{4}{3}\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{cases}$

解得$\lambda=\frac{2}{3},\mu=-\frac{1}{3}$

(2)设$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，

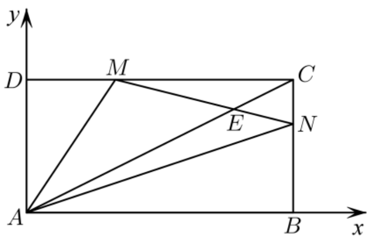
因为$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2}{3},1\right),\overrightarrow{AN}=\left(2,\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$

所以$\overrightarrow{AC}=(2,1)=\left(\frac{2}{3}m+2n,m+\frac{2}{3}n\right)$. 解得$m=\frac{3}{7},n=\frac{6}{7}$，

即$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AN}$，所以$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}t\overrightarrow{AM}+\frac{6}{7}t\overrightarrow{AN}$，

又因为M，E，N三点共线，所以$\frac{3}{7}t+\frac{6}{7}t=1,t=\frac{7}{9}$，

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.



第 03 讲 平面向量的数量积（精练）

一、单选题

1. 【答案】C

由题意得$\vec{a}\cdot\vec{b}=-m-1+2m=0$，解得$m=1$

故选：C.

2. 【答案】C

因为$|\vec{a}|=2$，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为 1，所以$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=1$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$；

所以$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为$\dfrac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{4+2}{2}=3$；

故选：C.

3. 【答案】B

由$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，平方得$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$.

故选：B.

4. 【答案】D

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{4-2\times2\times1\times\frac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$.

故选：D.

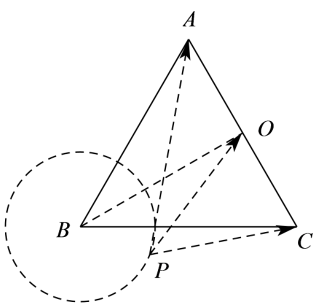
5. 【答案】D

由$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ为锐角知$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，即$1-2\lambda>0$且$\lambda\neq-2$，即$\lambda<\dfrac{1}{2}$且$\lambda\neq-2$.

故选：D.

6. 【答案】A

设AC中点为O，连接OB，则OB＝3，



因为$BP=1$，所以P点在以B为圆心，1 为半径的圆上，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}\left[(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})^2\right]=\overrightarrow{PO}^2-\frac{\overrightarrow{AC}^2}{4}=\overrightarrow{PO}^2-3$，

显然，当B，P，O三点共线时，PO取得最小值2，

$\therefore(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP})_{\min}=4-3=1$.

故选：A

二、多选题

7. 【答案】AC

由$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,3)$，可知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+1\times3=6$，

对于A选项，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10-10=0$，故$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，故A正确；

对于B选项，设θ为$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角，则$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3}{5}\neq\frac{1}{2}$，故B错误；对于C选项，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$|\vec{a}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{3}{5}\vec{b}$，故C正确；对于D选项，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$|\vec{b}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{3}{5}\vec{a}$，故D错误.

故选：AC.

8. 【答案】ABC

由题意，分别以HD,BF所在的直线为x轴和y轴，建立如图所示的平面直角坐标系，

因为正八边形$ABCDEFGH$，所以$\angle AOH=\angle HOG=\angle AOB=\angle EOF=\angle FOG$

$=\angle DOE=\angle COB=\angle COD=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$，

作$AM\perp HD$，则$OM=AM$，

因为$OA=2$，所以$OM=AM=\sqrt{2}$，所以$A(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

同理可得其余各点坐标，$B(0,-2)$，$E(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(2,0)$，$H(-2,0)$，

对于A中，$\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=(0+\sqrt{2}+(-\sqrt{2}),-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})=\vec{0}$，故A正确；

对于B中，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2})\times2+(-\sqrt{2})\times0=-2\sqrt{2}$，故B正确；

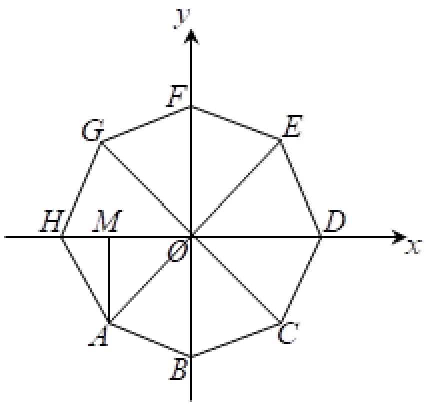
对于C中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EH}=(-2-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}=(-4,0)$，

所以$|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$，故C正确；

对于D中，$\overrightarrow{AH}=(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{GH}=(-2+\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}=(-4+2\sqrt{2},0)$，

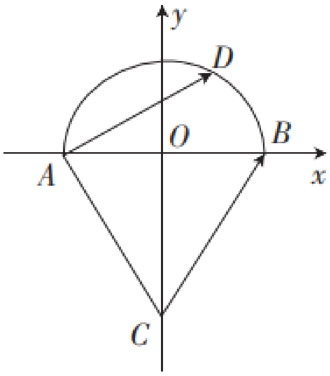
$|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}|=\sqrt{(-4+2\sqrt{2})^2+0^2}=4-2\sqrt{2}$，故D不正确.

故选：ABC.



9．【答案】BC

如图所示，以 AB 所在直线为 x 轴，以 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,-\sqrt{3})$.



令 $D(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\le\theta\le\pi$，则 $\overrightarrow{AD}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$，$\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\cos\theta+1+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

因为 $0\le\theta\le\pi$，所以 $\frac{\pi}{6}\le\theta+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，所以 $-\frac{1}{2}\le\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\le1$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1\in[0,3]$.

故选：BC.

三、填空题

11．【答案】$\frac{5}{2}$ ##2.5

因为 $(\lambda\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，

所以 $(\lambda\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，即 $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$，

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+1\times4=10$，$\vec{b}^2=3^2+4^2=25$，

所以$10\lambda-25=0$，解得$\lambda=\frac{5}{2}$，

故答案为：$\frac{5}{2}$.

12．【答案】$\frac{\sqrt{5}}{6}$

$\because \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+4n\overrightarrow{AE}$，

又$\because P$为BE上一点，

所以$m+4n=1$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+4n)=5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geq 5+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=9$，

当且仅当$\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$即$m=\frac{1}{3}$且$n=\frac{1}{6}$时，取等号，

$\therefore$向量$\vec{a}=(m,n)$的模为$\sqrt{m^2+n^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{6}$.

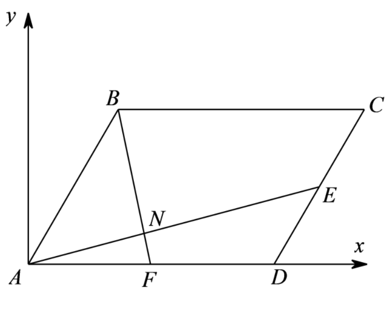
四、解答题

13．【答案】(1)$\frac{10}{21}$；(2)$\left[-5,\frac{1}{16}\right]$.

【解析】

(1)在平行四边形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=AD=3$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore$建立如图坐标系，



则$A(0,0)$，$D(3,0)$，$B(1,\sqrt{3})$，$C(4,\sqrt{3})$，

Q E为CD中点，故$E\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

Q $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AD}$，故$F(3\lambda,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{BF}=(3\lambda-1,-\sqrt{3})$，

$\because \overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BF}$，$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，

所以$\frac{7}{2}\times(3\lambda-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

$\therefore \lambda=\frac{10}{21}$；

(2)由（1）可知，$B(1,\sqrt{3})$，$F(3\lambda,0)$，$E\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{BF}=(3\lambda-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FE}=\left(\frac{7}{2}-3\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}=(3\lambda-1)\left(\frac{7}{2}-3\lambda\right)-\frac{3}{2}=-9\lambda^2+\frac{27}{2}\lambda-5$，对称轴为$\lambda=\frac{3}{4}$．

$\because 0\leqslant\lambda\leqslant 1$，当$\lambda=\frac{3}{4}$时，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}$的最大值为$\frac{1}{16}$，

当$\lambda=0$时，最小值为-5，

所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}\in\left[-5,\frac{1}{16}\right]$．

14．【答案】(1)2；(2)$[-\frac{1}{4},2]$．

(1)由图知：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$，

所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD})$，

又$AB=2AD=2CD=4$，$AB//CD$，$\angle DAB=90°$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\times(0+2\times4-2^2-0)=2$．

(2)由（1）知：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})$，

令$\overrightarrow{EC}=\lambda\overrightarrow{DC}$且$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}-(1-\lambda)\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{EF}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，

所以$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-(1-\lambda)(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DC}^2+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}^2)$

$-\frac{1-\lambda}{2}(\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD})=4(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})+2=4(\lambda-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}$．

则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}\in[-\frac{1}{4},2]$．

第 04 讲 正弦定理和余弦定理（精练）

一、单选题

1．【答案】D

【详解】

因为$a^2+b^2<c^2$，由余弦定理可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，

又由$C\in(0,\pi)$，所以$C\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，所以$\triangle ABC$是钝角三角形.

故选：D.

2．【答案】B

根据三角形面积公式可得该三角形的面积为$\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ=\sqrt{3}$.

故选：B.

3．【答案】B

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore a=\dfrac{6\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=\dfrac{6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=6\sqrt{2}$.

故选：B .

4．【答案】B

因为$AC^2=6^2+2^2=40$，$AD^2=6^2+(5-2)^2=45$，

在$\triangle ACD$中，

由余弦定理得$\cos\angle CAD=\dfrac{AD^2+AC^2-CD^2}{2AD\cdot AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$0^\circ<\angle CAD<180^\circ$，

所以$\angle CAD=45^\circ$.

故选：B.

5．【答案】D

设$DE=x$，则$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle DEF}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}BD\cdot AD\sin\angle ADB}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}DE^2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times1\times(1+x)\sin120^\circ}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2}=\dfrac{1+x}{x^2}=\dfrac{3}{4}$，

解得$x=2$（$-\dfrac{2}{3}$舍去），

所以$S_{\triangle DEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$，

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}+\dfrac{9}{4}\times\sqrt{3}=\dfrac{13}{4}\sqrt{3}$，

故选：D.

6．【答案】C

$\because$ $c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$，

∴ $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos C$，又 $A\in(0,\pi)$， $\sin A\neq 0$，

∴ $\tan C=\sqrt{3}$， $C\in(0,\pi)$，

∴ $C=\frac{\pi}{3}$，又 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， $c=3\sqrt{3}$， $ab=18$，

∴ $27=a^2+b^2-18$，

∴ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=81$，

∴ $a+b=9$，

故选：C.

7. 【答案】C

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB=4$， $BC=3$， $\angle ABC=60^\circ$，

所以由余弦定理，得 $AC=\sqrt{4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{1}{2}}=\sqrt{13}$，

由正弦定理，得 $BD=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{\frac{52}{3}-16}=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{\frac{52}{3}-9}=\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

又 $\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=120^\circ$，

所以 $\triangle ACD$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

故选：C.

8. 【答案】B

因为 $|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(8b^2-9a^2\right)$，

所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(8b^2-9a^2\right)$,即 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(8b^2-9a^2\right)$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{12}\left(8b^2-9a^2\right)=\frac{1}{2}bc\sin A$,

由余弦定理， $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2=b^2+c^2-bc$，代入上式得，

$\frac{\sqrt{3}}{12}\left[8b^2-9(b^2+c^2-bc)\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，化简得 $b^2-6bc+9c^2=0$，

即 $(b-3c)^2=0$， $\therefore b=3c$，此时 $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}=\sqrt{7}c.$

$$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7+1-9}{2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

故选：B

二、多选题

9. 【答案】BCD

选项 A. 在$\triangle ABC$中，若$\sin 2A=\sin 2B$,则$2A=2B$或$2A+2B=\pi$

所以$A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\triangle ABC$为等腰或直角三角形．故 A 不正确.

选项 B. 在$\triangle ABC$中，若$A>B$,则$a>b$，

由正弦定理可得$2R\sin A>2R\sin B$,即$\sin A>\sin B$，故 B 正确.

选项 C. 若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$A+B>\dfrac{\pi}{2}$

所以$\dfrac{\pi}{2}>A>\dfrac{\pi}{2}-B>0$，所以$\sin A>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,故 C 正确.

选项 D. 在$\triangle ABC$中,若$\sin A>\sin B$，由正弦定理可得$\dfrac{a}{2R}>\dfrac{b}{2R}$，

即$a>b$，所以$A>B$，故 D 正确.

故选：BCD

10. 【答案】ACD

对于 A，由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}$，故 A 正确；

对于 B，若$A>B$，当$A=120^\circ$，$B=30^\circ$时，则$\sin 2A<\sin 2B$，故 B 不正确；

对于 C，$c=a\cos B+b\cos A\Rightarrow \sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin\left(A+B\right)=\sin C$，

故 C 正确；

对于 D，由$\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，可得$\angle BAC$的角平分线与$BC$垂直，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形

又$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}$，可得$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABC$为等边三角形，故 D 正确；

故选：ACD

11. 【答案】ABD

因为$\cos\angle CDB=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\angle CDB=\sqrt{1-\cos^2\angle CDB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 A 正确；

设$CD=a$，则$BC=2a$，

在$\triangle BCD$中，$BC^2=CD^2+BD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle CDB$，解得$a=\sqrt{5}$，

所以$S_{\triangle DBC}=\dfrac{1}{2}BD\cdot CD\cdot\sin\angle CDB=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=3$，故 B 正确；

因为$\angle ADC=\pi-\angle CDB$，

所以$\cos\angle ADC=\cos\left(\pi-\angle CDB\right)=-\cos\angle CDB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

在$\triangle ADC$中,$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$，解得$AC=2\sqrt{5}$，

所以$\triangle ABC$的周长为$AB+AC+BC=\left(3+5\right)+2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=8+4\sqrt{5}$，故 C 错误；

因为$AB=8$为最大边，所以$\cos C=\dfrac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=-\dfrac{3}{5}<0$，即$C$为钝角，

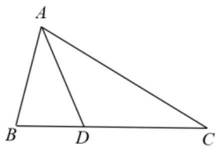
所以$\triangle ABC$为钝角三角形，故 D 正确.

故选：ABD.

三、填空题

12．【答案】9

由题意画图如下：



因为 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$ 所以

$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60^\circ=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin 30^\circ+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin 30^\circ$ 化简得

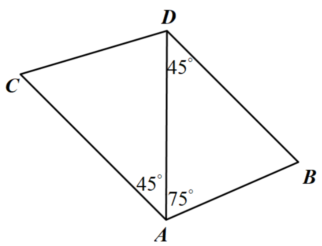
$\frac{1}{2}c\cdot b\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot b\frac{1}{2},bc=b+c,\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 利用基本不等式“1 的代换”得

$$b+4c=(b+4c)\times 1=(b+4c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=5+\frac{4c}{b}+\frac{b}{c}\geq 5+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=9$$

故答案为：9.

13．【答案】$3\sqrt{2}$

如图，在△*ABD* 中，因为在 *A* 处看灯塔 *B* 在货轮的北偏东 75°的方向上，距离为$2\sqrt{6}$海里，



货轮由 *A* 处向正北航行到 *D* 处时，再看灯塔 *B* 在南偏东 45°方向上，

所以 *B*＝180°−75°−45°＝60°

由正弦定理$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以 $AD=\frac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\frac{2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6$ 海里；

在△*ACD* 中，*AD*＝6，*AC*＝$3\sqrt{2}$，∠*CAD*＝45°，

由余弦定理可得：

$$CD^2=AD^2+AC^2-2\cdot AD\cdot AC\cos 45^\circ=6^2+(3\sqrt{2})^2-2\times 6\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=18，$$

所以 *CD*＝$3\sqrt{2}$海里；

故答案为：$3\sqrt{2}$.

四、解答题

14. 【答案】(1) $B=\frac{\pi}{3}$ (2) $4+2\sqrt{3}$.

(1)由正弦定理得：$2\sin B\cdot\cos A=2\sin C-\sin A$,所以 $2\sin B\cdot\cos A+\sin A=2\sin\left(A+B\right)=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$

即 $\sin A=2\sin A\cdot\cos B$

Q $A\in\left(0,\pi\right),\therefore\sin A\neq 0\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}$,

Q $B\in\left(0,\pi\right)\therefore B=\frac{\pi}{3}$

(2)由 $\sin A\cdot\sin C=\sin^2 B\ \therefore b^2=ac$

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=a^2+c^2-b^2$， $\therefore a^2+c^2=2b^2$

$\therefore\left(a-c\right)^2=a^2+c^2-2ac=a^2+c^2-2b^2=0$

$\therefore a=c$

$\therefore$VABC 为等边三角形，设 $AC=x$，$\angle ADC=\theta$，

在VADC 中，$\cos\theta=\frac{4+4-x^2}{2\times 2\times 2}$，解得 $x^2=8-8\cos\theta$

$S_{四边形ABCD}=S_{VABC}+S_{VACD}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-8\cos\theta)+2\sin\theta$

$=4\sin(\theta-\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}$

当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，S 有最大值 $4+2\sqrt{3}$.

15. 【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $2\sqrt{3}$

(1)由题 $f\left(x\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

所以 $f\left(A\right)=2\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

又因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，代入数据得：$3=b^2+c^2-bc$，

整理得到 $3=\left(b+c\right)^2-3bc\geq\left(b+c\right)^2-3\times\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(b+c\right)^2$

解得 $b+c\leq 2\sqrt{3}$，当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时，等号成立.

故 $c+b$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$.

16. 【答案】(1) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ (2) $2\sqrt{3}$

(1)解：QVABC 是锐角三角形，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4},\therefore\cos A=\frac{1}{4}$.

在VABC 中，$a=2\sqrt{6},b=4$，由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

$\because C=\pi-(A+B)$,

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

(2)解：由（1）知， $\sin B=\sin C,\therefore c=b=4$.

由题意得$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin A}=\frac{16}{AD\cdot AE}=2,\therefore AD\cdot AE=8$.

由余弦定理得， $DE^2=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos A\geq 2AD\cdot AE-\frac{1}{2}AD\cdot AE=\frac{3}{2}AD\cdot AE=12$，

当且仅当 $AD=AE=2\sqrt{2}$ 时“=”成立.

所以 DE 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

第 05 讲 正弦定理和余弦定理的应用（精练）

一、单选题

1．【答案】B

【详解】

由∠ACB＝90°，又 AC＝BC，∴∠CBA＝45°，

而 β＝30°，∴α＝90°－45°－30°＝15°.∴点 A 在点 B 的北偏西 15°.

故答案为 B.

2．【答案】A

解:在三角形$\triangle ABC$中,

$\angle ACB = 30^{\circ}, \angle CAB = 105^{\circ}$,

所以$\angle ABC = 180^{\circ} - 30^{\circ} - 105^{\circ} = 45^{\circ}$,

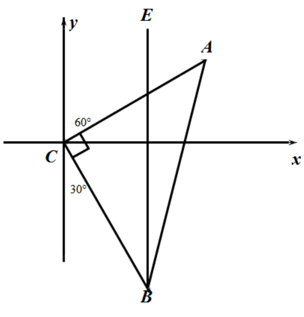
由正弦定理: $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = \dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$,

所以$AB = \dfrac{AC \cdot \sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \dfrac{50 \cdot \sin 30^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} = \dfrac{50 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 25\sqrt{2}$.

故选:A

3．【答案】A

由题意，点 *A* 在点 *C* 的北偏东 60°方向上，点 *B* 在点 *C* 的南偏东 30°方向上，且 *AC=BC*，可得几何位置关系如下图所示：



则$\angle CBE = 30^{\circ}$，$\angle ABC = 45^{\circ}$

所以$\angle ABE = 15^{\circ}$,故点 *A* 在点 *B* 的北偏东15°方向上

故选：A

4．【答案】C

由题意，三角形空地的面积为$\dfrac{1}{2} \times 32 \times 68 \times \dfrac{1}{2} = 544m^2$，

$\because$改造费用为 50 元$/m^2$，

$\therefore$这块三角形空地的改造费用为：$544 \times 50 = 27200$元.

故选：C.

5． 【答案】A

$PM=68,\angle PNM=45^\circ,\angle PMN=15^\circ$，

在ΔPMN 中有$\dfrac{MN}{\sin120^\circ}=\dfrac{PM}{\sin45^\circ}\Rightarrow MN=34\sqrt{6}$

$V=\dfrac{MN}{4}=\dfrac{17}{2}\sqrt{6}$海里/时，选 A.

6． 【答案】D

由$P_1P_2=a$，$\angle P_1P_2D=\alpha,\angle P_2P_1D=\beta$，

∴可求出DP_2、DP_1，

① $\angle DP_1C$和$\angle DCP_1$：△DP_1C中$\dfrac{DC}{\sin\angle DP_1C}=\dfrac{DP_1}{\sin\angle DCP_1}$，即可求$DC$；

② $\angle P_1P_2C$和$\angle P_1CP_2$：可求$\angle DP_1C$、P_1C，则在△DP_1C中$DC^2=DP_1^2+P_1C^2-2DP_1\cdot P_1C\cdot\cos\angle DP_1C$求$DC$；

③ $\angle P_1DC$和$\angle DCP_1$：可求$\angle DP_1C$，则在△DP_1C中$\dfrac{DC}{\sin\angle DP_1C}=\dfrac{DP_1}{\sin\angle DCP_1}$，即可求$DC$；

∴①②③都可以求DC.

故选：D

二、多选题

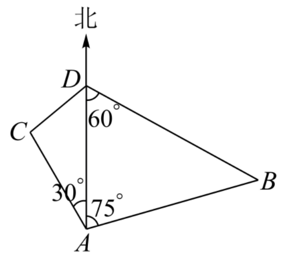
7． 【答案】ABC

因为A，C在河的同一侧，所以可以测量b，α与γ，

故选：ABC

8． 【答案】ABC

在△ABD中，由已知得$\angle ADB=60^\circ$，$\angle DAB=75^\circ$，



则$\angle B=45^\circ$，$AB=12\sqrt{6}$.

由正弦定理得$AD=\dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=24$，

所以A处与D处之间的距离为24 $n\ mile$ ，故A正确；

在$\triangledown ADC$中，由余弦定理得，

$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos30^\circ$，

又$AC=8\sqrt{3}$，

解得$CD=8\sqrt{3}$.

所以灯塔C与D处之间的距离为$8\sqrt{3}$ $n\ mile$ ，故B正确，

Q $AC=CD=8\sqrt{3}$，

$\therefore \angle CDA=\angle CAD=30^\circ$，

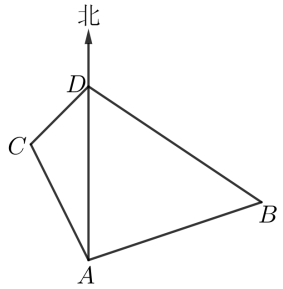
$\therefore$ 灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°，故 C 正确；

Q 灯塔 B 在 D 的南偏东 60°，

$\therefore D$ 在灯塔 B 的北偏西 60°，故 D 错误；

故选：ABC.

9. 【答案】AC



由题意可知 $\angle ADB=60^\circ,\angle BAD=75^\circ,\angle CAD=30^\circ$，所以 $\angle B=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$， $AB=12\sqrt{6},AC=8\sqrt{3}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以 $AD=\frac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24\left(nmile\right)$，故 A 正确；

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $CD=\sqrt{AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD}$，

即 $CD=\sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2+24^2-2\times8\sqrt{3}\times24\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}\left(nmile\right)$，故 B 错误；

因为 $CD=AC$，所以 $\angle CDA=\angle CAD=30^\circ$，所以灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°，故 C 正确；

由 $\angle ADB=60^\circ$， D 在灯塔 B 的北偏西 60° 处，故 D 错误.

故选：AC

三、填空题

10. 【答案】$\left(22.5+2\pi\right)\mathrm{km}$

连接 AD,BC，因为 $AB=\frac{3}{2}CD=6$，所以 $AB=6,CD=4$，

在 $\triangle ABD$ 中， $AB\perp BD,\cos\angle BAD=\frac{3}{5}$，所以 $\tan\angle BAD=\frac{4}{3}$，

由直角三角形三角函数的定义知， $BD=AB\cdot\tan\angle BAD=6\times\frac{4}{3}=8$，

所以 $BC=BD-CD=8-4=4$，

所以半圆 $\overset{\frown}{BC}$ 的弧长为 $\frac{1}{2}\times4\pi=2\pi$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中， $AB=6,BD=8$，

所以 $AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

在 VADE 中，设 $AE=DE=t(t>0)$，

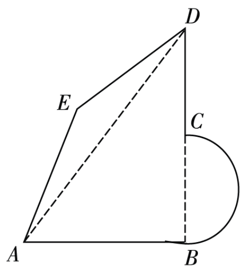
由余弦定理可得， $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cos E$，

即 $50=t^2\left(1-\cos E\right)$，

因为 $\angle E=2\angle BAD$，所以 $\cos\angle E=\cos 2\angle BAD=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$，

所以 $50=t^2\left(1+\frac{7}{25}\right)$，解得：$t=\frac{25}{4}$，

所以健康步道的长度为 $2\times\frac{25}{4}+6+4+2\pi=22.5+2\pi\left(\mathrm{km}\right)$.



故答案为：$\left(22.5+2\pi\right)\mathrm{km}$

11．【答案】$300+100\sqrt{3}$ m

在 $Rt\triangle AEC$ 中，$AE=200\mathrm{m}, AC=\frac{AE}{\sin 45^\circ}=200\sqrt{2}\mathrm{m}$，由图知 $\angle MAC=\angle MCA=75^\circ$，即 $\angle AMC=30^\circ$，

在 $\triangle AMC$ 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin 30^\circ}=\frac{MC}{\sin 75^\circ}$，

$\because \sin 75^\circ=\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore MC=\frac{AC\times\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{200\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=200(\sqrt{3}+1)$ m，

在 $Rt\triangle MNC$ 中，$MN=MC\sin 60^\circ=200(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=300+100\sqrt{3}\mathrm{m}$.

故答案为：$300+100\sqrt{3}$ m

四、解答题

12．【答案】(1) $\cos\theta=\frac{\sqrt{23}}{5}$

(2)1000 米.

(1)在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}$，

即 $\frac{1000}{\sin 45^\circ}=\frac{400}{\sin\angle CDB}$，

所以 $\sin\angle CDB=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

由题可知，$\angle CDB<90^\circ$，

所以 $\cos\angle CDB=\frac{\sqrt{23}}{5}$，即 $\cos\theta=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2)由（1）可知，$\cos\angle ADB=\sin\angle CDB=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$AB^2=BD^2+AD^2-2\cdot BD\cdot AD\cdot\cos\angle ADB$

$=1000^2+(400\sqrt{2})^2-2\times1000\times400\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=1000000$，

所以$AB=1000$，

故两隧道口AB间的距离为 1000 米.

13．【答案】(1)$\frac{3\pi}{4}$；(2)选① $AD=4$；选② $AD=4$.

(1)因为$\sqrt{2}b\cos B+a\cos C+c\cos A=0$，

所以$\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin A\cos C+\sin C\cos A=0$，

所以$\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin(A+C)=0$，

所以$\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin B=0$，

因为$0<B<\pi$，所以$\sin B\neq0$，

所以$\cos B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$B=\frac{3\pi}{4}$.

(2)选①，因为$\triangle ABC$的面积$S=2$，

所以$S=2=\frac{1}{2}ac\sin\frac{3\pi}{4}$，

即$\frac{\sqrt{2}}{2}a=2$，$a=2\sqrt{2}$，由余弦定理得

所以$AC=\sqrt{c^2+a^2-2ac\cdot\cos B}=2\sqrt{5}$，

所以$\cos\angle CAB=\frac{4+20-8}{2\times2\times2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

因为AC平分$\angle BAD$，

所以$\cos\angle CAD=\frac{AD^2+20-4}{2\cdot2\sqrt{5}\cdot AD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$AD=4$，

选②，因为$AC=2\sqrt{5}$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理：

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，

即$(2\sqrt{5})^2=2^2+BC^2-2\cdot2\cdot BC\cos\frac{3\pi}{4}$，

所以$BC=2\sqrt{2}$，

因为$\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle BAC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sin\frac{3\pi}{4}}$，

所以$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

因为 AC 平分 $\angle BAD$，所以 $\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

因为 $CD=2$，$AC=2\sqrt{5}$，由正弦定理得，

$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle D}$，所以 $\sin\angle D=\frac{AC\cdot\sin\angle DAC}{CD}=\frac{2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=1$，

又 $\angle D\in(0,\pi)$，所以 $\angle D=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\triangle ADC$ 是直角三角形，且 $\angle ADC=90^{\circ}$，

所以 $AD=4$.

14. 【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $2\sqrt{3}-3$

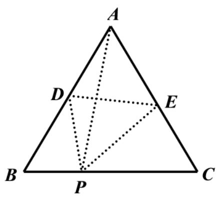
(1)由 $\tan B+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan B\cdot\tan C$ 得

$\therefore \tan B+\tan C=-\sqrt{3}(1-\tan B\cdot\tan C)\therefore\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=-\sqrt{3}=\tan(B+C)=-\tan A$

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，

由 $A\in(0,\pi)$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) $b=c=1$，$A=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形，连接 AP，
由折叠性质可知 A,P 两点关于折线 DE 对称，$\therefore AD=PD,\angle BAP=\angle APD$
设 $\angle BAP=\angle APD=\alpha$，$AD=PD=x$，则 $\angle BDP=2\alpha,DB=1-x$，



在 $\triangle ABC$ 中，$\angle APB=\pi-\angle ABP-\angle BAP=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，$\angle BPD=\frac{2\pi}{3}-2\alpha$，

又 $\angle DBP=\frac{\pi}{3}$，则在 $\triangle BDP$ 中，由正弦定理得：$\frac{1-x}{\sin(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)}=\frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

整理可得：$x=\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)+\sqrt{3}}$，

$\because 0\le\alpha\le\frac{\pi}{3},0\le\frac{2\pi}{3}-2\alpha\le\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 当 $\frac{2\pi}{3}-2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 时，$\sin(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)=1$，则 x 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$，即 AD 的最小值为 $2\sqrt{3}-3$.