第 22 讲　任意角和弧度制及任意角的三角函数

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

【基础巩固】

1.　【答案】C

【解析】$\frac{9\pi}{4}rad = 405° = 720^{\circ} - 315°$，故与其终边相同的角的集合为

$\{\alpha | \alpha = \frac{9\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$ 或 $\{\alpha | \alpha = -315° + k \cdot 360°, k \in Z\}$，角度制和弧度制不能混用，只有 C 符合题意

故选：C

2.　【答案】C

【解析】因为α是第三象限角，所以$k \cdot 360° < \alpha < k \cdot 360° + 90°, k \in \mathbf{Z}$，

所以$k \cdot 180° < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180° + 45^{\circ}, k \in \mathbf{Z}$，

当k为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角，

当k为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角.

故选：C.

3.　【答案】C

【解析】由题设，底面周长$l = \sqrt{2}\pi$，而母线长为$2\sqrt{2}$，

根据扇形周长公式知：圆心角$\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.

故选：C.

4.　【答案】A

【解析】终边与直线$y = x$重合的角可表示为$45° + k \cdot 180°, k \in Z$.

故选：A.

5.　【答案】D

【解析】设A、B两点再次重合小圆滚动的圈数为n，则

$n \times 2\pi \times 3 = 6n\pi = k \times 2\pi \times 4 = 8k\pi$，其中$k$、$n \in \mathrm{N}^*$，

所以，$n = \frac{4k}{3}$，则当$k = 3$时，$n = 4$.

故A、B两点再次重合小圆滚动的圈数为4.

故选：D.

6. 【答案】B

【解析】Q$\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，\ α是第二或第四象限角；

当α是第二象限角时，$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$，满足$\cos\alpha-\sin\alpha<0$；

当α是第四象限角时，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha<0$，则$\cos\alpha-\sin\alpha>0$，不合题意；

综上所述：α是第二象限角.

故选：B.

7. 【答案】B

【解析】∵角α的终边按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$后得到的角为$\alpha-\frac{\pi}{3}$，

∴由三角函数的定义，可得：$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{3}{5}$，

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{4}{5}$，

∴$\sin\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$，

故选：B.

8.【答案】ABD

【解析】与角$\frac{2\pi}{3}$的终边相同的角为$2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$，其余三个角的终边与角$\frac{2\pi}{3}$的终边不同.

故选：ABD.

9. 【答案】AB

【解析】设扇形的半径为r，弧长为 l，则$l+2r=12,S=\frac{1}{2}lr=8$，

∴解得$r=2,l=8$ 或$r=4,l=4$，则$\alpha=\frac{l}{r}=4$或 1.

故选：AB.

10. 【答案】CD

【解析】对于A，经过 30 分钟，钟表的分针转过$-\pi$弧度，不是π弧度，所以A错；

对于B，1°化成弧度是$\frac{\pi}{180}\text{rad}$，所以$B$错误；

对于C，由$\sin\theta>0$，可得θ为第一、第二及y轴正半轴上的角；

由$\cos\theta<0$，可得θ为第二、第三及x轴负半轴上的角.

取交集可得θ是第二象限角，故C正确；

对于D：若θ是第二象限角，所以$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi$，则$k\pi+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，

当$k = 2n(n ? Z)$时，则$2n\pi+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n\in Z)$，所以$\dfrac{\theta}{2}$为第一象限的角，

当$k=2n+1(n\in Z)$时，$2n\pi+\dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}(n\in Z)$，所以$\dfrac{\theta}{2}$为第三象限的角，

综上，$\dfrac{\theta}{2}$为第一或第三象限角，故选项D正确.

故选：CD.

11. 【答案】AC

【解析】解：由三角函数定义，$\sin\alpha=\dfrac{1-m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}},\cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}$，

所以，对于A选项，当$m\in(0,1)$时，$\sin\alpha>0$，$m\in(1,+\infty)$时，$\sin\alpha<0$，$m=1$时，$\sin\alpha=0$，所以选项A符号无法确定；

对于B选项，$\cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}>0$，所以选项B符号确定；

对于C选项，$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1-2m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}$，故当$m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$\sin\alpha-\cos\alpha>0$，

$m\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$时，$\sin\alpha-\cos\alpha<0$，$m=\dfrac{1}{2}$时，$\sin\alpha-\cos\alpha=0$，所以选项C的符号无法确定；

对于D选项，$\sin\alpha+\cos\alpha=s\dfrac{1-m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}+\dfrac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}>0$，所以选项D符号确定.

所以下列各式的符号无法确定的是AC选项.

故选：AC.

12. 【答案】-2

【解析】解：因为角α的终边过点$P(-1,2)$，

所以$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{-1}=-2$.

故答案为：-2.

13.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】由三角函数定义：$\tan\alpha=\dfrac{3}{2\sin\alpha}$，即$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{2\sin\alpha}$，

$\therefore 3\cos\alpha=2\sin^2\alpha=2(1-\cos^2\alpha)$,即$2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$，解得$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$或$\cos\alpha=-2$

（舍去）

故答案为：$\frac{1}{2}$

14.【答案】221°

【解析】因为$2021^{\circ}=1800^{\circ}+221^{\circ}=5\times360^{\circ}+221^{\circ}$，所以与$2021^{\circ}$终边相同的最小正角是$221^{\circ}$.

故答案为：221°.

15.【答案】2

【解析】解：设扇形的圆心角弧度数为α，半径为r，

则$4=2r+\alpha r$，$\therefore \alpha=\frac{4}{r}-2$，

$S=\frac{1}{2}\alpha r^{2}=\frac{1}{2}r^{2}(\frac{4}{r}-2)=2r-r^{2}=r(2-r)„ (\frac{r+2-r}{2})^{2}=1$

当且仅当$2-r=r$，解得$r=1$时，扇形面积最大.

此时$\alpha=2$.

故答案为：2.

16. 【答案】2.88

【解析】设扇形的圆心角为α，内环半径为rm，外环半径为Rm，则$R-r=1.2\text{m}$，

由题意可知$\alpha\cdot r=1.2\text{m},\alpha\cdot R=3.6\text{m}$，所以$\alpha\left(R+r\right)=4.8\text{m}$，

所以该扇环形屏风的面积为：

$S=\frac{1}{2}\alpha(R^{2}-r^{2})=\frac{1}{2}\alpha(R+r)(R-r)=\frac{1}{2}\times4.8\times1.2=2.88\text{m}^{2}$.

故答案为：2.88.

17. 【解】(1) 解：设扇形半径为R,扇形弧长为l，周长为C，

所以$\begin{cases}2R+l=8\\ \frac{1}{2}lR=3\end{cases}$,解得$\begin{cases}l=6\\ R=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}l=2\\ R=3\end{cases}$，圆心角$\alpha=\frac{l}{R}=6$,或是$\alpha=\frac{2}{3}$.

(2) 根据$S=\frac{1}{2}Rl$，$2R+l=8$，得到$l=8-2R$,$0<R<4$

$S=\frac{1}{2}R\left(8-2R\right)=-R^{2}+4R=-\left(R-2\right)^{2}+4$,当$R=2$时，$S_{\max}=4$，此时$l=4$，那么圆心角$\alpha=2$，

那么$\frac{\alpha}{2}=1$，所以弦长$AB=2R\sin 1=4\sin 1$

18.【答案】0

【解析】设角α终边上任一点为$P(k，-3k)$，

则 $r=\sqrt{k^2+(-3k)^2}=\sqrt{10}|k|$.

当 $k>0$ 时，$r=\sqrt{10}k$，

所以 $\sin\alpha=\frac{-3k}{\sqrt{10}k}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{10}k}{k}=\sqrt{10}$，

所以 $10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=-3\sqrt{10}+3\sqrt{10}=0$

当 $k<0$ 时，$r=-\sqrt{10}k$，

所以 $\sin\alpha=\frac{-3k}{-\sqrt{10}k}=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{-\sqrt{10}k}{k}=-\sqrt{10}$，

所以 $10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=3\sqrt{10}-3\sqrt{10}=0$，

综上，$10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=0$.

【素养提升】

1．【答案】C

【解析】由题知：$\cos\alpha\neq 0$

设角 α 的终边上一点 $(a,-3a)$ $(a\neq 0)$，则 $r=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10}|a|$.

当 $a>0$ 时，$r=\sqrt{10}a$，$\sin\alpha=\frac{-3a}{\sqrt{10}a}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=-3\sqrt{10}+3\sqrt{10}=0$.

当 $a<0$ 时，$r=-\sqrt{10}a$，$\sin\alpha=\frac{-3a}{-\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{a}{-\sqrt{10}a}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=3\sqrt{10}-3\sqrt{10}=0$.

故选：C

2．【答案】$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

【解析】解：初始位置 $P_0(0,1)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 的终边上，

P_1 所在射线对应的角为 $\frac{\pi}{2}-\theta$，

P_2 所在射线对应的角为 $\frac{\pi}{6}-\theta$，

由题意可知，$\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=-\frac{1}{2}$，

又$\frac{\pi}{6}-\theta\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$，

则$\frac{\pi}{6}-\theta=-\frac{\pi}{6}$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}$，

P_1所在的射线对应的角为$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{6}$，

由任意角的三角函数的定义可知，点P_1的坐标是$(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})$，即$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$．

故答案为：$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$．

3．【解】(1)解：若P点的横坐标为-3，因为点P在圆C：$(x+3)^2+(y-4)^2=1$上

所以，$P(-3,3)$或$P(-3,5)$，

所以，$\tan\alpha=-1$或$-\frac{5}{3}$，

所以，当$\tan\alpha=-1$时，$\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-1$

当$\tan\alpha=-\frac{5}{3}$时，$\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{15}{17}$.

(2)解：易知$\sin\beta$的最大值不超过 1，

下面证明：$\sin\beta$的最大值是 1.只需证明$\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{2}$满足条件.

①由于$\alpha+\beta=\frac{7\pi}{6}$满足$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$；

②设$P(-3+\cos x,4+\sin x)$，则$\tan\alpha=-\sqrt{3}=\frac{4+\sin x}{-3+\cos x}$，

即$\frac{3\sqrt{3}-4}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$，

所以，存在点P使得$\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

综上所述，$\sin\beta$的最大值是 1.

第 23 讲　同角三角函数的基本关系与诱导公式

【基础巩固】

1．　【答案】C

【解析】$\cos 1030^{\circ}=\cos(3\times 360^{\circ}-50^{\circ})=\cos(-50^{\circ})=\cos 50^{\circ}$.

故选：C

2．　【答案】B

【解析】$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^{2}\alpha+1}=-\frac{3}{10}$.

故选：B.

3．　【答案】C

【解析】$\frac{1+\sin 2\alpha}{1-2\sin^{2}\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^{2}}{\cos^{2}\alpha-\sin^{2}\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=5$,解得 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$

故选：C

4．【答案】C

【解析】$\frac{\sin(\pi-\theta)+\cos(\theta-2\pi)}{\sin\theta+\cos(\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{2}$,

分子分母同除以$\cos\theta$，

$\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\frac{1}{2}$,

解得：$\tan\theta=-3$

故选：C

5．【答案】D

【解析】$f(3)=a\sin(3\pi+\alpha)+b\cos(3\pi+\beta)=-(a\sin\alpha+b\cos\beta)=3$,

所以$a\sin\alpha+b\cos\beta=-3$.

$f(2020)=a\sin(2020\pi+\alpha)+b\cos(2020\pi+\beta)=a\sin\alpha+b\cos\beta=-3$.

故选：D

6．　【答案】A

【解析】因为$\tan\theta=2$，则$\cos\theta\neq 0$,

原式$=\frac{\sin^{2}\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^{2}\theta}{\sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta}=\frac{\frac{\sin^{2}\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^{2}\theta}{\cos^{2}\theta}}{\frac{\sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta}{\cos^{2}\theta}}$

$=\frac{\tan^{2}\theta+\tan\theta-2}{\tan^{2}\theta+1}=\frac{4+2-2}{4+1}=\frac{4}{5}$.

故选：A.

7.【答案】C

【解析】因为 $\tan\left(\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$，则 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3$，解得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，又

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，

所以 $\tan(2\pi-\beta)=-\tan\beta=-\tan\left[(\alpha+\beta)-\alpha\right]=-\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=-\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}$.

故选：C.

8.　【答案】C

【解析】解：因为 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$，

得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$，

因为 $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sqrt{17}}{3}$，

所以 $\frac{\sin\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin a\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{17}}{3}}=\frac{4\sqrt{17}}{51}$.

故选：C.

9.【答案】ACD

【解析】对于 A 选项，$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=-2$，故 A 选项正确；

对于 B 选项，$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=2$，故 B 选项错误；

对于 C 选项，$\frac{\sin\theta-3\cos\theta}{2\sin\theta+3\cos\theta}=\frac{\tan\theta-3}{2\tan\theta+3}=\frac{2-3}{4+3}=-\frac{1}{7}$，故 C 选项正确；

对于 D 选项，$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$，故 D 选项正确.

故选：ACD

10.　【答案】$-\frac{67}{125}$

【解析】∵ $\cos\theta=\dfrac{1}{5}$,

∴ $\sin\theta\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin^2\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1=2\times\dfrac{24}{25}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{25}-1=-\dfrac{67}{125}$.

故答案为：$-\dfrac{67}{125}$.

11.【答案】-1

【解析】Q $\tan\theta=-3$

$\therefore\dfrac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin 2\theta}=\dfrac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\tan\theta+\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{1}{2}=-1$,

故答案为：-1

12. 【答案】$-\dfrac{1}{5}$

【解析】由 $3\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=0$ 得 $\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$，故 $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{4}{3}$,

所以 $2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-2=0$，解得 $\tan\alpha=2$，或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\alpha=2$，

所以 $\dfrac{\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\cos\alpha\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{1-2}{4+1}=-\dfrac{1}{5}$.

故答案为：$-\dfrac{1}{5}$

13. 【答案】$\dfrac{7}{5}$

【解析】$\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cos x=\dfrac{1}{25}$，得 $2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}$,

$\left(\sin x-\cos x\right)^2=1-2\sin x\cos x=\dfrac{49}{25}$,

因为 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，所以 $\sin x>\cos x$,

故 $\sin x-\cos x=\dfrac{7}{5}$.

故答案为：$\dfrac{7}{5}$

14.【答案】0

【解析】原式 $=\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\left(-\sin\alpha\right)}{-\sin\alpha}=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$.

故答案为：0．

15．【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】$\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1+\cos\alpha+1}=\frac{\sin\alpha\left(1+2\cos\alpha\right)}{\cos\alpha\left(1+2\cos\alpha\right)}=\tan\alpha=3$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

故答案为：$\frac{3}{5}$.

16．【答案】 $\frac{7}{9}$ $-\frac{1}{3}$

【解析】因为$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

所以$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$；

若角β与角α关于x轴对称，则$\sin\beta=-\sin\alpha=-\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{7}{9}$，$-\frac{1}{3}$.

17．【解】(1）因为$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，所以$\tan\alpha=-2$，

则$\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{\cos\alpha-5\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha-2}{1-5\tan\alpha}=-\frac{4}{11}$.

（2）联立$\begin{cases}\sin\alpha+2\cos\alpha=0\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}\sin^2\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos^2\alpha=\frac{1}{5}\end{cases}$，

则$\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\tan\alpha}=-\frac{85}{8}$.

18．【解】解：Q $\tan\theta$，$\frac{1}{\tan\theta}$是关于x的方程$x^2-(k+\frac{1}{2})x+k^2-3=0$的两个实根，

$\therefore\begin{cases}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=k+\frac{1}{2}\\ \tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=k^2-3\end{cases}$，解得：$k=\pm2$，

又Q $-\frac{3\pi}{4}<\theta<-\frac{\pi}{2}$，$\therefore\tan\theta>1$，

$\therefore k=2$，解得：$\tan\theta=2$

（1）$\frac{\sin(\pi-\theta)+5\cos(2\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin(-\theta)}=\frac{\sin\theta+5\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{5\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{2\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta+5}{2+\tan\theta}=\frac{7}{4}$

（2）$\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-1=\dfrac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}-1=\dfrac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}-1=\dfrac{1}{5}$

19.【解】解：（1）Q $m\neq 0$,

$\therefore \cos\alpha\neq 0$,

即 $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)+\cos(\alpha-\pi)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$

$=\dfrac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}$

$=\dfrac{-\tan\alpha-1}{1+2\tan\alpha}$.

又Q角 α 的终边经过点 $P(3m,-6m)$（$m\neq 0$），

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{-6m}{3m}=-2$,

故 $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)+\cos(\alpha-\pi)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{-\tan\alpha-1}{1+2\tan\alpha}=\dfrac{2-1}{1+2\times(-2)}=-\dfrac{1}{3}$；

（2）Q α 是第二象限角，

$\therefore m<0$,

则 $\sin\alpha=\dfrac{-6m}{\sqrt{(3m)^2+(-6m)^2}}=\dfrac{-6m}{3\sqrt{5}|m|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\alpha=\dfrac{3m}{\sqrt{(3m)^2+(-6m)^2}}=\dfrac{3m}{3\sqrt{5}|m|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \sin^2\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin(\pi-\alpha)\cos\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$=\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha$

$=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\dfrac{-1+2\sqrt{5}}{5}$.

【素养提升】

1．【答案】A

【解析】由题可知$\tan\theta=2$，所以$\tan\beta=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=\frac{2+1}{1-2}=-3$，

则$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\beta\right)}=\frac{\cos 2\beta}{1+\sin 2\beta}=\frac{\cos^2\beta-\sin^2\beta}{\sin^2\beta+\cos^2\beta+2\sin\beta\cos\beta}=\frac{1-\tan^2\beta}{\tan^2\beta+1+2\tan\beta}$

$=\frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}=\frac{1+3}{1-3}=-2$.

故选：A.

2．【答案】D

【解析】解：$f(x)=\frac{\cos 2x+2\sin x\cdot\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x}{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x\left(\cos x-\sin x\right)}{\cos x-\sin x}$

则$f\left(x\right)=\cos x+\sin x+2\sin x\cos x$且$x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，

令$t=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，则$2\sin x\cos x=t^2-1$，

则$f(x)=t^2+t-1$，$t\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，

当$t=\sqrt{2}$时，$f(x)<f(\sqrt{2})=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}+1$，

当$t=-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})-1=-\frac{5}{4}$，

故$f(x)$的值域为$\left[-\frac{5}{4},\sqrt{2}+1\right)$.

故选：D.

3．【答案】AC

【解析】当k为奇数时，原式$=\frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\left(-1\right)+\left(-1\right)=-2$；

当k为偶数时，原式$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1+1=2$.

∴原表达式的取值可能为-2或2.

故选：AC

4．【答案】$-\frac{167}{99}$

【解析】

$$\frac{\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+1}+\frac{2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+2}=\frac{\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\frac{2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\frac{2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}=\frac{1-2\tan^2\alpha}{2\tan^2\alpha+1}+\frac{2-3\tan^2\alpha}{2\tan^2\alpha+3}$$

$$=\frac{1-8}{8+1}+\frac{2-12}{8+3}=-\frac{167}{99}.$$

故答案为：$-\frac{167}{99}$.

5.【答案】-1

【解析】$y=\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}+\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}+\frac{\tan\theta}{|\tan\theta|}=\frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}+\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}$

$$=\frac{\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{\left|\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right|}+\frac{\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{\left|\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right|}+\frac{\tan\left(2k\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{\left|\tan\left(2k\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right|}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{\left|-\sin\frac{\pi}{5}\right|}+\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\left|\cos\frac{\pi}{5}\right|}+\frac{-\tan\frac{\pi}{5}}{\left|-\tan\frac{\pi}{5}\right|}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}+\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}+\frac{-\tan\frac{\pi}{5}}{\tan\frac{\pi}{5}}=-1+1-1=-1.$$

故答案为：-1

6.【答案】$\frac{9}{16}$

【解析】$\because \sin x+\cos y=\frac{1}{4}$，$\sin x\in[-1,1]$

$\therefore \sin x=\frac{1}{4}-\cos y\in[-1,1]$，$\therefore \cos y\in\left[-\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$，即$\cos y\in\left[-\frac{3}{4},1\right]$

$\because \sin x-\sin^2 y=\frac{1}{4}-\cos y-\left(1-\cos^2 y\right)=\cos^2 y-\cos y-\frac{3}{4}=\left(\cos y-\frac{1}{2}\right)^2-1$

又$\cos y\in\left[-\frac{3}{4},1\right]$，

利用二次函数的性质知，当$\cos y=-\frac{3}{4}$时，$\left(\sin x-\sin^2 y\right)_{\max}=\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{9}{16}$

故答案为：$\frac{9}{16}$

7. 【解】(1)

$f(x)=\sqrt{6}(\sin x+\cos x)+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x$

$=4\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{12}\sin x+\sin\frac{\pi}{12}\cos x\right)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

，即 $f\left(x\right)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，

所以最小正周期为 $T=2\pi$，

当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in Z$ 时，函数单调递增，

即函数单调递增区间为 $\left[-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right]$ $k\in Z$，

所以 f（x）在 $[0,2\pi]$ 的单调递增区间 $\left[0,\frac{5\pi}{12}\right],\left[\frac{17\pi}{12},2\pi\right]$.

(2)

$$\frac{-2\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+[\sin(-\alpha)]^2-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha}{1-\sin\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha}{1-\sin\alpha+\sin^2\alpha-\left(1-\sin^2\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha\left(2\sin\alpha-1\right)}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

已知 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],f(\alpha)=2\sqrt{3}$， $f\left(\alpha\right)=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{3}$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$，解得：$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

所以 $\frac{-2\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+[\sin(-\alpha)]^2-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$

第 24 讲　两角和与差的正弦、余弦和正切公式

【基础巩固】

1．　【答案】C

【解析】由已知得：$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，

即：$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，

即：$\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，

所以 $\tan(\alpha-\beta)=-1$，

故选：C

2．　【答案】C

【解析】将式子进行齐次化处理得：

$$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4-2}{1+4}=\frac{2}{5}.$$

故选：C.

3．　【答案】A

【解析】$\because \tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$

$\therefore \tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，

$\because \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\alpha\neq 0$，$\therefore \dfrac{2\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2-\sin\alpha}$，解得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

故选：A.

4．　【答案】B

【解析】角 α 的终边的经过 $P(-1,2)$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\dfrac{3}{5}$，

所以 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos 2\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

故选：B.

5.　【答案】C

【解析】Q $\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$，

$\therefore \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$，

$\therefore (\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha-\frac{1}{2})=0$，

$\therefore \cos\alpha+\sin\alpha=0$ 或 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$，

由 $\cos\alpha+\sin\alpha=0$ 平方可得 $1+\sin 2\alpha=0$，即 $\sin 2\alpha=-1$，

由 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 平方可得 $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$，即 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$，

因为 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，所以 $2\alpha\in(-\pi,0)$，$\sin 2\alpha<0$，

综上，$\sin 2\alpha=-1$.

故选：C

6.　【答案】C

【解析】$\alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right),\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{11}{6}\pi\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)<0,\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：C.

7.【答案】C

【解析】解：∵$\tan 20°+m\sin 20°=\sqrt{3}$，

$\therefore m=\frac{\sqrt{3}-\tan 20°}{\sin 20°}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sin 20°}{\cos 20°}}{\sin 20°}$

$=\frac{\sqrt{3}\cos 20°-\sin 20°}{\sin 20°\cos 20°}$

$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°-\frac{1}{2}\sin 20°\right)}{\frac{1}{2}\sin 40°}$

$=\frac{2\sin(60°-20°)}{\frac{1}{2}\sin 40°}=4$

故选：C

8. 【答案】A

【解析】解：由题意可得 $\tan\alpha=3$， $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，

所以 $\tan\beta=\tan\left[\alpha-(\alpha-\beta)\right]=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}=1$，

即第二次的“晷影长”是“表高”的 1 倍.

故选：A.

9. 【答案】C

【解析】$\because\alpha,\beta$ 均为锐角，即 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\therefore\beta-\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\cos(\beta-\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\beta-\alpha)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$， 又 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\cos\beta=\cos\left[(\beta-\alpha)+\alpha\right]=\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\therefore\beta=\frac{\pi}{4}$.

故选：C.

10. 【答案】B

【解析】解：令 $f(x)=5\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$， $0<x<2\pi$， 则 $x=\frac{\pi}{6}$ 或 $x=\frac{7\pi}{6}$，

令 $f(x)=5\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=5$， $0<x<2\pi$， 则 $x=\frac{2\pi}{3}$，

又 $0<\alpha<\beta<2\pi$， $f(\alpha)=f(\beta)=1$，

所以 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$， $\frac{2\pi}{3}<\beta<\frac{7\pi}{6}$， $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{5}$， $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{5}$，

因为 $0<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$， $\frac{\pi}{2}<\beta-\frac{\pi}{6}<\pi$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$， $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

所以

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$$

$=-\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=-\frac{23}{25}$，

故选：B.

11． 【答案】AB

【解析】因为$\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$，$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\therefore 0<2\alpha<\pi$，

所以$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{3}{5}$，故 A 正确；

因为$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5},\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2},\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$，

所以$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha+\beta)$

$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 B 正确；

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$①，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ②，

由①+②得，$2\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{10}$；故 C 不正确；

由①−②得，$2\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，解得$\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{5}}{10}$；

$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{10}}=3$，故 D 不正确.

故选：AB.

12．【答案】1

【解析】因为$1=\tan 45°=\tan(10°+35°)=\frac{\tan 10°+\tan 35°}{1-\tan 10°\tan 35°}$，

所以$\tan 10°+\tan 35°+\tan 10°\tan 35°=1$.

故答案为：1

13．【答案】$\frac{24}{25}$

【解析】$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{3}{5}$，

$\therefore\frac{1}{2}(1-2\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{1}{2}(1-\sin 2\alpha)=\frac{9}{25},\therefore\sin 2\alpha=\frac{7}{25}$，

$\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{5\pi}{4}, \therefore \pi<2\alpha<\frac{5\pi}{2}$，$\because \sin 2\alpha>0, \therefore 2\pi<2\alpha<\frac{5\pi}{2}, \therefore \cos 2\alpha>0$，

$\therefore \cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\frac{24}{25}$.

故答案为：$\frac{24}{25}$.

14．【答案】-3

【解析】由 $\tan\alpha+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{5}{3}$，得 $\tan\alpha+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{5}{3}$，

即 $3\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$，

解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，因为 α 为锐角，所以 $\tan\alpha=2$，

故 $\frac{\sin2\alpha+1}{\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha+1}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4+4+1}{1-4}=-3$，

故答案为：-3.

15．【答案】$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\frac{4}{5}$

【解析】$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\beta=\cos\alpha$，即 $3\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{10}$，

即 $\sqrt{10}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\sin\alpha-\frac{\sqrt{10}}{10}\cos\alpha\right)=\sqrt{10}$，令 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\sqrt{10}\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{10}$，$\therefore \alpha-\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，即 $\alpha=\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=2\sin^2\alpha-1=\frac{4}{5}$.

故答案为：$\frac{3\sqrt{10}}{10}$；$\frac{4}{5}$.

16．【答案】$\frac{4\sqrt{17}}{51}$

【解析】因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\alpha<\frac{\pi}{4}$，

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{6}$，

所以 $-\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{34}}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\sqrt{17}}{6}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{17}-1}{6}$，

$\cos\alpha=\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}=\frac{\sqrt{17}+1}{6}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}+1}$，

则 $\frac{\sin\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{17}-1}{6}}{1+\frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}+1}}=\frac{4\sqrt{17}}{51}$.

故答案为：$\frac{4\sqrt{17}}{51}$.

17. 【解】(1)解：因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，

又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以

$\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

(2)解：因为 $\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\sin\beta=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-1=2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$，

又因为 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由（1）知，$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4+\sqrt{2}}{6}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4-\sqrt{2}}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，则 $0<\alpha-\beta<\pi$，所以 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

18. 【解】若选条件①，由 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4\sqrt{3}\cos(-\alpha)$ 得：$\sin\alpha=4\sqrt{3}\cos\alpha$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$；

若选条件②，由 $\tan\alpha=7\sin\alpha$ 得：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=7\sin\alpha$，

Q $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\sin\alpha>0$，$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$；

若选条件③，由 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 得：$\cos\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{7}$，

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin\alpha>0$，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$；

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \alpha+\beta\in(0,\pi)$，$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}+\frac{4}{5}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{16\sqrt{3}-3}{35}$.

【素养提升】

1．【答案】D

【解析】因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$，

所以 $\frac{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}{(1-\tan\alpha\tan\beta)-\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}$

$\frac{[1+\tan(\alpha+\beta)](1-\tan\alpha\tan\beta)}{[1-\tan(\alpha+\beta)](1-\tan\alpha\tan\beta)}=\frac{1+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\tan45^\circ+\tan15^\circ}{1-\tan45^\circ\tan15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\sqrt{3}$.

故选：D.

2．【答案】C

【解析】解：由双曲线 $C:x^2-3y^2=1$，

得 $A(-1,0),B(1,0)$，设 $P(x,y),x>0,y>0$，

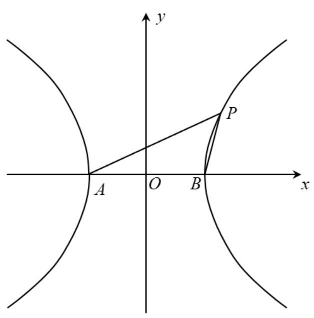
则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x^2-1}$，

又 $x^2-3y^2=1$，

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y^2}{3y^2+1-1}=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{3}$，

所以 $\tan\gamma=-\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1}=\frac{-3(\tan\alpha+\tan\beta)}{4}$，

即 $3\tan\alpha+3\tan\beta+4\tan\gamma=0$.



3. 【答案】C

【解析】

$$8\sin 12^\circ\left(2\cos^2 12^\circ-1\right)+\tan 12^\circ=8\sin 12^\circ\cos 24^\circ+\frac{\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}$$

$$=\frac{8\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}=\frac{4\sin 24^\circ\cos 24^\circ+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 48^\circ+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}=\frac{2\sin\left(60^\circ-12^\circ\right)+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 12^\circ-\sin 12^\circ+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 12^\circ}{\cos 12^\circ}=\sqrt{3}.$$

故选：C.

4. 【答案】C

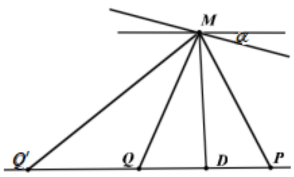
【解析】过点 M 作 $MD\perp PQ$，因为$\triangle PMQ$是正三角形．$PQ=a$，$QQ'=b$

则 $DQ'=\frac{1}{2}a+b$，$MD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$\angle MQ'D=60^\circ-2\alpha$

所以 $\tan\angle MQ'D=\tan\left(60^\circ-2\alpha\right)=\frac{MD}{DQ'}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}+b}=\frac{\sqrt{3}a}{a+2b}$

则 $\frac{\tan 60^\circ-\tan 2\alpha}{1+\tan 60^\circ\cdot\tan 2\alpha}=\frac{\sqrt{3}-\tan 2\alpha}{1+\sqrt{3}\cdot\tan 2\alpha}=\frac{\sqrt{3}a}{a+2b}$，解得 $\tan 2\alpha=\frac{\sqrt{3}b}{2a+b}$

故选：C



5. 【答案】B

【解析】因为 $\sin 36^\circ\left(1+\sin 2\alpha\right)=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\left(1+\sin 2\alpha\right)$

所以 $2\cos^2 18^\circ\cos 2\alpha=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\left(1+\sin 2\alpha\right)$，

整理得：$\cos 18^\circ\cos 2\alpha=\sin 18^\circ\sin 2\alpha+\sin 18^\circ$，

$\cos 18^\circ\cos 2\alpha-\sin 18^\circ\sin 2\alpha=\sin 18^\circ$

$\cos\left(2\alpha+18^\circ\right)=\sin 18^\circ$

因为 $0^\circ\le\alpha<90^\circ$，

所以 $18^\circ\le 2\alpha+18^\circ<198^\circ$，

所以 $2\alpha+18^\circ=90^\circ-18^\circ$，

解得：$\alpha=27^\circ$

故选：B

6. 【答案】CD

【解析】因为α为第一象限角，

所以$\alpha \in (2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}), k\in Z$， $\alpha+\frac{\pi}{3}\in(2k\pi+\frac{\pi}{3}, 2k\pi+\frac{5\pi}{6}), k\in Z$，

因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$， 所以$\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$，

所以$\alpha+\frac{\pi}{3}$是第二象限角，所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5}$，

β为第三象限角，

所以$\beta\in(2k\pi+\pi, 2k\pi+\frac{3}{2}\pi), k\in Z$， $\beta-\frac{\pi}{3}\in(2k\pi+\frac{2}{3}\pi, 2k\pi+\frac{7}{6}\pi), k\in Z$，

因为$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{12}{13}$， 所以$\beta-\frac{\pi}{3}$是第二象限角或第三象限角，

当$\beta-\frac{\pi}{3}$是第二象限角时， $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}$，

此时$\cos(\alpha+\beta)=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{3})+(\beta-\frac{\pi}{3})]$

$=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\beta-\frac{\pi}{3})-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\beta-\frac{\pi}{3})$

$=(-\frac{4}{5})\times(-\frac{12}{13})-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$，

当$\beta-\frac{\pi}{3}$是第三象限角时， $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5}{13}$，

此时$\cos(\alpha+\beta)=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{3})+(\beta-\frac{\pi}{3})]$

$=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\beta-\frac{\pi}{3})-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\beta-\frac{\pi}{3})$

$=(-\frac{4}{5})\times(-\frac{12}{13})-\frac{3}{5}\times(-\frac{5}{13})=\frac{63}{65}$，

故选：CD.

7.【答案】0

【解析】$\sin\left(\theta+75^\circ\right)+\cos\left(\theta+45^\circ\right)-\sqrt{3}\cos\left(\theta+15^\circ\right)$

$=\sin(\theta+15^\circ+60^\circ)+\cos\left(\theta+45^\circ\right)-\sqrt{3}\cos\left(\theta+15^\circ\right)$

$=\sin(\theta+15^\circ)\cos60^\circ+\cos(\theta+15^\circ)\sin60^\circ+\cos\left(\theta+45^\circ\right)-\sqrt{3}\cos\left(\theta+15^\circ\right)$

$=\frac{1}{2}\sin(\theta+15^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta+15^\circ)+\cos\left(\theta+45^\circ\right)-\sqrt{3}\cos\left(\theta+15^\circ\right)$

$=\frac{1}{2}\sin(\theta+15^\circ)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta+15^\circ)+\cos(\theta+45^\circ)$

$=\sin 30°\sin(\theta+15°)-\cos 30°\cos(\theta+15°)+\cos(\theta+45°)$

$=-\cos(\theta+45°)+\cos(\theta+45°)=0$.

故答案为：0．

8．【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解析】$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=t$，平方得 $sin2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=t^2-1$，

因为 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right],t>0$，

所以 $t^2-t+\sqrt{2}-2=0$，

解得 $t=\frac{1\pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}}{2}=\frac{1\pm(2\sqrt{2}-1)}{2}$，$t=\sqrt{2}$，$\alpha=\frac{\pi}{12}$.

故答案为 $\frac{\pi}{12}$.

9．【解】解：（1）因为 $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$，

所以 $-1<\tan\alpha<0$，

因为 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{10}{3}$，

整理得 $3\tan^2\alpha+10\tan\alpha+3=0$，

解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 或 $\tan\alpha=-3$（舍），

$$\frac{5\sin^2\frac{\alpha}{2}+8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+11\cos^2\frac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})}=\frac{\frac{5}{2}(1-\cos\alpha)+4\sin\alpha+\frac{11}{2}(1+\cos\alpha)-8}{-\sqrt{2}\cos\alpha},$$

$$=\frac{3\cos\alpha+4\sin\alpha}{-\sqrt{2}\cos\alpha}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}\tan\alpha,$$

$$=-\frac{5\sqrt{2}}{6};$$

（2）因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$，

故 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

所以$0<\beta-\alpha<\pi$，所以$\sin(\beta-\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

所以$\sin\beta=\sin[(\beta-\alpha)+\alpha]=\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)$，

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，

所以$\beta=\frac{3\pi}{4}$．

第 25 讲　简单的三角恒等变换

【基础巩固】

1．　【答案】D

【解析】Q $f(x)=\sin x g\sin(x+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{4}=\sin x(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}?\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

$\therefore f\left(x\right)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，

故选：D

2．　【答案】C

【解析】因为角α终边在直线$2x+y=0$上，所以$\tan\alpha=-2$，$\therefore \cos^2\alpha=\frac{1}{5}$．

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\times 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=\frac{1}{2}\sin\left[2\times\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{2}\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha-1\right)=\cos^2\alpha-\frac{1}{2}=-\frac{3}{10}$．

故选：C.

3．　【答案】D

【解析】解：因为α为锐角，$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

因为β为钝角，所以$\alpha+\beta\in\left(\alpha+\frac{\pi}{2},\alpha+\pi\right)$，

若$\alpha+\beta\in\left(\alpha+\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则$\cos(\alpha+\beta)<\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}<-\frac{\sqrt{5}}{5}$，不符题意，

所以$\alpha+\beta\in(\pi,\alpha+\pi)$，又$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

故选：D.

4．　【答案】C

【解析　$\tan A\tan B<1\Leftrightarrow 1-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\frac{-\cos C}{\cos A\cos B}>0$

$\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C<0\Leftrightarrow$V$ABC$为钝角三角形.

∴在ΔABC中，“$\tan A\tan B<1$”是“ΔABC为钝角三角形”的充要条件.

故选：C.

5.【答案】D

【解析】$f\left(x\right)=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=4\left(\frac{1}{2}\sin3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos3x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos3x+\frac{1}{2}\sin3x$

$=2\sin3x+2\sqrt{3}\cos3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos3x+\frac{1}{2}\sin3x$

$=\frac{5}{2}\sin3x+\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos3x$

$=5\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

∴$f(x)$最大值为 5，

故选：D.

6.　【答案】A

【解析】因为$f\left(x\right)=\sin x\left(\sin x+\cos x\right)=\sin^2x+\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1-\cos2x}{2}$，

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，

所以将函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，可得

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得$-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$

即函数$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$，

令$k=0$，可得函数的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，

又由函数$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$在区间$\left(-m,m\right)$上无极值点，则$m$的最大值为$\frac{\pi}{8}$.

故选：A.

7.　【答案】A

【解析】$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\frac{1}{2}$，且$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\varphi\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

$k\in Z$，得$-\frac{\pi}{2}-\varphi+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}-\varphi+2k\pi$，$k\in Z$，当 $k=0$ 时，增区间为$\left[-\frac{\pi}{2}-\varphi,\frac{\pi}{2}-\varphi\right]$，所以

$\alpha max=\frac{\pi}{2}-\varphi$，所以当 α 取最大值时，$\sin 2\alpha=\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin 2\varphi=$

$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\frac{4}{5}$.

故选：A

8.【答案】C

【解析】$f(x)=\sin x+a\cos x=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\varphi)$，$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

因为$f\left(x\right)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，所以当$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值，即$\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$

所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即$\varphi=\frac{\pi}{3}$

因为$f(x_1)+f(x_2)=0$，所以$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$的中点是函数$f(x)$的对称中心，

由$x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，得$x=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=k\pi-\frac{\pi}{3}$，

所以$|x_1+x_2|=\left|2k\pi-\frac{2\pi}{3}\right|,k\in\mathbf{Z}$

易知，当$k=0$时$|x_1+x_2|$取得最小值$\frac{2\pi}{3}$.

故选：C

9.【答案】ACD

【解析】$f\left(x\right)=\sin2x+\sqrt{3}\left(1-\cos2x\right)=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x+\sqrt{3}$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$，$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 对.

$\left(\frac{\pi}{6},\sqrt{3}\right)$是曲线$f\left(x\right)$的一个对称中心，B 错.

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$k=-1$时，$x=-\frac{\pi}{12}$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{12}$是$f\left(x\right)$的一条对称轴，C 对.

$-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}$，$-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{5}{12}\pi\right)$上单调递增，D 对.

故选： ACD.

10． 【答案】AD

【解析】因为$\sin B\left(1+2\cos C\right)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以，

$2\sin A\cos C+\cos A\sin C=2\sin B\cos C+\sin\left(A+C\right)=2\sin B\cos C+\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以， $\sin A\cos C-2\sin B\cos C=0$，即$\cos C\left(\sin A-2\sin B\right)=0$.

所以， $\cos C=0$或$\sin A=2\sin B$， $\because 0^\circ<C<180^\circ$， $\therefore C=90^\circ$或$a=2b$.

故选：AD.

11． 【答案】$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】$f\left(\theta\right)=\sin 2\theta-\dfrac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right)=\sin 2\theta-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\theta-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\theta\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin\left(2\theta-\varphi\right)-\dfrac{1}{2}$（其中$\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$），

当$f\left(\theta\right)$取最大值时， $2\theta_0-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$， $\therefore 2\theta_0=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$

$\sin 2\theta_0=\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， $\cos 2\theta_0=\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\left(2\theta_0+\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

12.【答案】$-\dfrac{9}{8}$

【解析】

$f(x)=\sin 2x-\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sin 2x-\cos x\cos\dfrac{3\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{3\pi}{4}=2\sin x\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos x+\sin x\right)$

，

令$\cos x+\sin x=t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，则$2\sin x\cos x=t^2-1$，

故$g\left(t\right)=t^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-1=\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$，所以当$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$时， $g\left(t\right)_{\min}=-\dfrac{9}{8}$

故答案为：$-\dfrac{9}{8}$

13． 【答案】$\dfrac{8}{5}$

【解析】解：由$\sin\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=-3\sin\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)$得

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$，

整理得$2\cos x=\sin x$，即$\tan x=2$，

$\therefore \frac{\sin 2x+\sin x\cos 2x+\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x\cos x+\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x}{\frac{1+\cos x}{2}}$

$=\frac{2\sin x\cos x\left(1+\cos x\right)}{\frac{1+\cos x}{2}}=4\sin x\cos x=\frac{4\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{4\tan x}{\tan^2 x+1}=\frac{8}{4+1}=\frac{8}{5}$

故答案为：$\frac{8}{5}$

14．【答案】$\frac{4\pi}{3}$

【解析】∵ $\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两根，

∴ $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3},\tan\alpha\tan\beta=4$，

∴ $\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$.

又$\tan\alpha+\tan\beta<0,\tan\alpha\tan\beta>0$，∴ $\tan\alpha<0,\tan\beta<0$，

∵ $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，∴ $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

∴ $\alpha+\beta\in\left(\pi,2\pi\right)$，∴ $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{4\pi}{3}$.

15．【答案】　$60\sin\alpha$米　　$225\sqrt{3}$平方米.

【解析】在Rt$\triangle PAQ$中，$\angle PAB=\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$AP$=60米，

∴ $PQ=AP\sin\alpha=60\sin\alpha$（米），

在Rt$\triangle PAR$中，可得$PR=60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

由题可知$\angle QPR=\frac{2\pi}{3}$，

∴ $\triangle PQR$的面积为：$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR\cdot\sin\angle QPR$

$=\frac{1}{2}\times 60\sin\alpha\times 60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$=900\sqrt{3}\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$=450\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha-\dfrac{1}{2}\right)$

$=450\sqrt{3}\left[\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}\right]$,

又$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

∴当$2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，$\triangledown PQR$的面积有最大值$225\sqrt{3}$平方米，

即三角形绿地的最大面积是$225\sqrt{3}$平方米.

故答案为：$60\sin\alpha$米；$225\sqrt{3}$平方米.

16.【解】（1）由辅助角公式得$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

则$y=\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=1-\sin 2x$，

所以该函数的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$；

（2）由题意，$y=f(x)f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin x$

$=2\sin x\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$可得$2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

所以当$2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$即$x=\dfrac{3\pi}{8}$时，函数取最大值$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17.【解】

(1)

$f(x)=(\cos x+\sin x)(-\sin x-\cos x)=-(\sin x+\cos x)^2=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)$

$=-1-\sin(2x)$ ，

当$2x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ，即$x\in\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)(k\in Z)$时是单调递增区间；

(2)

$g(x)=-2-\sin(2x)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2-\left[\frac{3}{2}\sin(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right]=-2-\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ ，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以当$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$时$g(x)$单调递减，当$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$时$g(x)$单调递增，

$g_{\min}(x)=-2-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2-\sqrt{3}$ ，

最大值在区间的两个端点中的一个，$g(0)=-2-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2-\sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故$g(x)$最小值为$-2-\sqrt{3}$，$g(x)$大值是$\frac{\sqrt{3}}{2}-2$；

综上，$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)(k\in Z)$，

$g(x)$ 的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}-2$，最小值为$-2-\sqrt{3}$.

18.【解】(1)解：由$f(\varphi-x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，即$\sin(\varphi-x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$恒成立，

$\therefore \varphi-x+x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi(k\in \mathrm{Z})$恒成立,或$\varphi-x-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi(k\in \mathrm{Z})$恒成立，

由于$\varphi-x-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi(k\in \mathrm{Z})$不可能恒成立，

$\therefore \varphi-x+x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi(k\in \mathrm{Z})$恒成立,即$\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in \mathrm{Z})$恒成立，

又$\because |\varphi|\le\pi$，$\therefore \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

(2)解：$g(x)=f^2(x)+f^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}$

$=1-\frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=1-\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，$\therefore \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，

$\therefore g\left(x\right)\in\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$,

即 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的取值范围是区间 $\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

【素养提升】

1. 【答案】C

【解析】$f\left(x\right)=\dfrac{\left(1-\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\right)\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{\sqrt{2+2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}}$

$=\dfrac{\left(1-\left|\sin x+\cos x\right|\right)\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos x}}$

Q $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$， $\therefore\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore\sin x+\cos x<0$， $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}>0$， $\cos\frac{x}{2}<0$，

$\therefore f\left(x\right)=\dfrac{\left(1+\sin x+\cos x\right)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}}$

$=\dfrac{\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{-2\cos\frac{x}{2}}$

$=\dfrac{2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{-2\cos\frac{x}{2}}$

$=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$=\cos x$,

$\therefore f\left(x\right)\in\left(-1,0\right)$.

故选：C.

2.【答案】C

【解析】因为 α， β， γ 是三个互不相同的锐角，

所以 $\sin\alpha+\cos\beta+\sin\beta+\cos\gamma+\sin\gamma+\cos\alpha$

$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

所以在 $\sin\alpha+\cos\beta$，$\sin\beta+\cos\gamma$，$\sin\gamma+\cos\alpha$ 三个值中，不会全部大于 $\sqrt{2}$，

若令 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}$，

$\sin\beta+\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{2}$，$\sin\gamma+\cos\alpha=1<\sqrt{2}$

所以大于 $\sqrt{2}$ 的个数最多有 2 个.

故选：C

3. 【答案】B

【解析】

$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|+|\cos(x+\pi)|-2\sin[2(x+\pi)]=|\sin x|+|\cos x|-2\sin 2x=f(x)$，故 A 正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=\sin x+\cos x-2\sin 2x$，

$f'(x)=\cos x-\sin x-4\cos 2x=\cos x-\sin x-4\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

$=(\cos x-\sin x)[1-4(\cos x+\sin x)]=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[1-4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$，

则在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上，$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，$1-4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，

在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，$1-4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$递增，

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上不单调，故 B 错误；

$f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，且：

$f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right|+\left|\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right|-2\sin 2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|-2\cos 2x$

$=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\right|+\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)\right|-2\cos 2x$，

$f\left(-x-\frac{3\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-x-\frac{3\pi}{4}\right)\right|+\left|\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right|-2\sin 2\left(-x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|-2\cos 2x$

$=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\right|+\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\right|-2\cos 2x$,

$\therefore f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(-x-\frac{3\pi}{4}\right)$，故$f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$是偶函数，故 C 正确；

当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$f(x)>0$，则$f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$无零点，

$\because f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减，$f(0)=1>0$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-2<0$，

由零点存在定理可知$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上有且仅有一个零点，

同理可证$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上有且仅有一个零点，

综上，$f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$恰有两个零点，故 D 正确.

故选：B.

4. 【答案】A

【解析】由$\tan\theta=\frac{1}{3},(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，可得$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

因为$\sin A\sin B\sin(C-\theta)=\lambda\sin^2 C$，得$\sin A\sin B\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)=\lambda\sin^2 C$，

即$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}$，

又由$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{2}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{2\cos C}{\sin C}$

$=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}+\frac{2\cos C}{\sin C}=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{2\cos C}{\sin C}$

$=\frac{1}{\sin C}\times\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)+\frac{2\cos C}{\sin C}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{2\cos C}{\sin C}=k$（定值），

即$3\sin C-\cos C+2\sqrt{10}\lambda\cos C=\sqrt{10}k\lambda\sin C$，

即$3\sin C-\cos C=2\sqrt{10}\lambda\left(\frac{k}{2}\sin C-\cos C\right)$恒成立，

可得$\begin{cases}3=2\sqrt{10}\cdot\lambda\times\frac{k}{2}\\1=2\sqrt{10}\cdot\lambda\end{cases}$，解得$k=6$，$\lambda=\frac{\sqrt{10}}{20}$.

故选：A.

5. 【答案】B

【解析】$f(x)=\sin\omega x+a\cos\omega x=\sqrt{a^2+1}\sin(\omega x+\varphi)$，其中$\tan\varphi=a$，

Q $x=\dfrac{\pi}{6}$处取得最大值，

$\therefore\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，即$\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\omega$，$k\in Z$，

$\therefore\tan\varphi=\tan(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\omega)=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\omega)=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi\omega}{6}}=a$，①，$k\in Z$，

Q $f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{a^2+1}\sin(\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi)=\sqrt{a^2+1}\sin(\dfrac{\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\omega)=\sqrt{a^2+1}\cos\dfrac{\pi}{6}\omega=\sqrt{3}$，$k\in Z$，

$\therefore\cos\dfrac{\pi}{6}\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+1}}$，②，

①×②得$\sin\dfrac{\pi}{6}\omega=\dfrac{1}{a}g\sqrt{\dfrac{3}{a^2+1}}$，

$\therefore\sin^2\dfrac{\omega\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\omega\pi}{6}=\dfrac{3}{a^2+1}+\dfrac{3}{a^2(a^2+1)}=1$，

即$a^4-2a^2-3=0$，解得$a=\sqrt{3}$，$a=-\sqrt{3}$（舍去），

由①得$\tan\dfrac{\omega\pi}{6}=\tan(\dfrac{\pi}{6}+k\pi)$，$k\in Z$，

Q $\cos\dfrac{\omega\pi}{6}>0$，

$\therefore\dfrac{\omega\pi}{6}$在第一象限，

$\therefore$取$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\tan(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi)$，$k\in Z$，

由$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}<2\pi$，即$|\omega|>1$，

$\therefore\dfrac{\omega\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore\omega=12k+1$，$k\in Z$，

使$|\omega|$最小，则$k=-1$，

即$|\omega|_{min}=11$，

若不等式$\lambda|\omega|..a$恒成立，则$\lambda..(\dfrac{a}{|\omega|})_{max}=\dfrac{\sqrt{3}}{11}$，

故选：B

6.【答案】$\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$

【解析】解：因为$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta+1$，

所以$8\tan^3\theta+2\tan\theta-\dfrac{4}{\cos^2\theta}=8\tan^3\theta-4\tan^2\theta+2\tan\theta-4>-3$，

即$8\tan^3\theta-4\tan^2\theta+2\tan\theta>1$.

设函数$f\left(x\right)=8x^3-4x^2+2x$，则$f'\left(x\right)=24x^2-8x+2$，

因为$\left(-8\right)^2-4\times24\times2<0$，

所以$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$为增函数.

又$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，所以$f\left(x\right)>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$，

所以$\tan\theta>\dfrac{1}{2}$，

故$\tan\left(\theta+\dfrac{7\pi}{4}\right)=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=1-\dfrac{2}{1+\tan\theta}\in\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$.

故答案为：$\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$

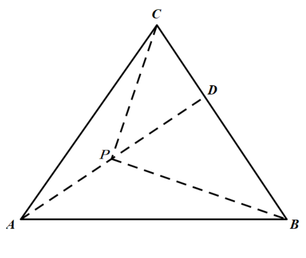
7.【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】设正三角形边长为2，$\left|CD\right|=2\lambda$，设$\angle CDP=\theta$，

在VCAD中，$\angle CAD=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，$\dfrac{CD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{CA}{\sin\theta}$，

代入数据可得，$\dfrac{2\lambda}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{2}{\sin\theta}$①，

在VCDP中，$CP=CB\cdot\cos\angle BCP=2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\theta\right)$，$\dfrac{CD}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{CP}{\sin\theta}$



代入数据可得，$4\lambda=\dfrac{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\theta\right)}{\sin\theta}$②

①/②得，$\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\theta\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$，解得$\tan\theta=-3\sqrt{3}$，

代入①式得$\lambda=\dfrac{1}{3}$.

所以$\frac{|CD|}{|CB|}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$.

8.【答案】$\frac{\sqrt{13}}{2}$

【解析】因为$2\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 C$，

所以$2a^2+b^2=2c^2$，

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2}{4ab}=\frac{b}{4a}=\frac{\sin B}{4\sin A}$,

又$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

所以$\cos C=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{4\sin A}=\frac{\cos C}{4}+\frac{\sin C}{4\tan A}$,

所以$\tan C=3\tan A$.

因为$\triangle ABC$中，$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$,

所以$\tan C-\tan C\cdot\tan A\cdot\tan B=-\tan A-\tan B$

所以$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$,

所以$\tan B=\frac{4\tan A}{3\tan^2 A-1}$,

所以$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{1}{\tan A}+\frac{3\tan^2 A-1}{4\tan A}+\frac{1}{3\tan A}=\frac{3\tan A}{4}+\frac{13}{12\tan A}$,

因为$\cos C=\frac{\sin B}{4\sin A}>0$，所以$C$为锐角.

因为$\tan C=3\tan A>0$，所以$\tan A>0$，

所以$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{3\tan A}{4}+\frac{13}{12\tan A}\geq 2\sqrt{\frac{3\tan A}{4}\cdot\frac{13}{12\tan A}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

当且仅当$\tan A=\frac{\sqrt{13}}{3}$时等号成立.

故答案为：$\frac{\sqrt{13}}{2}$

第 26 讲　三角函数的图象与性质

【基础巩固】

1．【答案】C

【解析】当 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\pi\right)$，当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，

$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 取最大值 1，当 $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 取最小值大于 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故值域为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

故选：C

2．【答案】B

【解析】因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，又 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\frac{\pi}{6}<1<\frac{\pi}{3}<2<\frac{2\pi}{3}$，

所以 $f(1)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f(0)>f(2)$，即 $f(2)<f(0)<f(1)$.

故选：B.

3．【答案】D

【解析】解：因为 $f(x)=2022\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，令 $-\pi+2k\pi\le x-\frac{\pi}{12}\le 2k\pi,k\in Z$，解得

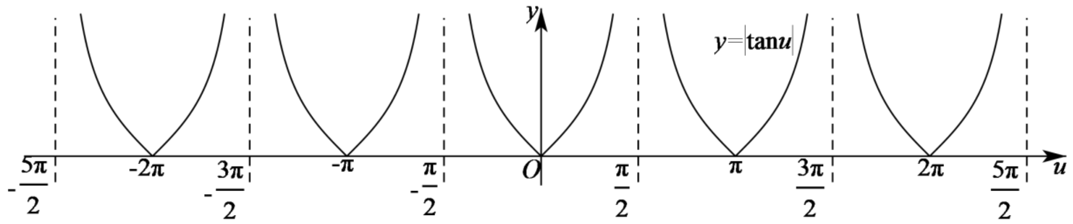
$-\frac{11\pi}{12}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+2k\pi,k\in Z$，所以函数的单调递增区间为

$\left[-\frac{11\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{12}+2k\pi\right],k\in Z$，当 $k=1$ 时可得函数的一个单调递增区间为 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{25\pi}{12}\right]$，因为 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$□$\left[\frac{13\pi}{12},\frac{25\pi}{12}\right]$，所以函数在 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上单调递增；

故选：D

4．【答案】C

【解析】作出函数 $y=|\tan u|$ 的图象如下图所示：



由图可知，函数 $y=|\tan u|$ 的最小正周期为 π，且其增区间为 $\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

对于函数 $f(x)$，其最小正周期为 $T=\dfrac{\pi}{\omega}=4$，可得 $\omega=\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$，

由 $k\pi<\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $4k+1<x<4k+3$，其中 $k\in Z$，

所以，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(4k+1,4k+3)(k\in\mathbf{Z})$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 上递减，在 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ 上不单调，在 $\left(\dfrac{5}{3},3\right)$ 上递增，在 $(3,4)$ 上递减.

故选：C

5.　【答案】C

【解析】因为 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

对于 A 选项，当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{6}$ 时，$-\pi<2x<-\dfrac{\pi}{3}$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，A 错；

对于 B 选项，当 $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{12}$ 时，$-\dfrac{\pi}{2}<2x<\dfrac{\pi}{6}$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right)$ 上不单调，B 错；

对于 C 选项，当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$0<2x<\dfrac{2\pi}{3}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，C 对；

对于 D 选项，当 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{7\pi}{12}$ 时，$\dfrac{\pi}{2}<2x<\dfrac{7\pi}{6}$，则 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{12}\right)$ 上不单调，D 错.

故选：C.

6.【答案】A

【解析】由函数的最小正周期 T 满足 $\dfrac{2\pi}{3}<T<\pi$，得 $\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{\omega}<\pi$，解得 $2<\omega<3$，

又因为函数图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\right)$ 对称，所以 $\dfrac{3\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$，且 $b=2$，

所以 $\omega=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}k,k\in Z$，所以 $\omega=\dfrac{5}{2}$，$f(x)=\sin\left(\dfrac{5}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$，

所以 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+2=1$.

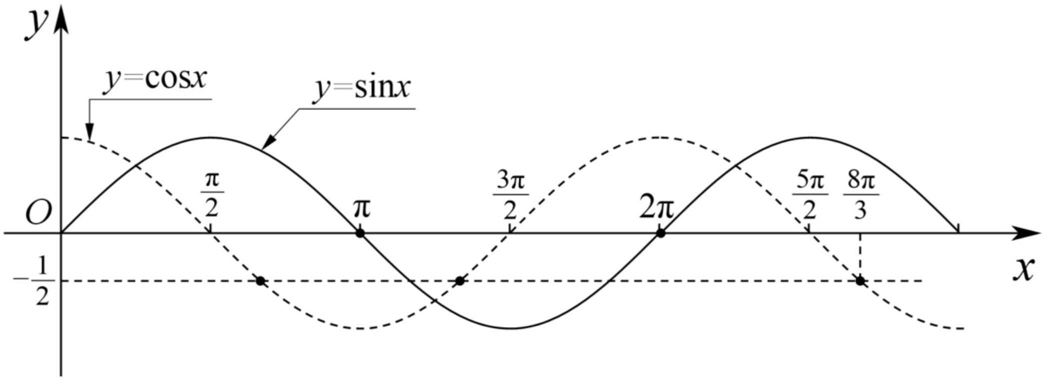
故选：A

7.　【答案】C

【解析】$f(x)=\sin x+\sin 2x=\sin x+2\sin x\cos x=\sin x(1+2\cos x)$，

令 $f(x)=0$ 得 $\sin x=0$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$，

作出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象：



$f(x)$在$\left(0,a\right)$上有 4 个零点，则$2\pi < a \le 2\pi + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$，故 a 的最大值为$\dfrac{8\pi}{3}$.

故选：C.

8. 【答案】A

【解析】由$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right)$上单调递减可知$f(\dfrac{2\pi}{3})$ 是最小值

由两条对称轴直线$x=\dfrac{\pi}{3}$和$x=\dfrac{2\pi}{3}$可知$x=0$也是对称轴且$f(0)=-2$，为最小值

故$\sin\varphi=-1$

又$-\pi<\varphi\le\pi$ ，解得$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

故选：A

9.【答案】ABC

【解析】当$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\pi=0$，所以$y=f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$对称，A 正确；

当$x=-\dfrac{\pi}{12}$时，$f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，所以$y=f\left(x\right)$的图象关于直线$x=-\dfrac{\pi}{12}$对称，B 正确；

当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$时，$u=2x+\dfrac{2\pi}{3}\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$，$f\left(u\right)=\sin u$在$\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$上单调递减，故 C 正确；

当$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},0\right]$时，$u=2x+\dfrac{2\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，$f\left(u\right)=\sin u$在$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$上的最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，D 错误.

故选：ABC

10. 【答案】AD

【解析】由题意得：$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以$\dfrac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $k=2$ 时，$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

对 A，当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$，由正弦函数 $y=\sin u$ 图象知 $y=f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 上是单调递减；

对 B，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$，由正弦函数 $y=\sin u$ 图象知 $y=f(x)$ 只有 1 个极值点，由 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $x=\frac{5\pi}{12}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 为函数的唯一极值点；

对 C，当 $x=\frac{7\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}=3\pi$，$f(\frac{7\pi}{6})=0$，直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 不是对称轴；

对 D，由 $y'=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ 得：$\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，

解得 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

从而得：$x=k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $k=y'|_{x=0}=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$，

切线方程为：$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$ 即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$.

故选：AD.

11.【答案】$\cos\frac{2\pi}{3}x$（答案不唯一）

【解析】由余弦函数性质知：$y=\cos(kx)$ 为偶函数且 k 为常数，

又最小正周期为 3，则 $\frac{2\pi}{k}=3$，即 $k=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $f(x)=\cos(\frac{2\pi}{3}x)$ 满足要求.

故答案为：$\cos(\frac{2\pi}{3}x)$(答案不唯一)

12. 【答案】1

【解析】$f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 对应的增区间应满足

$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in Z$，解得$x\in\left[\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{\omega},\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{\omega}\right],k\in Z$，当

$k=0$时，$x\in\left[-\frac{3\pi}{4\omega},\frac{\pi}{4\omega}\right]$，要使$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上是增函数，则应满

足，$\frac{\pi}{4\omega}\geq\frac{\pi}{4}$，解得$\omega\leq 1$，则$\omega$的最大值是 1

故答案为：1

13. 【答案】3

【解析】解： 因为$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$，（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）

所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$，因为$f\left(T\right)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos\left(2\pi+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，即$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

又$x=\frac{\pi}{9}$为$f\left(x\right)$的零点，所以$\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathrm{Z}$，解得$\omega=3+9k,k\in\mathrm{Z}$，

因为$\omega>0$，所以当$k=0$时$\omega_{\min}=3$；

故答案为：3

14.【答案】①②

【解析】对于①：因为函数的定义域为$[-2\pi,0)\cup(0,2\pi]$，且

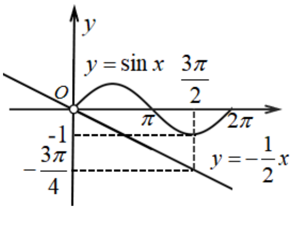
$f\left(-x\right)=\frac{\sin\left(-x\right)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=f\left(x\right)$，所以$f\left(x\right)$是偶函数.故①正确；

对于②：在$x\in\left[-2\pi,0\right)\cup\left(0,2\pi\right]$，令$f\left(x\right)=0$，解得：$x=-2\pi$，$x=-\pi$，$x=\pi$，$x=2\pi$.

所以$f\left(x\right)$有 4 个零点.故②正确；

对于③：因为$f\left(x\right)$是偶函数，所以只需研究$x\in\left(0,2\pi\right]$的情况. 如图示，作出$y=\sin x$

（$x\in\left(0,2\pi\right]$）和$y=-\frac{1}{2}x$的图像如图所示：



在$x\in\left(0,2\pi\right]$上，有$\sin x>-\frac{1}{2}x$，所以$\frac{\sin x}{x}>-\frac{1}{2}$，即$f\left(x\right)$的最小值大于$-\frac{1}{2}$.故③错误；

对于④：当$x\in\left[-2\pi,0\right)\cup\left(0,2\pi\right]$时，$f\left(x\right)<\frac{1}{2x}$可化为：

当 $x>0$ 时，$\sin x<\frac{1}{2}$，解得：$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi,2\pi\right]$；

当 $x<0$ 时，$\sin x>\frac{1}{2}$，解得：$x\in\left(-\frac{11}{6}\pi,-\frac{7}{6}\pi\right)$；

综上所述：$f\left(x\right)<\frac{1}{2x}$ 的解集为 $\left(-\frac{11}{6}\pi,-\frac{7}{6}\pi\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi,2\pi\right]$.故④不正确.

故答案为：①②

15.【解】（1）由辅助角公式得 $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

则 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-\sin 2x$，

所以该函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（2）由题意，$y=f\left(x\right)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x$

$=2\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 可得 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，

所以当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时，函数取最大值 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16.　【解】(1)解：因为 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}+\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

即 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right)=2\sin\left(2\times\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{3\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

(2)解：由（1）可得$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，所以$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则

$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\in\left[-\sqrt{3},2\right]$，

令$\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$，解得$0\le x\le\frac{\pi}{12}$，即函数在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调递增区间为$\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$；

17.【解】(1)解：$f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)$，

$=-2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x$，

$=-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$，

$=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

解得$-\frac{7\pi}{12}+k\pi\le x\le -\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[k\pi-\frac{7\pi}{12},k\pi-\frac{\pi}{12}\right],k\in Z$.

令$k=1$得区间为$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$，

所以$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调增区间为$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$；

(2)因为$f(x_0)=\frac{6}{5}$，

所以$\sin\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，

又$x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且$\sin\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)>0$，

所以$2x_0+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，则$\cos\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5}$

所以$\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}\right]=\cos(2x_0+\frac{2\pi}{3})\cos\frac{2\pi}{3}+\sin(2x_0+\frac{2\pi}{3})\sin\frac{2\pi}{3}$

$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

18.【解】(1)选择条件①②：

由条件①及已知得$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$.

由条件②$f\left(0\right)=0$，即$\sin\varphi=0$，解得$\varphi=k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

因为$\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=0$，

所以$f\left(x\right)=\sin 2x$，

经检验$\varphi=0$符合题意.

选择条件①③：

由条件①及已知得$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$.

由条件③得$2\times\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得$\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以$\varphi=0$，

所以$f(x)=\sin 2x$.

若选择②③：由条件②$f\left(0\right)=0$，即$\sin\varphi=0$，解得$\varphi=k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

因为$\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=0$，

由条件③得$\omega\times\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\omega=4k+2(k\in\mathbf{Z})$，则$f\left(x\right)$的解析式不唯一，不合题意.

(2)由题意得$g\left(x\right)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

化简得$g\left(x\right)=\sin 2x+\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

因为$0\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$，

所以当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，$g\left(x\right)$的最大值为$\sqrt{3}$.

【素养提升】

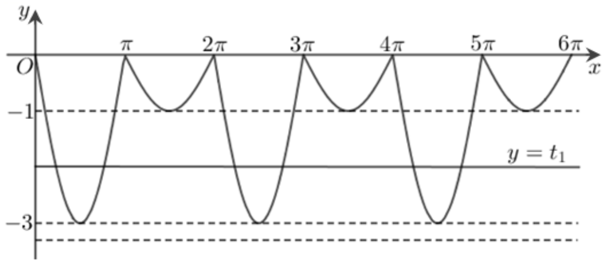
2.【答案】A

【解析】依题意，$f\left(x\right)=\begin{cases}-3\sin x, 2k\pi \le x < 2k\pi+\pi \\ \sin x, 2k\pi+\pi \le x < 2k\pi+2\pi\end{cases}$，$k\in \mathrm{Z}$，函数$f(x)$的值域为$[-3,0]$，

由$f^2\left(x\right)+\sqrt{a}f\left(x\right)-1=0$解得：$f(x)=-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+4}}{2}$，或$f(x)=\frac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{2}>0$（舍去），

而$a\ge 0$，令$t_1=-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+4}}{2}\le -1$，则方程$f^2\left(x\right)+\sqrt{a}f\left(x\right)-1=0$的根是函数$y=f(x)$的图象与直线$y=t_1$交点横坐标，

作出函数$y=f(x)$在$\left[0,6\pi\right]$的图象与直线$y=t_1$，如图，



当$x\in\left[0,2\pi\right]$时，$f\left(x\right)=\begin{cases}-3\sin x, 0\le x<\pi \\ \sin x, \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，观察图象知，

当$a=0$时，$t_1=-1$，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=t_1$有 3 个交点，

当$0<a<\frac{64}{9}$时，$-3<t_1<-1$，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=t_1$有 2 个交点，

当$a=\frac{64}{9}$时，$t_1=-3$，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=t_1$有 1 个交点，

当$a>\frac{64}{9}$时，$t_1<-3$，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=t_1$没有交点，

所以当$a\ge 0$时，$x\in\left[0,2\pi\right]$，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=t_1$的交点可能有 3 个、2 个、1 个、0 个，①正确，②不正确；

当$x\in\left[0,6\pi\right]$时，函数$y=f(x)$在$\left[0,6\pi\right]$的图象与直线$y=t_1$的交点个数为偶数，

观察图象知，此时$0<a<\frac{64}{9}$，$-3<t_1<-1$，即直线$y=t_1$与$y=f(x)$的图象在$[0,\pi],[2\pi,3\pi],[4\pi,5\pi]$上各有两个交点，

它们分别关于直线$x=\frac{\pi}{2},x=\frac{5\pi}{2},x=\frac{9\pi}{2}$对称，这 6 个交点横坐标和即方程 6 个根的和为：

$2\times\frac{\pi}{2}+2\times\frac{5\pi}{2}+2\times\frac{9\pi}{2}=15\pi$，③正确，④不正确，

所以所有正确结论的序号是①③.

故选：A

3．【答案】ABD

【解析】根据题意可得$\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}$，则$T=\frac{2\pi}{\omega}=3\pi$，即$\omega=\frac{2}{3}$，A 正确；

$f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$

将函数$f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得$y=\sin\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\frac{2}{3}x$

$\because$ $y=\sin\frac{2}{3}x$为奇函数，其图像关于原点对称，B 正确；

$\because$ $x\in\left[\pi,\frac{5}{2}\pi\right]$，则$\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$

$\therefore$ $f(x)$在$\left[\pi,\frac{5}{2}\pi\right]$上为减函数，C 错误；

$g(x)=e^{|x|}f\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=e^{|x|}\sin x$，则$g(-x)=e^{|-x|}\sin(-x)=-e^{|x|}\sin x=-g(x)$

$\therefore$ $g(x)$为奇函数

当$x\geq 0$时，$g(x)=e^{x}\sin x$，则$g'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

令$g'(x)=0$，则$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$，即$x+\frac{\pi}{4}=k\pi\left(k\in N^{*}\right)$

$\therefore$ $x=k\pi-\frac{\pi}{4}\left(k\in N^{*}\right)$

$\because$ $x\in[0,10\pi)$，即$0\leq k\pi-\frac{\pi}{4}<10\pi\left(k\in N^{*}\right)$，则$\frac{1}{4}\leq k<\frac{41}{4}\left(k\in N^{*}\right)$

$\therefore$ $k=1,2,3,...,10$共 10 个

则$g(x)$在$(-10\pi,10\pi)$内有 20 个极值点，D 正确；

故选：ABD.

4. 【答案】AD

【解析】由题设$f(x)=2|\sin(x+\frac{\pi}{3})|+2|\cos(x+\frac{\pi}{3})|$，

所以$f^{2}(x)=4(1+|\sin(2x+\frac{2\pi}{3})|)=4(1+|\cos(2x+\frac{\pi}{6})|)$，故$f(x)=2\sqrt{1+|\cos(2x+\frac{\pi}{6})|}$，

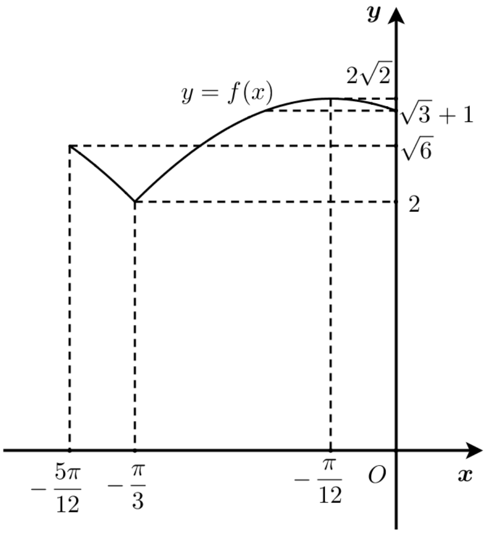
由$y=\cos 2x$的最小正周期为π，则$y=|\cos 2x|$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，

同理$y=2\sqrt{1+\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$的最小正周期为$\pi$，则$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，A 正确；

对于$f(x)$，令$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$，则对称轴方程为$x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{12}$且$k\in Z$，B 错误；

对任意 x 有 $f(x)\in[2,2\sqrt{2}]$，$\exists a\in\mathbf{R}$，$\exists x_1,x_2\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 且 $x_1\neq x_2$ 满足 $af(x_k)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$

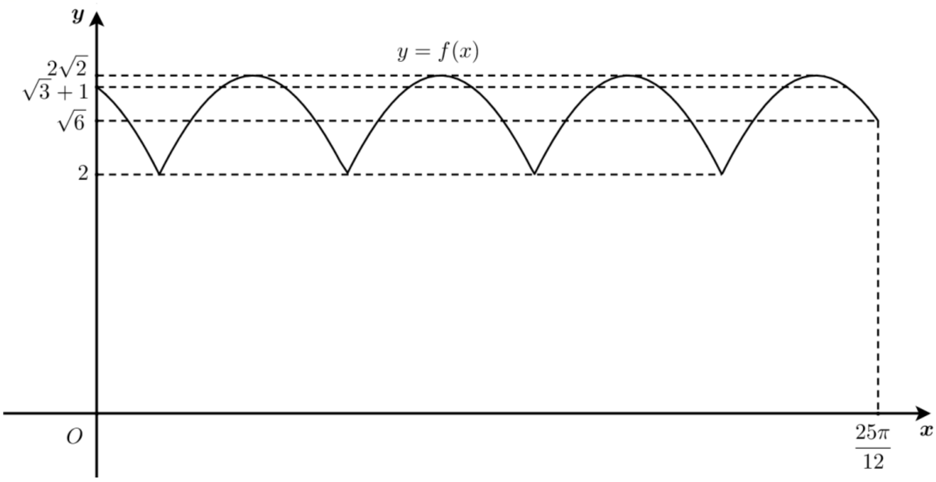
$\in[\frac{5}{2},\frac{9\sqrt{2}}{4}]$ 且 $(k=1,2)$，而 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$ 的 $f(x)$ 图象如下：



所以 $af(x_k)\in(2a,\sqrt{6}a]\cup[(\sqrt{3}+1)a,2\sqrt{2}a)$，则 $[\frac{5}{2},\frac{9\sqrt{2}}{4}]\subseteq(2a,\sqrt{6}a]\cup[(\sqrt{3}+1)a,2\sqrt{2}a)$，

所以 $\begin{cases}2a<\frac{5}{2}\\ \sqrt{6}a\geq\frac{9\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(\sqrt{3}+1)a\leq\frac{5}{2}\\ 2\sqrt{2}a>\frac{9\sqrt{2}}{4}\end{cases}$，无解，即不存在这样的 a，C 错误；

由 $g(x)=0$ 可转化为 $f(x)$ 与 $y=-\frac{b}{2}$ 交点横坐标，而 $x\in\left[0,\frac{25\pi}{12}\right]$ 上 $f(x)$ 图象如下：



函数有奇数个零点，由图知：$\sqrt{6}\leq-\frac{b}{2}\leq\sqrt{3}+1$，此时共有 9 个零点，

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{6}$、$\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{5\pi}{12}$、$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{2\pi}{3}$、$\frac{x_4+x_5}{2}=\frac{11\pi}{12}$、$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{7\pi}{6}$、$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{17\pi}{12}$、

$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{5\pi}{3}$，$\frac{x_8+x_9}{2}=\frac{23\pi}{12}$，

所以$x_1+2\left(x_2+x_3+...+x_8\right)+x_9=\frac{50\pi}{3}$，D 正确.

故选：AD

5．【答案】ABD

【解析】显然，$f(-x)=|\sin(-x)|\cos(-x)=|\sin x|\cos x=f(x)$，即函数$f(x)$是偶函数，

又$f(x+2\pi)=|\sin(x+2\pi)|\cos(x+2\pi)=|\sin x|\cos x=f(x)$，函数$f(x)$是周期函数，$2\pi$是它的一个周期，B 正确；

当$0\le x\le \pi$时，$0\le 2x\le 2\pi$，$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$的最小值为$-\frac{1}{2}$，最大值为$\frac{1}{2}$，

即当$0\le x\le \pi$时，$f(x)$的取值集合是$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，因$f(x)$是偶函数，则当$-\pi\le x\le 0$时，$f(x)$的取值集合是$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，

因此，当$-\pi\le x\le \pi$时，$f(x)$的取值集合是$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，而$2\pi$是$f(x)$的周期，所以$x\in \mathrm{R}$，$f(x)$的值域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，A 正确；

因$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{5\pi}{4})=-\frac{1}{2}$，即函数$f(x)$图象上的点$(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$的对称点$(\frac{5\pi}{4},\frac{1}{2})$不在此函数图象上，C 不正确；

因当$x>2$时，恒有$\log_4 x>\frac{1}{2}$成立，而$f(x)$的值域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，方程$f(x)=\log_4 x$在$(2,+\infty)$上无零点，

又当$0<x<1$或$\frac{\pi}{2}<x<2$时，$f(x)$的值与$\log_4 x$的值异号，即方程$f(x)=\log_4 x$在$(0,1)$、$(\frac{\pi}{2},2)$上都无零点，

令$g(x)=f(x)-\log_4 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\log_4 x$，$x\in[1,\frac{\pi}{2}]$，显然$g(x)$在$[1,\frac{\pi}{2}]$单调递减，

而$g(1)=\frac{1}{2}\sin 2>0$，$g(\frac{\pi}{2})=-\log_4\frac{\pi}{2}<0$，于是得存在唯一$x_0\in(1,\frac{\pi}{2})$，使得$g(x_0)=0$，

因此，方程$f(x)=\log_4 x$在$[1,\frac{\pi}{2}]$上有唯一实根，则方程$f(x)=\log_4 x$在$(0,+\infty)$上有唯一实根，又$\log_4 x$定义域为$(0,+\infty)$，

所以方程$f(x)=\log_4 x$有且仅有一个实数根，D 正确.

故选：ABD

6．【答案】 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 2

【解析】由①得：$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{7\omega\pi}{12}+\varphi\right)=-1$，则 $\frac{7\omega\pi}{12}+\varphi=\pi+2k_1\pi,k_1\in Z$，①

由②得：$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\omega\pi}{3}+\varphi\right)=0$，则 $\frac{\omega\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k_2\pi,k_2\in Z$，②

由②③得：$T=\frac{2\pi}{\omega}>\frac{\pi}{6}\times 2$，即 $0<\omega<6$，

联立①②得：$\omega=2+4\left(2k_1-k_2\right),k_1,k_2\in Z$，

因为 $0<\omega<6$，所以 $0<2+4\left(2k_1-k_2\right)<6$， $k_1,k_2\in Z$

解得：$-\frac{1}{2}<2k_1-k_2<1$， $k_1,k_2\in Z$，

所以 $2k_1-k_2=0$，

所以 $\omega=2$，

将 $\omega=2$ 代入 $\frac{\omega\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k_2\pi,k_2\in Z$ 得： $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k_2\pi,k_2\in Z$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

所以 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$f\left(-\frac{31\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{31\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$， $f\left(\frac{31\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{62\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\left[f\left(x\right)-f\left(-\frac{31\pi}{4}\right)\right]\left[f\left(x\right)-f\left(\frac{31\pi}{3}\right)\right]=\left(f\left(x\right)-\frac{1}{2}\right)f\left(x\right)>0$，

则 $f\left(x\right)>\frac{1}{2}$ 或 $f\left(x\right)<0$，

当 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$，解得： $2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{3}+2k_3\pi,\frac{\pi}{3}+2k_3\pi\right)$， $k_3\in Z$，

$x\in\left(-\frac{\pi}{12}+k_3\pi,\frac{\pi}{4}+k_3\pi\right)$， $k_3\in Z$，

当 $k_3=1$ 时， $x\in\left(\frac{11\pi}{12},\frac{5\pi}{4}\right)$，故最小正整数为 3，

当 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)<0$，解得： $2x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2}+2k_4\pi,\frac{3\pi}{2}+2k_4\pi\right)$， $k_4\in Z$，

$x\in\left(\frac{\pi}{3}+k_4\pi,\frac{5\pi}{6}+k_4\pi\right)$， $k_4\in Z$，

当 $k_4=0$ 时， $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，故最小正整数为 2，

比较得到答案为2

故答案为：$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，2

7.【解】(1)$\because f\left(x\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos 2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

由$2k\pi-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{7\pi}{6}$，得$k\pi\le x\le k\pi+\frac{2\pi}{3}$，

解集为$\left[k\pi,k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in Z$

(2)$F\left(x\right)=-4\lambda f\left(x\right)-\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-4\lambda\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\left[1-2\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-4\lambda\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\left[\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\lambda\right]^2-1-2\lambda^2$

$\because x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$，$\therefore 0\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$，$0\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$，

①当$\lambda<0$时，当且仅当$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$时，$f\left(x\right)$取得最小值$-1$，这与已知不相符；

②当$0\leqslant\lambda\leqslant 1$时，当且仅当$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\lambda$时，$f\left(x\right)$取最小值$-1-2\lambda^2$，由已知得

$-1-2\lambda^2=-\frac{3}{2}$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$；

③当$\lambda>1$时，当且仅当$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$时，$f\left(x\right)$取得最小值$1-4\lambda$，由已知得$1-4\lambda=-\frac{3}{2}$，

解得$\lambda=\frac{5}{8}$，这与$\lambda>1$相矛盾.综上所述，$\lambda=\frac{1}{2}$.

8.　【解】（1）当$a=-4$时，$f(x)=\cos 2x-4\sin x=1-2\sin^2 x-4\sin x$，令

$t=\sin x\in\left[-1,1\right]$，则$y=1-2t^2-4t$，开口向下且对称轴为$t=-1$，

$y_{\max}=1-2\times\left(-1\right)^2-4\times\left(-1\right)=3$，即$\sin x=-1$时，$f(x)_{\max}=3$，此时$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$；

（2）当$a=-2$时，$f(x)=\cos 2x-2\sin x=1-2\sin^2 x-2\sin x$，因为$A\cup B=B$，则$A\subseteq B$，

因为$A=\left\{x\left|\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{2\pi}{3}\right.\right\}$，则$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin x\le 1$，

令$F\left(x\right)=f(x)-m\sin x-2m+1=-2\sin^2 x-\left(2+m\right)\sin x-2m+2$

令$\sin x=t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，则$g\left(t\right)=-2t^2-\left(2+m\right)t-2m+2$，开口向下，所以$g\left(t\right)>0$需满足

$\begin{cases}g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2+m\right)-2m+2>0\\ g\left(1\right)=-2\times1^2-\left(2+m\right)-2m+2>0\end{cases}$，解得$m<\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$，

故实数m的取值范围为$\left(-\infty,\frac{6-5\sqrt{2}}{7}\right)$；

（3）$f(x)=\cos 2x+a\sin x=1-2\sin^2 x+a\sin x$，

令$t=\sin x\in\left[-1,1\right]$，则$y=1-2t^2+at$，所以$1-2t^2+at=0$，$\Delta=a^2+8>0$，所以

$1-2t^2+at=0$有两个不同得实数根t_1,t_2，又由韦达定理得$t_1t_2=-\frac{1}{2}<0$，所以两根异号，

①当一根绝对值大于 1，则另一根绝对值大于 0 且小于 1，方程有偶数个根，不符合题意；

②当两根绝对值均在$\left(0,1\right)$之间，$t_1=\sin x$，$t_2=\sin x$在区间$(0,n\pi)$上均有偶数根，不合题意；

③当$t_1=1,t_2=-\frac{1}{2},a=1$时，若$x\in\left[0,2\pi\right]$，$\sin x=1$，即$x=\frac{\pi}{2}$，$\sin x=-\frac{1}{2}$，即$x=\frac{7\pi}{6}$或

$x=\frac{11\pi}{6}$，所以方程$f(x)=0$在$\left[0,2\pi\right]$上有三个根，因为$2021=3\times673+2$，所以方程在

$\left[0,1346\pi\right]$上有 2019 个根，又因为方程在$\left[1346\pi,1347\pi\right]$上只有 1 个根，又因为方程在

$\left[1347\pi,1348\pi\right]$上只有 2 个根，所以方程在$\left(0,1347\pi\right)$有 2020 个根，在$\left(0,1348\pi\right)$上有 2022 个根，不合题意；

④当$t_1=-1,t_2=\frac{1}{2},a=-1$时，若$x\in\left[0,2\pi\right]$，$\sin x=-1$，即$x=\frac{3\pi}{2}$，$\sin x=\frac{1}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$或

$x=\frac{5\pi}{6}$，所以方程$f(x)=0$在$\left[0,2\pi\right]$上有三个根，因为$2021=3\times673+2$，所以方程在

$\left[0,1346\pi\right]$上有 2019 个根，又因为方程在$\left[1346\pi,1347\pi\right]$上只有 2 个根，又因为方程在

$\left[1347\pi,1348\pi\right]$上只有 1 个根，所以方程在$\left(0,1347\pi\right)$有 2021 个根，满足题意；

综上：$n=1347,a=-1$.