מבני נתונים – סמסטר קיץ תשפ״א
מטלה 1

הנחיות:

- מטלה זו הינה ביחידים. אסור למסור או לקבל פתרון או קוד מכל גורם אחר. העתקה תגרור **לפסילה מלאה** של המטלה לכל המשתתפים.
- המטלה מחולקת לשני חלקים: חלק תיאורטי (שאלות 1-3), וחלק מעשי (שאלה 4), עליכם לפתור את החלק התיאורטי ולצרף אותו כקובץ PDF או תמונה, ואת החלק המעשי לצרף אותו כקובץ java בשם Ex1.java. את שני החלקים יש לדחוס כקובץ ZIP (ולא שום דחיסה אחרת) בשם ת״ז של הסטודנט (ולא באף שם אחר). סטייה מהדרכות אלו תגרור הורדה בציון.
- בשאלות שנדרשים בהם לחשב זמן ריצה של פונקציה מסוימת, הכוונה הינה לסדר גודל של זמן הריצה - $O(\dots)$, כפי שלמדתם בהרצאה.

שאלה 1: קבעו לכל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה, והוכיחו את תשובתכם במידה והטענה נכונה, תנו דוגמה נגדית במידה והטענה לא נכונה.

- טענה 1:
קיימת פונקציה חיובית f כך ש- $f(n) = \Omega(logn)$ וגם $(f(n))^2 = O(f(n))$
- טענה 2:
- $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \Omega(n^2)$
-
- טענה 3:
- $2^{\mathrm{n}} = \Theta\left(2^{\mathrm{n}+\log \mathrm{n}}\right)$

שאלה 2:

נתונות הפונקציות הבאות:

$f_3(n) = \sqrt[3]{n}$	$f_2(n) = 2^{log_4 n}$	$f_1(n) = log(log(n))$
$f_6(n) = n^{2.3}$	$f_5(n) = logn$	$f_4(n) = log(log(n^5))$

סדרו את הפונקציות לפי סדר אסימפטוטי $O(\dots)$, מן ה״קטנה״ ל״גדולה״. אם מתקיים $f_i = \Theta(f_j)$ (כלומר, $f_i = O(f_j)$ וגם $f_j = O(f_i)$) ציינו זאת. הוכיחו פורמלית את תשובותיכם.

שאלה 3 : חשבו את זמני הריצה של שתי הפונקציות הבאות, והסבירו את תשובתכם בצורה פורמלית ומפורטת ככל האפשר.

```
public static void my_func (int n) {
   Int k  = 1;
   Int i = 1;
   while(i<n) {
        for (int j= 0; j<= k;j++)
             system.out.println (”$”);
        k++;
        i=i*2;
  }
}
```

```
public static void my_func (int n) {
   int i=2;
   int k=2;
   while(i<n) {
          for (int j= 0; j<= i;j++)
                 k=k-j
          i=i*2
  }
}
```

מבנה נתונים – סמסטר קיץ תשפ"א

שאלה 4:
כתוב תכנית למיון מערך המתבססת על מיון מהיר, אבל במקום לבחור pivot אחד, היא בוחרת שני איברים של pivot, ובכל שלב מחלקת את המערך לשלושה חלקים.
מה זמן הריצה של התכנית במקרה הגרוע ובמקרה הטוב.

שאלה 1: קבעו לכל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה, והוכיחו את תשובתכם
ידה והטענה נכונה, תנו דוגמה נגדית במידה והטענה לא נכונה.

- טענה 1:

  קיימת פונקציה חיובית f כך ש- $f(n) = \Omega(logn)$ וגם $(f(n))^2 = O(f(n))$

- טענה 2:
- $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \Omega(n^2)$
-
- טענה 3:
- $2^{n} = \Theta\left(2^{n+\log n}\right)$

$$f(n) = \Omega(\log_2(n))$$

f חיובית

$$f(n) \geq c_1 \cdot \log_2(n)$$

$$(f(n))^2 = O(f(n))$$

$$(f(n))^2 = f(n) \cdot \cancel{f(n)} \leq c_2 \cdot \cancel{f(n)}$$

$$c_1 \cdot \log(n) \leq f(n) \leq c_2$$

$$c_1 \log(n) \leq c_2$$

$\log(n) \longrightarrow \infty$

סתירה קבוע לא גדול מ $\log(n)$

שאלה 2

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \Omega(n^2)$$

$$\geq c_1 \cdot n^2$$

$$\frac{(\text{אחרון} + \overset{\text{מוזכר}}{\text{ראשון}}) \cdot \text{כמות איברים}}{2}$$

$$\frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n \right)}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} + n\right)}{2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{3n}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3n^2}{4}}{2}$$

$$= \frac{3n^2}{4} : 2 = \frac{3n^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3n^2}{8}$$

כפל הופכי

$$c_1 = \frac{3}{8}$$

כעת לפי ההגדרה קיים

$n_0 = 1$ כך שלכל $n > n_0$

מתקיימת הטענה

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} + n\right)}{2} \geq \frac{3}{8} n^2$$

שאלה 3

$$2^n = \Theta\left(2^{n+\log(n)}\right)$$

אלגברה

$$2^{n+\log n} = 2^n \cdot 2^{\log n} = 2^n \cdot n$$

$$2^n = \Theta\left(2^n \cdot n\right)$$

$c_1>0$ $c_2>0$ $n_0>0$ כך שלכל $n \ge n_0$

מתקיים

$$c_1 \cdot 2^n \cdot n \le 2^n \le c_2 \cdot 2^n \cdot n$$

נחלק ב 2^n

$$c_1 \cdot n \le 1 \le c_2 \cdot n$$

לכן $n \to \infty$

$$c_1 \cdot n \to \infty$$

לכן קיבלנו סתירה

עבור $c_1 \cdot n \le 1$ לא

מתקיים האי שוויון הנ״ל.

שאלה 2

$$f_1 = \log(\log(n))$$

$$f_2 = 2^{\log_4 n} = 2^{\log_{2^2}(n)} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\log_2(n)}$$

$$= \left(2^{\log_2(n)}\right)^{\frac{1}{2}} = (n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

$$f_3 = \sqrt[3]{n}$$

$$f_4 = \log(\log(n^5)) = \log(5\cdot\log(n)) =$$

$$= \underbrace{\log(5)}_{\text{קבוע}} + \log(\log(n)) \Rightarrow O(\log(\log(n)))$$

$$f_5 = \log n$$

$$f_6 = n^{2.3} \geq n^2$$

נוכיח

$$f_1(n) = \Theta(f_4(n)) \quad (1)$$
$$f_5(n) = O(f_4(n)) \quad (2)$$
$$f_5(n) = O(f_3(n)) \quad (3)$$
$$f_3(n) = O(f_2(n)) \quad (4)$$
$$f_2(n) = O(f_6(n)) \quad (5)$$

(1)

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1}{f_4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)}{\log(5) + \log(\log(n))} =$$

$$\frac{\log(\log(n))}{\log(\log(n)) \cdot \left(\frac{\log(5)}{\log(\log(n))} + 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{\log(5)}{\log(\log n)} + 1 \right)}$$

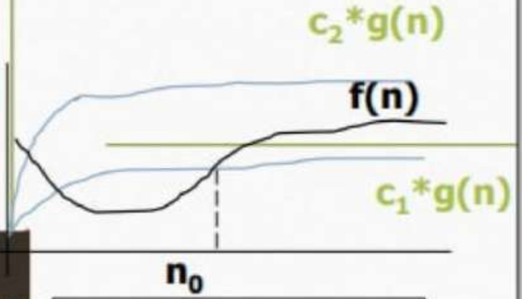
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\cancel{\frac{\log(5)}{\log(\log n)}} \xrightarrow{} 0 + 1\right)} = 1$$

מכיוון שקיבלנו מספר קבוע
אז לפי הגדרת Θ יש

חסם הדוק. מתקיים

$f_1 = o(f_4)$ ולא $f_4 = o(f_1)$

סימונים אסימפטוטיים - Θ (טטא) - Theta



הגדרה:

יהיו $g(n)$, $f(n)$ פונקציות חיוביות.
נאמר שהפונקציה $f(n)$ היא Θ גדול של $g(n)$ אם קיימים קבועים חיוביים n_0, c_1, c_2
כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$$

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

אם $f(n) \in \Theta(g(n))$ נאמר ש- $g(n)$ הוא **חסם הדוק** אסימפטוטי
לפונקציה $f(n)$ ונסמן זאת על ידי $f(n) = \Theta(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \neq 0$$

$f(n) = \Theta(g(n))$ iff $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \Omega(g(n))$

בוא נעשה סדר לסדרי גודל

$$\frac{1}{n^{k+1}} < \frac{1}{n^k} < \frac{1}{\log n} < 1 < \log n < (\log n)^k < (\log n)^{k+1}$$

$$< n^{\varepsilon}\ (\forall \varepsilon > 0) < \sqrt{n} < n < n \log n < n^k < n^{k+1}$$

$$< 2^n < n! < n^n$$

31

(2)

לפי התמונה

$\log(\cancel{)})\ \log n < n$

נפעיל לוג על שני האגפים

$\log(\log(n)) < \log(n)$

פשוט משנים לקטן שווה כדי להוכיח טענה חלשה יותר

$$\log(\log(n)) \leq \log(n)$$

סימונים אסימפטוטיים - O גדול – Big O

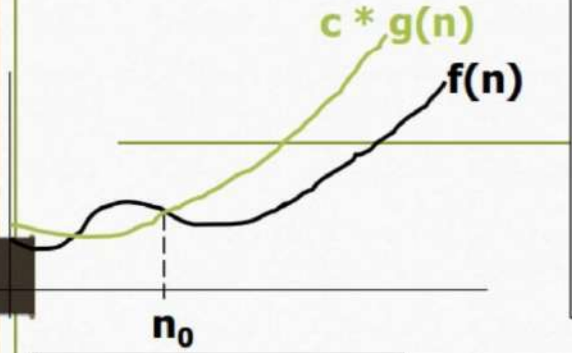
הגדרה:

יהיו $f(n),g(n)$ פונקציות חיוביות.

נאמר שהפונקציה $f(n)$ היא O גדול של $g(n)$

אם קיימים קבועים חיוביים c,n_0 כך שלכל

$n \geq n_0$ מתקיים $f(n) \leq c*g(n)$



$f(n) = O(g(n))$

אם $f(n) \in O(g(n))$ נאמר ש- $g(n)$ הוא

חסם **עליון** אסימפטוטי

לפונקציה $f(n)$ ונסמן זאת על ידי

$f(n)=O(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

לא לשכוח,
הנחת בסיס ,
$n \to \infty$

3

4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)}{\log n} = 0 < \infty$$

(3)

$$f_5(n) = O(f_3(n))$$

לכן לפי הגדרה

של $\log n = O(\sqrt[3]{n})$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{\sqrt[3]{n}} \to 0 \leq \infty$$

(4)

$f_3(n) = O\ f_2(n)$

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = n^{-1}$$

לפי הגדרת $O(\ )$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = 0 < \infty$$

$$f(\sqrt[3]{n}) = O(\sqrt{n})$$

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{6}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0 < \infty \ \checkmark$$

$f_2(n) = O(f_6(n))$ (5)

$\sqrt{n} \le n^{2.3}$ צ"ל

לפי המוצל

$\sqrt{n} < n^{k}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{2.3}} = 0 < \infty$ לכן

$f(n^{2.3}) = O(\sqrt{n}) \Leftarrow$

$f_1 \le f_4 \le f_5 \le f_3 \le f_3 \le f_2 \le f_6$

שאלה 3 : חשבו את זמני הריצה של שתי הפונקציות הבאות, והסבירו את תשובתכם בצורה פורמלית ומפורטת ככל האפשר.

```
public static void my_func (int n) {
   Int k  = 1;
   Int i = 1;
   while(i<n) {
       for (int j= 0; j<= k;j++)
           system.out.println ("$");
       k++;
       i=i*2;
   }
}
```

תשובה $\log^2(n)$

```
while(i<n){
   i=i*2;
}
```

ניתן לראות שמספר הריצות של הלולאה החיצונית $\log n$

מבד שני הלולאה
הפנימית תלויה
בלולאה החיצונית
ולכן
רק כאשר הלולאה
החיצונית שווה True הפנימית
תרוץ $\log n$ פעמים

לכן התשובה היא
$\log n \cdot \log n$

20

```
public static void my_func (int n) {
  int i=2;
  int k=2;
  while(i<n) {
        for (int j= 0; j<= i;j++)
              k=k-j
        i=i*2
  }
}
```

16<20

3 5 9 17

לולאה חיצונית log n

```
while(i<n){
    i=i*2;
}
```

כי i עולה בכפולות של 2

לולאה פנימית

```
for(int j=0; j<=i; j++){
  k = k - j;
}
```

הפעולה תרוץ

$\underbrace{3,5,9,17,33\ldots n}_{\log n}$

כמות איברים $\log n$

כי j מתחיל מ0 עד i

$i = 2,4,8,16,32$

אז עבור j יהיה מהצורה

ב)

$$i = 2^K + 1 \qquad K = 1, 2, 3 \ldots$$

$$i = \overset{2+1}{3}, \overset{4+1}{5}, \overset{8+1}{9}, \overset{16+1}{17}, \overset{32+1}{33} \ldots$$

סכום סדרה הנדסית

$$\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot (2^{\log_2(n)} - 1)}{2-1} = \frac{2 \cdot (n-1)}{2-1} \Rightarrow n$$

$$\sum_{n=1}^{\log n} 2^i + 1 = n + \sum_{n=1}^{\log n} 2^i = n + n =$$

$$= n + n = 2n \Rightarrow n$$

$T(n) =$ לולאה חיצונית + לולאה פנימית

פועלות יחד

$$T(n) = n + \log(n)$$

תשובה סופית

$$\Rightarrow T(n) = n$$

כי $\log n < n$

מבנה נתונים – סמסטר קיץ תשפ"א

שאלה 4:

כתוב תכנית למיון מערך המתבססת על מיון מהיר, אבל במקום לבחור pivot אחד, היא בוחרת שני איברים של pivot, ובכל שלב מחלקת את המערך לשלושה חלקים.
מה זמן הריצה של התכנית במקרה הגרוע ובמקרה הטוב.

הקוד מצורף.

מקרה גרוע $O(n^2)$

כשהמערך ממויין

מקרה טוב

לפי מה שלמדנו בשיעור

$n\log_3 n \iff n\log n$

שקולים $n \to \infty$