4 Výroková logika

Zadání: logické spojky a formule, princip duality, aplikace (el. sítě), úplné systémy a báze spojek, axiomatizace výrokové logiky, věta o úplnosti

Logické spojky - vytvářejí z výrokových proměnných výrokové formule

Nulární logické spojky
$v(T) = 1$
$v(F) = 0$

Unární logické spojky

A	$\neg A$	id
1	0	1
0	1	0

Binární logické spojky (celkem 16 možností, mezi nimi i $id, \neg, T, F$)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \downarrow B$	$A \vert B$	$A\ XOR\ B$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0

Nicodova spojka ... $\downarrow$ ... NOR ... $A \wedge B \leftrightarrow (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$
Shefferova spojka ... $|$ ... $NAND$ ... $A \vee B \leftrightarrow (A|A)|(B|B)$

Výrok - tvrzení o jehož pravdivosti má smysl uvažovat.
Nezajímá nás obsah výroku, zajímá nás pouze, zda je (ne)pravdivý.

Definice:
(1) Každá výroková proměnná je formule.
(2) Jsou-li A, B formule, pak jsou také $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \to B, A \leftrightarrow B$ formule.
(3) Každá formule se získá konečným počtem opakování kroků (1) a (2).

Formule je tautologie $\Leftrightarrow$ $v(\varphi) = 1$ při všech ohodnoceních výrokových proměnných (prvotních formulí) a píšeme $\models \varphi$.

Příklady tautologií:
- zákon vyloučení třetího $A \vee \neg A$
- zákon dvojí negace $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
- vyloučení sporu $\neg(A \wedge \neg A)$

Princip duality

Věta: Buď A formule, v níž se vyskytují jen spojky $\neg, \vee, \wedge$. Označme A' formuli, která vznikne z A nahrazením spojek $\vee$, $\wedge$ spojkami k nim duálními. Pak:
- A tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg A'$ je tautologie
- je-li $(A \rightarrow B)$ tautologie, pak je také $(B' \rightarrow A')$ tautologie
- je-li $(A \leftrightarrow B)$ tautologie, pak je také $(A' \leftrightarrow B')$ tautologie

Definice: Buď A formule. Pak duální formulí k A rozumíme A^*, která vznikne z A záměnou spojek $\vee, \wedge$ za spojky k nim duálními a nahrazením jednotlivých proměnných jejich negacemi.

Věta: Buďte A, B formule obsahující jen spojky $\neg, \vee, \wedge$.
Je-li $(A \rightarrow B)$ tautologie, pak je také $(B^* \rightarrow A^*)$ tautologie.
Je-li $(A \leftrightarrow B)$ tautologie, pak je také $(A^* \leftrightarrow B^*)$ tautologie.

Aplikace

Spínačové obvody
disjunkce ... paralelní zapojení
konjunkce ... sériové zapojení

Sítě jsou ekvivalentní $\Leftrightarrow$ proud prochází oběma zároveň.
Minimalizace sítě
- minimální sít má mezi všemi sítěmi s ní ekvivalentními nejméně spínačů
- řešení - síť převedeme na formuli a tu upravíme na logicky ekvivalentní formuli
- můžeme použít Carnaughovu mapu

Definice:
- **Úplným systémem spojek** výrokové logiky rozumíme takovou množinu spojek, že každou spojku výrokové logiky můžeme vyjádřit pomocí spojek z této množiny.
- Minimální úplný systém spojek - **báze spojek** výrokové logiky. (minimální vzhledem k množinové inkluzi)

Věta: Jedinými bázemi spojek tvořenými jednou binární spojkou jsou $\{\downarrow\}$ a $\{|\}$.

Formální axiomatický systém výrokové logiky

Abeceda
- množina P prvotních formulí
- symboly pro logické spojky
- pomocné symboly pro závorky

Formule
- všechny prvotní formule jsou formule
- jsou-li A, B formule, pak také $\neg A, (A \to B)$ (konečná kombinace) jsou formule

Axiomy výrokové logiky
(A1) $A \to (B \to A)$
(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ ... toto je důkaz sporem

Odvozovací pravidlo - modus ponens (pravidlo odloučení)
Z formulí $A, (A \to B)$ (předpoklady) se odvodí formule B (závěr).

Definice: Důkazem ve formální výrokové logice rozumíme libovolnou konečnou posloupnost $A_1, ...A_n$ výrokových formulí takovou, že pro každé $i \leq n$ je formule A_i buď axiomem nebo závěrem pravidla modus ponens.
$\vdash A$ ... formule A je dokazatelná

Věta (o dedukci): Nechť T je množina formulí, nechť A, B jsou formule.
Potom $T \vdash A \to B$ právě když $T \cup \{A\} \vdash B$.

Věta (o korektnosti): $\vdash \varphi \to \models \varphi$
tj. když je něco dokazatelné, tak je to tautologie

Věta (o úplnosti): $\models \varphi \to \vdash \varphi$

Lemma:
(a) $\vdash \neg A \to (A \to B)$
(b) $\vdash \neg\neg A \to A$
(c) $\vdash A \to \neg\neg A$
(d) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
(e) $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
(f) $\vdash (\neg A \to A) \to A$

5 Predikátová logika

Zadání: jazyk (termy, atomické formule a formule) a sémantika (realizace jazyka a ohodnocení proměnných), logicky platné formule

Jazyk
- proměnné (x, y,...)
- speciální symboly (predikátové, funkční)
- výrokové spojky
- kvantifikátory $\forall, \exists$
- pomocné symboly (závorky)

Term je
(i) každá proměnná (i každá konstanta)
(ii) n-tice termů $f(t_1, t_2, ..., t_n)$
(iii) každý term vznikne konečným počtem užití (i) a (ii)

Atomická formule
- jeden predikátový symbol p aplikovaný na n-tici prvků $p(t_1, t_2, ..., t_n)$

Formule predikátové logiky
(i) každá atomická formule je formule
(ii) jsou-li φ, ψ formule, pak také jejich spojení pomocí spojek výrokové logiky jsou formule
(iii) je-li x proměnná a φ formule, pak také $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ jsou formule
(iiii) každá formule vznikne konečným počtem užití (i), (ii) a (iii)

Proměnné ve formuli
- vázané - nachází-li se v nějaké podformuli
- volné - ty, které nejsou vázané

Formule s čistými proměnnými
- otevřená formule - neobsahuje žádnou vázanou proměnnou
- uzavřená formule - neobsahuje žádnou volnou proměnnou

Realizace $\mathcal{R}$ jazyka
(i) neprázdná podmnožina M - univerzum
(ii) pro $\forall$ funkční symbol f četnosti n je dáno zobrazení $f_r : M^n \to M$
(iii)pro $\forall$ predikátový symbol p četnosti n (n-ární), kromě "=", je dána relace $p_r \subseteq M^n$

Ohodnocení proměnných je libovolné zobrazení e množiny všech proměnných do univerza M dané realizace $\mathcal{R}$ jazyka L.

Formule je **logicky platná**, jestliže pro $\forall$ realizaci $\mathcal{R}$ jazyka L je $M \models \varphi$. Píšeme $\models \varphi$.
Formule je pravdivá při ohodnocení e v $\mathcal{R}$ ... $\mathcal{R} \models \varphi/e$
Formule je splněna v $\mathcal{R}$ ... $\mathcal{R} \models \varphi$

6 Axiomatický systém predikátové logiky

Zadání: axiomy a odvozovací pravidla, dokazování formulí, věta o dedukci, věty o úplnosti a bezespornosti

Axiomy výrokové logiky
(A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Axiom kvantifikátoru
pokud φ nemá volný výskyt proměnné x, pak $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
Axiom substituce
pokud t je term substituovatelný za x do φ, pak $\forall x\varphi \rightarrow \varphi x[t]$
Je-li L jazyk s rovností: **Axiom rovnosti**
$x_1 = y_1 \rightarrow (...(x_n = y_n \rightarrow (p(x_1, ..., x_n) \rightarrow p(y_1, ..., y_n)))...)$
Pravidlo odloučení - modus ponens (MP)
$A, (A \rightarrow B) \vdash B$
Pravidlo zobecnění - modus generalis (MG)
$\varphi \vdash \forall x\varphi$

Věta (o dedukci): Nechť T je množina formulí, φ je uzavřená, pak
$T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$.

Pravidlo $\forall$: Nemá-li φ volnou proměnnou x: $\vdash \varphi \rightarrow \psi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi \rightarrow \forall x\psi$
Pravidlo $\exists$: Nemá-li φ volnou proměnnou x: $\vdash \varphi \rightarrow \psi \;\Rightarrow\; (\exists x\varphi) \rightarrow \psi$

Prenexní tvary formulí (dokazování formulí)
Formule A je v prenexním tvaru, jestliže má tvar $Q_1x_1...Q_nx_nB$, kde
(i) $n \geq 0$ a pro $\forall i = 1, ..., n$ je Q_i buď $\forall$ nebo $\exists$
(ii) $x_1, ..., x_n$ jsou navzájem různé proměnné
(iii) B je otevřená formule (bez kvantifikátorů)

Věta: Ke každé formuli A lze sestrojit prenexní formuli A' tak, že $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Definice: Důkaz je konečná posloupnost formulí, kde každá formule je buď axiom nebo závěr pravidla MP nebo MG.

Věta o korektnosti: $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Věta o úplnosti: Jestliže je T teorie s jazykem L a φ je lib. formule jazyka L, potom $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$.

Teorie T je bezesporná právě tehdy, když má model.