Задача 1. Докажите, что у броуновского движения почти наверное бесконечная полная вариация.

Доказательство

- От противного. Пусть первая вариация равна $V < \infty$.
- Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ – произвольное разбиение с диаметром δ:

$$\delta = \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$$

- Вычислим сумму из определения квадратичной вариации:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 \leq \max_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \leq \max_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \cdot V$$

- В силу непрерывности $\max_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \to 0$ при $\delta \to 0$
- Отсюда квадратичная вариация стремится к нулю, противоречие. □

Задача 2. Пусть

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

Пусть $a, b > 0$. Пусть $\tau = \inf_{t \geq 0} \{t : X_t = a \vee X_t = -b\}$.
Найти $\mathbb{P}(X_\tau = a), \mathbb{E}\tau$.

Решение

- Пусть $\mathbb{P}(X_\tau = a) = p, \mathbb{P}(X_\tau = b) = 1 - p$
- Пусть функция $g(x)$ такая, что процесс $Y_t = g(X_t)$ – мартингал.
- Тогда с одной стороны:

  $$\mathbb{E}Y_\tau = \mathbb{E}Y_0 = g(0)$$

  С другой стороны:

  $$\mathbb{E}Y_\tau = p \cdot g(a) + (1 - p) \cdot g(-b) = p(g(a) - g(-b)) + g(-b)$$

  Отсюда:

  $$p = \frac{g(0) - g(-b)}{g(a) - g(-b)}$$

- Формула Ито для процесса Y_t:

$$dY_t = g'(X_t)dX_t + 0.5g''(X_t)dX_t^2 = \left(g'(X_t)\mu + 0.5\sigma^2 g''(X_t)\right) dt + g'(X_t)\sigma dB_t$$

- Хотим, чтобы Y_t был мартингалом, отсюда уравнение на g:

$$g'\mu = -0.5\sigma^2 g''$$

- Замена переменых: $g' = u$

$$u' = -\frac{2\mu}{\sigma^2}u \to u = C\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)$$

$$g = C_1 + C_2\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}x\right)$$

  Положим для простоты $C_1 = 0, C_2 = 1$. Итого решение:

$$p = \frac{g(0) - g(-b)}{g(a) - g(-b)} = \frac{1 - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}b\right)}{\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}a\right) - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}b\right)}$$

- При $\mu = 0$ по правилу Лопиталя получим:

$$p(\mu = 0.5) = \frac{b}{a+b}$$

- $\mathbb{E}\tau$:

$$\mathbb{E}X_t = \mu\mathbb{E}\tau + \sigma\mathbb{E}B_\tau = \mu\mathbb{E}\tau \to \mathbb{E}\tau = \frac{\mathbb{E}X_t}{\mu}$$

- В свою очередь:

$$\mathbb{E}X_t = pa - (1-p)b = p(a+b) - b = \dots$$