Контракты американского типа

- Опцион американского типа можно исполнить в произвольный момент времени $0 \leq t \leq T$.
- Выплата в момент t определяется функцией выплаты $\Phi(t, S_t)$
- Американский колл-опцион при исполнении в момент t выплачивает:

$$\Phi(t, S_t) = (S_t - K)^+$$

- Стоимость европейского контракта:

$$V_0^E = \mathbb{E} e^{-rT} \Phi(T, S_T)$$

- Стоимость американского контракта:

$$V_0^A = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau} \Phi(\tau, S_\tau)$$

  где супремум берётся по всем временам остановки $\tau \leq T$. Стоимость реплицирующей стратегии против оптимального контр-агента.
- Дата погашения τ – марковский момент $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
- Принимаем решение об экспирации только на основании информации из

Perpetual american put

Задача

Найти стоимость вечного американского пут-опциона $T = \infty$:

$$V(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau}(K - S_\tau)$$

где супремум берётся по всем марковским моментам $\mathcal{T}$, $S_0 = s$.

Perpetual american put

- Задача однородная по времени. Ищем решение в классе моментов остановки:

$$\tau_L = \inf\{t \geq 0, S_t = L\}$$

- Исполняем опцион в первый момент, когда цена пробъёт уровень $L < s$.
- Найдем ожидаемую выплату для такой стратегии:

$$V_L(s) = \mathbb{E}e^{-r\tau}(K - S_\tau) = (K - L)\mathbb{E}e^{-r\tau}$$

  Считаем, что $e^{-r\tau}(K - S_\tau) = 0$ при $\tau = \infty$ (выплаты не происходит).
- Нужно найти преобразование Лапласа от $\tau_L, \mathbb{E}e^{-r\tau}$.

Преобразование Лапласа

- БД со сносом $X_t = \mu t + W_t$
- Момент остановки $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$
- Найдем σ такое, что M_t – мартингал:
$$M_t = e^{\sigma X_t - rt}$$
- По теореме Дуба:
$$1 = \mathbb{E} M_{\tau_a} = \mathbb{E} e^{\sigma a - r\tau}$$
откуда
$$\mathbb{E} e^{-r\tau} = e^{-\sigma a}$$
- $\sigma = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}$, откуда:
$$\mathbb{E} e^{-r\tau} = e^{-(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r})a}$$

Perpetual american put: продолжение

- $X_t = \log S_t - \log s = (r - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t$
- $S_t = L \Leftrightarrow X_t = \log(L/s)$
- $\mathbb{E}e^{-r\tau_L} = e^{-(-\mu+\sqrt{\mu^2+2r})a}$, где $\mu = r - 0.5\sigma^2, a = \log(L/s)$:

$$\mathbb{E}e^{-r\tau_L} = \left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

- Итого, ожидание выплаты для такой стратегии:

$$v_L(s) = \begin{cases} K - s, 0 \le s \le L \\ (K - L)\left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, s \ge L \end{cases}$$

- Оптимальная граница L:

$$\frac{\partial v_L(s)}{\partial L} = 0 \to L^* = \frac{2r}{2r + \sigma^2}K$$

Perpetual american put: продолжение

- Итого, ожидание выплаты для такой стратегии:

$$v_L(s) = \begin{cases} K - s, 0 \leq s \leq L \\ (K - L)\left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, s \geq L \end{cases}$$

- Оптимальная граница L:

$$\frac{\partial v_L(s)}{\partial L} = 0 \to L^* = \frac{2r}{2r + \sigma^2} K$$

- При таком выборе L производная по s непрерывна (smooth pasting):

$$\left.\frac{\partial v_{L^*}(s)}{\partial s}\right|_{L^*-0} = \left.\frac{\partial v_{L^*}(s)}{\partial s}\right|_{L^*+0} = -1$$

Американский опцион

Американский опцион для конечного времени
Неравенства с европейским
Американский колл-опцион
Граница экспирации, картинки.