Лекция 2. Случайные процессы в непрерывном времени

September 11, 2025

Случайные процессы

Пусть $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Случайный процесс – набор случайных величин $\xi_t, t \in [0, T]$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

Конечномерные распределения

Всевозможные совместные распределения с.в. $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$ называются конечномерными распределениями процесса ξ_t:

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \dots, \xi_{t_n} \leq x_n)$$

- Случайный процесс – функция двух переменных $\xi_t = \xi(t, \omega)$, измеримая по второму аргументу $\forall t$.
- Отображение $t : \xi_t(\omega)$ при фиксированном ω – траектория(реализация) процесса.

Броуновское движение

Определение

Случайный процесс B_t называется броуновским движением (винеровским процессом), если:

- $B_0 = 0$
- $\forall s < t: \; B_t - B_s \sim N(0, t - s)$
- $\forall s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ приращения $B_{t_2} - B_{s_2}, B_{t_1} - B_{s_1}$ – независимы
- Траектории B_t почти наверное непрерывны по t

Случайные процессы

Определение

Процесс X_t называется непрерывным в среднеквадратичном, если:

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbb{E}(X_{t+\delta} - X_t)^2 = 0$$

Определение

Процесс X_t называется дифференцируемым в среднеквадратичном, если $\exists$ процесс $(Y_t)_{t \geq 0}$:

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbb{E}\left(\frac{X_{t+\delta} - X_t}{\delta} - Y_t\right)^2 = 0$$

Вариация функции/процесса

Определение

Вариацией функции/процесса X_t называется величина:

$$V_t(X) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|$$

Для дифференцируемых функций $V_t(X) = \int_0^t |X_t'| dt$.

Определение

Квадратичной вариацией процесса X_t называется процесс:

$$[X]_t = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

где предел берётся по всем разбиениям интервала $[0, t]$ с

Свойства

- $B_t \sim N(0, t)$
- Броуновское движение непрерывно в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \to +0} \mathbb{E}\left(B_{t+\delta} - B_t\right)^2 = 0$$

- Процесс НЕ дифференцируем в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \to +0} \mathbb{E}\left(\frac{B_{t+\delta} - B_t}{\delta}\right)^2 = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} = \infty$$

- Конечная квадратичная вариация:

$$[B]_T = \int_0^T (dB_t)^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{t_k})^2 = T$$

- Бесконечная полная вариация: $V_t(B) = \infty$.

Квадратическая вариация броуновского движения

Переписать док-во, чтобы было понятней

Квадратическая вариация:

$$[B]_t = \int_0^t [dB_t]^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} S_n$$

где $t_k = \Delta t \cdot k, \Delta t = \frac{T}{n}$.

$$\mathbb{E} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \Delta t = T$$

$$\mathbb{D} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{D} \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2(\Delta t)^2 = 2T\Delta t \to 0$$

Интеграл Ито для простых процессов

Пусть B_t – броуновское движение, $F = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ – естественная фильтрация.

Определение

Процесс $g(t)$ называется простым, если $\exists$ числа $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ такие, что $g(t) = g(t_k)$ на $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Интеграл Ито для простого процесса

Пусть $g(t)$ – простой процесс, согласованный с фильтрацией F. Будем называть интегралом Ито случайную величину:

$$\int_0^T g(t)dB_t = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]$$

Интеграл Ито для простых процессов: свойства

Пусть $Z_t = \int_0^t g(s)dW_s$. Тогда:

- $Z_t \in \mathcal{F}_t$
- $\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = Z_s$
- $\mathbb{E}Z_t = 0$
- $\mathrm{Var} Z_t = \mathbb{E} \int_0^T g^2(t)dt$ – изометрия Ито.

Мартингальность следует из соответствующего результата для дискретного стох. интеграла.

Изометрия Ито

Рассмотрим:

$$Z_t = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\Delta B_{t_k}$$

$$\mathbb{D}Z_t = \mathbb{E}Z_t^2$$

Вычислим:

$$\mathbb{E}Z_t^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)^2\left(\Delta B_{t_k}\right)^2 + 2\sum_{i<j} g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j}\right) =$$

$$= A_1 + A_2$$

Изометрия Ито

$$A_1 = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k)\,(\Delta B_{t_k})^2 = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}^{F_{t_k}}\left[g^2(t_k)\,(\Delta B_{t_k})^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k)\mathbb{E}^{F_{t_k}}\,(\Delta B_{t_k})^2 = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k)\Delta t = \int_0^T g^2(t)dt$$

$$A_2 = 2\mathbb{E}\sum_{i<j} g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j} = 2\mathbb{E}\sum_{i<j}\mathbb{E}^{F_{t_j}}\left[g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j}\right] =$$

$$= 2\mathbb{E}\sum_{i<j} g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\mathbb{E}^{F_{t_j}}\left[\Delta B_{t_j}\right] = 0$$

Итого:

$$\mathbb{D}\left[\int_0^T g(t)dB_t\right] = \mathbb{E}\int_0^T g^2(t)dt$$

Интеграл Ито для произвольного процесса

- Пусть $g(t)$ – согласованный процесс, $\mathbb{E}g^2(t) < \infty$
- Пусть $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность простых процессов таких, что

$$\int_0^t \mathbb{E}[g_n(s) - g(s)]^2 ds \to 0, n \to \infty$$

- Для каждого n определим $Z_n = \int_0^t g_n(s) dW_s$
- Можно показать, что $\exists Z$ такой, что $Z_n \to Z$ в с.к..
- Определим интеграл как:

$$\int_0^t g(s)dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} g_n(t_k)\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]$$

Пример

Вычислить

$$\int_0^T 2B_t dB_t = \dots$$

Детерминированный случай:

$$\int_0^T 2f(t)df(t) = \int_0^T df^2 = f^2(T)$$

Стохастический случай:

$$\Delta\left(B_t^2\right) = B_{t+1}^2 - B_t^2 = \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\left(B_{t_{k+1}} + B_{t_k}\right)$$
$$= \Delta B_{t_k}\left(2B_{t_k} + \Delta B_{t_k}\right) = 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} + [\Delta B_{t_k}]^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta\left(B_{t_k}^2\right) - [\Delta B_{t_k}]^2 = B_T^2 - \sum_{k=0}^{n-1}[\Delta B_{t_k}]^2 \to B_T^2 - T$$

Свойства

- Линейность:

$$\int_0^T [\alpha g(t) + \beta h(t)]\, dB_t = \alpha \int_0^T g(t) dB_t + \beta \int_0^T h(t) dB_t$$

- Линейность по пределу интегрирования:

$$\int_0^T g(t) dB_t = \int_0^s g(t) dB_t + \int_s^T g(t) dB_t,\ 0 < s < T$$

- Изометрия Ито:

$$\mathbb{E} \int_0^T g(t) dB_t = 0,\ \mathbb{D} \int_0^T g(t) dB_t = \int_0^T g^2(t) dt$$

- Таблица умножения стох. дифференциалов:

$$(dB_t)^2 = dt,\ dB_t dt = 0,\ dB_t dB_s = 0,\ t \neq s$$

Процесс Ито

Определение

Будем называть процессом Ито процесс вида:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

В дифференциальной форме это можно записать как:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Мартингальность

Определение

Процесс X_t называется мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, если $\forall s < t$ выполнено:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_t = X_s$$

Пример – броуновское движение:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} B_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left[B_s + (B_t - B_s)\right] = B_s + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left[(B_t - B_s)\right] = B_s$$

Свойства:

- Если X_t, Y_t – мартингалы, то $\alpha X_t + \beta Y_t$ – мартингал.
- $\mathbb{E}^{F_s}(X_t - X_s) = 0$

Пример. Интеграл Ито

Пример – интеграл Ито:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\int_0^t g(u)dB_u\right] = \int_0^s g(u)dB_u + \mathbb{E}^{F_s}\left[\int_s^t g(u)dB_u\right]$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\sum_{t_k \geq s} g(t_k)\Delta B_{t_k}\right] = \sum_{t_k \geq s} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[g(t_k)\Delta B_{t_k}\right]$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[g(t_k)\Delta B_{t_k}\right] = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\mathbb{E}^{F_{t_k}}\left(g(t_k)\Delta B_{t_k}\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[g(t_k)\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_k}}\left(\Delta B_{t_k}\right)\right] = ($$

Пример. Геометрическое броуновское движение

$$X_t = e^{-0.5t+B_t}$$

$$X_t = X_s e^{-0.5(t-s)+B_t-B_s}$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_t = X_s e^{-0.5(t-s)} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} e^{B_t-B_s}$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} e^{B_t-B_s} = \mathbb{E}_{\xi\sim N(0,t-s)} e^{\xi} = e^{0.5(t-s)}$$

Формула Ито для броуновского движения

Теорема

Пусть B_t – броуновское движение, $f(t,x)$ – гладкая функция. Тогда:

$$f(t,B_t) = f(0,0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s,B_s) + f_s(s,B_s)\right] ds + \int_0^t f_x(s,B_s) dB_s$$

Формула Ито для броуновского движения

Теорема

Пусть B_t – броуновское движение, $f(t,x)$ – гладкая функция. Тогда:

$$f(t,B_t) = f(0,0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s,B_s) + f_s(s,B_s)\right] ds + \int_0^t f_x(s,B_s) dB_s$$

Неформально интегральную запись можно понимать как:

$$df(t,B_t) = \left[\frac{1}{2} f_{xx}(t,B_t) + f_t(t,B_t)\right] dt + f_x(t,B_t) dB_t$$

Формула Ито для броуновского движения

Неформально интегральную запись можно понимать как:

$$df(t, B_t) = \left[\frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) + f_t(t, B_t)\right] dt + f_x(t, B_t) dB_t$$

Доказательство (Для случая $f = f(x)$) Разложим функцию $f(B_t)$ в ряд Тейлора до второго порядка малости:

$$f(B_t + dB_t) - f(B_t) = f_x(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(B_t) dB_t^2 + \ldots =$$

$$= f_x(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(B_t) dt + o(dt)$$

Пример

- $f(x) = x^2$. $Y_t = f(W_t) \to$

$$dY_t = 2W_t dW_t + dt$$

$$Y_t = t + 2\int_0^t W_s dW_s$$

- $f(x) = e^x$, $Y_t = f(W_t)$

$$dY_t = \frac{1}{2} Y_t dt + Y_t dW_t$$

- При каком α процесс $e^{\alpha t + \sigma W_t}$ является мартингалом?

Формула Ито для процесса Ито

Теорема

Пусть X_t – процесс Ито:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

$f(t, x)$ – гладкая функция. Тогда $Y_t = f(t, X_t)$ процесс Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_t^Y &= f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2 \\ \sigma_t^Y &= f_x(t, X_t)\sigma_t \end{aligned}$$

Доказательство Аналогично предыдущему случаю

Стохастические диф. уравнения

Интегральная запись:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Пример. Броуновское движение со сносом

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим детерменированное уравнение:

$$dX_t = X_t \mu dt \to X_t = e^{\mu t}$$

Замена переменных:

$$X_t = e^{Y_t} \longrightarrow Y_t = \log X_t$$

$$dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{(dX_t)^2}{X_t^2} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right]$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right]$$

$$\mathbb{E}X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\mathbb{E}\exp\left[\sigma B_t\right] = e^{\mu t}$$

Процесс Орнштейна-Уленбека

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t$$

$$\mathbb{E}X_t = \beta_t = \dots$$

$$d\beta_t = -\alpha\beta_t dt \longrightarrow \beta_t = \beta_0 e^{-\alpha t}$$