

## Лекция 3. Стохастические дифференциальные уравнения

October 4, 2025

- Броуновское движение как предел случайного блуждания. Аксиоматические определения, основные свойства.
- Основные понятия стох. анализа: непрерывность и дифференцируемость в с.к., полная и квадратичная вариация процесса.
- Интеграл Ито. Мартингальность, изометрия Ито. Отличия от интеграла Римана.
- Процессы Ито.
- Формула Ито, таблица умножения стох. дифференциалов.

Интегральная запись:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

Дифференциальная запись:

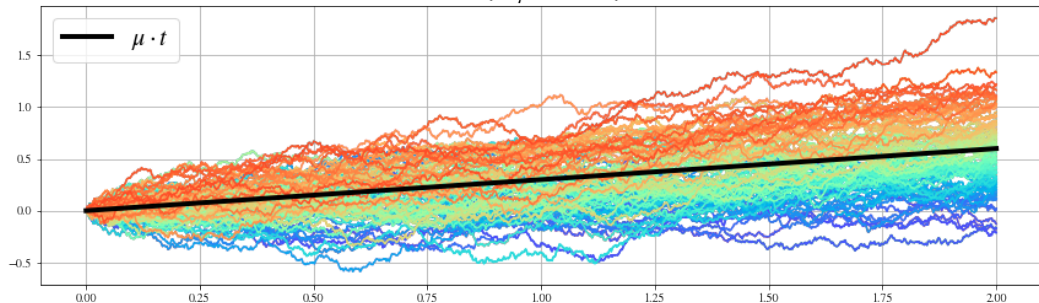
$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

## Пример. Броуновское движение со сносом

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$



## Пример. Геометрическое броуновское движение

$$\begin{cases} dX_t = X_t (\mu dt + \sigma dB_t) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим детерменированное уравнение:

$$dX_t = X_t \mu dt \rightarrow X_t = e^{\mu t}$$

Замена переменных:

$$X_t = e^{Y_t} \rightarrow Y_t = \log X_t$$

$$dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} \frac{(dX_t)^2}{X_t^2} = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$$

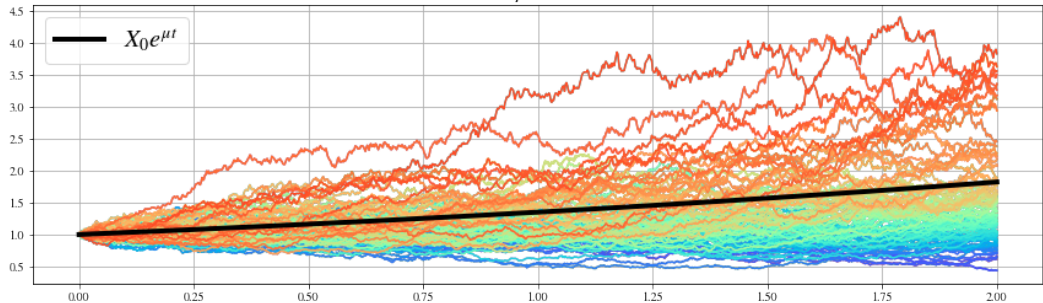
$$X_t = \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right]$$

## Пример. Геометрическое броуновское движение

$$X_t = \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right]$$

$$\mathbb{E} X_t = \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right] \mathbb{E} \exp [\sigma B_t] = X_0 e^{\mu t}$$

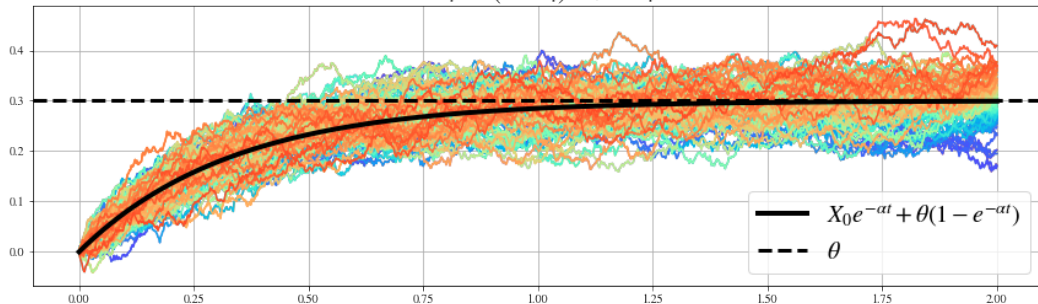
$$dX_t = X_t \mu dt + X_t \sigma dB_t$$



## Пример. Процесс Орнштейна-Уленбека

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$



# Пример. Броуновский мост

## Определение

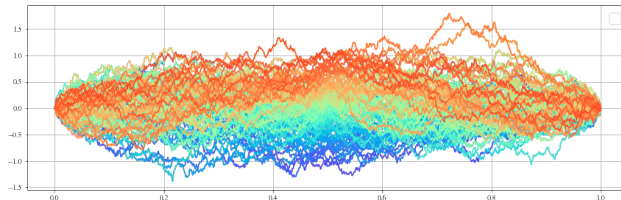
Броуновский мост это гауссовский процесс  $X_t$ ,  $t \in [0, 1]$ :

- $\mathbb{E}X_t = 0$
- $\text{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1 - t)$ ,  $s \leq t$

Если  $B_t$  – БД, то  $X_t = B_t - t \cdot B_1$  – броуновский мост.

Броуновский мост как процесс Ито

$$dX_t = a(t)X_t dt + \sigma dB_t$$





# Теорема существования

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

## Теорема

Пусть

- $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq K|x - y|$
- $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
- $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, y)| \leq K(1 + |x|)$

Тогда  $\exists!$  решение СДУ  $(X_t)_{t \geq 0}$ , причем:

- $(X_t)_{t \geq 0}$  адаптированный к  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  процесс,
- $(X_t)_{t \geq 0}$  имеет непрерывные траектории,
- $(X_t)_{t \geq 0}$  – марковский процесс

## Численное решение СДУ: схема Эйлера

- Пусть  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  – разбиение  $[0, t]$
- Схема Эйлера:

$$\hat{X}_{t_{k+1}} = \hat{X}_{t_k} + \mu(t_k, \hat{X}_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, \hat{X}_{t_k})\sqrt{\Delta t_k}\xi_k$$

где  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$  – i.i.d.

- При  $\Delta t_k \rightarrow 0$  дискретный процесс  $\hat{X}_{t_k} \rightarrow X_t$ .
- Дискретная марковская цепь:

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{t_{k+1}} \in A | \mathcal{F}_{t_k}) = \mathbb{P}(\hat{X}_{t_{k+1}} \in A | X_{t_k}) = \mathcal{N}\left(\hat{X}_{t_k} + \mu(t_k, \hat{X}_{t_k})\Delta t_k, \sigma^2(t_k, \hat{X}_{t_k})\Delta t_k\right)$$

# Формула Феймана-Каца: мотивировка

- Процесс цены  $X_t$ :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

- Случайная выплата, зависящая от цены  $X_T$ :  $Y_T = \Phi(X_T)$ .
- Ожидание выплаты в момент  $t$ :

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t]$$

- В силу марковости:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t] = f(t, X_t)$$

для некоторой функции  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

## Постановка задачи

Найти функцию  $f(t, x)$  такую, что:

$$f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$$

- Предположим, что  $f(t, x)$  гладкая, тогда по формуле Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t,$$

где

$$\mu_t^Y = f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu(t, X_t) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t)$$

$$\sigma_t^Y = f_x(t, X_t)\sigma(t, X_t)$$

- $Y_t$  – мартингал Леви, поэтому  $\mu_t^Y = 0$ , откуда:

$$f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = \Phi(x)$$

# Формула Феймана-Каца

Пусть  $X_t$  удовлетворяет СДУ  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ .

## Теорема

- Пусть  $f(t, x)$  удовлетворяет УРЧП:

$$\begin{aligned}f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) &= 0 \\f(T, x) &= \Phi(x)\end{aligned}$$

Тогда:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = f(t, X_t)$$

- Пусть  $f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$ . Тогда  $f(t, x)$  удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) &= 0 \\f(T, x) &= \Phi(x)\end{aligned}$$

Решить УРЧП:

$$f_t(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = x^2$$

Решить УРЧП:

$$f_t(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = x^2$$

- $\mu(t, x) = 0, \sigma(t, x) = 1 \rightarrow X_t = B_t$ .
- По формуле Феймана-Каца:

$$f(t, x) = \mathbb{E}[B_T^2 | B_t = x] = \mathbb{E}[(x + (B_T - B_t))^2 | B_t = x] = \mathbb{E}(x + \xi)^2$$

где  $\xi \sim N(0, T - t)$ .

- Отсюда:

$$f(t, x) = x^2 + (T - t)$$

# Инфинитезимальный оператор

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

## Определение

Дифференциальный оператор  $A$ , действующий на гладкие функции  $h(x)$  следующим образом:

$$Ah(x) = \mu(t, x)\frac{\partial h}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x)$$

называется инфинитезимальным оператором.

Формулу Ито можно записать как:

$$df(t, X_t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + Af \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dW_t$$



# Формула Феймана-Каца

Пусть  $X_t$  удовлетворяет СДУ  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ ,  
 $A$  – инфинитезимальный оператор процесса  $X_t$ .

## Теорема

- Пусть  $f(t, x)$  удовлетворяет УРЧП:

$$f_t(t, x) + Af = 0$$

$$f(T, x) = \Phi(x)$$

Тогда:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T) | \mathcal{F}_t] = f(t, X_t)$$

- Пусть  $f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T) | X_t = x]$ . Тогда  $f(t, x)$  удовлетворяет уравнению:

$$f_t(t, x) + Af = 0$$

$$f(T, x) = \Phi(x)$$

# Обратное уравнение Колмогорова

- Пусть  $\Phi(x) = \delta(x - y)$  – дельта-функция.
- Переходная плотность

$$p(t, x; T, y) = \mathbb{E}[\Phi(X_T) | X_t = x]$$

- $p(t, x; T, y)dy = \mathbb{P}(X_T \in [y, y + dy] | X_t = x)$ .
- **Обратное уравнение Колмогорова:**

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x; T, y) + Ap(t, x; T, y) = 0$$
$$p(t, x; T, y) \rightarrow \delta(x - y) \text{ при } t \rightarrow T$$

- Однородная марковская цепь. Переходные вероятности:

$$\pi(x, y) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x)$$

- Динамика функций:

$$f(t, x) = \mathbb{E}(\Phi(X_T) | X_t = x)$$

$$f(t, x) = \mathbb{E}(f(t+1, X_{t+1}) | X_t = x) = \sum_y \pi(x, y) f(t+1, y)$$

- В матричной форме:

$$\vec{f}_t = \pi \vec{f}_{t+1}$$

- Динамика маргинального распределения:

$$p_t(x) = \mathbb{P}(X_t = x) = \sum_y \mathbb{P}(X_t = x | X_{t-1} = y) \mathbb{P}(X_{t-1} = y) = \sum_y \pi(y, x) p_{t-1}(y)$$

- В матричной форме:

$$\vec{p}_t = \pi^\top \vec{p}_{t-1}$$

# Прямое уравнение Колмогорова

- Пусть  $X_t$  удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

- Инфинитезимальный оператор процесса  $X_t$ :

$$Ah(x) = \mu(t, x)\frac{\partial h}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x)$$

- $p(s, y)$  – плотность распределения с.в.  $X_s$  в точке  $y$
- $h(s, y)$  – произвольная гладкая финитная функция,  $0 \leq s \leq t$ .
- Формула Ито:

$$h(t, X_t) = h(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial h}{\partial s} + Ah \right) (s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s)dB_s$$

- В силу финитности  $h(t, X_t) = h(0, X_0) = 0$ .

- Возьмем слева и справа мат. ожидание:

$$\mathbb{E} \int_0^t \left( \frac{\partial h}{\partial s} + Ah \right) (s, X_s) ds = 0$$

- Поменяем местами интегрирование и мат. ожидание:

$$\int_0^t ds \mathbb{E} \left( \frac{\partial h}{\partial s} + Ah \right) (s, X_s) = 0$$

- Запишем мат. ожидание как интеграл по плотности:

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(s, y) \left( \frac{\partial h}{\partial s} + Ah \right) (s, y) = 0$$

- Проинтегрируем по частям:

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} h(s, y) \left( -\frac{\partial p}{\partial s} + A^* p \right) (s, y) = 0$$

где сопряженный оператор  $A^*$ :

$$A^* h = -\frac{\partial (\mu(t, x) \cdot h(x))}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2(t, x) h(x))}{\partial x^2}$$

- В силу произвольности  $h(s, y)$  получим **прямое уравнение Колмогорова**:

$$-\frac{\partial p}{\partial s}(s, y) + A^* p(s, y) = 0$$

Пусть  $X_t$  удовлетворяет СДУ  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ ,  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $A$  – инфинитезимальный оператор процесса  $X_t$ ,  $A^*$  – его сопряженный.

## Теорема

Пусть  $p(s, y)$  – плотность распределения с.в.  $X_s$  в точке  $y$ . Тогда  $p(s, y)$  удовлетворяет уравнению:

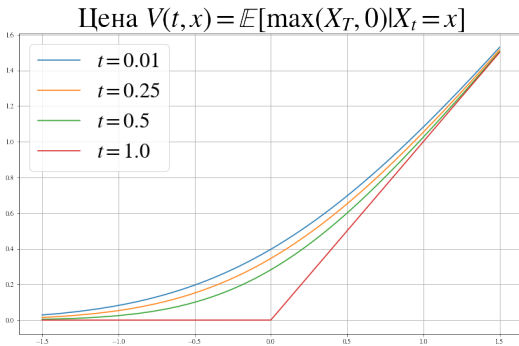
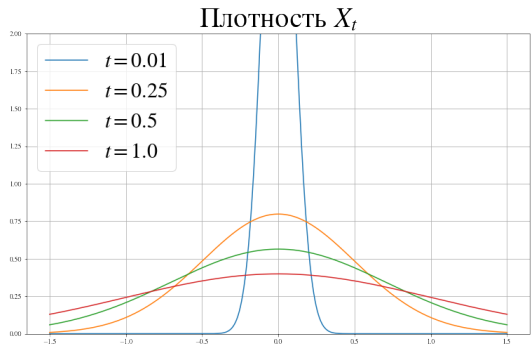
$$-\frac{\partial p}{\partial s}(s, y) + A^*p(s, y) = 0$$

с начальными условиями:

$$p(s, y) \rightarrow \delta(y - X_0), \quad s \rightarrow +0$$

# Уравнение Колмогорова и формула Феймана-Каца

- Уравнение Колмогорова: динамика плотности вперёд во времени
- Уравнение (формула) Феймана-Каца: динамика УМО назад во времени





## Прямое уравнение Колмогорова: пример

- $X_t = B_t$ . Прямое уравнение Колмогорова на плотность  $p(t, x)$ :

$$p_t = 0.5p_{xx}$$

$$p(0, x) = \delta(x - x_0)$$

- Уравнение на характеристическую функцию  $\phi(t, k) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x) e^{ikx} dx$ :

$$\phi_t = -0.5k^2\phi$$

$$\phi(0, k) = e^{ikx_0}$$

- Решение:

$$\phi(t, k) = \exp\left(ikx_0 - \frac{tk^2}{2}\right)$$

- Восстановление плотности:

$$p(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t, k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2t}\right)$$

## Приложения

## Прямое уравнение Колмогорова: пример

- Пусть  $X_t = B_t$
- $\mu(t, x) = 0, \sigma(t, x) = 1$
- $A = A^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
- Обратное уравнение Колмогорова на плотность  $p(t, x)$ :

$$p_t = \frac{1}{2} p_{xx}$$

- Ищем решение в автомодельном виде:  $p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(\xi)$  где  $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$ .

- $p_x = \frac{g'}{t}, p_{xx} = \frac{g''}{t^{3/2}}$

- $p_t = -g' \frac{x}{2t} - g \frac{1}{2t^{3/2}} = -\frac{(g'\xi + g)}{2t^{3/2}}$

- Подставляем в уравнение:

$$-\frac{(g'\xi + g)}{2t^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{g''}{t^{3/2}}$$

## Прямое уравнение Колмогорова: пример

- Подставляем в уравнение:

$$-\frac{(g'\xi + g)}{2t^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{g''}{t^{3/2}}$$

- Переносим всё в одну сторону:

$$g'' + g'\xi + g = 0$$

$$g'' + (g\xi)' = 0$$

$$g' + g\xi = 0$$

- Итого:

$$g = C \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

- Из условий нормировки:

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

# Уравнение Колмогорова: численное решение

- Введём сетку по времени и по пространству

$$t_n = n \cdot \Delta, \quad x_m = m \cdot h$$

- Введём сеточные функции

$$p_m^n = p(t_n, x_m)$$

- Аппроксимируем производные:

$$p_t(t_n, x_m) \approx \frac{p_m^{n+1} - p_m^n}{\Delta}, \quad p_{xx}(t_n, x_m) \approx \frac{p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n}{h^2}$$

- Уравнение:

$$\frac{p_m^{n+1} - p_m^n}{\Delta} = \frac{\sigma^2}{2h^2} (p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n)$$

- Выразим  $p_m^{n+1}$ :

$$p_m^{n+1} = p_m^n + \frac{\Delta \sigma^2}{2h^2} (p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n)$$

# Уравнение Колмогорова: численное решение

- Выразим  $p_m^{n+1}$ :

$$p_m^{n+1} = p_m^n + \frac{\Delta\sigma^2}{2h^2} (p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n)$$

- Пусть  $h^2 = \Delta\sigma^2$ .

$$p_m^{n+1} = \frac{p_{m+1}^n + p_{m-1}^n}{2}$$

