Лекция 12. American Monte Carlo

December 5, 2025

Эволюция методов прайсинга

Условное мат. ожидание

- Пусть X, Y – случайные величины
- $Z = \mathbb{E}[Y|X] = g(X)$
- УМО как проекция:

$$g(y) = \arg\min_{f \in \mathcal{L}} \mathbb{E}(f(X) - Y)^2$$

где $\mathcal{L}$ – множество всех измеримых функций.

Аппроксимация условного мат. ожидания

- Пусть $\phi_1, \dots, \phi_M$ – набор базисных функций (например, полиномы)

$$\mathcal{L}_M = \mathrm{span}(\phi_1, \dots, \phi_M) = \{(\beta, \phi(x)) = \sum_{m=1}^{M} \beta_m \phi_m(x), \beta \in \mathbb{R}^M\}$$

- Пусть есть совместная выборка $\{X^j, Y^j\}_{j=1}^{N}$
- Аппроксимация условного мат. ожидания:

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta \in \mathbb{R}^M} \sum_{j=1}^{M} ((\beta, \phi(X^j)) - Y^j)^2$$

$$\mathbb{E}[X|Y] \approx (\hat{\beta}, \phi(Y)) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_m \phi_m(Y)$$

Compound option

- Рассмотрим опцион со сложным пэйоффом в момент T

$$X = \left(C(T_1, S_{T_1}; T_2, K) - \kappa\right)^+$$

где $C(T_1, S_{T_1}; T_2, K)$ – стоимость опциона с датой погашения T_2 и страйком K:

$$C(T_1, S_{T_1}; T_2, K) = e^{-r(T_2 - T_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_{T_2} - K)^+ | \mathcal{F}_{T_1} \right]$$

Double Monte-Carlo

- Первичные траектории до момента T_1:

$$S_t^j, j = \overline{1, N_1}, t = \overline{0, T_1}$$

- Вторичные траектории от T_1 до T_2:

$$S_t^{j,k} | S_T^j, k = \overline{1, N_2}, t = \overline{T_1, T_2}$$

- Внутреннее мат. ожидание:

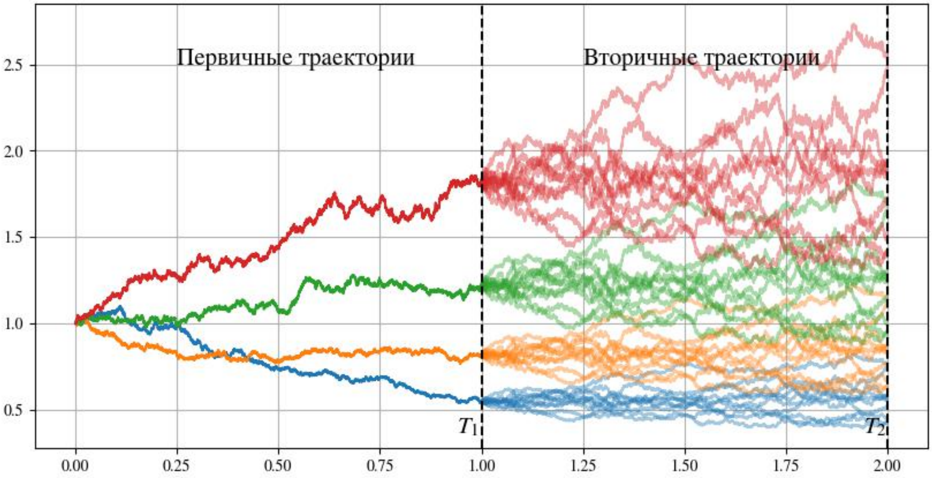
$$\hat{C}^j = \frac{e^{-r(T_2 - T)}}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} (S_{T_2}^{j,k} - K)^+$$

- Внешнее мат. ожидание:

$$V = \frac{e^{-rT_1}}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} (\hat{C}^j - \kappa)^+$$

- Всего $O(N_1 N_2)$ симуляций

Double Monte-Carlo



Regression based Monte-Carlo

- Сгенерируем один набор траекторий до момента T_2:

$$S_t^j, j = \overline{1, N}, t = \overline{0, T_2}$$

- Обозначим $X^j = S_T^j, Y^j = e^{-r(T_2 - T)}(S_{T_2}^j - K)^+$
- Оценка условного мат. ожидания:

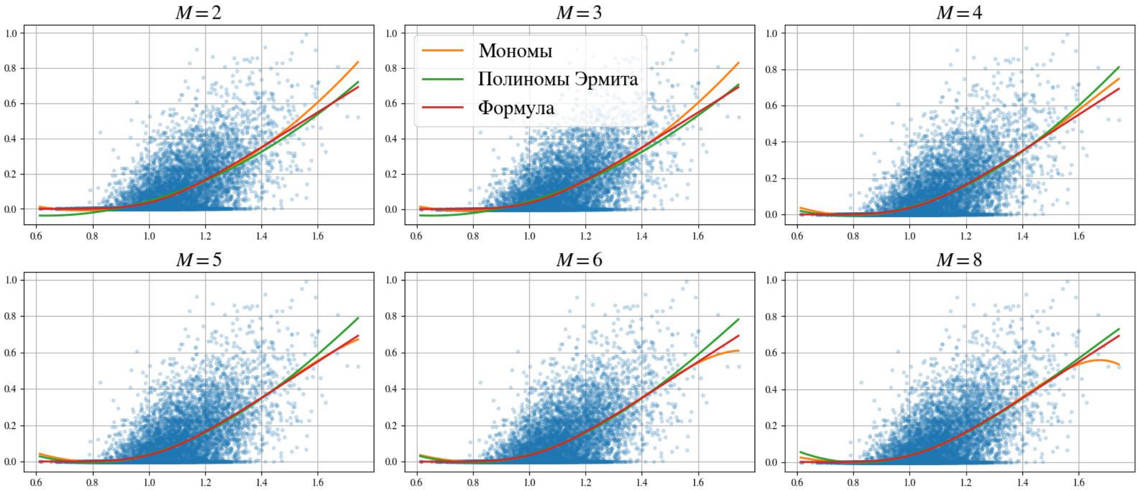
$$\hat{C}^j = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_m \phi_m(X^j), \quad \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - Y^j)^2 \to \min$$

  где коэффициенты $\hat{\beta}$ находятся из задачи линейной регрессии
- Оценка внешнего мат. ожидания:

$$V = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - \kappa)^+$$

- Вычислительная сложность $O(NM^2 + M^3) \approx O(N)$

Regression based Monte-Carlo



Double regression based Monte-Carlo

- Первичные траектории до момента T_1:

$$S_t^j, j = \overline{1, N_1}, t = \overline{0, T_1}$$

- Вторичные траектории от T_1 до T_2:

$$S_t^{j,k} | S_T^j, k = \overline{1, N_2}, t = \overline{T_1, T_2}$$

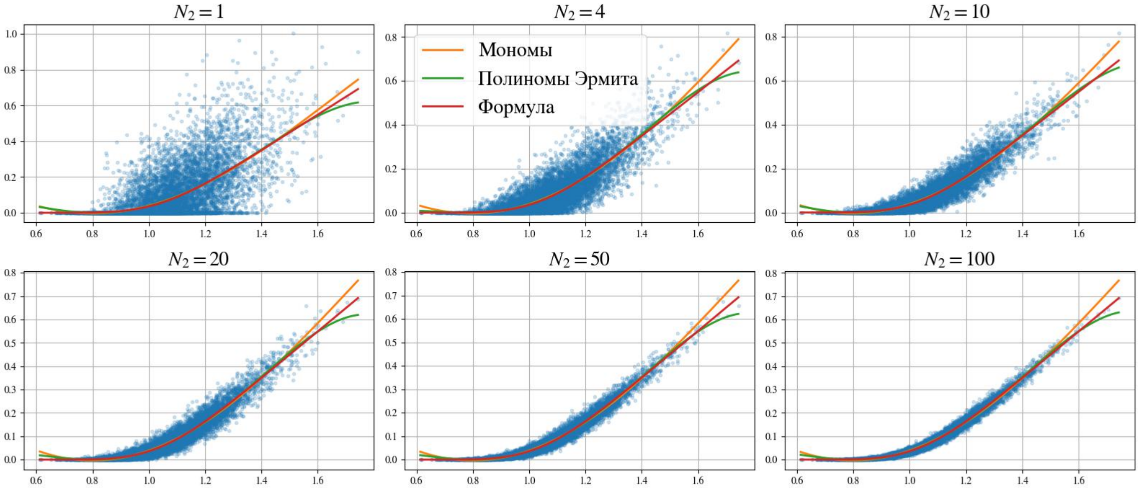
- Первичная оценка мат. ожидания:

$$Y^j = \frac{e^{-r(T_2 - T)}}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} (S_{T_2}^{j,k} - K)^+$$

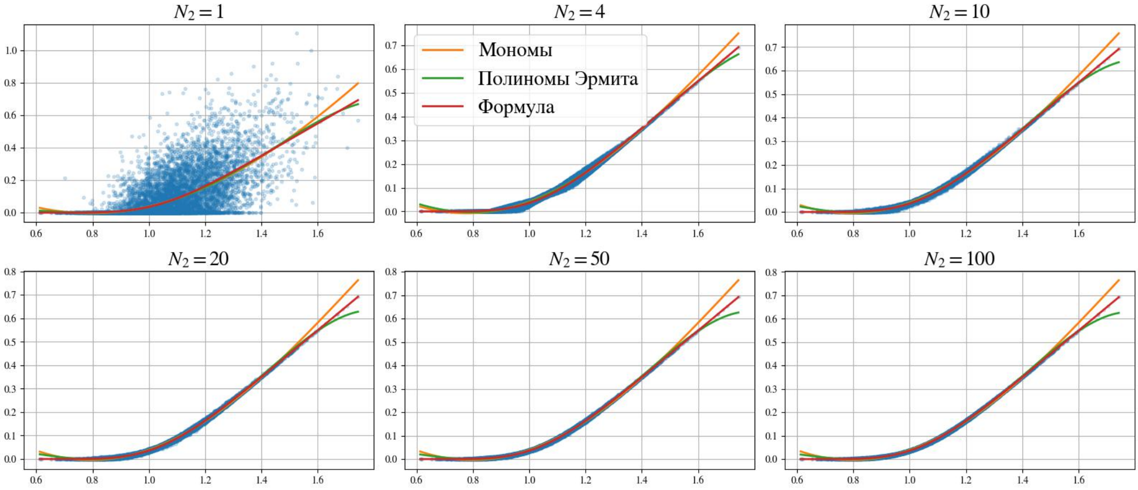
- Регрессия Y^j на X^j:

$$\hat{C}^j = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_m \phi_m(X^j), \quad \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - Y^j)^2 \to \min$$

Double regression based Monte-Carlo



Double regression based Monte-Carlo



Бермудский опцион

- Пусть X_t – многомерный марковский процесс, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t)$
- Терминальное условие: $V_T = \Phi(X_T)$
- Динамическое программирование:

$$C_t = e^{-r\tau}\mathbb{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t]$$
$$V_t = \max(C_t, \Phi(X_t))$$

- Из марковости:

$$\mathbb{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[V_{t+1}|X_t]$$

- По свойствам УМО:

$$C_t = e^{-r\tau}\mathbb{E}[V_{t+1}|X_t] = C_t(X_t)$$

- УМО как проекция:

$$C_t = \arg\min_f (f(X_t) - e^{-r\tau}V_{t+1})$$

где минимум берётся по всем измеримым функциям.

American Monte Carlo

- Пусть X_t^j – траектории процесса X_t
- Стоимость опциона в терминальный момент $\hat{V}_T^j = \Phi(X_T^j)$
- Пусть есть оценка стоимости опциона в дату $t+1$: $\hat{V}_{t+1}^j$
- Оценка continuation value:

$$\hat{C}_t^j = \left(\hat{\beta}_t, \phi(X_t^j)\right), \quad \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - e^{-r\tau}\hat{V}_{t+1}^j)^2 \to \min$$

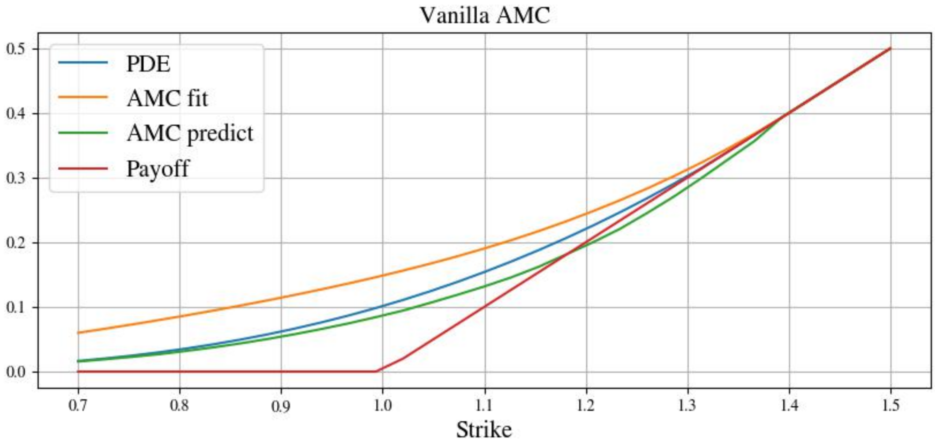
- Оценка на t-ом шаге:

$$\hat{V}_t^j = \max(\hat{C}_t^j, \Phi(X_t^j))$$

- Цена опциона в нулевой момент времени:

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \hat{V}_0^j$$

American Monte Carlo



American Monte Carlo: проблемы

- Переобучение: оптимальная граница экспирации ищется на тех же траекториях, на которых оценивается стоимость.
- Накопление ошибки регрессии.
- Оценки $\hat{V}_t^j$ перестают быть независимыми.

American Monte Carlo: тестовые траектории

- Пусть $\hat{\beta}_t$ – коэффициенты регрессии, оцененные AMC
- Сгенерируем независимый набор траекторий $\tilde{X}_t^j$
- Для каждой траектории найдём момент экспирации:

$$\tau^j = \inf_t \{\Phi(\tilde{X}_t^j) \geq \left(\hat{\beta}_t, \phi(\tilde{X}_t^j)\right)\}$$

- Оценка цены опциона на независимых траекториях:

$$\tilde{V}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{-r\tau^j} \Phi(\tilde{X}_{\tau^j}^j)$$

American Monte Carlo: POI

- POI: Proxi only in indicator
- Пусть есть оценка стоимости опциона в дату $t+1$: $\hat{V}^j_{t+1}$
- Оценка continuation value:

$$\hat{C}^j_t = \left(\hat{\beta}_t, \phi(X^j_t)\right), \quad \sum_{j=1}^{N}(\hat{C}^j - e^{-r\tau}\hat{V}^j_{t+1})^2 \to \min$$

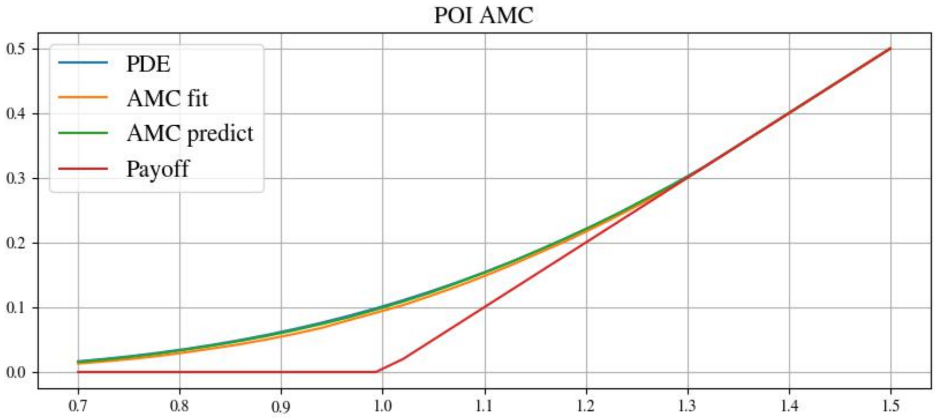
- Оценка на t-ом шаге:

$$\hat{V}^j_t = \begin{cases} e^{-r\tau}\hat{V}^j_{t+1}, \ \hat{C}^j_t > \Phi(X^j_t) \\ \Phi(X^j_t), \ \hat{C}^j_t \leq \Phi(X^j_t) \end{cases}$$

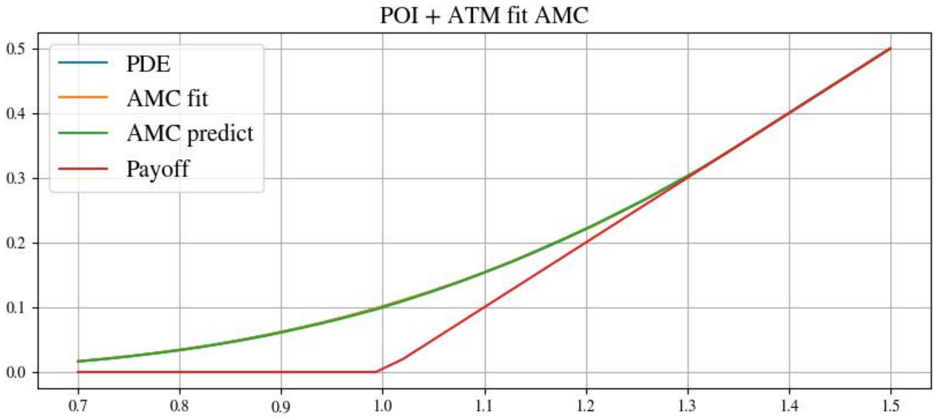
POI: интуиция

- Compound option:
$$V = \mathbb{E}(C-K)^+$$
где $C = \mathbb{E}[X|F_T]$.
$$V = \mathbb{E}(C-K)^+ = \mathbb{E}(C-K)\mathbb{I}(C-K \geq 0) =$$
$$= \mathbb{E}\mathbb{I}(C-K \geq 0)\mathbb{E}[X-K|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}(X-K)\mathbb{I}(C-K \geq 0)$$
- Пусть есть прокси для C: $\hat{C} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_T] + \varepsilon$
- Прямая оценка:
$$\hat{V} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\hat{C}^j - K)^+ = V + O(\varepsilon)$$
- POI оценка:
$$\tilde{V} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(X^j - K)\cdot\mathbb{I}(\hat{C}^j - K \geq 0) = V + O(\varepsilon^2)$$

American Monte Carlo: POI



American Monte Carlo: POI



American Monte Carlo: сходимость