Лекция 1. Теория вероятностей. Случайные процессы с дискретным временем

September 21, 2025

План

- Вероятностное пространство: определения и свойства
- Условное математическое ожидание
- Фильтрация: определение и свойства
- Случайные процессы: основные определеения
- Мартингалы, моменты остановки
- Теоремы Дуба. Дискретный стохастический интеграл

Вероятностное пространство

Определение

Вероятностное пространство это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где:

- Ω – пространство элементарных исходов,
- $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ – σ-алгебра событий,
- $\mathbb{P}$ – счётно-аддитивная вероятностная мера.

σ-алгебра

Определение

Пусть Ω – множество. Семейство подмножеств Ω $\mathcal{F}$ называется алгеброй, если:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}$: $A \cup B \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}$: $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$

Алгебра $\mathcal{F}$ называется σ-алгеброй, если она замкнута относительно счётного объединения:

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- $\mathcal{F} = (\emptyset, \Omega)$ – тривиальная σ-алгебра
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ – множество всех подмножеств
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

σ-алгебра

Пусть Ω – множество, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра. Тогда:

- $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$
- $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- Если G – σ-алгебра, то $\mathcal{F} \cap G$ – σ-алгебра
- Если $\{\mathcal{F}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ – семейство σ-алгебр, то $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ – σ-алгебра.

Определение

Пусть $\Omega = \mathbb{R}$. Борелевская σ-алгебра $B(\mathbb{R})$ – минимальная сигма-алгебра, содержащая все множества вида $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

По определению σ-алгебры, борелевская σ-алгебра содержит также все отрезки, лучи, интервалы и полуинтервалы, открытые и закрытые множества.

Вероятностная мера

Определение

Вероятностная мера $\mathbb{P}$ это неотрицательная функция на $\mathcal{F}$, удовлетворяющая свойствам:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Пример. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#A}{n}$ – вероятностная мера.

Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Функция $\xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Измеримые функции также будем называть случайными величинами (коротко с.в.). Обозначение $\xi \in \mathcal{F}$. Множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ также будем записывать как $\{\xi < x\}$.

Утверждение

Если $\xi \in \mathcal{F}$, то:

- $\{\xi \geq x\} \in \mathcal{F}$
- $\{y \leq \xi < x\} \in \mathcal{F}$
- $\{\xi = x\} \in \mathcal{F}$

Случайные величины

Определение

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – функция. Положим

$$\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Утверждение

$\sigma(\xi)$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой ξ измерима.

Случайные величины и мера

Определение

Функция распределения $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ с.в. ξ называется функция:

$$F = \mathbb{P}(\xi < x).$$

Определение корректно, так как $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$

Определение

Распределением μ_ξ с.в. ξ называется вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, определённая как:

$$\mu_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B))\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Случайные величины переносят меру $\mathbb{P}$ с $(\Omega, \mathcal{F})$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Мат. ожидание

Определение

Мат. ожидание $\mathbb{E}\xi$ с.в. ξ это интеграл Лебега по Ω:

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Утверждение

Для произвольной функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $g(\xi)$ интегрируема выполнено:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x) d\mu_\xi(x) = \int_\mathbb{R} g(x) dF(x)$$

Если μ_ξ имеет плотность $p_\xi(x)$, то:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_\mathbb{R} g(x) p_\xi(x) dx$$

Сигма-алгебры и разбиения

Пусть Ω – пространство элементарных исходов.
Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение множества Ω, т.е.:

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset$$

$\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая разбиением. Состоит из элементов вида $B = \bigcup_k A_{n_k}$.

Сигма-алгебры и случайные величины

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – принимает конечное число значений $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Пусть $A_i = \xi^{-1}(a_i)$. Тогда $\xi(\omega)$ измерима $\iff \forall i \; A_i \in \mathcal{F}$

Доказательство. $\{\xi < x\} = \bigcup\limits_{a_i < x} \{\xi = a_i\} = \bigcup\limits_{a_i < x} A_i$.

УМО

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Определение

Условная вероятность:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии B будем называть число:

$$\mathbb{E}^B \xi = \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_B\right)}{\mathbb{P}(B)}$$

Также будем использовать обозначение $\mathbb{E}\left[\xi | B\right]$

УМО для дискретной σ-алгебры

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – разбиение множества Ω, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая этим разбиением.

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии $\mathcal{H}$ будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_{A_i}\right)}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \mathbb{E}^{A_i} \xi$$

$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]$ – дискретная случайная величина:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right](\omega) = \mathbb{E}^{A_i}\xi, \text{если } \omega \in A_i$$

УМО для дискретной σ-алгебры

Задача

Пусть $\xi \sim N(0,1)$, $\mathcal{H} = \sigma\left(\{\xi \geq 0\}, \{\xi < 0\}\right)$. Найти $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]$

Решение. Пусть $A_1 = \{\xi \geq 0\}, A_2 = \{\xi < 0\}$. Тогда:

$$\mathbb{E}^{A_1}\xi = \frac{\mathbb{E}\xi\mathbb{I}(\xi \geq 0)}{\mathbb{P}(A_1)} = 2\cdot \int_0^\infty x p_\xi(x) dx = 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-0.5x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Аналогично:

$$\mathbb{E}^{A_2}\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Откуда:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mathbb{I}(\xi \geq 0) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mathbb{I}(\xi < 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \operatorname{sgn}(\xi)$$

где

$$\operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \geq 0 \\ -1, \xi < 0 \end{cases}$$

УМО: свойства

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – разбиение, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$. Пусть $\eta = \mathbb{E}\left[\xi | \mathcal{H}\right]$. Тогда:

- $\eta \in \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}$:
$$\mathbb{E}\left[\eta \cdot \mathbb{I}_A\right] = \mathbb{E}\left[\xi \cdot \mathbb{I}_A\right]$$

Первое утверждение очевидно, второе достаточно проверить для $A \in \mathcal{A}$.

УМО для произвольной σ-алгебры

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, пусть ξ – интегрируемая с.в. Пусть $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ – σ-алгебра. Тогда с.в. η, удовлетворяющая свойствам:

- $\eta \in \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}$:

$$\mathbb{E}\left[\eta \cdot \mathbb{I}_A\right] = \mathbb{E}\left[\xi \cdot \mathbb{I}_A\right]$$

называется условным мат. ожиданием ξ при условии $\mathcal{H}$ и обозначается:

$$\eta = \mathbb{E}\left[\xi | \mathcal{H}\right]$$

Замечание В отличии от предыдущего определения $\mathcal{H}$ – произвольная σ-подалгебра. Можно доказать, что такая с.в. η всегда существует и п.н. единственна.

УМО: свойства

- Линейность

$$\mathbb{E}\left[\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{H}\right] = \alpha\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] + \beta\mathbb{E}\left[\eta|\mathcal{H}\right]$$

- Если $\xi \in \mathcal{H}$, то $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \xi$
- Если $\xi \perp \mathcal{H}$, то $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\xi$
- Повторное мат. ожидание. Пусть $\mathcal{G}$ – σ-подалгебра $\mathcal{H}$.

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{G}\right]$$

  В частности:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right])$$

- Неравенство Йенсена. Если f выпуклая, то:

$$f(\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]) \leq \mathbb{E}\left[f(\xi)|\mathcal{H}\right]$$

- Если $\eta \in \mathcal{H}$, то

$$\mathbb{E}\left[\eta \cdot \xi|\mathcal{H}\right] = \eta \cdot \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]$$

УМО как проекция

Утверждение

Пусть ξ – квадратично-интегрируемая с.в., т.е. $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Пусть $\mathcal{H}$ – σ-подалгебра $\mathcal{F}$. Тогда:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \arg\min_{z\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - z)^2$$

УМО как проекция

Утверждение

Пусть ξ – квадратично-интегрируемая с.в., т.е. $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Пусть $\mathcal{H}$ – σ-подалгебра $\mathcal{F}$. Тогда:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \arg\min_{z\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - z)^2$$

Пусть ξ, η – случайные величины. Положим:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] = \mathbb{E}\left[\xi|\sigma(\eta)\right]$$

Так как $\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] \in \sigma(\eta)$, то $\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] = g(\eta)$$

УМО как проекция

Утверждение

Пусть ξ – квадратично-интегрируемая с.в., т.е. $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Пусть $\mathcal{H}$ – σ-подалгебра $\mathcal{F}$. Тогда:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \arg\min_{z \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - z)^2$$

Пусть ξ, η – случайные величины. Положим:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] = \mathbb{E}\left[\xi|\sigma(\eta)\right]$$

Так как $\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] \in \sigma(\eta)$, то $\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] = g(\eta)$$

Утверждение

$$\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right] = \arg\min_{g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}} \mathbb{E}(\xi - g(\eta))^2$$

УМО относительно случайной величины

Задача

Пусть ξ, η – i.i.d. Найти $\mathbb{E}\left[\xi|\xi+\eta\right]$.

Решение.

Пусть $\alpha = \mathbb{E}\left[\xi|\xi+\eta\right]$. В силу симметрии

$$\mathbb{E}\left[\xi|\xi+\eta\right] = \mathbb{E}\left[\eta|\xi+\eta\right]$$

Складываем левую и правую часть, получим:

$$2\alpha = \mathbb{E}\left[\xi+\eta|\xi+\eta\right] = \xi+\eta$$

Откуда

$$\mathbb{E}\left[\xi|\xi+\eta\right] = \mathbb{E}\left[\eta|\xi+\eta\right] = \frac{\xi+\eta}{2}$$

Задача

Пусть X, Y имеют совместное нормальное распределение с параметрами $\mu = (\mu_X, \mu_Y), \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Найти $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$

Случайные процессы

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство. Пусть $\mathcal{T}$ – некоторое множество индексов. Случайным процессом ξ будем называть совокупность с.в. $\{\xi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, заданных на одном вероятностном пространстве.

- Случайный процесс – функция двух переменных: $\xi : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$, измеримая по второму аргументу.
- Если $\mathcal{T}$ конечно, то случаный процесс = многомерная с.в.
- Обычно $\mathcal{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+, [0, T]\}$.
- Для фиксированного $t \in \mathcal{T}$ отображение $\omega \mapsto \xi(t, \omega)$ которое обозначим ξ_t – сечение процесса ξ.
- Для фиксированного ω отображение $t \mapsto \xi(t, \omega)$ – детерменированная функция, реализация(траектория) случайного процесса.

Конечномерные распределения

Всевозможные совместные распределения с.в. $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$ называются конечномерными распределениями процесса ξ_t:

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \le x_1, \dots, \xi_{t_n} \le x_n)$$

- Мат. ожидание случайного процесса: $m(t) = \mathbb{E}\xi_t$
- Автоковариационная функция: $b(t, s) = \mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s)$

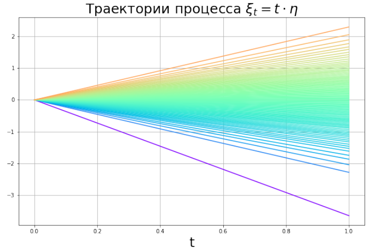
Случайные процессы: пример

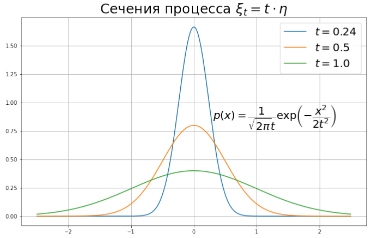
Примеры.

- $\mathcal{T} = [0, 1]$. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$. Положим $\xi_t = t \cdot \eta$.

Свойства:

- $\mathbb{E}\xi_t = 0$
- $\mathbb{D}\xi_t = t^2$
- $cov(\xi_t, \xi_s) = ts$





Случайные процессы: пример

Здесь и далее будем считать, что $\xi \sim Be(p)$ если

$$\xi = \begin{cases} +1, \text{с вер. } p \\ -1, \text{с вер. } 1-p \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d.

Определение

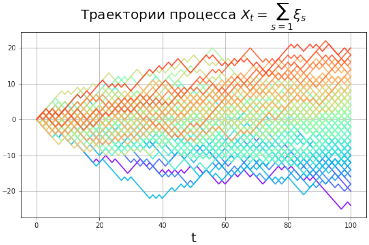
Простое случайное блуждание X_t это случайный процесс:

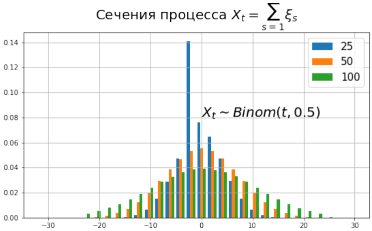
$$X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$$
$$X_0 = 0$$

Свойства:

- $\mathbb{E}X_t = 0, \ \mathbb{D}X_t = t$
- $\mathbb{E}\left[X_t | X_{t-1}\right] = X_{t-1}$
- $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \min(t, s)$

Случайное блуждание: траектории





Фильтрация

Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.
Фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ называется последовательность вложенных σ-подалгебр:

$$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}: \ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$$

где $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ – σ-под алгебры.

$\mathcal{F}_t$ – информация, доступная к моменту времени t.
Процесс $\{\xi_t\}$ – **адаптированный**, если $\xi_t \in \mathcal{F}_t \forall t \in \mathbb{N}$.
Процесс $\{\xi_t\}$ – **предсказуемый**, если $\xi_t \in \mathcal{F}_{t-1} \forall t \in \mathbb{N}$.

Естественная фильтрация

Определение

Пусть $\{\xi_t\}$ – случайный процесс. Определим:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{\xi_s, s \le t\}),$$

т.е. $\mathcal{F}_t$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой все с.в. $\xi_s, s \le t$ измеримы. Тогда

- $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ – фильтрация
- $\{\xi_t\}_{t \ge 0}$ – адаптированный к фильтрации процесс

$(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ называется **естественной фильтрацией**.

Мартингалы

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация. Случайный процесс $(\xi_t)_{t\geq 0}$ называется **мартингалом** относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, если:

- $\mathbb{E}|\xi_t| < \infty$ – интегрируемость
- $\xi_t \in \mathcal{F}_t$ – адаптированность
- $\mathbb{E}\left[\xi_t | \mathcal{F}_s\right] = \xi_s$ для всех $s \leq t$ – мартингальное свойство.

- Если фильтрация явно не указана, в качестве неё берётся естественная фильтрация процесса $(\xi_t)_{t\geq 0}$.
- Процесс называется суб(супер) мартингалом, если:

$$\mathbb{E}\left[\xi_t | \mathcal{F}_s\right] \geq (\leq) \xi_s$$

Мартингалы: примеры

- Случайное блуждание. Пусть
  - ξ_t – i.i.d., $\mathbb{E}\xi_t = 0$,
  - $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$

  Мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_t - X_s|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[X_s|\mathcal{F}_s\right] = X_s$$

- Геометрическое случайное блуждание.
  - ξ_t – i.i.d., $\mathbb{E}\xi_t = 1$, $\xi_t > 0$
  - $X_t = \prod_{s=1}^{t} \xi_s$

  Мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_s \cdot \frac{X_t}{X_s}|\mathcal{F}_s\right] = X_s \cdot \mathbb{E}\left[\frac{X_t}{X_s}|\mathcal{F}_s\right] = X_s$$

Мартингалы: свойства

- В дискретном случае досаточно требовать свойства:

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1}|F_t\right] = X_t$$

- $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0 = const$
- Если $(X_t)_{t\geq 0}$ – мартингал, $f(x)$ – выпуклая (вогнутая) функция, то процесс $\eta_t = f(X_t)$ – суб (супер) мартингал.
- Мартингалы Леви: если η – произвольная интегрируемая случайная величина, то процесс $X_t = \mathbb{E}\left[\eta|\mathcal{F}_t\right]$ – мартингал. В частности, на интервале $[0, T]$ мартингал геренируется своим терминальным значением:

$$X_t = \mathbb{E}\left[X_T|\mathcal{F}_t\right]$$

- Пусть X_t – квадратично-интегрируемый мартингал, тогда его приращения некоррелированы:

$$\mathrm{cov}(X_p - X_q, X_t - X_s) = 0$$

при $s \leq t \leq q \leq p$

Дискретный стохастический интеграл

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – дискретная фильтрация.

Определение

Пусть $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ – случайные процессы. Будем называть процесс Z_t, определённый как:

$$Z_t = (X \star Y)_t = \sum_{s=0}^{t} X_s (Y_s - Y_{s-1})$$

при условии $Y_{-1} = 0$ дискретным стохастическим интегралом.

Дискретный стохастический интеграл

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – дискретная фильтрация.

Утверждение

Пусть

- $(X_t)_{t\geq 0}$ – предсказуемый процесс
- $(Y_t)_{t\geq 0}$ – мартингал
- $\forall t: \; X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1})$ – интегрируемая с.в.

Тогда стохастический интеграл $(X \star Y)$ является мартингалом.

Доказательство Пусть $Z_t = (X \star Y)_t$, тогда:

$$Z_t = Z_{t-1} + X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1})$$
$$\mathbb{E}\left[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] = Z_{t-1} + \mathbb{E}\left[X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] =$$
$$= Z_{t-1} + X_t \cdot \mathbb{E}\left[(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = Z_{t-1}$$

Момент остановки

Определение

Случайная величина τ, принимающая значения из $\mathcal{T}$ называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, если

$$\forall t \geq 0 \ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

В любой момент t можем решить, является ли τ моментом остановки на основании информации до момента t.

Момент остановки

Определение

Случайная величина τ, принимающая значения из $\mathcal{T}$ называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, если

$$\forall t \geq 0 \; \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

В любой момент t можем решить, является ли τ моментом остановки на основании информации до момента t.

Пример. Пусть X_t – адаптированный процесс. Рассмотрим:

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$$

где $A \subseteq \mathbb{R}$ – борелевское множество. τ – марковский момент.

Момент остановки

Определение

Случайная величина τ, принимающая значения из $\mathcal{T}$ называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, если

$$\forall t \geq 0 \ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

В любой момент t можем решить, является ли τ моментом остановки на основании информации до момента t.

Пример. Пусть X_t – адаптированный процесс. Рассмотрим:

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$$

где $A \subseteq \mathbb{R}$ – борелевское множество. τ – марковский момент.

Доказательство:

$$\{\tau \leq t\} = \{\exists s \leq t : X_s \in A\} = \bigcup_{s=0}^{t} \{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_t$$

Теорема Дуба

Теорема

Пусть X_t – мартингал, τ – момент остановки. Тогда остановленный процесс $X_t^\tau = X_{\min(t,\tau)}$ является мартингалом.

Теорема Дуба

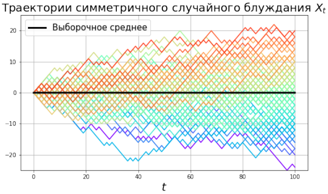
Теорема

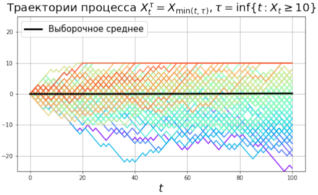
Пусть X_t – мартингал, τ – момент остановки. Тогда остановленный процесс $X_t^\tau = X_{\min(t,\tau)}$ является мартингалом.

Доказательство Введём $h_t = \mathbb{I}(\tau \geq t) = 1 - \mathbb{I}(\tau \leq t-1) \in F_{t-1}$.

$$X_t^\tau = \sum_{s=0}^{t} h_s(X_s - X_{s-1}) = (h \star X)_t.$$

Т.е. X_t^τ – стохастический интеграл по мартингалу, значит, тоже мартингал. $\square$





Теорема Дуба об оптимальной остановке

Теорема

Пусть X_t – мартингал, τ – момент остановки. Пусть выполнено одно из условий:

- τ – ограничено, т.е. $\exists c : \mathbb{P}(\tau \leq c) = 1$
- $\mathbb{E}\tau < \infty$, $\exists c :\ \forall t\ \mathbb{E}\left[|X_{t+1} - X_t| \mathcal{F}_t\right] \leq c$
- X_t^τ равномерно ограничено, т.е. $\exists c : \forall t\ |X_t^\tau| \leq c$

Тогда $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$

Теорема Дуба об оптимальной остановке

Теорема

Пусть X_t – мартингал, τ – момент остановки. Пусть выполнено одно из условий:

- τ – ограничено, т.е. $\exists c : \mathbb{P}(\tau \leq c) = 1$
- $\mathbb{E}\tau < \infty$, $\exists c :\ \forall t\ \mathbb{E}\left[|X_{t+1} - X_t| \mathcal{F}_t\right] \leq c$
- X_t^τ равномерно ограничено, т.е. $\exists c : \forall t\ |X_t^\tau| \leq c$

Тогда $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$

Доказательство По предыдущей теореме X_t^τ – мартингал, откуда $\mathbb{E}X_t^\tau = \mathbb{E}X_0$. Переходим к пределу при $t \to \infty$, получаем

$$\mathbb{E}X_t^\tau = \mathbb{E}X_{\min(t,\tau)} \to \mathbb{E}X_\tau$$

Условия теоремы нужны для обоснования сходимости. □

Теорема Дуба о разложении

Теорема

Пусть X_t – согласованный интегрируемый процесс. Тогда $\exists!$ $(M_t)_{t\geq 0}$ и $(A_t)_{t\geq 0}$ такие, что:

- M_t – мартингал,
- A_t – предсказуемый процесс и $A_0 = 0$
- $X_t = M_t + A_t$

Теорема Дуба о разложении

Доказательство. Пусть такое разложение существует, тогда:

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[M_t + A_t|F_{t-1}] = M_{t-1} + A_t = X_{t-1} + (A_t - A_{t-1})$$

Положим:

- $A_0 = 0,\ A_t = A_{t-1} + \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - X_{t-1}$
- $M_t = X_t - A_t$

Очевидно, A_t – предсказуемый процесс, разложение $X_t = M_t + A_t$ выполнено автоматически, достаточно проверить мартингальность M_t:

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - A_t =$$
$$= \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - (A_{t-1} + \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - X_{t-1}) =$$
$$= X_{t-1} - A_{t-1} = M_{t-1}$$

□

Теорема Дуба о разложении

Пример. Пусть X_t – симметричное случайное блуждание, Тогда $X_t^2 = M_t + A_t$, где

- $A_t = t$ – предсказуемый процесс (детерминированный)
- $M_t = X_t^2 - t$ – мартингал (докажите)