Контракты американского типа

Определение

Американский опцион с функцией выплатой $\Phi(t, S_t)$ – контракт, держатель которого может получить случайную сумму денег $\Phi(t, S_t)$ в произвольный момент времени $t \leq T$.

- Выплата может произойти в произвольный момент времени.
- Стоимость европейского контракта:

$$V_0^E = \mathbb{E} e^{-rT} \Phi(T, S_T)$$

- Стоимость американского контракта:

$$V_0^A = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau} \Phi(\tau, S_\tau)$$

- V_0^A – стоимость реплицирующей стратегии.
- Дата погашения τ – марковский момент $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
- Принимаем решение об экспирации на основании информации из прошлого.

Американские опционы: свойства

- Оценка снизу:
$$V_0^A \geq \max_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} e^{-rt} \Phi(t, S_t)$$
  В частности $V_0^A \geq V_0^E$, $V_0^A \geq \Phi(0, S_0)$.
- Оценка сверху:
$$V_0^A \leq \mathbb{E} \max_{0 \leq t \leq T} e^{-rt} \Phi(t, S_t)$$

Американский колл-опцион: свойства

- Неравенство для европейского колл-опциона при $r > 0$:

$$V_t^E = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t\right] \geq \left(\mathbb{E}\left[e^{-rT}(S_T - K) | \mathcal{F}_t\right]\right)^+ =$$
$$= (S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ > (S_0 - K)^+$$

- Отсюда $V_t^E \geq \Phi(t, S_t) \to V_t^A = V_t^E$

Бермудский опцион

Определение

Бермудский опцион с функцией выплатой $\Phi(t, S_t)$ – контракт, держатель которого может получить случайную сумму денег $\Phi(t, S_t)$ в один из дискретных моментов времени $t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$

Бермудский опцион: уравнение на цену

- Стоимость бермудского контракта:

$$V_0^B = \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}} \mathbb{E} e^{-r\tau} \Phi(\tau, S_\tau)$$

  где $\overline{\mathcal{T}}$ – множество моментов остановки со значениями из $\{t_1, \ldots, t_n\}$.
- $V_{t_k}^B$ – стоимость бермудского опциона в момент t_k при условии, что не экспирировались до момента t_k.
- Continuation value – стоимость, при условии что не экспирируемся в t_k:

$$C_{t_k} = \mathbb{E}\left[e^{-r\Delta t_k} V_{t_{k+1}}^B | \mathcal{F}_t \right]$$

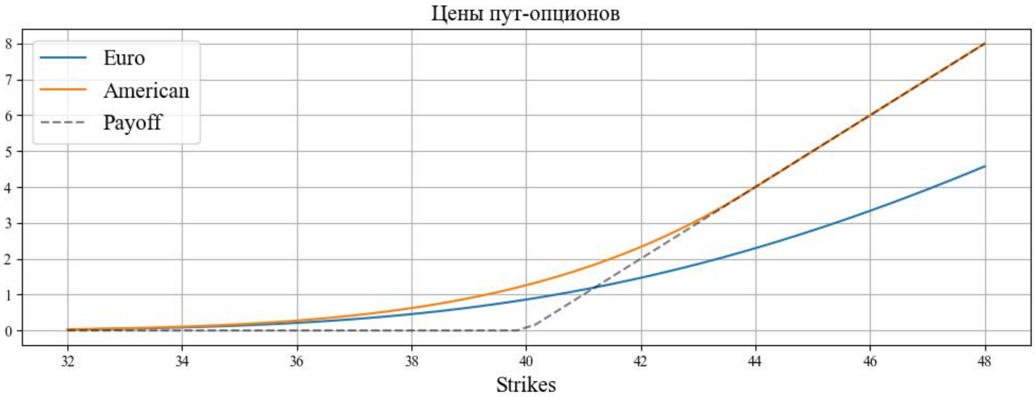
- Динамическое программирование:

$$V_{t_k} = \max(\Phi(t_k, S_{t_K}), C_{t_k})$$

- Оптимальный момент остановки:

$$\tau = \inf\{t_k : \Phi(t_k, S_{t_K}) > C_{t_k}\}$$

Бермудский опцион: цены



Perpetual american put

Задача

Найти стоимость вечного американского пут-опциона $T = \infty$:

$$V(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau}(K - S_\tau)$$

где супремум берётся по всем марковским моментам $\mathcal{T}$, $S_0 = s$.

Perpetual american put

- Задача однородная по времени. Ищем решение в классе моментов остановки:

$$\tau_L = \inf\{t \geq 0, S_t = L\}$$

- Исполняем опцион в первый момент, когда цена пробьёт уровень $L < s$.
- Найдем ожидаемую выплату для такой стратегии:

$$V_L(s) = \mathbb{E}e^{-r\tau}(K - S_\tau) = (K - L)\mathbb{E}e^{-r\tau}$$

  Считаем, что $e^{-r\tau}(K - S_\tau) = 0$ при $\tau = \infty$ (выплаты не происходит).
- Нужно найти преобразование Лапласа от $\tau_L, \mathbb{E}e^{-r\tau}$.

Преобразование Лапласа

- БД со сносом $X_t = \mu t + W_t$
- Моменты остановки $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$, $\tau_b = \inf\{t \geq 0 : X_t = -b\}$
- Найдем σ такое, что M_t – мартингал:

$$M_t = e^{\sigma X_t - rt}$$

- Для момента $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$ выполнена теорема Дуба:

$$1 = \mathbb{E} M_\tau = \mathbb{E} e^{\sigma a - r\tau_a} \mathbb{I}(\tau_a \leq \tau_b) + \mathbb{E} e^{-\sigma b - r\tau_b} \mathbb{I}(\tau_a > \tau_b)$$

  При $b \to \infty$ второе мат. ожидание стремится к нулю, откуда:

$$1 = \mathbb{E} e^{\sigma a - r\tau_a} \mathbb{I}(\tau_a < \infty) = e^{\sigma a} \mathbb{E} e^{-r\tau_a}$$

  откуда

$$\mathbb{E} e^{-r\tau_a} = e^{-\sigma a}$$

- При $\sigma = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}$ M_t матрингал, поэтому:

$$\mathbb{E} e^{-r\tau_a} = e^{-(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r})a}$$

Perpetual american put: продолжение

- $X_t = \frac{1}{\sigma} \log \frac{S_t}{s} = \frac{1}{\sigma}(r - 0.5\sigma^2)t + W_t$
- $S_t = L \Leftrightarrow X_t = \frac{1}{\sigma} \log \frac{L}{s}$
- $\mathbb{E}e^{-r\tau_L} = e^{-(-\mu+\sqrt{\mu^2+2r})a}$, где $\mu = \frac{1}{\sigma}(r - 0.5\sigma^2)$, $a = \frac{1}{\sigma} \log \frac{L}{s}$:

$$\mathbb{E}e^{-r\tau_L} = \left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

- Итого, ожидание выплаты для такой стратегии:

$$v_L(s) = \begin{cases} K - s, 0 \leq s \leq L \\ (K - L)\left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, s \geq L \end{cases}$$

- Оптимальная граница L:

$$\frac{\partial v_L(s)}{\partial L} = 0 \to L^* = \frac{2r}{2r + \sigma^2} K$$

Perpetual american put: продолжение

- Итого, ожидание выплаты для такой стратегии:

$$v_L(s) = \begin{cases} K - s, 0 \leq s \leq L \\ (K-L)\left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, s \geq L \end{cases}$$

- Оптимальная граница L:

$$\frac{\partial v_L(s)}{\partial L} = 0 \rightarrow L^* = \frac{2r}{2r+\sigma^2}K$$

- При таком выборе L производная по s непрерывна (smooth pasting):

$$\left.\frac{\partial v_{L^*}(s)}{\partial s}\right|_{L^*-0} = \left.\frac{\partial v_{L^*}(s)}{\partial s}\right|_{L^*+0} = -1$$