Лекция 5. Мартингальная теория прайсинга

October 20, 2025

Рекап прошлой лекции

- Динамика самофинансируемого портфеля.
- Случайные платёжные обязательства
- Безарбитражность и реплицируемость.
- Уравнение Блэка-Шоулза.
- Европейский колл-опцион, стоимость и греки

План лекции

- Элементы теории меры:
  - Абсолютная непрерывность и эквивалентность мер.
  - Производная Радона-Никодима.
  - Теорема Гирсанова: замена дрифта у броуновского движения.
- Модель Блэка-Шоулза с точки зрения мартингального подхода.
- Фундаментальные теоремы финансов.
- Полнота и безарбитражность многомерной модели Блэка-Шоулза.

Абсолютная непрерывность мер

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство (множество с σ-алгеброй). Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{P}$ – меры на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Определение

Мера $\mathbb{Q}$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbb{P}$, если $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = 0 \to \mathbb{Q}(A) = 0$$

Обозначение $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

Определение

Мера $\mathbb{Q}$ эквивалентна $\mathbb{P}$, если $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Обозначение $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

Абсолютная непрерывность мер: примеры

Примеры:

- Пусть $\Omega = \{1, \ldots, N\}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Тогда:

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \to \mathbb{Q}(\{n\}) = 0$$

Абсолютная непрерывность мер: примеры

Примеры:

- Пусть $\Omega = \{1, \dots, N\}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Тогда:

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \to \mathbb{Q}(\{n\}) = 0$$

- Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть меры $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ заданы плотностями $p(x), q(x)$, т.е.

$$\mathbb{P}(A) = \int_A p(x)dx,\ \mathbb{Q}(A) = \int_A q(x)dx$$

Тогда

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathrm{supp}(q) \subseteq \mathrm{supp}(p)$$

Производная Радона-Никодима

Пусть $\mathbb{P}$ – мера, $f \in \mathcal{F}$ – измеримая функция, $f(\omega) \geq 0$. Определим меру $\mathbb{Q}$ по формуле:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \ A \in \mathcal{F}$$

Тогда $\mathbb{Q}$ – мера и $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Производная Радона-Никодима

Пусть $\mathbb{P}$ – мера, $f \in \mathcal{F}$ – измеримая функция, $f(\omega) \geq 0$. Определим меру $\mathbb{Q}$ по формуле:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \; A \in \mathcal{F}$$

Тогда $\mathbb{Q}$ – мера и $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Верно и обратное:

Теорема Радона-Никодима

Пусть $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда $\exists f \in \mathcal{F}, f(\omega) \geq 0$:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Обозначение: $f(\omega) = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

Производная Радона-Никодима: примеры

- Пусть $\Omega = \{1, \ldots, N\}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(n) = \frac{\mathbb{Q}(\{n\})}{\mathbb{P}(\{n\})} \cdot \mathbb{I}(\mathbb{P}(\{n\}) \neq 0)$$

при $n \in \Omega$.

Производная Радона-Никодима: примеры

- Пусть $\Omega = \{1, \ldots, N\}, \mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(n) = \frac{\mathbb{Q}(\{n\})}{\mathbb{P}(\{n\})} \cdot \mathbb{I}(\mathbb{P}(\{n\}) \neq 0)$$

  при $n \in \Omega$.

- Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть меры $\mathbb{P} \gg \mathbb{Q}$ заданы плотностями $p(x), q(x)$. Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \cdot \mathbb{I}(p(x) \neq 0)$$

Производная Радона-Никодима: свойства

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство
- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ – вероятностные меры
- $f = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима
- $\xi \in \mathcal{F}$ – случайная величина.

Производная Радона-Никодима: свойства

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство
- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ – вероятностные меры
- $f = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима
- $\xi \in \mathcal{F}$ – случайная величина.

Тогда:

- $\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dQ(\omega) = \int_\Omega \xi(\omega) f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi \cdot f]$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}1 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}f = 1$

Замена меры: пример

Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, мера $\mathbb{P}$ задана плотностью $p(x) = \dfrac{\exp\left(-0.5x^2\right)}{\sqrt{2\pi}}$.

Найти меру, относительно которой с.в. $\xi(x) = x$ имеет распределение $\mathcal{N}(a, 1)$.

Замена меры: пример

Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, мера $\mathbb{P}$ задана плотностью $p(x) = \dfrac{\exp\left(-0.5x^2\right)}{\sqrt{2\pi}}$.

Найти меру, относительно которой с.в. $\xi(x) = x$ имеет распределение $\mathcal{N}(a, 1)$.

- Плотность новой меры $\mathbb{Q}$:
$$q(x) = \frac{\exp\left(-0.5(x-a)^2\right)}{\sqrt{2\pi}}$$
- Производная Радона-Никодима:
$$f(x) = \frac{q}{p} = \exp\left(ax - 0.5a^2\right)$$
- Проверка:
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\xi \cdot f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot \exp\left(ax - 0.5a^2\right) \exp\left(-0.5x^2\right) dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot \exp\left(-0.5(x-a)^2\right) dx = a$$

Замена меры для процессов

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, $\Lambda = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, $\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda | \mathcal{F}_t\right]$.
Тогда:

$$\Lambda_t = \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t} \in \mathcal{F}_t$$

где $\mathbb{Q}_t, \mathbb{P}_t$ – ограничение мер на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$.

Доказательство. Пусть $A_t \in \mathcal{F}_t$. По определению производной Радона-Никодима:

$$\mathbb{Q}(A_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda \cdot \mathbb{I}_{A_t}\right]$$

С другой стороны, по определению УМО:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda \cdot \mathbb{I}_{A_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda | \mathcal{F}_t\right] \cdot \mathbb{I}_{A_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda_t \cdot \mathbb{I}_{A_t}\right]$$

А это и означает, что $\Lambda_t = \dfrac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$

Замена меры для процессов

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, $\Lambda = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, $\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda | \mathcal{F}_t\right]$.
Тогда X_t – мартингал относительно $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда ΛX_t – мартингал относительно $\mathbb{P}$.

Доказательство. Пусть $A_s \in \mathcal{F}_s$, тогда:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_t \mathbb{I}_{A_s}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t \Lambda_t \mathbb{I}_{A_s}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X_s \Lambda_s \mathbb{I}_{A_s}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_s \mathbb{I}_{A_s}\right]$$

А это и означает, что $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right] = X_s$.

Характеризация броуновского движения

Теорема

Пусть $W_0 = 0$, $W_t, W_t^2 - t$ – локальные мартингалы с непрерывными траекториями. Тогда W_t – броуновское движение.

Теорема Гирсанова: мотивация

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ – фильтрация.

- Пусть $(W_t)_{t \ge 0}$ – броуновское движение.
- Хотим найти меру $\mathbb{Q}$, относительно которой $Z_t = W_t - \theta \cdot t$ БД.
- Относительно $\mathbb{Q}$ $W_t \sim N(\theta t, t)$.
- "Кандидат" на производную Радона-Никодима:

$$\Lambda = \exp\left(\theta \cdot W_T - 0.5\theta^2 \cdot T\right)$$

$$\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda | \mathcal{F}_t\right] = \exp\left(\theta \cdot W_t - 0.5\theta^2 \cdot t\right)$$

Теорема Гирсанова: мотивация

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ – фильтрация.

- Пусть $(W_t)_{t\ge 0}$ – броуновское движение.
- Хотим найти меру $\mathbb{Q}$, относительно которой $Z_t = W_t - \theta \cdot t$ БД.
- Относительно $\mathbb{Q}$ $W_t \sim N(\theta t, t)$.
- "Кандидат" на производную Радона-Никодима:

$$\Lambda = \exp\big(\theta \cdot W_T - 0.5\theta^2 \cdot T\big)$$

$$\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Lambda | \mathcal{F}_t\right] = \exp\big(\theta \cdot W_t - 0.5\theta^2 \cdot t\big)$$

- По формуле Ито:

$$d\Lambda_t = \Lambda_t \theta dW_t$$

- Докажем, что $\Lambda_t Z_t$ мартингал относительно $\mathbb{P}$:

$$d(\Lambda_t Z_t) = d\Lambda_t Z_t + \Lambda_t dZ_t + d\Lambda_t dZ_t = \Lambda_t\left(\theta Z_t dW_t + dW_t - \theta dt + \theta dt\right) = \Lambda_t (1 + \theta Z_t) dW_t$$

- Аналогично для $Z_t^2 - t$. Отсюда Z_t – броуновское движение относительно $\mathbb{Q}$.

Теорема Гирсанова

Теорема

Пусть θ_t – согласованный процесс, $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$. Положим

$$\Lambda = \exp\left(\int_0^T \theta_s dW_s - 0.5 \int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$

Определим новую меру $d\mathbb{Q} = \Lambda d\mathbb{P}$, тогда процесс:

$$Z_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

является $\mathbb{Q}$-броуновским движением при $t \leq T$.

Модель Блэка-Шоулза

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство
- W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t.
- Два торгуемых актива, банковский счёт:

$$dB_t = rB_t dt$$
$$B_0 = 1$$

- Акция:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$
$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - 0.5\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right)$$

- Рынком будем называть вероятностное пространство + фильтрация + динамика торгуемых активов + класс допустимых портфелей.

Уравнение Блэка-Шоулза

Теорема

Пусть $\Phi(S_T)$ – простой дериватив, тогда его цена $p(t,\Phi) = F(t,S_t)$, где $F(t,S)$ является решением УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T,S) = \Phi(S).$$

Простой дериватив является реплицируемым, веса реплицирующего портфеля задаются формулами:

$$x_t = \frac{\partial F(t,S_t)}{\partial S},$$
$$B_t y_t = F(t,S_t) - \frac{\partial F(t,S_t)}{\partial S} S_t.$$

Формула Феймана-Каца

Теорема

Пусть функция $F(t, S)$ удовлетворяет УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T, S) = \Phi(S).$$

Тогда решение может быть выраженно через условное мат. ожидание:

$$F(t, S) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)|S_t = S\right]$$

где S_u подчиняется геометрическому броуновскому движению:

$$dS_u = rS_u du + \sigma S_u dW_u^Q, u > t$$
$$S_t = S$$

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняются уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

называется риск-нейтральной $\mathbb{Q}$. Здесь W_t^Q – $\mathbb{Q}$-броуновское движение.

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняются уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

называется риск-нейтральной $\mathbb{Q}$. Здесь W_t^Q – $\mathbb{Q}$-броуновское движение.

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\widetilde{S}_t = \dfrac{S_t}{B_t}, \widetilde{V_t} = \dfrac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняются уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

называется риск-нейтральной $\mathbb{Q}$. Здесь W_t^Q – $\mathbb{Q}$-броуновское движение.

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}, \widetilde{V_t} = \frac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Доказательство.

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t dW_t^Q$$
$$d\widetilde{V}_t = x_t d\widetilde{S}_t = \sigma x_t \widetilde{S}_t dW_t^Q$$

Риск-нейтральная мера: существование

- Динамика в реальной мере $\mathbb{P}$:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- Динамика в риск-нейтральной мере $\mathbb{Q}$:

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

- Отсюда:

$$W_t^Q = W_t + \lambda t$$

где $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ – риск-премия.

- Производная Радона-Никодима:

$$\Lambda_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\lambda \cdot W_T - 0.5\lambda^2 \cdot T\right)$$

- В терминах нового БД:

$$\Lambda_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\lambda \cdot W_T^Q + 0.5\lambda^2 \cdot T\right)$$

Безарбитражность

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Теорема

Модель Блэка-Шоулза безарбитражна.

Доказательство. Пусть $(h_t)_{t\geq 0}$ – арбитражный портфель. Пусть $V_0^h = 0, V_T^h \geq 0$. Тогда:

$$0 = V_0^h = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{V_T^h}{B_T} \to \mathbb{Q}(V_T = 0) = 1 \to \mathbb{P}(V_T = 0) = 1$$

Пришли к противоречию.

Полнота

Определение

Платёжное обязательство $X \in \mathcal{F}_T$ называется реплицируемым, если $\exists$ самофинансируемый портфель $h_t = (x_t, y_t)$ такой, что:

$$V_T^h \overset{a.s.}{=} X$$

Определение

Рынок называется полный, если любое* платёжное обязательство является реплицируемым.

- На прошлой лекции доказали для случая $X = \Phi(S_T)$.
- Полнота эквивалентна представлению произвольного функционала от БД $X = X(\{W_s\}_{s \leq T})$ в виде интеграла Ито:

$$X = \int_0^T g_s dW_s$$

Полнота: контр-пример

- Пусть W_t, Z_t – два независимых БД, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s\}_{s\le t}, \{Z_s\}_{s\le t})$.
- Динамика активов:

$$dB_t = rB_t dt$$
$$dS_t = \sigma S_t dW_t$$

- Платёжное обязательство $X = \Phi(Z_T)$ не является реплицируемым $\to$ рынок не полный.

Мета-теорема

Рынок полный $\Leftrightarrow$ число источинков случайности $=$ числу рисковых активов.

Многомерная модель Блэка-Шоулза

- $W_t^1, \dots, W_t^K$ – независимые броуновские движения
- $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s^j\}_{s \le t}, k = \overline{1, K})$ – фильтрация
- Один безрисковый актив S_t^0 и N рисковых активов:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{K} \sigma_{ij} dW_t^j \right)$$

- $\mu \in \mathbb{R}^N$ – вектор доходностей
- $\sigma \in \mathbb{R}^{N \times K}, \sigma\sigma^\top$ – матрица ковариаций лог-доходностей.

Динамика портфелей

- Самофинансируемый портфель $h_t = (h_t^0, h_t^1, \ldots, h_t^N)$.
- Динамика самофинансируемого портфеля:

$$dV_t^h = \sum_{i=0}^{N} h_i^t dS_t^i = h_t^0 dS_t^0 + \sum_{i=1}^{N} h_t^i dS_t^i$$

- Динамика относительного портфеля $\tilde{V}_t^h = \dfrac{V_t^h}{B_t}$

$$d\tilde{V}_t^h = \sum_{i=1}^{N} h_t^i d\tilde{S}_t^i$$

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера $\mathbb{Q}$ называется риск-нейтральной, если $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ и рисковые активы имеют динамику:

$$dS_t^i = S_t^i \left(rdt + \sum_{j=1}^{K} \sigma_{ij} dZ_t^j \right)$$

где Z_t^j – $\mathbb{Q}$-броуновские движения.

Риск-нейтральная мера

- Замена дрифта у броуновского движения:

$$W_t^j = Z_t^j - \lambda_j$$

- Дрифт относительно новой меры:

$$dS_t^i = S_t^i \left((\mu_i - \sum_{j=1}^{K} \sigma_{ij}\lambda_j)dt + \sum_{j=1}^{K} \sigma_{ij} dZ_t^j \right)$$

- Уравнение на дрифт:

$$\vec{\mu} - \sigma\vec{\lambda} = r \cdot \vec{1}$$

- В случае общего положения решение $\exists$, если $K \geq N$, решение $\exists!$, если $K = N$.

Первая фундаментальная теорема

Первая фундаментальная теорема

Рынок безарбитражен $\Leftrightarrow$ существует риск-нейтральная мера.

Первая фундаментальная теорема

Рынок безарбитражен $\Leftrightarrow$ существует риск-нейтральная мера.

$\Rightarrow$ Для случая $r = 0$.

- От противного. Пусть система $\sigma\vec{\lambda} = \vec{\mu}$ не имеет решения.
- Альтернатива Фредгольма: система $\sigma^\top \vec{g} = \vec{0}$ имеет решение, $\langle \vec{g}, \mu \rangle \neq 0$.
- Портфель с весами $h_t^i = \frac{g_i}{S_t^i}, i \geq 1$. h_t^0 из условия самофинансируемости.
- Динамика портфеля:

$$dV_t^h = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{dS_i}{S_i} = \langle \vec{g}, \vec{\mu} \rangle dt + \langle \vec{g}, \hat{\sigma} d\vec{W}_t \rangle = \langle \vec{g}, \vec{\mu} \rangle dt \neq 0$$

- Получили два безрисковых портфеля с разной доходностью $\rightarrow$ арбитраж.

Вторая фундаментальная теорема

Вторая фундаментальная теорема

Рынок безарбитражный и полный $\Leftrightarrow$ риск-нейтральная мера единственна.

Вторая фундаментальная теорема

- Пусть $X \in \mathcal{F}_T$ – произвольное платежное обязательство.
- По теореме о представлении:

$$X = \int_0^T \sum_{j=1}^K g_t^j dW_t^j = \int_0^T \langle \vec{g}_t, d\vec{W}_t \rangle$$

- Класс реплицируемых пэйоффов:

$$V_T = \int_0^T \sum_{i=1}^N h_t^i dS_t^i = \int_0^T \langle \vec{h}_t \circ \vec{S}_t, \hat{\sigma} dW_t \rangle = \int_0^T \langle \hat{\sigma}^\top (\vec{h}_t \circ \vec{S}_t), d\vec{W}_t \rangle$$

- Для полноты нужно, чтобы система имела решение $\forall \vec{g}_t$:

$$\hat{\sigma}^\top (\vec{h}_t \circ \vec{S}_t) = \vec{g}_t$$

Отсюда

$$\mathrm{Im}(\hat{\sigma}^\top) = \mathbb{R}^K \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\hat{\sigma}) = \emptyset$$

Эквивалентные мартингальные меры

Определение

Пусть $N_t > 0$ – numerair (единица измерения). Вероятностная мера $\mathbb{Q}_N$ называется эквивалентной мартингальной мерой (EMM) относительно N_t, если

- $\mathbb{Q}_N \sim \mathbb{P}$
- Процессы $\tilde{B}_t = \dfrac{B_t}{N_t}, \tilde{S}_t = \dfrac{S_t}{N_t}$ являются мартингалами относительно $\mathbb{Q}_N$

Теорема

Пусть $\mathbb{Q}_N$ — мартингальная мера, V_t^h – самофинансируемый портфель. Тогда

$$\tilde{V}_t^h = \frac{V_t^h}{N_t}$$

тоже самофинансируемый.

Эквивалентные мартингальные меры

Определение

Пусть $N_t > 0$ – numerair (единица измерения). Вероятностная мера $\mathbb{Q}_N$ называется эквивалентной мартингальной мерой (EMM) относительно N_t, если

- $\mathbb{Q}_N \sim \mathbb{P}$
- Процессы $\tilde{B}_t = \dfrac{B_t}{N_t}, \tilde{S}_t = \dfrac{S_t}{N_t}$ являются мартингалами относительно $\mathbb{Q}_N$

- Стоимость $\tilde{V}_t$ любого самофинансируемого портфеля $\mathbb{Q}_N$-мартингал.
- Общая формула для ценообразования:

$$\frac{V_t}{N_t} = \mathbb{E}^{Q_N}\left[\frac{V_T}{N_T}|F_t\right]$$

$$V_t = \mathbb{E}^{Q_N}\left[\frac{N_t}{N_T}V_T|F_t\right]$$

Пример

- Контракт с пэйоффом $\Phi(S_T) = S_T \mathbb{I}(S_T \geq K)$
- Выберем $N_t = S_t$. Формула ценообразования:

$$\frac{V_t}{S_t} = \mathbb{E}^{Q_S}\left[\frac{V_T}{S_T}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{Q_S}\left[\mathbb{I}(S_T \geq K)|\mathcal{F}_t\right] = Q_S\left(S_T \geq K|\mathcal{F}_t\right)$$

- Q_S – EMM относительно S_t, $\tilde{S}_t = 1$ и $\tilde{B}_t = \frac{B_t}{S_t}$ – мартингалы.
- Процесс для $\tilde{B}_t$:

$$\tilde{B}_t = \frac{1}{S_0} e^{rt} e^{-(r-0.5\sigma^2)t - \sigma W_t^Q} = \frac{1}{S_0} e^{0.5\sigma^2 t - \sigma W_t^Q} = \frac{1}{S_0} e^{-0.5\sigma^2 t - \sigma W_t^{Q_S}}$$

- Динамика исходного актива:

$$S_t = \frac{B_t}{\tilde{B}_t} = S_0 e^{(r+0.5\sigma^2)t + \sigma W_t^{Q_S}}$$

Пример

- Динамика исходного актива:

$$S_t = \frac{B_t}{\tilde{B}_t} = S_0 e^{(r+0.5\sigma^2)t+\sigma W_t^{Q_S}}$$

$$S_T \geq K \to (r + 0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau} \geq -\log\frac{S_t}{K} \to \xi \geq -\frac{\log(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

- Отсюда:

$$V_t = S_t \cdot Q_S\left(S_T \geq K|\mathcal{F}_t\right) = S_t \cdot N(-d_1) = S_t \cdot N(d_1)$$