Задача 1. Найти стоимость вечного американского пут-опциона:

$$P(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau}(K - S(\tau))$$

где супремум берётся по всем марковским моментам $\mathcal{T}$.

Решение

- Задача однородная по времени. Ищем решение в классе моментов остановки: ‘
$$\tau_L = \inf\{t \geq 0, S_t = L\}$$
- Исполняем опцион в первый момент, когда цена пробьёт уровень $L < s$.
- Найдем ожидаемую выплату для такой стратегии:
$$V_L(s) = \mathbb{E} e^{-r\tau}(K - S_\tau) = (K - L)\mathbb{E} e^{-r\tau}$$
Считаем, что $e^{-r\tau}(K - S_\tau) = 0$ при $\tau = \infty$ (выплаты не происходит).
- Нужно найти преобразование Лапласа от $\tau_L, \phi(r) = \mathbb{E} e^{-r\tau}$.
- При $r > 0$:
$$\phi(r) = \mathbb{E} e^{-r\tau} = \mathbb{E} e^{-r\tau} \mathbb{I}(\tau < \infty)$$
- БД со сносом $X_t = \mu t + W_t$
- Момент остановки $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$.
- Введём также $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : X_t = a \vee X_t = -n\}$
- $\tau_n \to \tau$ при $n \to \infty$
- Найдем σ такое, что M_t – мартингал:
$$M_t = e^{\sigma X_t - rt}$$
- По теореме Дуба:
$$1 = \mathbb{E} M_{\tau_n} = \mathbb{E} e^{\sigma a - r\tau} \mathbb{I}(\tau \leq \tau_n) + \mathbb{E} e^{-\sigma n - r\tau_n} \mathbb{I}(\tau > \tau_n)$$
При $n \to \infty$ правая часть сходится к:
$$\mathbb{E} e^{\sigma a - r\tau} \mathbb{I}(\tau \leq \tau_n) = e^{\sigma a} \mathbb{E} e^{-r\tau}$$
откуда
$$\mathbb{E} e^{-r\tau} = e^{-\sigma a}$$

- $\sigma = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}$, откуда:

$$\mathbb{E}e^{-r\tau} = e^{-(-\mu+\sqrt{\mu^2+2r})a}$$

Барьерный опцион

$$u_t = \mu u_x + 0.5\sigma^2 u_{xx}$$

Хотим избавиться от u_x. Ищем решение в виде $u(t,x) = e^x v(t,x)$

$$\begin{aligned}
&u_t = e^{\alpha x} v_t \\
&u_x = \alpha u + e^{\alpha x} v_x = e^{\alpha x}(\alpha v + v_x) \\
&u_{xx} = \alpha u_x + \alpha e^{\alpha x} v_x + e^{\alpha x} v_{xx} \\
&u_{xx} = e^{\alpha x}\left(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}\right)
\end{aligned}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned}
v_t = \mu\alpha v + \mu v_x + 0.5\sigma^2\alpha^2 v + \sigma^2\alpha v_x + 0.5\sigma^2 v_{xx} = \\
= v(\mu\alpha + 0.5\sigma^2\alpha^2) + v_x(\mu + \sigma^2\alpha) + 0.5\sigma^2 v_{xx}
\end{aligned}$$

Положим $\alpha = -\dfrac{\mu}{\sigma^2}$, получим уравнение:

$$v_t = 0.5\sigma^2 v_{xx} - \frac{\mu^2}{\sigma^2} v$$

Пусть $v(t,x)$ – решение. Тогда $v(t, 2a-x)$ – тоже решение. Введём $w(t,x) = v(t,x) - v(t,2a-x)$, тогда $w(t,x)$ – решение, причём $w(t,a) = 0$.

Поэтому

$$u(t,x) = e^{\alpha x} v(t,x) - e^{\alpha(2a-x)} v(t, 2a-x)$$

является решением исходного уравнения с условием $u(t,a) = 0$.