

## Лекция 6. Локальная волатильность

October 25, 2025

- Элементы теории меры: производная Радона-Никодима, теорема Гирсанова
- Модель Блэка-Шоулза с точки зрения мартингального подхода
- Фундаментальные теоремы финансов

Основные предположения:

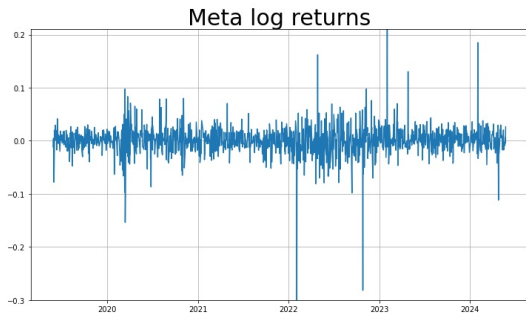
- Лог-доходности независимы и имеют нормальное распределение
- Параметры модели (ставка и волатильность) постоянные или зависят только от времени.
- Можно брать кредиты/класть на счёт деньги под одну и ту же ставку  $r$
- Нет кредитного риска
- Непрерывная торговля, без комиссий и market impact

# Исторические доходности

- Определим лог-доходности для реального процесса и геометрического броуновского движения:

$$L_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-\delta}}$$

- Визуально очень отличаются:

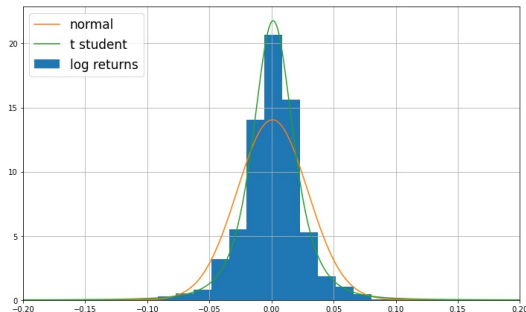


# Исторические доходности

- Исторические доходности имеют толстые хвосты
- Коэффициент эксцесса(kurtosis):

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}(L_t - \mathbb{E}L_t)^4}{\sigma^4} - 3$$

- Для нормального  $\kappa = 0$ , для исторических данных  $\hat{\kappa} \approx 23$ .

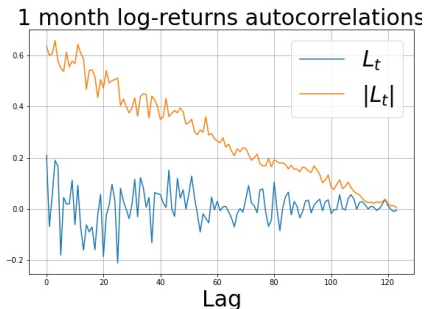


- Для геометрического броуновского движения:

$$L_t \perp L_{t+s}, \forall s \geq \Delta t$$

- Для рыночных данных:

$$\text{cov}(L_t, L_{t+s}) \approx 0, \text{cov}(|L_t|, |L_{t+s}|) \neq 0$$



## Другие стилизованные факты

- Корреляция между волатильностью и ценой
- Кластеризация волатильности
- Прыжки в доходностях

- Формула Блэка-Шоулза:

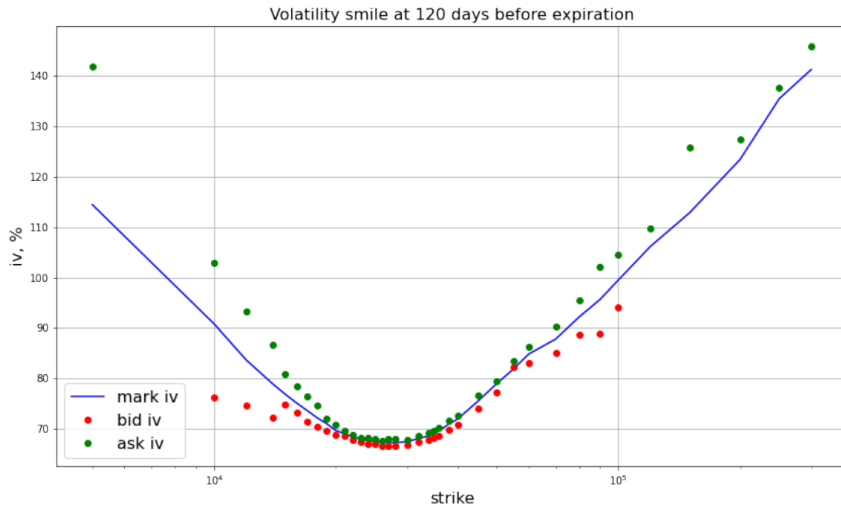
$$C_{BS}(S; T, K, r, \sigma) = S\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)$$

- Знаем рыночные цены  $C^M(T, K)$ , можем решить уравнение относительно  $\sigma_{iv}$ :

$$C_{BS}(S, T, K, r, \sigma_{iv}) = C^M(T, K)$$

- В модели Блэка-Шоулза  $\sigma_{iv} = \sigma$  – постоянная. На практике  $\sigma_{iv} = \sigma_{iv}(T, K)$ .





- Как считать  $\sigma_{iv}$ ? Метод Ньютона:

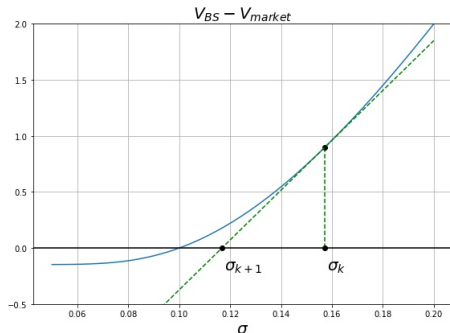
$$0 = f(\sigma^*) \approx f(\sigma) + (\sigma^* - \sigma)f'(\sigma)$$

$$\sigma^* = \sigma - \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}$$

- Как считать  $\sigma_{iv}$ ? Метод Ньютона:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{f(\sigma_k)}{f'(\sigma_k)}$$

- Здесь  $f(\sigma) = C_{BS}(\sigma) - C_{market}$ ,  $f'(\sigma) = \frac{\partial C_{BS}(\sigma)}{\partial \sigma}$



- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$  – функция локальной волатильности.

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$  – функция локальной волатильности.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma(t)$  – GBM, модель Блэка-Шоулза.

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$  – функция локальной волатильности.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma(t)$  – GBM, модель Блэка-Шоулза.
- Пример:  $\sigma(t, S_t) = \frac{\beta}{S_t} \rightarrow$

$$dS_t = S_t rdt + \sigma dW_t$$

$$S_t = se^{rt} + \beta \int_0^t e^{r(t-u)} dW_u \sim N(se^{\mu t}, \dots)$$

## Теорема

Пусть  $C(T, K)$  – цены колл-опционов с датой погашения  $T$  и страйком  $K$ . Тогда риск-нейтральная плотность с.в.  $S_T$  задается формулой:

$$p(T, K) = e^{rT} \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}$$

## Доказательство

$$C(T, K) = \mathbb{E}^Q e^{-rT} (S_T - K)^+ = e^{-rT} \int_K^\infty (x - K) p(T, x) dx$$

$$\frac{\partial C(T, K)}{\partial K} = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial K} \left( \int_K^\infty (x - K) p(T, x) dx \right) = -e^{-rT} \int_K^\infty p(T, x) dx$$

$$\frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2} = e^{-rT} p(T, K)$$



# Прямое уравнение Колмогорова

- Риск-нейтральная динамика процесса:

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

- Инфинитизимальный оператор:

$$[Af](t, S) = rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S) S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

- Сопряжённый оператор:

$$[A^*f](t, S) = -r \frac{\partial(Sf)}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(t, S) S^2 f)}{\partial S^2}$$

- Прямое уравнение Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [A^*f](t, S) = -r \frac{\partial(Sp)}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(t, S) S^2 p)}{\partial S^2}$$

## Формула Дюпира

Пусть RN-динамика процесса  $S_t$  задаётся моделью локальной волатильности:

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

Тогда поверхность цен колл-опционов  $C(T, K)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2(T, K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK\frac{\partial C}{\partial K}$$

В частности, если  $C^M(T, K)$  – рыночная поверхность цен опционов, и

$$\sigma_{Dup}^2(t, S) = \left. \frac{\frac{\partial C^M}{\partial T} + rK\frac{\partial C^M}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 C^M}{\partial K^2}} \right|_{T=t, K=S}$$

то модель точно описывает рыночные цены.

# Формула Дюпира: доказательство

- Общая формула ценообразования:

$$C(T, K) = \mathbb{E}^Q(S_T - K)^+ = \int_K^\infty (x - K)p(T, x)dx$$

- Вычислим производную по  $T$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T} &= \int_K^\infty (x - K) \frac{\partial p(T, x)}{\partial T} dx = [\text{Уравнение Колмогорова}] \\ &= \frac{1}{2} \int_K^\infty (x - K) \frac{\partial^2 (x^2 \sigma(T, x) p(T, x))}{\partial x^2} dx = [\text{по частям}] \\ &= -\frac{1}{2} \int_K^\infty \frac{\partial (x^2 \sigma(T, x) p(T, x))}{\partial x} dx = \frac{1}{2} K^2 \sigma(T, K) p(T, K)\end{aligned}$$

- По формуле Бридена-Литценбергера:

$$\rho(T, K) = \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}$$



- Log moneyness:

$$k = \ln\left(\frac{K}{S_0 e^{rT}}\right)$$

- Total variance:

$$\omega(T, k) = T \sigma_{iv}^2(T, S_0 e^{rT+k})$$

- Формула Блэка-Шоулза:

$$C_{BS}(T, K) = S_0 \left( N\left(-\frac{k}{\sqrt{\omega}} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\right) - e^k N\left(-\frac{k}{\sqrt{\omega}} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\right) \right)$$

- Формула Дюпира:

$$\sigma_{Dup}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{1 - \frac{k}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}}$$

# Связь с implied volatility

- Формула Дюпира:

$$\sigma_{Dup}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{1 - \frac{k}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}}$$

