

Лекция 8. Численные методы

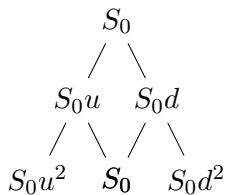
November 10, 2025

Биномиальное дерево: конструкция

Параметры модели

Для S_t в модели Блэка-Шоулза:

- Вверх: $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- Вниз: $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1/u$
- Вероятность: $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$



Биномиальное дерево: конструкция

- Динамика

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t \cdot u, & \text{с вер. } q \\ S_t \cdot d, & \text{с вер. } 1 - q \end{cases}$$

где $u = e^{r\tau + \sigma\sqrt{\tau}}$, $d = e^{r\tau - \sigma\sqrt{\tau}}$.

- Moment-matching:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{t+1}|S_t] &= e^{r\tau} S_t \rightarrow \\ u \cdot q + d \cdot (1 - q) &= e^{r\tau} \rightarrow \\ q &= \frac{e^{r\tau} - d}{u - d} \end{aligned}$$

Моделька

Динамика

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t \cdot u, & \text{с вер. } q \\ S_t \cdot d, & \text{с вер. } 1 - q \end{cases}$$

где

$$u = e^{r\tau + \sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d = e^{r\tau - \sigma\sqrt{\tau}}$$

$$q = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}$$

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)$$

- Динамика

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1})|S_t] = \\ &= e^{-r\tau} (qV_{t+1}(S_t \cdot u) + (1 - q)V_{t+1}(S_t \cdot d)) \end{aligned}$$

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)^+$$

- Continuation value

$$\begin{aligned} C_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1})|S_t] = \\ &= e^{-r\tau} (qV_{t+1}(S_t \cdot u) + (1 - q)V_{t+1}(S_t \cdot d)) \end{aligned}$$

- Принимаем решение об экспирации

$$V_t(S_t) = \max(C_t(S_t), \Phi(S_T))$$

Триномиальное дерево

- Динамика

$$S_{t+1} = S_t e^{r\tau} \begin{cases} u, & \text{с вер. } q_1 \\ 1, & \text{с вер. } q_2 \\ d, & \text{с вер. } q_3 \end{cases}$$

где $u = e^{\sigma\sqrt{3\tau}}$, $d = r^{-\sigma\sqrt{3\tau}}$.

- Moment-matching:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$uq_1 + q_2 + dq_3 = 1$$

$$u^2q_1 + q_2 + d^2q_3 = e^{\sigma^2\tau}$$

- Решение:

$$q_1 = \frac{e^{\sigma^2\tau} - 1}{(u - 1)(u - d)}$$

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)$$

- Динамика

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1}) | S_t] = \\ &= e^{-r\tau} (q_1 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot u) + q_2 V_{t+1}(S_t e^{r\tau}) + q_3 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot d)) \end{aligned}$$

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)$$

- Continuation value

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1})|S_t] = \\ &= e^{-r\tau} (q_1 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot u) + q_2 V_{t+1}(S_t e^{r\tau}) + q_3 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot d)) \end{aligned}$$

- Принимаем решение об экспирации

$$V_t(S_t) = \max(C_t(S_t), \Phi(S_T))$$

Сходимость биномиального метода

Численное уравнение УРЧП

- Уравнение БШ

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Замена $x = \log S$, $u(\tau, x) = V(T - \tau, e^x)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru$$

- Сеточные функции $u_i^n = u(\tau_n, x_i)$. $h = \sigma\sqrt{\Delta t}$

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \\ &+ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - ru_i^n \end{aligned}$$

- Операторная запись

$$\frac{du}{d\tau} = Au - ru$$

$$(Au)_i = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \alpha_i u_{i-1} + \beta_i u_i + \gamma_i u_{i+1}$$

- Точное решение:

$$u^{n+1} = \exp((A - \mathbb{I}r)\Delta t)u^n$$

- Явная схема:

$$u^{n+1} = e^{-r\Delta t}(\mathbb{I} + \Delta t A)u^n$$

- Неявная схема:

$$u^{n+1} = e^{-r\Delta t}(\mathbb{I} - \Delta t A)^{-1}u^n$$

- Схема с полусуммой:

$$u^{n+1} = e^{-r\Delta t}(\mathbb{I} - 0.5\Delta t A)^{-1}(\mathbb{I} + 0.5\Delta t A)u^n$$

- Операторная запись

$$u^{n+1} = e^{-r\Delta t}(\mathbb{I} + \Delta t A)u^n$$

$$u_i^{n+1} = e^{-r\Delta t} (\tau\alpha_i u_{i-1}^n + (1 + \tau\beta_i)u_i^n + \gamma_i u_{i+1}^n)$$

- Операторная запись

$$(\mathbb{I} - \Delta t A)u^{n+1} = e^{-r\Delta t}u^n$$

$$(-\tau\alpha_i u_{i-1}^{n+1} + (1 - \tau\beta_i)u_i^{n+1} - \gamma_i u_{i+1}^{n+1}) = e^{-r\Delta t}u_i^n$$

Выразим u_i^{n+1} :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left[\frac{\sigma^2}{2h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - ru_i^n \right]$$

Сгруппируем коэффициенты:

$$u_i^{n+1} = \left[\frac{\Delta t}{h} \left(\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2} \right) \right] u_{i-1}^n + \left[1 - \Delta t \left(\frac{\sigma^2}{h^2} + r \right) \right] u_i^n + \left[\frac{\Delta t}{h} \left(\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2} \right) \right] u_{i+1}^n$$

Обозначим коэффициенты:

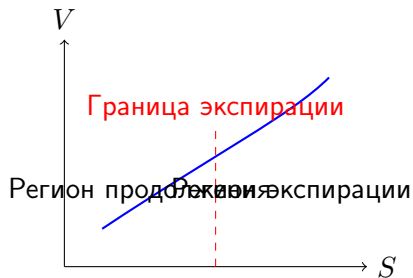
$$A = \frac{\Delta t}{h} \left(\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2} \right)$$

Граница экспирации

Динамическое программирование

Цена американского опциона:

$$V_t = \max \{ e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[V_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t], \text{выплата}(S_t) \}$$



УРЧП и преобразования

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Замена: $x = \ln S$, $\tau = T - t$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru$$

Дискретизация

При $h = \sigma\sqrt{\Delta t}$ (шаг по пространству):

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \\ &+ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - ru_i^n\end{aligned}$$

Связь с триномиальным деревом

Коэффициенты совпадают с вероятностями:

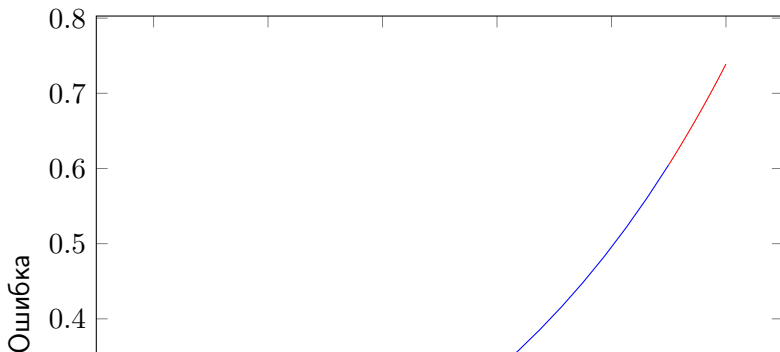
$$\begin{aligned}p_u &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\sigma^2}{h^2} + \frac{r - \sigma^2/2}{h} \right) \\ p_d &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\sigma^2}{h^2} - \frac{r - \sigma^2/2}{h} \right)\end{aligned}$$

Условная устойчивость явной схемы

Критерий Куранта-Фридрихса-Леви

Для устойчивости:

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{\sigma^2 + |r - \sigma^2/2|h}$$



Дискретизация

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \\ & + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - ru_i^{n+1} \end{aligned}$$

Метод прогонки (Томаса)

Трехдиагональная система:

$$a_i u_{i-1}^{n+1} + b_i u_i^{n+1} + c_i u_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

Сложность $O(N)$ вместо $O(N^3)$ для гауссова исключения

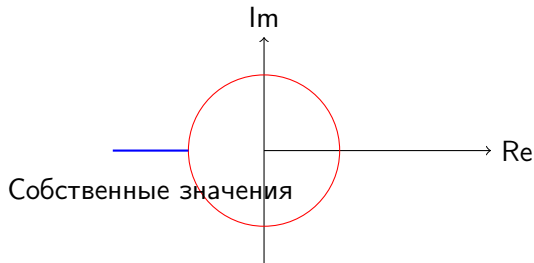
Устойчивость неявной схемы

Анализ устойчивости

Для тестового уравнения $u_t = \lambda u_{xx}$:

$$\text{Усиливающий множитель: } G = \frac{1}{1 + 4\lambda \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2(kh/2)}$$

$$|G| \leq 1 \quad \text{для всех } \Delta t, h$$



Дискретизация второго порядка

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}L(u^{n+1}) + \frac{1}{2}L(u^n)$$
$$L(u) = \frac{\sigma^2}{2}\delta_x^2 u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta_x u - ru$$

Свойства

- Безусловно устойчива
- Второй порядок точности $O(\Delta t^2 + h^2)$
- Требуется решение системы уравнений на каждом шаге

Модельная задача: $y' = Ay$

Точное решение

$$y(t + \tau) = e^{A\tau}y(t)$$

Численные схемы

- Явная Эйлера: $y^{n+1} = (I + A\tau)y^n$
- Неявная Эйлера: $y^{n+1} = (I - A\tau)^{-1}y^n$
- Кранк-Николсон: $y^{n+1} = (I - A\tau/2)^{-1}(I + A\tau/2)y^n$

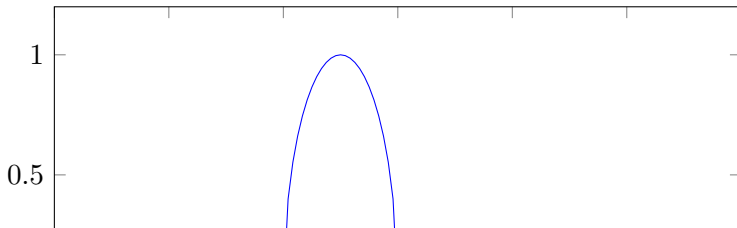
Спектральный радиус

Схема устойчива если $\rho(G) \leq 1 + O(\tau)$

Явная: $|\lambda_A \tau + 1| \leq 1$

Неявная: $\left| \frac{1}{1 - \lambda_A \tau} \right| \leq 1$ для $\operatorname{Re}(\lambda_A) \leq 0$

Кранк-Николсон: $\left| \frac{1 + \lambda_A \tau/2}{1 - \lambda_A \tau/2} \right| \leq 1$



Ключевые моменты

- Деревья = явные схемы для УРЧП
- Американские опционы = свободная граница
- Устойчивость критична для явных схем
- Неявные схемы устойчивы но требуют решения систем
- Схемы второго порядка дают лучшую сходимость

Практические рекомендации

- Биномиальные деревья: простота реализации
- Триномиальные деревья: лучшая сходимость
- Неявные схемы: для задач с большими Δt
- Кранк-Николсон: баланс точности и устойчивости

- Линейное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(t),$$

$$\lambda \gg -1.$$

- Точное решение:

$$y(t + \tau) = e^{\lambda \tau} y(t)$$

- Свойства: $y(t) > 0 \forall t$.
- Сеточные функции $y_k = y(k \cdot \tau)$. Схема Эйлера:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = \lambda y_k \rightarrow y_{k+1} = (1 + \tau \lambda) y_k$$

- Условие положительности:

$$1 + \tau \lambda > 0 \rightarrow \tau < -\frac{1}{\lambda}$$

- Условие устойчивости:

$$|1 + \tau \lambda| < 1 \rightarrow \tau < -\frac{2}{\lambda}$$

Линейное ОДУ: схема Эйлера

График для устойчивой схемы.

График для неустойчивой схемы.

- Неявная схема Эйлера:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = \lambda y_{k+1} \rightarrow$$

$$y_{k+1} = (1 - \tau\lambda)^{-1} y_k$$

- Неявная схема генерирует положительное решение $\forall \tau \geq 0$:

$$1 - \tau\lambda \geq 0 \quad \forall \tau \geq 0$$

- Неявная схема безусловно устойчива:

$$|1 - \tau\lambda| \geq 1 \quad \forall \tau \geq 0$$

- График сходимости

Схема с полусуммой

- Схема с полусуммой:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = \frac{\lambda}{2} (y_k + y_{k+1}) \rightarrow$$
$$y_{k+1} = (1 - \tau\lambda/2)^{-1} (1 + \tau\lambda/2) y_k$$

- Условие положительности:

$$\tau < -\frac{2}{\lambda}$$

- Безусловная устойчивость:

$$\frac{|1 + \tau\lambda/2|}{1 - \tau\lambda/2} \leq 1 \quad \forall \tau \geq 0$$

- График

- Схема Эйлера:

$$e^{\lambda\tau} - (1 + \lambda\tau) = \frac{\lambda^2\tau^2}{2} + \dots = O(\tau^2)$$

- Неявная схема Эйлера:

$$e^{\lambda\tau} - (1 - \lambda\tau)^{-1} = 1 + \lambda\tau + \frac{\lambda^2\tau^2}{2} - (1 + \lambda\tau + \lambda^2\tau^2) + \dots = -\frac{\lambda^2\tau^2}{2} + \dots = O(\tau^2)$$

- Схема с полусуммой:

$$\frac{1 + \tau\lambda/2}{1 - \tau\lambda/2} = (1 + \tau\lambda/2)(1 + \tau\lambda/2 + \tau^2\lambda^2/4 + \dots) = 1 + \tau\lambda + \tau^2\lambda^2/2 + O(\tau^3)$$

$$e^{\lambda\tau} - \frac{1 + \tau\lambda/2}{1 - \tau\lambda/2} = O(\tau^3)$$

	Явная	Неявная	Полусумма
Формула	$(1 + \lambda\tau)y_k$	$(1 - \lambda\tau)^{-1}y_k$	$(1 - \lambda\tau/2)^{-1}(1 - \lambda\tau/2)y_k$
Положительность	$\tau \leq \frac{1}{ \lambda }$	Всегда	$\tau \leq \frac{2}{ \lambda }$
Устойчивость	Условная $\tau \leq \frac{2}{ \lambda }$	Безусловная ✓	Безусловная ✓
Локальная точность	$O(\tau^2)$	$O(\tau^2)$	$O(\tau^3)$
Глобальная точность	$O(\tau)$	$O(\tau)$	$O(\tau^2)$

- Линейное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t),$$

$$\lambda(A) < 0.$$

- Точное решение:

$$y(t + \tau) = e^{A\tau}y(t)$$

где матричная экспонента задаётся как

$$e^{A\tau} = \mathbb{I} + A\tau + \frac{(A\tau)^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\tau)^n}{n!}$$

	Явная	Неявная	Полусумма
Формула	$(\mathbb{I} + \tau A)y_k$	$(\mathbb{I} - \tau A)^{-1}y_k$	$(\mathbb{I} - \tau A/2)^{-1}(\mathbb{I} + \tau A/2)y_k$
Устойчивость	Условная $\tau \leq \frac{2}{ \max \lambda(A) }$	Безусловная ✓	Безусловная ✓
Локальная точность	$O(\tau^2)$	$O(\tau^2)$	$O(\tau^3)$
Глобальная точность	$O(\tau)$	$O(\tau)$	$O(\tau^2)$

- Система с трёх-диагональной матрицей

$$B_1x_1 + C_1x_2 = F_1$$

$$A_ix_{i-1} + B_ix_i + C_ix_{i+1} = F_i, i = 2 \dots N - 1$$

$$A_Nx_{N-1} + B_Nx_N = F_N$$

- Прямой проход:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i\alpha_i + B_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\alpha_i}{A_i\alpha_i + B_i}$$

- Обратный проход:

$$x_N = \frac{F_N - A_N\beta_N}{B_N + A_N + \alpha_N}$$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = N - 1 \dots 1$$

Численные методы интегрирования

- Задача: вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$
- Схема правых прямоугольников:

$$f(x) \approx f(a) \rightarrow I \approx f(a) \cdot (b - a)$$

- Схема левых прямоугольников:

$$f(x) \approx f(b) \rightarrow I \approx f(b) \cdot (b - a)$$

- Схема средних:

$$f(x) \approx f(c) \rightarrow I \approx f(c) \cdot (b - a)$$

где $c = \frac{a+b}{2}$ – середина отрезка.

- Схема трапеций:

$$f(x) \approx f(a) + (f(b) - f(a)) \cdot \frac{(x - a)}{b - a} \rightarrow I \approx 0.5(f(a) + f(b)) \cdot (b - a)$$

- Хотим оценить интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Замена переменных $x = a + (b - a) \cdot u$

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot \int_0^1 f(a + (b - a) \cdot u)du = (b - a) \cdot \int_0^1 g(u)du$$

- Без ограничения общности считаем $a = 0, b = 1$.
- Аппроксимация функции:

$$g(u) \approx \hat{g}(u), \quad u \in [0, 1]$$

- Оценка интеграла:

$$\hat{I} = \int_0^1 \hat{g}(u)du$$

Численное интегрирование: примеры

- Схема правых прямоугольников:

$$\hat{g}(u) = g(0) \rightarrow \hat{I} = g(0)$$

- Схема левых прямоугольников:

$$\hat{g}(u) = g(1) \rightarrow \hat{I} = g(1)$$

- Схема средних:

$$\hat{g}(u) = g(0.5) \rightarrow \hat{I} = g(0.5)$$

- Схема трапеций:

$$\hat{g}(u) = g(0) + (g(1) - g(0)) \cdot u \rightarrow \hat{I} = 0.5(g(a) + g(b))$$

Квадратичная аппроксимация

- Рассмотрим функцию $g(u)$, $u \in [0, 1]$
- Квадратичная аппроксимация $\hat{g}(u)$:
 - $\hat{g}(u)$ – квадратичная функция
 - $\hat{g}(u_j) = g(u_j)$, при $u_j \in \{0, 0.5, 1\}$
- Базисные функции

$$h_1(u) = 2(u - 1)(u - 0.5)$$

$$h_2(u) = 4u(u - 1)$$

$$h_3(u) = 2u(u - 0.5)$$

- Свойства:

$$h_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

- Квадратичная аппроксимация:

$$\hat{g}(u) = g(0)h_1(u) + g(1)h_2(u) + g(0.5)h_3(u)$$

- Квадратичная аппроксимация:

$$\hat{g}(u) = g(0)h_1(u) + g(0.5)h_2(u) + g(1)h_3(u)$$

- Схема Симпсона:

$$\hat{I} = \int_0^1 \hat{g}(u) du = g(0)I_1 + g(0.5)I_2 + g(1)I_3$$

$$\text{где } I_1 = I_2 = \frac{1}{6}, \quad I_2 = \frac{4}{6}$$

$$\hat{I} = \frac{1}{6} (u(0) + 4u(0.5) + u(1))$$

Составные формулы Котеса

- Пусть $N \in \mathbb{N}$. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на малые отрезки длиной $h = \frac{1}{N}$
- Узлы сетки $u_i = i \cdot h, i = 0, \dots, N$
- Линейность интеграла по интервалу интегрирования:

$$I = \int_0^1 g(u) du = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} g(u) du$$

- На каждом интервале $[u_i, u_{i+1})$ воспользуемся одной из квадратурных формул $I_i \approx \hat{I}_i$
- Составная формула для \hat{I} :

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{I}_i$$

Составные формулы Котеса

- Составная формула левых/правых/средних прямоугольников:

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{N-1} g(c_i) \cdot h$$

где

$$c_i = \begin{cases} u_i, & \text{для левых прямоугольников} \\ u_{i+1}, & \text{для правых прямоугольников} \\ u_i + h/2, & \text{для средних} \end{cases}$$

- Состовная формула трапеций

$$\hat{I} = h \cdot \left(0.5g(u_0) + \sum_{i=1}^{N-1} g(u_i) + 0.5g(u_N) \right)$$

Погрешность метода средних

- Рассмотрим составной метод средних:

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{N-1} g(u_i + 0.5h) \cdot h$$

- Ошибка на i -ом интервале:

$$E_i = |I_i - \hat{I}_i| = \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} (g(u) - g(c_i)) du \right|$$

где $c_i = u_i + 0.5h$

- Разложим $g(u)$ в ряд тейлора в окрестности c_i :

$$g(u) - g(c_i) = g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2}g''(\xi)(u - c_i)^2$$

где $\xi \in [u_i, u_{i+1}]$

- Разложим $g(u)$ в ряд тейлора в окрестности c_i :

$$g(u) - g(c_i) = g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2}g''(\xi)(u - c_i)^2$$

где $\xi \in [u_i, u_{i+1}]$

- Рассмотрим интеграл по интервалу $[u_i, u_{i+1}]$

$$E_i = \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left[g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2}g''(\xi)(u - c_i)^2 \right] du \right| \leq \frac{1}{2}M_i \int_{u_i}^{u_{i+1}} (u - c_i)^2 du = \frac{1}{24}M_i h^3$$

где

$$M_i = \max_{u \in [u_i, u_{i+1}]} |g''(u)|$$

- Рассмотрим интеграл по интервалу $[u_i, u_{i+1})$

$$E_i = \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left[g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2}g''(\xi)(u - c_i)^2 \right] du \right| \leq \frac{1}{2}M_i \int_{u_i}^{u_{i+1}} (u - c_i)^2 du = \frac{1}{24}M_i h^3$$

где

$$M_i = \max_{u \in [u_i, u_{i+1}]} |g''(u)|$$

- Суммарная погрешность:

$$E_N = \sum_{i=0}^{N-1} E_i = \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \leq \frac{h^2}{24} M$$

где $M = \max_i M_i = \max_{u \in [0,1]} ||g''(u)||$

Сравнение квадратурных формул

Метод	Формула	Главный член ошибки
Левые прямоугольники	$h \sum_{i=0}^{N-1} g(u_i)$	$\frac{1}{2}h \cdot g'(\xi)$
Правые прямоугольники	$h \sum_{i=0}^{N-1} g(u_{i+1})$	$-\frac{1}{2}h \cdot g'(\xi)$
Средние прямоугольники	$h \sum_{i=0}^{N-1} g(u_i + \frac{h}{2})$	$\frac{1}{24}h^2 \cdot g''(\xi)$
Формула трапеций	$h \sum_{i=0}^{N-1} \frac{g(u_i) + g(u_{i+1})}{2}$	$-\frac{1}{12}h^2 \cdot g''(\xi)$
Формула Симпсона	$\frac{h}{3} \left[g(u_0) + g(u_N) + 4 \sum_{\text{неч.}} g(u_i) + 2 \sum_{\text{чет.}} g(u_i) \right]$	$-\frac{1}{180}h^4 \cdot g^{(4)}(\xi)$

Апостериорная оценка погрешности

- Хотим оценить ошибку, не зная точного решения
- Ошибка имеет степенную зависимость от шага сетки $h = \frac{1}{N}$

$$I_N = I + R_N = I + c \cdot h^p$$

где R_N – ошибка на N узлах, $c \in \mathbb{R}$ – константа, p – порядок метода.

- Оценка на сгущённой сетке:

$$I_{2N} = I + R_{2N} = I + \frac{c}{2^p} \cdot h^p$$

- Вычтем второе уравнение из первого, получим:

$$I_{2N} - I_N = \frac{c}{2^p} \cdot h^p - c \cdot h^p = R_{2N}(1 - 2^p)$$

откуда оценка ошибки:

$$R_{2N} = \frac{I_N - I_{2N}}{2^p - 1}$$

- Зная оценку ошибки \hat{R}_N можем получить более точную оценку для интеграла:

$$\hat{I}_N = I_N - \hat{R}_N$$

- Ошибка \hat{I}_N имеет более высокий порядок чем p . Для несимметричных схем:

$$\hat{I}_N = I_N - \hat{R}_N = I + c'h^{p+1}$$

- Для симметричных схем ошибка раскладывается по чётным степеням h :

$$\hat{I}_N = I_N - \hat{R}_N = I + c''h^{p+2}$$

- Улучшение точности можно проделывать много раз