Количественные финансы, осень 2025 ДЗ 2
September 27, 2025

Задача 1 (Стохастический интеграл 2). Пусть B_t – броуновское движение. Введём forward-looking стохастический интеграл по формуле:

$$\int_0^t g_s \circ dB_s := \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n} g_{t_{k+1}} (B_{t_{k+1}} - B)$$

где $0 = t_0 < \ldots < t_n = t$ – разбиение $[0, t]$, предел берётся по всем разбиениям при диаметре $\delta \to 0$. Вычислить

$$2 \int_0^t B_s \circ dB_s$$

Сравнить ответ с интегралом Ито.

Задача 2. Доказать формулу Ито для процесса Ито.

Задача 3. При каком α процесс $X_t = e^{\alpha t + \sigma B_t}$ является мартингалом? Решить с помощью леммы Ито.

Задача 4. Пусть $X_t = B_t^4 + f(t) B_t^2 + g(t)$, где B_t – броуновское движение, $f(t), g(t)$ – детерминированные функции.
При каких f, g процесс X_t является мартингалом?