

Лекция 5. Мартингальная теория прайсинга

October 15, 2025

- Динамика самофинансируемого портфеля.
- Случайные платёжные обязательства
- Безарбитражность и реплицируемость.
- Уравнение Блэка-Шоулза.
- Европейский колл-опцион, стоимость и греки

- Эквивалентные меры.
- Производная Радона-Никодима. Формула замены Меры.
- Теорема Гирсанова: замена дрифта у броуновского движения.
- Фундаментальные теоремы финансов.
- Полнота и безарбитражность многомерной модели Блэка-Шоулза.

Абсолютная непрерывность мер

Пусть (Ω, \mathcal{F}) – измеримое пространство (множество с σ -алгеброй). Пусть \mathbb{Q}, \mathbb{P} – меры на (Ω, \mathcal{F}) .

Определение

Мера \mathbb{Q} абсолютно непрерывна относительно \mathbb{P} , если $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = 0 \rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

Обозначение $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

Определение

Мера \mathbb{Q} эквивалентна \mathbb{P} , если $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Обозначение $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

Абсолютная непрерывность мер: примеры

Примеры:

- Пусть $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Тогда:

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \rightarrow \mathbb{Q}(\{n\}) = 0$$

Абсолютная непрерывность мер: примеры

Примеры:

- Пусть $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Тогда:

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \rightarrow \mathbb{Q}(\{n\}) = 0$$

- Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть меры \mathbb{P}, \mathbb{Q} заданы плотностями $p(x), q(x)$, т.е.

$$\mathbb{P}(A) = \int_A p(x) dx, \quad \mathbb{Q}(A) = \int_A q(x) dx$$

Тогда

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \text{supp}(p) \subseteq \text{supp}(q)$$

Производная Радона-Никодима

Пусть \mathbb{P} – мера, $f \in \mathcal{F}$ – измеримая функция, $f(\omega) \geq 0$. Определим меру \mathbb{Q} по формуле:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}$$

Тогда \mathbb{Q} – мера и $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Производная Радона-Никодима

Пусть \mathbb{P} – мера, $f \in \mathcal{F}$ – измеримая функция, $f(\omega) \geq 0$. Определим меру \mathbb{Q} по формуле:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}$$

Тогда \mathbb{Q} – мера и $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Верно и обратное:

Теорема Радона-Никодима

Пусть $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда $\exists f \in \mathcal{F}, f(\omega) \geq 0$:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Обозначение: $f(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

- Пусть $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(n) = \frac{\mathbb{Q}(\{n\})}{\mathbb{P}(\{n\})} \cdot \mathbb{I}(\mathbb{P}(\{n\}) \neq 0)$$

при $n \in \Omega$.

Производная Радона-Никодима: примеры

- Пусть $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(n) = \frac{\mathbb{Q}(\{n\})}{\mathbb{P}(\{n\})} \cdot \mathbb{I}(\mathbb{P}(\{n\}) \neq 0)$$

при $n \in \Omega$.

- Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть меры $\mathbb{P} \gg \mathbb{Q}$ заданы плотностями $p(x)$, $q(x)$. Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \cdot \mathbb{I}(p(x) \neq 0)$$

Производная Радона-Никодима: свойства

Пусть

- (Ω, \mathcal{F}) – измеримое пространство
- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ – вероятностные меры
- $f = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима
- $\xi \in \mathcal{F}$ – случайная величина.

Производная Радона-Никодима: свойства

Пусть

- (Ω, \mathcal{F}) – измеримое пространство
- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ – вероятностные меры
- $f = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима
- $\xi \in \mathcal{F}$ – случайная величина.

Тогда:

- $\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{Q}(\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega) f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\xi \cdot f]$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} 1 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} f = 1$

Замена меры: пример

Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, мера \mathbb{P} задана плотностью $p(x) = \frac{\exp(-0.5x^2)}{\sqrt{2\pi}}$.

Найти меру, относительно которой с.в. $\xi(x) = x$ имеет распределение $\mathcal{N}(a, 1)$.

Замена меры: пример

Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, мера \mathbb{P} задана плотностью $p(x) = \frac{\exp(-0.5x^2)}{\sqrt{2\pi}}$.

Найти меру, относительно которой с.в. $\xi(x) = x$ имеет распределение $\mathcal{N}(a, 1)$.

- Плотность новой меры \mathbb{Q} :

$$q(x) = \frac{\exp(-0.5(x - a)^2)}{\sqrt{2\pi}}$$

- Производная Радона-Никодима:

$$f(x) = \frac{q}{p} = \exp(ax - 0.5a^2)$$

- Проверка:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\xi \cdot f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot \exp(ax - 0.5a^2) \exp(-0.5x^2) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot \exp(-0.5(x - a)^2) dx = a\end{aligned}$$

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, $\Lambda = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, $\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda | \mathcal{F}_t]$.

Тогда:

$$\Lambda_t = \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t} \in \mathcal{F}_t$$

где $\mathbb{Q}_t, \mathbb{P}_t$ – ограничение мер на σ -алгебру \mathcal{F}_t .

Доказательство. Пусть $A_t \in \mathcal{F}_t$. По определению производной Радона-Никодима:

$$\mathbb{Q}(A_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda \cdot \mathbb{I}_{A_t}]$$

С другой стороны, по определению УМО:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda \cdot \mathbb{I}_{A_t}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda | \mathcal{F}_t] \cdot \mathbb{I}_{A_t} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda_t \cdot \mathbb{I}_{A_t}]$$

А это и означает, что $\Lambda_t = \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, $\Lambda = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, $\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\Lambda | \mathcal{F}_t]$. Тогда X_t – мартингал относительно \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда ΛX_t – мартингал относительно \mathbb{P} .

Доказательство. Пусть $A_s \in \mathcal{F}_s$, тогда:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t \mathbb{I}_{A_s}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t \Lambda_t \mathbb{I}_{A_s}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_s \Lambda_s \mathbb{I}_{A_s}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_s \mathbb{I}_{A_s}]$$

А это и означает, что $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

Теорема

Пусть $W_0 = 0$, W_t , $W_t^2 - t$ – локальные мартингалы с непрерывными траекториями. Тогда W_t – броуновское движение.

Теорема Гирсанова: мотивация

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ – фильтрация.

- Пусть $(W_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение.
- Хотим найти меру \mathbb{Q} , относительно которой $Z_t = W_t - \theta \cdot t$ БД.
- Относительно \mathbb{Q} $W_t \sim N(\theta t, t)$.
- "Кандидат" на производную Радона-Никодима:

$$\Lambda = \exp(\theta \cdot W_T - 0.5\theta^2 \cdot T)$$

$$\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda | \mathcal{F}_t] = \exp(\theta \cdot W_t - 0.5\theta^2 \cdot t)$$

Теорема Гирсанова: мотивация

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ – фильтрация.

- Пусть $(W_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение.
- Хотим найти меру \mathbb{Q} , относительно которой $Z_t = W_t - \theta \cdot t$ БД.
- Относительно \mathbb{Q} $W_t \sim N(\theta t, t)$.
- "Кандидат" на производную Радона-Никодима:

$$\Lambda = \exp(\theta \cdot W_T - 0.5\theta^2 \cdot T)$$

$$\Lambda_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Lambda | \mathcal{F}_t] = \exp(\theta \cdot W_t - 0.5\theta^2 \cdot t)$$

- По формуле Ито:

$$d\Lambda_t = \Lambda_t \theta dW_t$$

- Докажем, что $\Lambda_t Z_t$ мартингал относительно \mathbb{P} :

$$d(\Lambda_t Z_t) = d\Lambda_t Z_t + \Lambda_t dZ_t + d\Lambda_t dZ_t = \Lambda_t (\theta Z_t dW_t + dW_t - \theta dt + \theta dt) = \Lambda_t (1 + \theta Z_t) dW_t$$

- Аналогично для $Z_t^2 - t$. Отсюда Z_t – броуновское движение относительно \mathbb{Q} .

Теорема

Пусть θ_t – согласованный процесс, $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$. Положим

$$\Lambda = \exp\left(\int_0^T \theta_s dW_s - 0.5 \int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$

Определим новую меру $\mathbb{Q} = \Lambda \mathbb{P}$, тогда процесс:

$$Z_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

является \mathbb{Q} -броуновским движением при $t \leq T$.

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняются уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

называется риск-нейтральной \mathbb{Q} . Здесь W_t^Q – \mathbb{Q} -броуновское движение.

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняется уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

называется риск-нейтральной \mathbb{Q} . Здесь W_t^Q – \mathbb{Q} -броуновское движение.

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$, $\tilde{V}_t = \frac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняется уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

называется риск-нейтральной \mathbb{Q} . Здесь W_t^Q – \mathbb{Q} -броуновское движение.

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$, $\tilde{V}_t = \frac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Доказательство.

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

$$d\tilde{V}_t = x_t d\tilde{S}_t = \sigma x_t \tilde{S}_t dW_t$$

Риск-нейтральная мера: существование

- Динамика в реальной мере \mathbb{P} :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- Динамика в риск-нейтральной мере \mathbb{Q} :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

- Отсюда:

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \lambda t$$

где $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ – риск-премия.

- Производная Радона-Никодима:

$$\Lambda_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\lambda \cdot W_T - 0.5\lambda^2 \cdot T)$$

- В терминах нового БД:

$$\Lambda_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\lambda \cdot W_T^{\mathbb{Q}} + 0.5\lambda^2 \cdot T)$$

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Теорема

Модель Блэка-Шоулза безарбитражна.

Доказательство. Пусть $(h_t)_{t \geq 0}$ – арбитражный портфель. Пусть $V_0^h = 0, V_T^h \geq 0$. Тогда:

$$0 = V_0^h = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \frac{V_T^h}{B_T} \rightarrow \mathbb{Q}(V_T = 0) = 1 \rightarrow \mathbb{P}(V_T = 0) = 1$$

Пришли к противоречию.

Определение

Платёжное обязательство $X \in \mathcal{F}_T$ называется реплицируемым, если \exists самофинансируемый портфель $h_t = (x_t, y_t)$ такой, что:

$$V_T^h \stackrel{a.s.}{=} X$$

Определение

Рынок называется полный, если любое* платёжное обязательство является реплицируемым.

- На прошлой лекции доказали для случая $X = \Phi(S_T)$.
- При $r = 0$ полнота эквивалентна представлению произвольного функционала от БД $X = X(\{W_s\}_{s \leq T})$ в виде интеграла Ито:

$$X = \int_0^T g_s dW_s$$

Полнота: контр-пример

- Пусть W_t, Z_t – два независимых БД, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s\}_{s \leq t}, \{Z_s\}_{s \leq t})$.
- Динамика активов:

$$dB_t = rB_t dt$$

$$dS_t = \sigma S_t dW_t$$

- Платёжное обязательство $X = \Phi(Z_T)$ не является реплицируемым \rightarrow рынок не полный.

Мета-теорема

Рынок полный \Leftrightarrow число источников случайности = числу рисковых активов.

Многомерная модель Блэка-Шоулза

- W_t^1, \dots, W_t^K – независимые броуновские движения
- $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s^j\}_{s \leq t}, k = \overline{1, K})$ – фильтрация
- Один безрисковый актив S_t^0 и N рискованных активов:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^K \sigma_{ij} dW_t^j \right)$$

- $\mu \in \mathbb{R}^N$ – вектор доходностей
- $\sigma \in \mathbb{R}^{N \times K}, \sigma \sigma^\top$ – матрица ковариаций лог-доходностей.

- Самофинансируемый портфель $h_t = (h_t^0, h_t^1, \dots, h_t^N)$.
- Динамика самофинансируемого портфеля:

$$dV_t^h = \sum_{i=0}^N h_t^i dS_t^i = h_t^0 dS_t^0 + \sum_{i=1}^N h_t^i dS_t^i$$

- Динамика относительного портфеля $\tilde{V}_t^h = \frac{V_t^h}{B_t}$

$$d\tilde{V}_t^h = \sum_{i=1}^N h_t^i d\tilde{S}_t^i$$

Определение

Мера \mathbb{Q} называется риск-нейтральной, если $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ и рисковые активы имеют динамику:

$$dS_t^i = S_t^i \left(rdt + \sum_{j=1}^K \sigma_{ij} dZ_t^j \right)$$

где Z_t^j – \mathbb{Q} -броуновские движения.

- Замена дрифта у броуновского движения:

$$W_t^j = Z_t^j - \lambda_j$$

- Дрифт относительно новой меры:

$$dS_t^i = S_t^i \left(\left(\mu_i - \sum_{j=1}^K \sigma_{ij} \lambda_j \right) dt + \sum_{j=1}^K \sigma_{ij} dZ_t^j \right)$$

- Уравнение на дрифт:

$$\vec{\mu} - \sigma \vec{\lambda} = r \cdot \vec{1}$$

- В случае общего положения решение \exists , если $K \geq N$, решение $\exists!$, если $K = N$.

Первая фундаментальная теорема

Рынок безарбитражен \Leftrightarrow существует риск-нейтральная мера.

Вторая фундаментальная теорема

Пусть рынок безарбитражен. Рынок полный \Leftrightarrow риск-нейтральная мера единственна.

Эквивалентные мартингальные меры

Определение

Пусть $N_t > 0$ – numeraire (единица измерения). Вероятностная мера \mathbb{Q}_N называется эквивалентной мартингальной мерой (ЕММ) относительно N_t , если

- $\mathbb{Q}_N \sim \mathbb{P}$
- Процессы $\tilde{B}_t = \frac{B_t}{N_t}$, $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{N_t}$ являются мартингалами относительно \mathbb{Q}_N

Теорема

Пусть \mathbb{Q}_N — мартингальная мера, V_t^h — самофинансируемый портфель. Тогда

$$\tilde{V}_t^h = \frac{V_t^h}{N_t}$$

тоже самофинансируемый.

Определение

Пусть $N_t > 0$ – numeraire (единица измерения). Вероятностная мера \mathbb{Q}_N называется эквивалентной мартингальной мерой (ЭММ) относительно N_t , если

- $\mathbb{Q}_N \sim \mathbb{P}$
- Процессы $\tilde{B}_t = \frac{B_t}{N_t}$, $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{N_t}$ являются мартингалами относительно \mathbb{Q}_N
- Стоимость \tilde{V}_t любого самофинансируемого портфеля \mathbb{Q}_N -мартингал.
- Общая формула для ценообразования:

$$\frac{V_t}{N_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N} \left[\frac{V_T}{N_T} | \mathcal{F}_t \right]$$

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N} \left[\frac{N_t}{N_T} V_T | \mathcal{F}_t \right]$$

- Контракт с пэйоффом $\Phi(S_T) = S_T \mathbb{I}(S_T \geq K)$
- Выберем $N_t = S_t$. Формула ценообразования:

$$\frac{V_t}{S_t} = \mathbb{E}^{Q_S} \left[\frac{V_T}{S_T} | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{Q_S} [\mathbb{I}(S_T \geq K) | \mathcal{F}_t] = Q_S(S_T \geq K | \mathcal{F}_t)$$

- Q_S – EMM относительно S_t , $\tilde{S}_t = 1$ и $\tilde{B}_t = \frac{B_t}{S_t}$ – мартингалы.
- Процесс для \tilde{B}_t :

$$\tilde{B}_t = \frac{1}{S_0} e^{rt} e^{-(r-0.5\sigma^2)t - \sigma W_t^Q} = \frac{1}{S_0} e^{0.5\sigma^2 t - \sigma W_t^Q} = \frac{1}{S_0} e^{-0.5\sigma^2 t - \sigma W_t^{Q_S}}$$

- Динамика исходного актива:

$$S_t = \frac{B_t}{\tilde{B}_t} = S_0 e^{(r+0.5\sigma^2)t + \sigma W_t^{Q_S}}$$

- Динамика исходного актива:

$$S_t = \frac{B_t}{\tilde{B}_t} = S_0 e^{(r+0.5\sigma^2)t + \sigma W_t^{QS}}$$

$$S_T \geq K \rightarrow (r + 0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau} \geq -\log \frac{S_t}{K} \rightarrow \xi \geq -\frac{\log(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

- Отсюда:

$$V_t = S_t \cdot Q_S(S_T \geq K | \mathcal{F}_t) = S_t \cdot N(-d_1) = S_t \cdot N(d_1)$$