Задача 1. Докажите, что у броуновского движения почти наверное бесконечная полная вариация.

Задача 2. Пусть B_t – броуновское движение. Вычислить:

$$Z_t = \int_0^t 2B_t dB_t$$

Задача 3. Доказать формулу Ито для процесса Ито.

Задача 4. При каком α процесс $X_t = e^{\alpha t + \sigma B_t}$ является мартингалом?

Задача 5. Пусть $X_t = B_t^4$, где B_t – броуновское движение. Найти $\mathbb{E}X_t$.

Задача 6. Пусть

$$\begin{cases} dX_t = X_t(\mu_x dt + \sigma_x dB_t), \\ dY_t = Y_t(\mu_y dt + \sigma_y dZ_t), \end{cases}$$

где $dB_t \cdot dZ_t = \rho dt$ – броуновские движения с корреляций ρ. Выписать уравнения для процессов $X_t^\alpha, X_t \cdot Y_t, \dfrac{X_t}{Y_t}$

Задача 7. Пусть процесс X_t удовлетворяет следующуему СДУ:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma_t dB_t$$

для некоторого процесса σ_t и $\alpha \in \mathbb{R}$. Найти $\mu(t) = \mathbb{E}X_t$.

Задача 8 (Уравнение Орнштейна-Уленбека). Решить стохастическое дифференциальное уравнение на X_t:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$

где $\alpha, \theta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$.
При каком распределении X_0 процесс X_t стационарен?