Лекция 1. Теория вероятностей. Случайные процессы с дискретным временем

September 11, 2025

План

- Вероятностное пространство: определения и свойства
- Условное математическое ожидание
- Замена меры, производная Радона-Никодима
- Фильтрация: определение и свойства
- Случайные процессы: основные опредлеения
- Мартингалы, моменты остановки
- Теоремы Дуба. Дискретный стохастический интеграл

Вероятностное пространство

Определение

Вероятностное пространство это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где:

- Ω – пространство элементарных исходов,
- $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ – σ-алгебра событий,
- $\mathbb{P}$ – счётно-аддитивная вероятностная мера.

Определение

Пусть Ω – множество. Семейство подмножеств Ω $\mathcal{F}$ называется алгеброй, если:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}$: $A \cup B \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}$: $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$

Алгебра $\mathcal{F}$ называется σ-алгеброй, если она замкнута относительно счётного объединения:

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- $\mathcal{F} = (\emptyset, \Omega)$ – тривиальная σ-алгебра
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ – множество всех подмножеств
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

σ-алгебра

Пусть Ω – множество, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра. Тогда:

- $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$
- $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- Если G – σ-алгебра, то $\mathcal{F} \cap G$ – σ-алгебра
- Если $\{\mathcal{F}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ – семейство σ-алгебр, то $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ – σ-алгебра.

Определение

Пусть $\Omega = \mathbb{R}$. Борелевская σ-алгебра $B(\mathbb{R})$ – минимальная сигма-алгебра, содержащая все множества вида $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

По определению σ-алгебры, борелевская σ-алгебра содержит также все отрезки, лучи, интервалы и полуинтервалы, открытые и закрытые множества.

Вероятностная мера

Определение

Вероятностная мера $\mathbb{P}$ это неотрицательная функция на $\mathcal{F}$, удовлетворяющая свойствам:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} : \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Пример. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#A}{n}$ – вероятностная мера.

Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Функция $\xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Измеримые функции также будем называть случайными величинами (коротко с.в.). Обозначение $\xi \in \mathcal{F}$. Множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ также будем записывать как $\{\xi < x\}$.

Утверждение

Если $\xi \in \mathcal{F}$, то:

- $\{\xi \geq x\} \in \mathcal{F}$
- $\{y \leq \xi < x\} \in \mathcal{F}$
- $\{\xi = x\} \in \mathcal{F}$

Случайные величины

Определение

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – функция. Положим

$$\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Утверждение

$\sigma(\xi)$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой ξ измерима.

Случайные величины и мера

Определение

Функция распределения $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ с.в. ξ называется функция:

$$F = \mathbb{P}(\xi < x).$$

Определение корректно, так как $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$

Определение

Распределением μ_ξ с.в. ξ называется вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, определённая как:

$$\mu_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) \; \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Мат. ожидание

Определение

Мат. ожидание $\mathbb{E}\xi$ с.в. ξ это интеграл Лебега по Ω:

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Утверждение

Для произвольной функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $g(\xi)$ интегрируема выполнено:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x) d\mu_\xi(x) = \int_\mathbb{R} g(x) dF(x)$$

Если μ_ξ имеет плотность $p_\xi(x)$, то:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_\mathbb{R} g(x) p_\xi(x) dx$$

Сигма-алгебры и разбиения

Пусть Ω – пространство элементарных исходов.
Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение множества Ω, т.е.:

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset$$

$H = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая разбиением. Состоит из элементов вида $B = \bigcup_k A_{n_k}$.

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – принимает конечное число значений $\{a_1, \dots, a_n\}$. Пусть $A_i = \xi^{-1}(a_i)$. Тогда $\xi(\omega)$ измерима $\iff \forall i\ A_i \in \mathcal{F}$

Доказательство. $\{\xi < x\} = \bigcup\limits_{a_i < x} \{\xi = a_i\} = \bigcup\limits_{a_i < x} A_i$.

УМО

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) \neq 0$.

Определение

Условная вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии B будем называть число:

$$\mathbb{E}^B \xi = \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_B\right)}{P(B)}$$

Также будем использовать обозначение $\mathbb{E}\left[\xi | B\right]$

УМО для дискретной σ-алгебры

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – разбиение множества Ω, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая этим разбиением.

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии $\mathcal{H}$ будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_{A_i}\right)}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \mathbb{E}^{A_i} \xi$$

$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]$ – дискретная случайная величина:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right](\omega) = \mathbb{E}^{A_i}\xi, \text{если } \omega \in A_i$$

Задача

Пусть $\xi \sim N(0,1)$, $\mathcal{H} = \sigma\left(\{\xi \geq 0\}, \{\xi < 0\}\right)$. Найти $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]$

УМО: свойства

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$. Пусть $\eta = \mathbb{E}\left[\xi | \mathcal{H}\right]$. Тогда:

- $\eta \in \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}$:
$$\mathbb{E}\left[\eta \cdot \mathbb{I}_A\right] = \mathbb{E}\left[\xi \cdot \mathbb{I}_A\right]$$

Первое утверждение очевидно, второе достаточно проверить для $A \in \mathcal{A}$.

УМО для произвольной σ-алгебры

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, пусть ξ – интегрируемая с.в. Пусть $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ – σ-алгебра. Тогда с.в. η, удовлетворяющая свойствам:

- $\eta \in \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}$:
$$\mathbb{E}\left[\eta \cdot \mathbb{I}_A\right] = \mathbb{E}\left[\xi \cdot \mathbb{I}_A\right]$$

называется условным мат. ожиданием ξ при условии $\mathcal{H}$ и обозначается:
$$\eta = \mathbb{E}\left[\xi | \mathcal{H}\right]$$

Замечание В отличии от предыдущего определения $\mathcal{H}$ – произвольная σ-подалгебра. Можно доказать, что такая с.в. η всегда существует и п.н. единственна.

УМО: свойства

- Линейность

$$\mathbb{E}\left[\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{H}\right] = \alpha\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] + \beta\mathbb{E}\left[\eta|\mathcal{H}\right]$$

- Если $\xi \in H$, то $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \xi$
- Если $\xi \perp H$, то $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\xi$
- Повторное мат. ожидание. Пусть $\mathcal{G} \subseteq H$.

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{G}\right]$$

  В частности:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right])$$

- Неравенство Йенсена. Если f выпуклая, то:

$$f(\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]) \leq \mathbb{E}\left[f(\xi)|\mathcal{H}\right]$$

- Если $\eta \in \mathcal{H}$, то

$$\mathbb{E}\left[\eta \cdot \xi|\mathcal{H}\right] = \eta \cdot \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right]$$

УМО как проекция

Утверждение

Пусть ξ – квадратично-интегрируемая с.в., т.е. $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Пусть $\mathcal{H}$ – σ-подалгебра $\mathcal{F}$. Тогда:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \arg\min_{\eta \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - \eta)^2$$

УМО относительно случайной величины

Пусть ξ, η – случайные величины. Положим:

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = \mathbb{E}[\xi|\sigma(\eta)]$$

Так как $\mathbb{E}[\xi|\eta] \in \sigma(\eta)$, то $\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = g(\eta)$$

Задача

Пусть ξ, η – i.i.d. Найти $\mathbb{E}[\xi|\xi+\eta]$.

Задача

Пусть X, Y имеют совместное нормальное распределение с параметрами $\mu = (\mu_X, \mu_Y), \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Найти $\mathbb{E}[X|Y]$

Абсолютная непрерывность мер

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство (множество с σ-алгеброй). Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{P}$ – меры на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Определение

Мера $\mathbb{Q}$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbb{P}$, если $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = 0 \to \mathbb{Q}(A) = 0$$

Обозначение $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

Определение

Мера $\mathbb{Q}$ эквивалентна $\mathbb{P}$, если $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Обозначение $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

Абсолютная непрерывность мер: примеры

Примеры:

- Пусть $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$. Тогда:

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \to \mathbb{Q}(\{n\}) = 0$$

- Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть

$$\mathbb{P}(dx) = p(x)dx, \mathbb{Q}(dx) = q(x)dx.$$

Тогда

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathrm{supp}(p) \subseteq \mathrm{supp}(q)$$

где

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

Абсолютная непрерывность мер: примеры

Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$
Пусть $d\mathbb{P}(x) = \mathbb{I}(x \in [-1, 1])$, $d\mathbb{Q}(x) = \mathbb{I}(x \in [0, 1])$.

- Верно ли, что $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$?
- Верно ли, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$?

Производная Радона-Никодима

Пусть $\mathbb{P}$ – мера, $f \in \mathcal{F}$ – функция, $f(\omega) \geq 0$. Определим меру $\mathbb{Q}$ по формуле:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \ A \in \mathcal{F}$$

Тогда $\mathbb{Q}$ – мера и $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.
Верно и обратное:

Теорема Радона-Никодима

Пусть $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда $\exists f \in \mathcal{F}, f(\omega) \geq 0$:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Обозначение: $f(\omega) = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

Производная Радона-Никодима: примеры

- Пусть $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда:
$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(n) = \frac{\mathbb{Q}(\{n\})}{\mathbb{P}(\{n\})} \cdot \mathbb{I}(\mathbb{P}(\{n\}) \neq 0)$$
при $n \in \mathbb{N}$.
- Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть
$$\mathbb{P}(dx) = p(x)dx, \mathbb{Q}(dx) = q(x)dx$$
и $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Тогда:
$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \cdot \mathbb{I}(p(x) \neq 0)$$

Производная Радона-Никодима: свойства

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство
- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ – вероятностные меры
- $f = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима
- $\xi \in \mathcal{F}$ – случайная величина.

Тогда:

- $Q(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dQ(\omega) = \int_\Omega \xi(\omega) f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\xi \cdot f\right]$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} 1 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} f = 1$

Задача

Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2} dx$, $\xi(x) = x$.
Пусть $f(x) = e^{-0.5a^2 + a \cdot x}$, $d\mathbb{Q}(x) = f(x) d\mathbb{P}(x)$.
Найти $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi$, распределение ξ относительно меры $\mathbb{Q}$.

Случайные процессы

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство. Пусть $\mathcal{T}$ – некоторое множество индексов. Случайным процессом ξ будем называть совокупность с.в. $\{\xi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$, заданных на одном вероятностном пространстве.

- Случайный процесс – функция двух переменных: $\xi : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$, измеримая по второму аргументу.
- Если $\mathcal{T}$ конечно, то случаный процесс $=$ многомерная с.в.
- Обычно $\mathcal{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+, [0, T]\}$.
- Для фиксированного $t \in \mathcal{T}$ отображение $\omega \mapsto \xi(t, \omega)$ которое обозначим ξ_t – сечение процесса ξ.
- Для фиксированного ω отображение $t \mapsto \xi(t, \omega)$ – детерменированная функция, реализация(траектория) случайного процесса.

Конечномерные распределения

Всевозможные совместные распределения с.в. $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ называются конечномерными распределениями процесса ξ_t:

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \ldots, \xi_{t_n} \leq x_n)$$

- Мат. ожидание случайного процесса: $m(t) = \mathbb{E}\xi_t$
- Автоковариационная функция: $b(t, s) = \mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s)$

Случайные процессы: пример

Примеры.

- $\mathcal{T} = [0, 1]$. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$. Положим $\xi_t = t \cdot \eta$.
- Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d.

Упражнение. Для каждого примера:

- опишите траектории и сечения процесса ξ_t,
- выпишите функции конечномерных распределений,
- мат. ожидание и ковариационную функцию.

Случайные процессы: пример

Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d.

Определение

Случайное блуждание X_t это случайный процесс:

$$X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$$

$$X_0 = 0$$

Свойства:

- $\mathbb{E}X_t = 0, \ \mathbb{D}X_t = t$
- $\mathbb{E}\left[X_t | X_{t-1}\right] = X_{t-1}$
- $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \min(t, s)$

Фильтрация

Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.

Определение

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.
Фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ называется последовательность вложенных σ-подалгебр:

$$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}: \ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$$

где $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ – σ-под алгебры.

$\mathcal{F}_t$ – информация, доступная к моменту времени t.
Процесс $\{\xi_t\}$ – **адаптированный**, если $\xi_t \in \mathcal{F}_t \forall t \in \mathbb{N}$.
Процесс $\{\xi_t\}$ – **предсказуемый**, если $\xi_t \in \mathcal{F}_{t-1} \forall t \in \mathbb{N}$.

Естественная фильтрация

Определение

Пусть $\{\xi_t\}$ – случайный процесс. Определим:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{\xi_s, s \leq t\}),$$

т.е. $\mathcal{F}_t$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой все с.в. $\xi_s, s \leq t$ измеримы. Тогда

- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация
- $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ – адаптированный к фильтрации процесс

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ называется **естественной фильтрацией**.

Мартингалы

Определение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация. Случайный процесс $(\xi_t)_{t\geq 0}$ называется **мартингалом** относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, если:

- $\mathbb{E}|\xi_t| < \infty$ – интегрируемость
- $\xi_t \in \mathcal{F}_t$ – адоптированность
- $\mathbb{E}\left[\xi_t | \mathcal{F}_s\right] = \xi_s$ для всех $s \leq t$ – мартингальное свойство.

- Если фильтрация явно не указана, в качестве неё берёся естественная фильтрация процесса $(\xi_t)_{t\geq 0}$.
- Процесс называется суб(супер) мартингалом, если:

$$\mathbb{E}\left[\xi_t | \mathcal{F}_s\right] \leq (\geq) \xi_s$$

Мартингалы: примеры

- Случайное блуждание. Пусть
  - ξ_t – i.i.d., $\mathbb{E}\xi_t = 0$,
  - $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$

  Мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_t - X_s|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[X_s|\mathcal{F}_s\right] = X_s$$

- Геометрическое случайное блуждание.
  - ξ_t – i.i.d., $\mathbb{E}\xi_t = 1$, $\xi_t > 0$
  - $X_t = \prod_{s=1}^{t} \xi_s$

  Мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[X_s \cdot \frac{X_t}{X_s}|\mathcal{F}_s\right] = X_s \cdot \mathbb{E}\left[\frac{X_t}{X_s}|\mathcal{F}_s\right] = X_s$$

- В дискретном случае досаточно требовать свойства:

$$\mathbb{E}\left[\xi_{t+1}|F_t\right] = \xi_t$$

- $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi_0 = const$
- Если $(\xi_t)_{t\geq 0}$ – мартингал, $f(x)$ – выпуклая (вогнутая) функция, то процесс $\eta_t = f(\xi_t)$ – суб (супер) мартингал.
- Если η – произвольная интегрируемая случайная величина, то процесс $\xi_t = \mathbb{E}\left[\eta|\mathcal{F}_t\right]$ – мартингал. В частности, на интервале $[0, T]$ мартингал геренируется своим терминальным значением:

$$\xi_t = \mathbb{E}\left[\xi_T|\mathcal{F}_t\right]$$

- Пусть ξ_t – квадратично-интегрируемый мартингал, тогда его приращения некоррелированы:

$$\mathrm{cov}(\xi_p - \xi_q, \xi_t - \xi_s) = 0$$

при $s \leq t \leq q \leq p$

Дискретный стохастический интеграл

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – дискретная фильтрация.

Определение

Пусть $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ – случайные процессы. Будем называть процесс Z_t, определённый как:

$$Z_t = (X \star Y)_t = \sum_{s=0}^{t} X_s(Y_s - Y_{s-1})$$

при условии $Y_{-1} = 0$ дискретным стохастическим интегралом.

Дискретный стохастический интеграл

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – дискретная фильтрация.

Утверждение

Пусть

- $(X_t)_{t\geq 0}$ – предсказуемый процесс
- $(Y_t)_{t\geq 0}$ – мартингал
- $\forall t \; X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1})$ – интегрируемая с.в.

Тогда стохастический интеграл $(X \star Y)$ является мартингалом.

Доказательство Пусть $Z_t = (X \star Y)_t$, тогда:

$$
\begin{aligned}
&Z_t = Z_{t-1} + X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}) \\
&\mathbb{E}\left[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] = Z_{t-1} + \mathbb{E}\left[X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \\
&= Z_{t-1} + X_t \cdot \mathbb{E}\left[(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = Z_t
\end{aligned}
$$

Момент остановки

Определение

Случайная величина τ, принимающая значения из $\mathcal{T}$ называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации $(F_t)_{t \geq 0}$, если

$$\forall t \geq 0 \; \{\tau \leq t\} \in F_t$$

В любой момент t можем решить, является ли τ моментом остановки на основании информации до момента t.

Момент остановки

Определение

Случайная величина τ, принимающая значения из $\mathcal{T}$ называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации $(F_t)_{t\geq 0}$, если

$$\forall t \geq 0 \ \{\tau \leq t\} \in F_t$$

В любой момент t можем решить, является ли τ моментом остановки на основании информации до момента t.

Пример. Пусть X_t – адаптированный процесс. Рассмотрим:

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$$

где $A \subseteq \mathbb{R}$ – борелевское множество. τ – марковский процесс.

Момент остановки

Определение

Случайная величина τ, принимающая значения из $\mathcal{T}$ называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации $(F_t)_{t\geq 0}$, если

$$\forall t \geq 0 \ \{\tau \leq t\} \in F_t$$

В любой момент t можем решить, является ли τ моментом остановки на основании информации до момента t.

Пример. Пусть X_t – адаптированный процесс. Рассмотрим:

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$$

где $A \subseteq \mathbb{R}$ – борелевское множество. τ – марковский процесс.

Доказательство:

$$\{\tau \leq t\} = \{\exists s \leq t : X_s \in A\} = \bigcup_{s=0}^{t} \{X_s \in A\} \in F_t$$

Теорема Дуба

Теорема

Пусть ξ_t – мартингал, τ – момент остановки. Тогда остановленный процесс $\xi_t^\tau = \xi_{\min(t,\tau)}$ является мартингалом.

Теорема Дуба

Теорема

Пусть ξ_t – мартингал, τ – момент остановки. Тогда остановленный процесс $\xi_t^\tau = \xi_{\min(t,\tau)}$ является мартингалом.

Доказательство Введём $h_t = \mathbb{I}(\tau \geq t) = 1 - \mathbb{I}(\tau \leq t-1) \in F_{t-1}$.

$$\xi_t^\tau = \sum_{s=0}^{t} h_s(\xi_s - \xi_{s-1}) = (h \star \xi)_t.$$

Т.е. ξ_t^τ – стохастический интеграл по мартингалу, значит, тоже мартингал. $\square$

Теорема Дуба об оптимальной остановке

Теорема

Пусть ξ_t – мартингал, τ – момент остановки. Пусть выполнено одно из условий:

- τ – ограничено, т.е. $\exists c : \mathbb{P}(\tau \le c) = 1$
- $\mathbb{E}\tau < \infty$, $\exists c :\ \forall t\ \mathbb{E}\left[|\xi_{t+1} - \xi_t| \mathcal{F}_t\right] \le c$
- ξ_t^τ равномерно ограничено, т.е. $\exists c : \forall t\ |\xi_t^\tau| \le c$

Тогда $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$

Теорема Дуба об оптимальной остановке

Теорема

Пусть ξ_t – мартингал, τ – момент остановки. Пусть выполнено одно из условий:

- τ – ограничено, т.е. $\exists c : \mathbb{P}(\tau \le c) = 1$
- $\mathbb{E}\tau < \infty$, $\exists c : \ \forall t \ \mathbb{E}\left[|\xi_{t+1} - \xi_t| \mathcal{F}_t\right] \le c$
- ξ_t^τ равномерно ограничено, т.е. $\exists c : \forall t \ |\xi_t^\tau| \le c$

Тогда $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$

Доказательство По предыдущей теореме ξ_t^τ – мартингал, откуда $\mathbb{E}\xi_t^\tau = \mathbb{E}\xi_0$. Переходим к пределу при $t \to \infty$, получаем

$$\mathbb{E}\xi_t^\tau = \mathbb{E}\xi_{\min(t,\tau)} \to \mathbb{E}\xi_\tau$$

Условия теоремы нужны для обоснования сходимости. □

Теорема Дуба о разолжении

Теорема

Пусть ξ_t – согласованный интегрируемый процесс. Тогда $\exists!$ $(M_t)_{t\geq 0}$ и $(A_t)_{t\geq 0}$ такие, что:

- M_t – мартингал,
- A_t – предсказуемый процесс и $A_0 = 0$
- $X_t = M_t + A_t$

Доказательство. Пусть такое разложение существует, тогда:

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[M_t + A_t|F_{t-1}] = M_{t-1} + A_t = X_{t-1} + (A_t - A_{t-1})$$

Положим:

- $A_0 = 0, \; A_t = A_{t-1} + \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - X_{t-1}$
- $M_t = X_t - A_t$

Очевидно, A_t – предсказуемый процесс, разложение $X_t = M_t + A_t$ выполнено автоматически, достаточно проверить мартингальность M_t:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - A_t = \\ &= \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - (A_{t-1} + \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] - X_{t-1}) = \\ &= X_{t-1} - A_{t-1} = M_{t-1}\end{aligned}$$

$\square$