

Лекция 2. Случайные процессы в непрерывном времени

September 21, 2025

Рекап прошлой лекции

- УМО относительно σ -алгебры и с.в.: определение, основные свойства
- Случайный процесс – совокупность с.в., проиндексированных временем
- Фильтрация – последовательность вложенных σ -алгебр, формализуют поток информации, доступный к моменту t
- Мартингал – $\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t$. "Непредсказуемый" процесс. Случайное блуждание как пример мартингала.
- Дискретный стохастический интеграл – PnL торговой стратегии.
- Теорема Дуба об остановке: $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$

Случайные процессы

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Случайный процесс – набор случайных величин $\xi_t, t \in [0, T]$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

Конечномерные распределения

Всевозможные совместные распределения с.в. $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$ называются конечномерными распределениями процесса ξ_t :

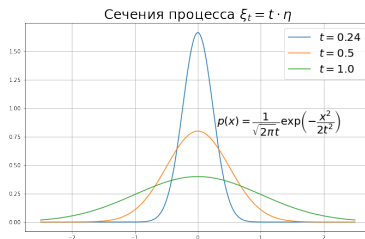
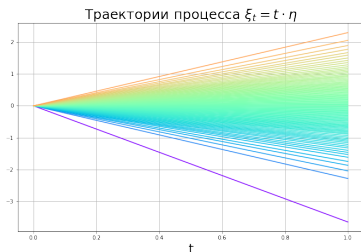
$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \dots, \xi_{t_n} \leq x_n)$$

- Случайный процесс – функция двух переменных $\xi_t = \xi(t, \omega)$, измеримая по второму аргументу $\forall t$.
- Отображение $t : \xi_t(\omega)$ при фиксированном ω – траектория(реализация) процесса.

Примеры случайных процессов

Пусть $\mathcal{T} = [0, 1]$, $\eta \sim N(0, 1)$. Положим $\xi_t = t \cdot \eta$. Свойства:

- $\mathbb{E}\xi_t = 0$
- $\text{Var}\xi_t = t^2$
- $\text{cov}(\xi_t, \xi_s) = ts$



Примеры случайных процессов

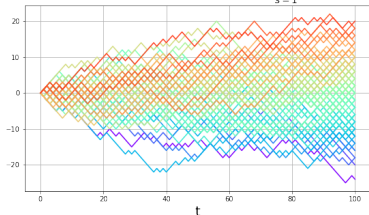
Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d.

$$X_t = \sum_{s=1}^t \xi_s$$

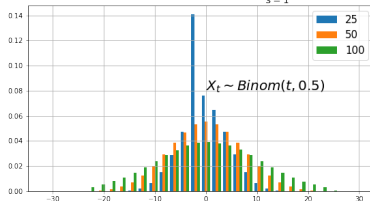
Свойства:

- $\mathbb{E}X_t = 0$, $\text{Var}X_t = t$
- $\mathbb{E}[X_t|X_{t-1}] = X_{t-1}$
- $\text{cov}(X_t, X_s) = \min(t, s)$
- Приращения $X_t - X_s \sim \text{Binom}(t - s, 0.5)$, независимы.

Траектории процесса $X_t = \sum_{s=1}^t \xi_s$



Сечения процесса $X_t = \sum_{s=1}^t \xi_s$



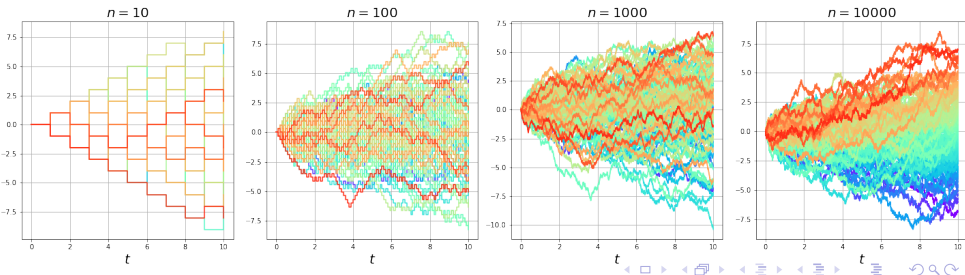
Предел случайного блуждания

Пусть X_k – случайное блуждание. Введём процесс с непрерывным временем:

$$B_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{\lfloor n \cdot t \rfloor}$$

- $\mathbb{E}B_n(t) = 0$, $\text{Var}B_n(t) = \frac{\lfloor n \cdot t \rfloor}{n} \approx t$
- $B_t - W_s \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{Binom}(t - s, 0.5) \rightarrow N(0, t - s)$ при $n \rightarrow \infty$.

Предел случайного блуждания



Определение

Случайный процесс B_t называется броуновским движением (винеровским процессом), если:

- $B_0 = 0$
- $\forall s < t: B_t - B_s \sim N(0, t - s)$
- $\forall s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ приращения $B_{t_2} - B_{s_2}, B_{t_1} - B_{s_1}$ – независимы
- Траектории B_t почти наверное непрерывны по t

Непрерывность и дифференцируемость в с.к.

Определение

Процесс X_t называется непрерывным в среднеквадратичном, если:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}(X_{t+\delta} - X_t)^2 = 0$$

Определение

Процесс X_t называется дифференцируемым в среднеквадратичном, если \exists процесс $(Y_t)_{t \geq 0}$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{X_{t+\delta} - X_t}{\delta} - Y_t \right)^2 = 0$$

Вариация функции/процесса

Определение

Полная вариацией функции/процесса X_t называется величина:

$$V_t(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|$$

Для дифференцируемых функций $V_t(X) = \int_0^t |X'_t| dt$.

Определение

Квадратичной вариацией процесса X_t называется процесс:

$$[X]_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

где предел берётся по всем разбиениям интервала $[0, t]$ с диаметром δ , стремящимся к нулю.

Свойства броуновского движения

- $B_t \sim N(0, t)$
- Броуновское движение непрерывно в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \mathbb{E} (B_{t+\delta} - B_t)^2 = 0$$

- Процесс НЕ дифференцируем в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \mathbb{E} \left(\frac{B_{t+\delta} - B_t}{\delta} \right)^2 = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} = \infty$$

- Конечная квадратичная вариация:

$$[B]_T = \int_0^T (dB_t)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{t_k})^2 = T$$

- Бесконечная полная вариация: $V_t(B) = \infty$.
- $B_t, B_t^2 - t$ – мартингалы
- Самоподобие: $\forall \alpha > 0$ процесс $C_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_{\alpha t}$ тоже БД.

Квадратичная вариация броуновского движения

- Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ – произвольное разбиение с диаметром δ :

$$\delta = \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$$

- Пусть $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} [B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]^2$. Тогда:

$$\mathbb{E} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(t_{k+1} - t_k) = T$$

$$\text{Var} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var} [B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1} - t_k)^2 \leq 2T\delta$$

- По неравенству Чебышева $S_n \rightarrow T$ при $\delta \rightarrow 0$.
- $[B]_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_n = T$.

Интеграл Ито для простых процессов

Пусть B_t – броуновское движение, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ – естественная фильтрация.

Определение

Процесс $g(t)$ называется простым, если \exists числа $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ такие, что $g(t) = g(t_k)$ на $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Интеграл Ито для простого процесса

Пусть $g(t)$ – простой процесс, согласованный с фильтрацией \mathbb{F} . Будем называть интегралом Ито случайную величину:

$$\int_0^T g(t) dB_t = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k) [B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]$$

Интеграл Ито для простых процессов: свойства

Пусть $Z_t = \int_0^t g(s) dW_s$. Тогда:

- $Z_t \in \mathcal{F}_t$
- $\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s$
- $\mathbb{E}Z_t = 0$
- $\text{Var}Z_t = \mathbb{E} \left[\int_0^t g^2(t) dt \right]$ – изометрия Ито.

$$Z_t = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k) \Delta B_{t_k}$$

$$\text{Var} Z_t = \mathbb{E} Z_t^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_t^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)^2 (\Delta B_{t_k})^2 + 2 \sum_{i < j} g(t_i) g(t_j) \Delta B_{t_i} \Delta B_{t_j} \right) = \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Изометрия Ито: продолжение

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k) (\Delta B_{t_k})^2 = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_k}} \left[g^2(t_k) (\Delta B_{t_k})^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k) \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_k}} (\Delta B_{t_k})^2 = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k) \Delta t = \mathbb{E} \int_0^T g^2(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\mathbb{E} \sum_{i < j} g(t_i) g(t_j) \Delta B_{t_i} \Delta B_{t_j} = 2\mathbb{E} \sum_{i < j} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_j}} \left[g(t_i) g(t_j) \Delta B_{t_i} \Delta B_{t_j} \right] = \\ &= 2\mathbb{E} \sum_{i < j} g(t_i) g(t_j) \Delta B_{t_i} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_j}} [\Delta B_{t_j}] = 0 \end{aligned}$$

Итого:

$$\text{Var} \left[\int_0^T g(t) dB_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T g^2(t) dt \right]$$

Интеграл Ито для произвольного процесса

- Пусть $g(t)$ – согласованный процесс, $\mathbb{E}g^2(t) < \infty$
- Пусть $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность простых процессов таких, что

$$\int_0^t \mathbb{E}[g_n(s) - g(s)]^2 ds \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

- Для каждого n определим $Z_n = \int_0^t g_n(s) dW_s$
- Можно показать, что $\exists Z$ такой, что $Z_n \rightarrow Z$ в с.к..
- Определим интеграл как:

$$\int_0^t g(s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T g_n(t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} g_n(t_k) [B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]$$

Пример

Вычислить

$$\int_0^T 2B_t dB_t = \dots$$

Детерминированный случай:

$$\int_0^T 2f(t)df(t) = \int_0^T df^2 = f^2(T)$$

Стохастический случай:

$$\begin{aligned}\Delta(B_t^2) &= B_{t_{k+1}}^2 - B_t^2 = (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{k+1}} + B_{t_k}) \\ &= \Delta B_{t_k}(2B_{t_k} + \Delta B_{t_k}) = 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} + [\Delta B_{t_k}]^2\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(B_{t_k}^2) - [\Delta B_{t_k}]^2 = B_T^2 - \sum_{k=0}^{n-1} [\Delta B_{t_k}]^2 \rightarrow B_T^2 - T$$

- Линейность:

$$\int_0^T [\alpha g(t) + \beta h(t)] dB_t = \alpha \int_0^T g(t) dB_t + \beta \int_0^T h(t) dB_t$$

- Линейность по пределу интегрирования:

$$\int_0^T g(t) dB_t = \int_0^s g(t) dB_t + \int_s^T g(t) dB_t, \quad 0 < s < T$$

- Изометрия Ито:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T g(t) dB_t \right] = 0, \quad \text{Var} \left[\int_0^T g(t) dB_t \right] = \int_0^T g^2(t) dt$$

- Таблица умножения стох. дифференциалов:

$$(dB_t)^2 = dt, \quad dB_t dt = 0, \quad dB_t dB_s = 0, \quad t \neq s$$

Определение

Будем называть процессом Ито процесс вида:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

В дифференциальной форме это можно записать как:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Формула Ито для броуновского движения

Теорема

Пусть B_t – броуновское движение, $f(t, x)$ – гладкая функция.
Тогда:

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) + f_s(s, B_s) \right] ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$$

Формула Ито для броуновского движения

Теорема

Пусть B_t – броуновское движение, $f(t, x)$ – гладкая функция. Тогда:

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) + f_s(s, B_s) \right] ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$$

Неформально интегральную запись можно понимать как:

$$df(t, B_t) = \left[\frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) + f_t(t, B_t) \right] dt + f_x(t, B_t) dB_t$$

Формула Ито для броуновского движения

Неформально интегральную запись можно понимать как:

$$df(t, B_t) = \left[\frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) + f_t(t, B_t) \right] dt + f_x(t, B_t) dB_t$$

Доказательство (Для случая $f = f(x)$) Разложим функцию $f(B_t)$ в ряд Тейлора до второго порядка малости:

$$\begin{aligned} f(B_t + dB_t) - f(B_t) &= f_x(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(B_t)dB_t^2 + \dots = \\ &= f_x(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(B_t)dt + o(dt) \end{aligned}$$



- $f(x) = x^2$. $Y_t = f(W_t)$

$$dY_t = 2W_t dW_t + dt$$

$$Y_t = t + 2 \int_0^t W_s dW_s$$

- $f(x) = e^x$, $Y_t = f(W_t)$

$$dY_t = \frac{1}{2} Y_t dt + Y_t dW_t$$

- При каком α процесс $e^{\alpha t + \sigma W_t}$ является мартингалом?

Формула Ито позволяет разложить процесс на "предсказуемую" и мартингальную часть:

$$f(t, W_t) = A_t + M_t$$

где

- $A_t = f(0, 0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) + f_s(s, B_s) \right] ds$ – процесс ограниченной вариации.
- $M_t = \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$ – мартингал.

Формула Ито для процесса Ито

Теорема

Пусть X_t – процесс Ито:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

$f(t, x)$ – гладкая функция. Тогда $Y_t = f(t, X_t)$ процесс Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t,$$

где

$$\mu_t^Y = f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2$$

$$\sigma_t^Y = f_x(t, X_t)\sigma_t$$

Доказательство Аналогично предыдущему случаю



Интегральная запись:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Пример. Броуновское движение со сносом

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

$$\begin{cases} dX_t = X_t (\mu dt + \sigma dB_t) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим детерменированное уравнение:

$$dX_t = X_t \mu dt \rightarrow X_t = e^{\mu t}$$

Замена переменных:

$$X_t = e^{Y_t} \rightarrow Y_t = \log X_t$$

$$dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} \frac{(dX_t)^2}{X_t^2} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right]$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

$$X_t = \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right]$$

$$\mathbb{E} X_t = \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right] \mathbb{E} \exp [\sigma B_t] = e^{\mu t}$$

Процесс Орнштейна-Уленбека

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t$$

$$\mathbb{E}X_t = \beta_t = \dots$$

$$d\beta_t = -\alpha\beta_t dt \longrightarrow \beta_t = \beta_0 e^{-\alpha t}$$

Формула Феймана-Каца: мотивировка

- Процесс цены X_t :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

- Случайная выплата, зависящая от цены X_T : $Y_T = \Phi(X_T)$.
- Ожидание выплаты в момент t :

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t]$$

- В силу марковости:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t] = f(t, X_t)$$

для некоторой функции $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Постановка задачи

Найти функцию $f(t, x)$ такую, что:

$$f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$$

Формула Феймана-Каца

- Предположим, что $f(t, x)$ гладкая, тогда по формуле Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t,$$

где

$$\mu_t^Y = f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu(t, X_t) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t)$$

$$\sigma_t^Y = f_x(t, X_t)\sigma(t, X_t)$$

- Y_t – мартингал Леви, поэтому $\mu_t^Y = 0$, откуда:

$$f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = \Phi(x)$$

Формула Феймана-Каца

Пусть X_t удовлетворяет СДУ $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$.

Теорема

- Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет УРЧП:

$$\begin{aligned}f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) &= 0 \\f(T, x) &= \Phi(x)\end{aligned}$$

Тогда:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = f(t, X_t)$$

- Пусть $f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$. Тогда $f(t, x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) &= 0 \\f(T, x) &= \Phi(x)\end{aligned}$$

Пример

Решить УРЧП:

$$f_t(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = x^2$$

Решить УРЧП:

$$f_t(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = x^2$$

- $\mu(t, x) = 0, \sigma(t, x) = 1 \rightarrow X_t = B_t$.
- По формуле Феймана-Каца:

$$f(t, x) = \mathbb{E}[B_T^2 | B_t = x] = \mathbb{E}[(x + (B_T - B_t))^2 | B_t = x] = \mathbb{E}(x + \xi)^2$$

где $\xi \sim N(0, T - t)$.

- Отсюда:

$$f(t, x) = x^2 + (T - t)$$

Рекап второй лекции

- Броуновское движение как предел случайных блужданий.
- Основные свойства: мартингальность, самоподобие, бесконечная полная вариация, конечная квадратичная вариация.
- Интеграл Ито: непрерывный аналог дискретного стохастического интеграла
- Изометрия Ито. Таблица умножения стохастических дифференциалов.
- Лемма/формула Ито: формула замены переменных в стохастическом интеграле
- Формула Феймана-Каца – связь между УРЧП и СДУ.