Задача 1. Пусть $C(t, S; T, K)$ – цена колл-опциона в модели БШ:

$$C(t, S; T, K) = S \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} K \cdot N(d_2)$$

где

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Найти греки:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$
$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$
$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$
$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Решение. Пусть $\tau = T - t$, $n(x) = N'(x) = \frac{\exp\left(-0.5x^2\right)}{\sqrt{2\pi}}$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + Sn(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-r\tau}Kn(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} = N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S}\left(Sn(d_1) - e^{-r\tau}Kn(d_2)\right)$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$n(d_2) = n(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau}{2}\right) = n(d_1)\exp\left(d_1\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right)$$

Подставим определение d_1, получим:

$$d_1\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2} = \log(S/K) + r\tau$$

Откуда:

$$n(d_2) = n(d_1)e^{r\tau}\frac{S}{K}$$

Поэтому

$$\left(S \cdot n(d_1) - e^{-r\tau}K \cdot n(d_2)\right) = n(d_1)\left(S - e^{-r\tau}Ke^{r\tau}\frac{S}{K}\right) = 0$$

Итого

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = n(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\frac{\partial d_1}{\sigma} - e^{-r\tau}Kn(d_2)\frac{\partial d_2}{\sigma}$$

Заметим, что $\frac{\partial d_2}{\sigma} = \frac{\partial d_1}{\sigma} - \sqrt{\tau}$. Отсюда:

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = e^{-r\tau}Kn(d_2)\sqrt{\tau} + \frac{\partial d_1}{\sigma}\left(Sn(d_1) - e^{-r\tau}Kn(d_2)\right) = e^{-r\tau}Kn(d_2)\sqrt{\tau}$$

Это также можно переписать как:

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = n(d_1)S\sqrt{\tau}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= rC - \Delta rS - 0.5\sigma^2 S^2 \Gamma = \\ &= -rKe^{-r\tau}N(d_2) - \frac{\sigma S\phi(d_1)}{2\sqrt{\tau}}\end{aligned}$$

Задача 2. Рассмотрим контракт с пэйоффом:

$$\Phi(S_T) = C(T, S_T; T', S_T)$$

т.е. контракт, который в момент T выплачивает стоимость ATM опциона с датой погашения T'. Найти его стоимость $p(t, \Phi)$.

Решение

$$\Phi(S_T) = S_T N(d_1) - e^{-r(T'-T)}S_T N(d_2) = S_T(N(d_1) - e^{-r(T'-T)}N(d_2))$$

где d_1, d_2 задаются формулами:

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log(S_T/S_T) + r(T'-T)}{\sigma\sqrt{T'-T}} + \frac{\sigma\sqrt{T'-T}}{2} = \frac{r\sqrt{T'-T}}{\sigma} + \frac{\sigma\sqrt{T'-T}}{2} \\ d_2 &= \frac{r\sqrt{T'-T}}{\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{T'-T}}{2}\end{aligned}$$

Отсюда:

$$p(t, \Phi) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)|F_t\right] = (N(d_1) - e^{-r(T'-T)}N(d_2)) \cdot \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}S_T|F_t\right] = (N(d_1) - e^{-r(T'-T)}N(d_2)) \cdot S_t$$