Лекция 7. Модель Хестона

November 7, 2025

Постановка задачи

- Модель Блэка-Шоулза:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

- Верхний барьер B
- Накопленный максимум $M_t = \max_{u \le t} S_u$
- Выплата:

$$\Phi(S_T, M_T) = \Phi(S_T) \cdot \mathbb{I}(M_T < B) = \begin{cases} \Phi(S_T), M_T < B \\ 0, M_T \geq B \end{cases}$$

Уравнение Блэка-Шоулза

- Пусть $M_t < B$, т.е. барьер не пробит до момента t
- Пусть $\tau = \inf_{u \geq t}\{S_u \geq B\}$
- Пэйофф: $\Phi(S_T)\mathbb{I}(\tau > T)$
- Стоимость опциона:

$$V^{UO}(t, S_t) = \mathbb{E}e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)\mathbb{I}(\tau > T)$$

- По формуле Феймана-Каца стоимость удовлетворяет уравнению БШ

$$\frac{\partial V^{UO}}{\partial t} + rS\frac{\partial V^{UO}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V^{UO}}{\partial S^2} = rV^{UO}, \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq S \leq B$$
$$V^{UO}(t, B) = 0$$
$$V^{UO}(T, S) = \Phi(S)\mathbb{I}(S \leq B)$$

Обрезанные пэйоффы

- Введём обрезаныне пэйоффы:

$$\Phi^B(S) = \Phi(S) \cdot \mathbb{I}(S \leq B) = \begin{cases} \Phi(S), S \leq B \\ 0, S > B \end{cases}$$

Замена переменной

- Замена переменных $X_t = \log S_t$
- Логарифмический барьер $b = \log B$
- Уравнение БШ в новых координатах $v^{UO}(t,x) = V^{UO}(t,e^x)$:

$$\frac{\partial v^{UO}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v^{UO}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v^{UO}}{\partial x^2} = r v^{UO}$$
$$v^{UO}(t,b) = 0$$
$$v^{UO}(T,x) = \Phi^B(e^x)$$

где $\gamma = r - \frac{1}{2}\sigma^2$

Метод отражения

- Пусть $\gamma = 0$, т.е. $r = 0.5\sigma^2$
- Пусть $v(t,x)$ – стоимость европейского опциона с пэйоффом $\Phi^B(e^x)$
- Функция $v(t,x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rv$$

- В силу симметрии $v(t, 2b - x)$ тоже решение.
- Терминальное условие: $v(T, 2a - x) = \Phi^B(e^{2b-x}) = 0$ при $x \leq b$.
- Отсюда $g(t,x) = v(t,x) - v(t, 2b - x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rv$$

$$g(T, b) = 0$$

$$g(T, x) = \Phi^B(e^x)$$

т.е. $v^{UO}(t,x) = g(t,x)$ – стоимость барьерного опциона.

Метод отражения

$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) = V(t, S_t; \Phi^L) - V\left(t, \frac{L^2}{S_t}; \Phi^L\right)$$

Пример

- Пусть $\Phi(S_T) = (K - S_T)^+$, $K \leq L$
- $\Phi^L(S_T) = \Phi(S_T)$
- $$P^{UO}(t, S_t) = P(t, S_t) - P(t, \frac{L^2}{S_t}) = \dots$$

Переход к логарифмическим координатам

Введём: $X_t = \log S_t$
По формуле Ито:

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t$$

При $r = \frac{1}{2}\sigma^2$ получаем:

$$dX_t = \sigma dW_t$$

Барьер в новых координатах: $a = \log B$

- Введём обрезанный пэйофф:

$$\Phi^L(S) = \Phi(S) \cdot \mathbb{I}(S < L)$$

- В новых координатах:

$$\Phi^L(e^x) = \Phi(e^x) \cdot \mathbb{I}(x < a)$$

Уравнение Блэка-Шоулса

Цена европейского опциона $C(t, x)$ с пэйоффом $\Phi^L(e^x)$ удовлетворяет:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial C}{\partial x} - rC = 0$$

При $r = \frac{1}{2}\sigma^2$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rC = 0$$

Симметрия уравнения

Уравнение:

$$frac\partial C\partial t + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rC = 0$$

Симметрия: уравнение инвариантно относительно замены $x \to -x$
Если $C(t, x)$ - решение, то $C(t, 2a - x)$ тоже решение.

Метод отражения

Построим новую функцию:

$$G(t, x) = C(t, x) - C(t, 2a - x)$$

Свойства:

- $G(t, x)$ - решение уравнения (линейная комбинация решений)
- $G(t, a) = C(t, a) - C(t, a) = 0$ (условие на барьере)

Начальные условия

При $t = T$ (экспирация):

$$G(T, x) = C(T, x) - C(T, 2a - x) = \Phi^L(e^x) - \Phi^L(e^{2a-x}) = \Phi^L(e^x)$$

так как $2a - x > a$ при $x < a$.

Проверим выполнение условий барьерного опциона:

Итог

Пусть $C^L(t,x)$ – цена опциона с пэйоффом $\Phi^L(x)$. Тогда цена барьерного опциона задаётся как:

$$C^{LO}(t,x) = \begin{cases} C^L(t,x) - C^L(t,2a-x), \text{при } a < M_t \\ 0, \text{при} a \geq M_t \end{cases}$$