
Задача 1. Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$

где $\alpha, \theta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$.
Найти $\mathbb{E}X_t, \mathrm{Var}(X_t)$.

Задача 2. Пусть

$$\begin{cases} dX_t = X_t(\mu_x dt + \sigma_x dB_t), \\ dY_t = Y_t(\mu_y dt + \sigma_y dZ_t), \end{cases}$$

где $dB_t \cdot dZ_t = \rho dt$ – броуновские движения с корреляций ρ.
Выписать уравнения для процессов $X_t^\alpha, X_t \cdot Y_t, \dfrac{X_t}{Y_t}$

Задача 3. Пусть

$$\begin{cases} dX_t = \alpha X_t dt - Y_t dB_t, \\ dY_t = \alpha Y_t dt + X_t dB_t, \end{cases},$$

$X_0 = x_0, Y_0 = y_0$, где x_0, y_0 – константы.
Найти $R_t = X_t^2 + Y_t^2$. Вычислить $\mathbb{E}X_t$.

Задача 4 (Variance swap). Пусть $dX_t = X_t \sigma_t dB_t$ – процесс Ито, σ_t – согласованный процесс.
Покажите, что:

$$\int_0^T \sigma_t^2 dt = -2\ln\frac{X_T}{X_0} + \int_0^T \frac{2}{X_t} dX_t$$

Задача 5. Пусть процесс X_t удовлетворяет следующему СДУ:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma_t dB_t$$

для некоторого процесса σ_t и $\alpha \in \mathbb{R}$.
Найти $\mu(t) = \mathbb{E}X_t$.

Задача 6 (Броуновский мост). Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = a(t)X_t + dB_t$$

где $a(t)$ – детерменированная функция, B_t – броуновское движение. Найдите $a(t)$ такое, что процесс X_t, определённый по формуле выше, является броуновским мостом.
Броуновский мост это гауссовский процесс X_t: $\mathbb{E}X_t = 0,\ \mathrm{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1-t),\ s \le t$

Задача 7 (Уравнение Орнштейна-Уленбека). Решить стохастическое дифференциальное уравнение на X_t:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$

где $\alpha, \theta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$.
При каком распределении X_0 процесс X_t стационарен?

Задача 8 (Формула Башелье). Решить УРЧП:

$$f_t + \mu f_x + \frac{\sigma^2}{2} f_{xx} = 0, 0 \le t < T, x \in \mathbb{R}$$
$$f(T, x) = \max(x - K, 0)$$

где $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$ – константы.

Задача 9 (Формула Блэка-Шоулза). Решить УРЧП:

$$f_t + \mu \cdot x \cdot f_x + \frac{\sigma^2 x^2}{2} f_{xx} = 0, 0 \le t < T, x \ge 0$$
$$f(T, x) = \max(x - K, 0)$$

где $\sigma > 0, K > 0, \mu \in \mathbb{R}$ – константы.

Задача 10. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области $x^2 + y^2 \le 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и граничным условиям $u(x, y) = f(x, y)$ при $x^2 + y^2 = 1$.
Найти $u(x, y)$.
Доказать, что:

$$u(x, y) = \mathbb{E}\left[f(X_\tau, Y_\tau) | (X_0 = x, Y_0 = y)\right]$$

где (X_t, Y_t) – двумерное броуновское движение, стартующее из точки (x, y), момент остановки τ определяется как:

$$\tau = \inf_t \{X_t^2 + Y_t^2 \ge 1\}$$