Лекция 4. Рынок с непрерывным временем

September 11, 2025

План курса

- Введение
  - Модели: математические аспекты моделирования
  - Рынки: моделирование рынков и равновесия в экономике
  - Цены: основные постулаты финансовой математики
  - Активы: финансовые инструменты и корп. финансы
- Классические модели
  - Прайсинг деривативов: дискретное время
  - Прайсинг деривативов: непрерывное время
  - Моделирование базовых контрактов. Формула Блэка-Шоулса
  - Модели локальной и стохастической волатильности
  - Численные методы для оценки стоимости деривативов
- Тоже классические модели, но более новые
  - Поправки XVA
  - Трейдинг, микроструктура рынка и транзакционные издержки

Динамика актива

Модель Блэка-Шоулза

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t.

Модель Блэка-Шоулза

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t.

Банковский счёт:

$$B_0 = 1$$
$$dB_t = rB_t dt$$

Модель Блэка-Шоулза

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t.

Банковский счёт:

$$B_0 = 1$$
$$dB_t = rB_t dt$$

Акция:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$
$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - 0.5\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

Динамика портфелей

Самофинансируемый порфель

Определение

Портфель $h_t = (x_t, y_t) \in \mathcal{F}_t$ – согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ случайный процесс. x_t – число акций, y_t – количество денег на банковском счёте.

Самофинансируемый порфель

Определение

Портфель $h_t = (x_t, y_t) \in \mathcal{F}_t$ – согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ случайный процесс. x_t – число акций, y_t – количество денег на банковском счёте.

Пусть

- возможны короткие, длинные и дробные позиции, $x_t, y_t \in \mathbb{R}$
- нет транзакционных издержек
- рынок абсолютно ликвиден: нет маркет-импакта

Самофинансируемый порфель

Определение

Портфель $h_t = (x_t, y_t) \in \mathcal{F}_t$ – согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ случайный процесс. x_t – число акций, y_t – количество денег на банковском счёте.

Стоимость портфеля:

$$V_t = x_t S_t + y_t$$

Самофинансируемый порфель

Определение

Портфель $h_t = (x_t, y_t) \in \mathcal{F}_t$ – согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ случайный процесс. x_t – число акций, y_t – количество денег на банковском счёте.

Стоимость портфеля:

$$V_t = x_t S_t + y_t$$

Уравнение самофинансируемости:

$$dV_t = x_t dS_t + y_t r dt$$
$$dV_t = rV_t dt + x_t (dS_t - rS_t dt)$$

Самофинансируемый порфель

Определение

Портфель $h_t = (x_t, y_t) \in \mathcal{F}_t$ – согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ случайный процесс. x_t – число акций, y_t – количество денег на банковском счёте.

Стоимость портфеля:

$$V_t = x_t S_t + y_t$$

Уравнение самофинансируемости:

$$\begin{aligned} dV_t &= x_t dS_t + y_t r dt \\ dV_t &= rV_t dt + x_t(dS_t - rS_t dt) \end{aligned}$$

Относительный портфель:

$$\widetilde{V}_t = \frac{V_t}{B_t}, \widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} \to d\widetilde{V}_t = x_t d\widetilde{S}_t$$

Платежные обязательства

Определение

Случайным платёжным обязательством (деривативом) называется контракт, который в момент времени T платит случайную сумму денег $X \in \mathcal{F}_T$. Платёжное обязательство называется простым, если $X = \Phi(S_T)$.

Платежные обязательства

Определение

Случайным платёжным обязательством (деривативом) называется контракт, который в момент времени T платит случайную сумму денег $X \in \mathcal{F}_T$. Платёжное обязательство называется простым, если $X = \Phi(S_T)$.

Основная цель – определить "справедливую" стоимость $p(t, \Phi)$ платёжного обязательства в произвольный момент времени $t \leq T$.

Платежные обязательства

Определение

Платёжное обязательство называется реплицируемым, если $\exists$ самофинансируемый портфель $h_t = (x_t, y_t)$ такой, что:

$$V_T^h \stackrel{a.s.}{=} \Phi(S_T)$$

Пример Пусть $\Phi(S_T) = S_T - K$. Реплицирующий портфель:

$$x_t = 1,\ y_0 = -Ke^{-rT},\ y_t = -Ke^{-r(T-t)}$$

Теорема

Цена реплицируемого обязательства Φ равна стоимости реплицирующего портфеля $h_t = (x_t, y_t)$:

$$p(t, \Phi) = V_t^h = x_t \cdot S_t + y_t$$

Пример.

$$p(t, S_T - K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Арбитраж

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$

$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \ \& \ \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Арбитраж

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \;\&\; \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Рынок арбитражный, если существует арбитражный портфель.

Арбитраж

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \ \& \ \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Рынок арбитражный, если существует арбитражный портфель.
Пример. Пусть

$$S_t = 1 + W_t^2.$$

Построить арбитражный порфель.

Цены

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – хэджирующий портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Цены

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – хэджирующий портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Пусть цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$ – гладкая функция своих аргументов. Динамика цены:

$$dF(t, S_t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS_t^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 0.5 \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t$$

Цены

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – хэджирующий портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Пусть цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$ – гладкая функция своих аргументов. Динамика цены:

$$dF(t, S_t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS_t^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 0.5\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t$$

Приравнивая коэффициенты при dt, dS_t получим:

$$x_t = \frac{\partial F}{\partial S},$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} + r S_t \frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF$$

Уравнение Блэка-Шоулза

УРЧП на процесс цены:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T,S) = \Phi(S).$$

Уравнение Блэка-Шоулза

УРЧП на процесс цены:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T, S) = \Phi(S).$$

Веса хэджирующего портфеля:

$$x_t = \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial S},$$
$$y_t = F(t, S_t) - \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial S} \cdot S_t.$$

Формула Феймана-Каца

Теорема

Пусть функция $F(t,S)$ удовлетворяет УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T,S) = \Phi(S).$$

Тогда решение может быть выраженно через условное мат. ожидание:

$$F(t,S) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)|S_t = S\right]$$

где S_u подчиняется геометрическому броуновскому движению:

$$dS_u = rS_u du + \sigma S_u dW_u, u > t$$
$$S_t = S$$

Доказательство

Сделаем замену: $F(t,S) = e^{-r(T-t)}\widetilde{F}(t,S)$:

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} + rS\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} = 0,$$
$$\widetilde{F}(T,S) = \Phi(S).$$

Доказательство

Сделаем замену: $F(t,S) = e^{-r(T-t)}\widetilde{F}(t,S)$:

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} + rS\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} = 0,$$
$$\widetilde{F}(T,S) = \Phi(S).$$

Запишем формулу Ито для процесса $Y_u = \widetilde{F}(u, S_u)$:

Доказательство

Сделаем замену: $F(t,S) = e^{-r(T-t)}\widetilde{F}(t,S)$:

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} + rS\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} = 0,$$

$$\widetilde{F}(T,S) = \Phi(S).$$

Запишем формулу Ито для процесса $Y_u = \widetilde{F}(u, S_u)$:

$$dY_u = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} + rS_u\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Доказательство

Сделаем замену: $F(t,S) = e^{-r(T-t)}\widetilde{F}(t,S)$:

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} + rS\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} = 0,$$
$$\widetilde{F}(T,S) = \Phi(S).$$

Запишем формулу Ито для процесса $Y_u = \widetilde{F}(u, S_u)$:

$$dY_u = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} + rS_u\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Член при dt равен нулю в силу уравнения:

$$dY_u = \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Доказательство

Запишем формулу Ито для процесса $Y_u = \widetilde{F}(u, S_u)$:

$$dY_u = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} + rS_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Член при dt равен нулю в силу уравнения:

$$dY_u = \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Интегрируя по u от t до T, получим:

$$Y_T = \widetilde{F}(t, S) + \int_t^T \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Доказательство

Запишем формулу Ито для процесса $Y_u = \widetilde{F}(u, S_u)$:

$$dY_u = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} + rS_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Член при dt равен нулю в силу уравнения:

$$dY_u = \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Интегрируя по u от t до T, получим:

$$Y_T = \widetilde{F}(t, S) + \int_t^T \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Но $Y_T = \widetilde{F}(T, S_T) = \Phi(S_T)$. Беря слева и справа мат. ожидание, получим:

Доказательство

Запишем формулу Ито для процесса $Y_u = \widetilde{F}(u, S_u)$:

$$dY_u = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} + rS_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Член при dt равен нулю в силу уравнения:

$$dY_u = \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Интегрируя по u от t до T, получим:

$$Y_T = \widetilde{F}(t, S) + \int\limits_t^T \sigma S_u \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial S} dW_u$$

Но $Y_T = \widetilde{F}(T, S_T) = \Phi(S_T)$. Беря слева и справа мат. ожидание, получим:

$$\widetilde{F}(t, S) = \mathbb{E} \left[\Phi(S_T) | S_t = S \right]$$

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняются уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

называется риск-нейтральной $\mathbb{Q}$.

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}, \widetilde{V_t} = \frac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Доказательство.

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t dW_t$$
$$d\widetilde{V}_t = x_t d\widetilde{S}_t = \sigma x_t \widetilde{S}_t dW_t$$

Безарбитражность

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Безарбитражность

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Теорема

Модель Блэка-Шоулза безарбитражна.

Доказательство. Пусть $(h_t)_{t\geq 0}$ – арбитражный портфель. Пусть $V_0^h = 0, V_T^h \geq 0$. Тогда:

$$0 = V_0^h = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{V_T^h}{B_T} \to \mathbb{Q}(V_T = 0) = 1$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Цена:

$$p(t, S_T - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Цена:

$$p(t, S_T - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Форвардная цена

Форвардная цена – страйк, при котором цена форвардного контракта равна нулю:

$$p(0, S_T - K) = 0$$

$$F = S_0 e^{rT}; p(t, S_T - F) = S_t - S_0 e^{rt}$$

Пример. Европейский колл-опцион

Определение

Европейский колл-опцион со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Пример. Европейский колл-опцион

Определение

Европейский колл-опцион со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Цена колл-опциона задаётся формулой:

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_1 = d_2 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

где $\tau = T - t$ – время до эксперации.

Пример. Европейский колл-опцион

Доказательство. Введём $\tau = T - t$ – время до экспирации.

$$C(t, S_T) = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}(S_T - K)\mathbb{I}_{S_T \geq K} =$$
$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau}S_T\mathbb{I}_{S_T \geq K}\right] - Ke^{-r\tau}\mathbb{Q}(S_T \geq K).$$

1) Вычислим $\mathbb{Q}(S_T \geq K)$:

$$S_T = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma(W_T - W_t)} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau}},$$

где $\xi \sim N(0, 1)$ – стандартная нормальная с.в..

$$S_T \geq K \longleftrightarrow$$
$$S_t \exp\left[(r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau}\right] \geq K \longleftrightarrow$$
$$(r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau} \geq \log(K/S_t) \longleftrightarrow$$
$$\xi \geq -\frac{\log(S_t/K) + (r - 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \stackrel{def}{=} -d_2.$$

Итого:

$$\mathbb{Q}(S_T \geq K) = \mathbb{Q}(\xi \geq -d_2) = \mathbb{Q}(\xi \leq d_2) = N(d_2)$$

2) Вычислим $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}[e^{-r\tau}S_T\mathbb{I}_{S_T\geq K}]$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau}S_T\mathbb{I}_{S_T\geq K}\right] = S_t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-d_2}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\tau+\sigma x\sqrt{\tau}-\frac{x^2}{2}\right]dx.$$

Рассмотрим отдельно выражение под экспонентой и выделим полный квадрат:

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^2\tau-2x\sigma\sqrt{\tau}+x^2\right) = -\frac{1}{2}\left(x-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2.$$

Сделаем замену переменных в интеграле
$y = x-\sigma\sqrt{\tau}$; $d_2 = d_1+\sigma\sqrt{\tau}$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau}S_T\mathbb{I}_{S_T\geq K}\right] = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-d_1}^{\infty}e^{-0.5y^2}dy = S_tN(d_1)\ \square$$

Греки

Греками называются частные производные цен опционов:

$$\Delta = \frac{\partial C(t,S)}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\nu = \frac{\partial C(t,S)}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{\tau}$$

$$\Theta = \frac{\partial C(t,S)}{\partial t} = rC - rS\Delta - 0.5\sigma^2 S^2 \Gamma$$

Греки

7_figs/PȝPҳP„CҠ Pч PүCЃPҳPəPч.jpg

Свойства

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \to$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

Свойства

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \to$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \to C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

  В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t; S_t; 0) = S_t$$

Свойства

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \to$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \to C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t; S_t; 0) = S_t$$

- Выпуклость по страйку:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{\partial^2}{\partial K^2}(S_T - K)^+ = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\delta(S_T - K) = e^{-r\tau}p(K)$$

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \rightarrow$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \rightarrow C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t; S_t; 0) = S_t$$

- Выпуклость по страйку:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{\partial^2}{\partial K^2}(S_T - K)^+ = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\delta(S_T - K) = e^{-r\tau}p(K)$$

- Границы:

$$C(t, S_t) = e^{-r\tau}\mathbb{E}^Q(S_T - K)^+ \geq e^{-r\tau}(\mathbb{E}^Q S_T - K)^+ = (S_t - e^{-r\tau}K)^+$$

Хэджирование

7_figs/PзPxP,,CK PөPэCЗPчPє Pч P«P»CЗPчP«P,,P«Pў.png

Хэджирование

7_figs/PȝPҳP„CЌ PөPәCȜPчPє Pч P«P»CȜPчP«P„P«Pў.png