Лекция 8. Барьерные опционы

November 8, 2025

Барьерные опционы

- Модель Блэка-Шоулза:

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma dW_t$$
$$dB_t = rB_t dt$$

- Накопленный максимум/минимум

$$M_t = \max_{u \le t} S_u, \quad m_t = \min_{u \le t} S_u$$

- Выплата $\Phi(S_T)$

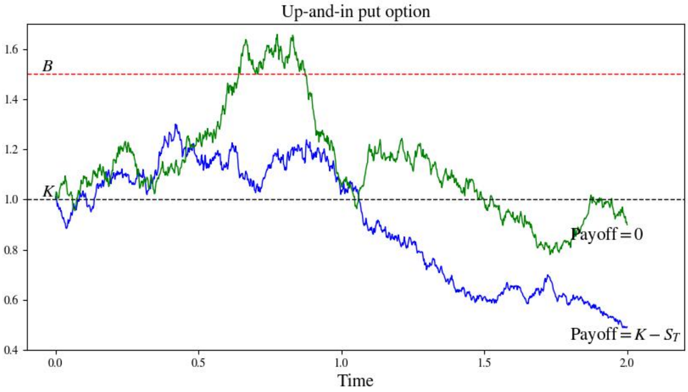
Определение

Барьерный up-and-out опцион с функцией выплаты $\Phi(S_T)$ и барьером B это дериватив, который в момент времени T платит случайную сумму денег, равную

$$\Phi(S_T) \cdot \mathbb{I}(M_T < B) = \begin{cases} \Phi(S_T), M_T < B \\ 0, M_T \ge B \end{cases}$$

Барьерные опционы: пример

- Up-and-out пут-опцион. Функция выплаты $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$
- Пэйофф барьерного опциона $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}(M_T < B)$



Другие барьерные опционы

- Up-and-out (UO)

$$\text{Payoff} = \Phi(S_T) \cdot \mathbb{I}(M_T < B)$$

- Up-and-in (UI)

$$\text{Payoff} = \Phi(S_T) \cdot \mathbb{I}(M_T \geq B)$$

- Down-and-out (DO)

$$\text{Payoff} = \Phi(S_T) \cdot \mathbb{I}(m_t \geq B)$$

- Down-and-in (DI)

$$\text{Payoff} = \Phi(S_T) \cdot \mathbb{I}(m_t < B)$$

Барьерные опционы: свойства

- In-out parity
$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) + V^{UI}(t, S_t; \Phi) = V(t, S_t; \Phi)$$
- Оценка сверху:
$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) \leq V(t, S_t; \Phi)$$
$$V^{UI}(t, S_t; \Phi) \leq V(t, S_t; \Phi)$$

Уравнение Блэка-Шоулза

- Пусть $M_t < B$, т.е. барьер не пробит до момента t
- Пусть $\tau = \inf_{u \geq t}\{S_u \geq B\}$
- $\{M_T \leq B\} \Leftrightarrow \{\tau > T\}$
- Стоимость опциона:

$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)\mathbb{I}(\tau > T)|\mathcal{F}_t\right]$$

- По формуле Феймана-Каца стоимость удовлетворяет уравнению БШ

$$\frac{\partial V^{UO}}{\partial t} + rS\frac{\partial V^{UO}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{UO}}{\partial S^2} = rV^{UO}, \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq S \leq B$$
$$V^{UO}(t, B) = 0$$
$$V^{UO}(T, S) = \Phi(S)\mathbb{I}(S \leq B)$$

Обрезанные пэйоффы

- Введём обрезаные пэйоффы:

$$\Phi^B(S) = \Phi(S) \cdot \mathbb{I}(S \leq B) = \begin{cases} \Phi(S), S \leq B \\ 0, S > B \end{cases}$$

- Стоимость европейских опционов:

$$V(t, S_t; \Phi^B) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Phi^B(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

- Классическое уравнение БШ:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV, \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq S < \infty$$
$$V(T, S) = \Phi(S)\mathbb{I}(S \leq B)$$

Замена переменной

- Замена переменных $X_t = \log S_t$
- Логарифмический барьер $b = \log B$
- Уравнение БШ в новых координатах $v(t, x) = V(t, e^x; \Phi^B)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rv \\
&v(T, x) = \Phi^B(e^x)
\end{aligned}
$$

где $\gamma = r - \frac{1}{2}\sigma^2$

Метод отражения

- Пусть $\gamma = 0$, т.е. $r = 0.5\sigma^2$
- Уравнение БШ в новых координатах $v(t,x) = V(t, e^x; \Phi^B)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rv$$

- В силу симметрии уравнения, $v(t, 2b - x)$ тоже решение.
- Терминальные условия при $x < b$:

$$v(T, 2b - x) = \Phi^B(e^{2b-x}) = \Phi^B\left(\frac{B^2}{S}\right) = 0$$

Метод отражения

- Отсюда $g(t,x) = v(t,x) - v(t,2b-x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rv, x \leq b$$
$$g(T,b) = 0$$
$$g(T,x) = \Phi^B(e^x)$$

т.е. $V^{UO}(t,S;\Phi) = g(t,\log S)$ – стоимость барьерного опциона.

Метод отражения

Теорема

Пусть $r = 0.5\sigma^2$, пусть $V^{UO}(t, S_t; \Phi)$ – стоимость барьерного up-and-out опциона. Тогда:

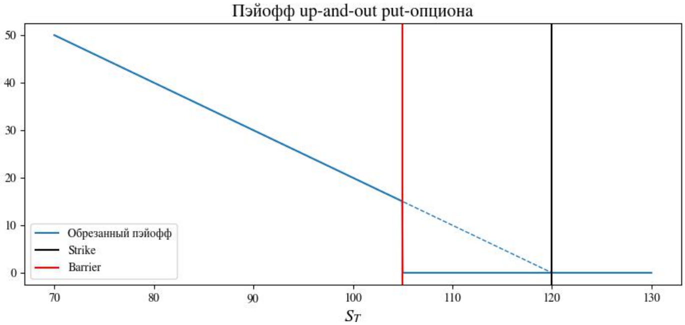
$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) = \begin{cases} 0, M_t \geq B \\ V(t, S_t; \Phi^B) - V\left(t, \frac{B^2}{S_t}; \Phi^B\right), M_t < B \end{cases}$$

где $V(t, S_t; \Phi^B)$ – стоимость европейского опциона с обрезанным пэйоффом.

Пример

- Рассмотрим up-and-out пут-опцион со страйком K и барьером B
- Соответсвующий обрезанный пэйофф:

$$\Phi^B(S_T) = (K - S_T)^+ \mathbb{I}(S_T \leq B) = (K - S_T)\mathbb{I}(S_T \leq K)\mathbb{I}(S_T \leq B) =$$
$$= K\mathbb{I}(S_T \leq \min(K, B)) - S_T\mathbb{I}(S_T \leq \min(K, B))$$



Пример: продолжение

- Цена европейского пэйоффа:

$$\mathrm{Put}(t, S_t; K, B) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - S_t\mathcal{N}(-d_1)$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/\min(B,K)) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

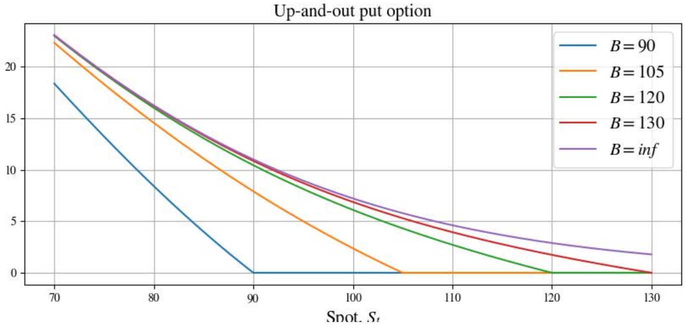
- Цена барьерного опциона:

$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) = \mathrm{Put}(t, S_t; K, B) - \mathrm{Put}\left(t, \frac{B^2}{S_t}; K, B\right)$$

Пример: продолжение

- Цена барьерного опциона:

$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) = \mathrm{Put}(t, S_t; K, B) - \mathrm{Put}\left(t, \frac{B^2}{S_t}; K, B\right)$$



Метод отражения: общий случай

- Пусть $\gamma \neq 0$. Уравнение БШ в новых координатах $v(t,x) = V(t, e^x; \Phi^B)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rv$$

- Пусть $v(t,x)$ – решение. Ищем второе решение $h(t,x) = e^{\alpha(x-b)} v(t, 2b - x)$
- Производные:

$$h_t = e^{\alpha(x-b)} v_t, \quad h_x = e^{\alpha(x-b)}(\alpha v - v_x)$$
$$h_{xx} = e^{\alpha(x-b)}(v_{xx} - 2\alpha v_x + \alpha^2 v)$$

- Подставляем в уравнение:

$$0 \stackrel{?}{=} h_t + \gamma h_x + \frac{1}{2}\sigma^2 h_{xx} - rh =$$
$$= e^{\alpha(x-b)} \left(v_t + v_x(-\gamma - \alpha\sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} - v(r - \gamma\alpha - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}) \right)$$

Метод отражения: общий случай

- Подставляем в уравнение:

$$0 \stackrel{?}{=} h_t + \gamma h_x + \frac{1}{2}\sigma^2 h_{xx} - rh =$$

$$= e^{\alpha(x-b)} \left(v_t + v_x(-\gamma - \alpha\sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} - v(r - \gamma\alpha - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}) \right)$$

- При $\alpha = -\frac{2\gamma}{\sigma^2}$ правая часть равна нулю, поэтому $g(t, x)$ является решением.
- Отсюда:

$$g(t,x) = v(t,x) - e^{-\frac{2\gamma}{\sigma^2}(x-b)} v(t, 2b - x)$$

является решением уравнения:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = rv, x \leq b$$
$$g(T, b) = 0$$
$$g(T, x) = \Phi^B(e^x)$$

Метод отражения: общий случай

Теорема

Пусть $\gamma = r - 0.5\sigma^2$, $V^{UO}(t, S_t; \Phi)$ – стоимость барьерного up-and-out опциона. Тогда:

$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) = \begin{cases} 0, M_t \geq B \\ V(t, S_t; \Phi^B) - \left(\frac{B}{S_t}\right)^{\frac{2\gamma}{\sigma^2}} V\left(t, \frac{B^2}{S_t}; \Phi^B\right), M_t < B \end{cases}$$

где $V(t, S_t; \Phi^B)$ – стоимость европейского опциона с обрезанным пэйоффом.

Контракты типа up-and-in

- Обрезанные снизу пэйоффы:

$$\Phi_B(S) = \Phi(S)\mathbb{I}(S > B)$$
$$\Phi = \Phi_B + \Phi^B$$

- Европейский контракт:

$$V(t, S_t; \Phi) = V(t, S_t; \Phi_B) + V(t, S_t; \Phi^B)$$

- In-out parity:

$$V^{UO}(t, S_t; \Phi) + V^{UI}(t, S_t; \Phi) = V(t, S_t; \Phi)$$

$$V^{UI}(t, S_t; \Phi) = V(t, S_t; \Phi) - V^{UO}(t, S_t; \Phi) =$$
$$= V(t, S_t; \Phi_B) + V(t, S_t; \Phi^B) - V(t, S_t; \Phi^B) + \left(\frac{B}{S_t}\right)^{\frac{2\gamma}{\sigma^2}} V\left(t, \frac{B^2}{S_t}; \Phi^B\right) =$$
$$= V(t, S_t; \Phi_B) + \left(\frac{B}{S_t}\right)^{\frac{2\gamma}{\sigma^2}} V\left(t, \frac{B^2}{S_t}; \Phi^B\right)$$

Контракты типа up-and-in

Теорема

Пусть $\gamma = r - 0.5\sigma^2$, $V^{UI}(t, S_t; \Phi)$ – стоимость барьерного up-and-in опциона. Тогда:

$$V^{UI}(t, S_t; \Phi) = \begin{cases} 0, M_t \geq B \\ V(t, S_t; \Phi_B) + \left(\frac{B}{S_t}\right)^{\frac{2\gamma}{\sigma^2}} V\left(t, \frac{B^2}{S_t}; \Phi^B\right), M_t < B \end{cases}$$

где $V(t, S_t; \Phi_B)$ – стоимость европейского опциона с обрезанным пэйоффом.