Лекция 10. Локальная волатильность

September 11, 2025

Модель Блэка-Шоулза

Основные предположения:

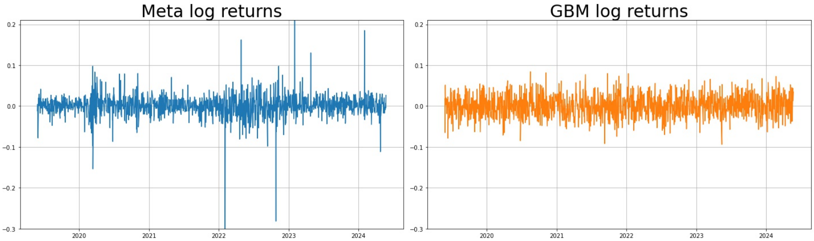
- Лог-доходности независимы и имеют нормальное распределение
- Параметры модели (ставка и волатильность) постоянные или зависят только от времени.
- Можно брать кредиты/класть на счёт деньги под одну и ту же ставку r
- Нет кредитного риска
- Непрерывная торговля, без комиссий и market impact

Исторические доходности

- Определим лог-доходности для реального процесса и геометрического броуновского движения:

$$L_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-\delta}}$$

- Визуально очень отличаются:

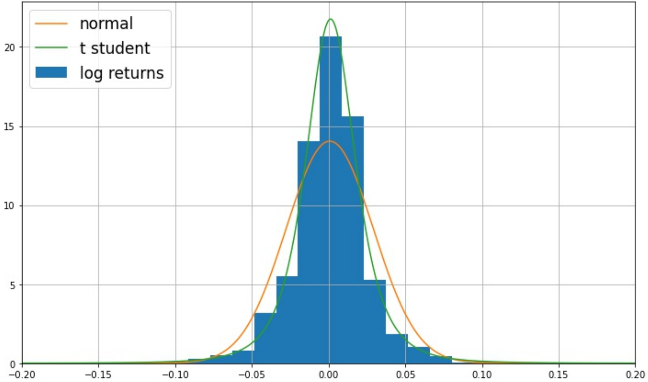


Исторические доходности

- Исторические доходности имеют толстые хвосты
- Коэффициент эксцесса(kurtosis):

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}\left(L_t - \mathbb{E}L_t\right)^4}{\sigma^4} - 3$$

- Для нормального $\kappa = 0$, для историчесских данных $\hat{\kappa} \approx 23$.

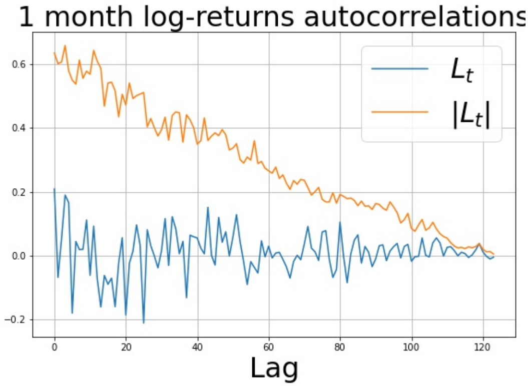


- Для геометрического броуновского движения:

$$L_t \perp L_{t+s},\ \forall s \geq \Delta t$$

- Для рыночных данных:

$$\mathrm{cov}(L_t, L_{t+s}) \approx 0,\ \mathrm{cov}(|L_t|, |L_{t+s}|) \neq 0$$



Другие стилизованные факты

- Корреляция между волатильностью и ценой
- Кластеризация волатильности
- Прыжки в доходностях

Вменяемая волатильность

- Формула Блэка-Шоулза:

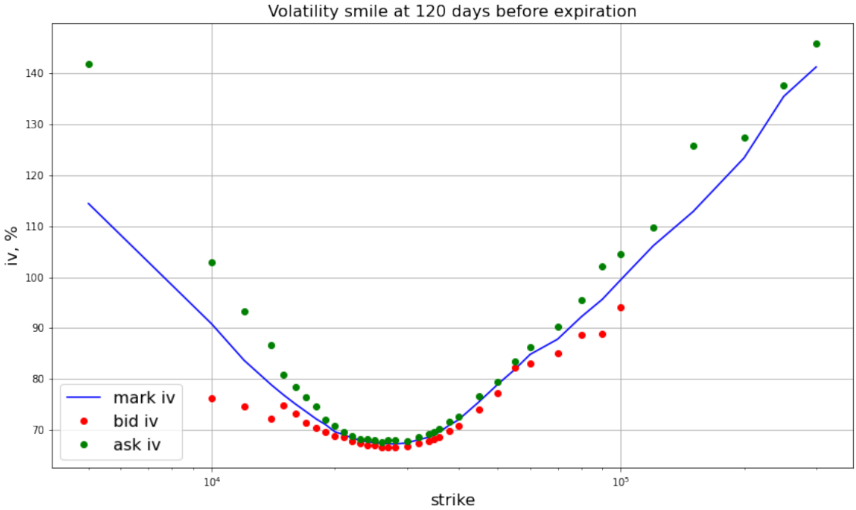
$$V_{BS}(S, T, K, r, \sigma) = S\Phi(d_1) - e^{-rT} K\Phi(d_2)$$

- Знаем рыночные цены V_{market}, можем решить уравнение относительно $\sigma_{implied}$:

$$V_{BS}(S, T, K, r, \sigma_{implied}) = V_{market}$$

- В модели Блэка-Шоулза $\sigma_{implied} = \sigma$ – постоянная. На практике $\sigma_{implied} = \sigma_{implied}(T, K)$.

Вменяемая волатильность



Вменяемая волатильность

- Как считать $\sigma_{implied}$? Метод Ньютона:

$$0 = f(\sigma^*) \approx f(\sigma) + (\sigma^* - \sigma) f'(\sigma)$$

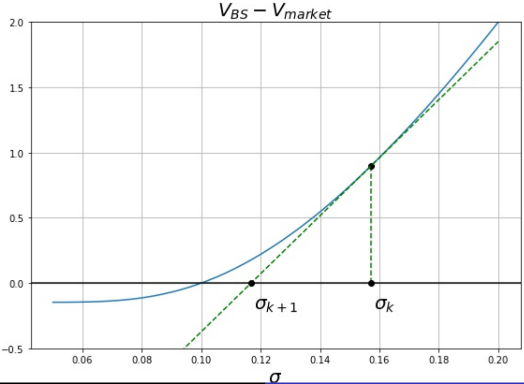
$$\sigma^* = \sigma - \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}$$

Вменяемая волатильность

- Как считать $\sigma_{implied}$? Метод Ньютона:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{f(\sigma_k)}{f'(\sigma_k)}$$

- Здесь $f(\sigma) = V_{BS}(\sigma) - V_{market}$, $f'(\sigma) = \dfrac{\partial V_{BS}(\sigma)}{\partial \sigma}$



Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$ – функция локальной волатильности.

Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$ – функция локальной волатильности.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma(t)$ – GBM, модель Блэка-Шоулза.

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$ – функция локальной волатильности.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma(t)$ – GBM, модель Блэка-Шоулза.
- Пример: $\sigma(t, S_t) = \dfrac{\beta}{S_t} \rightarrow$

$$dS_t = S_t rdt + \sigma dW_t$$

$$S_t = se^{rt} + \beta \int_0^t e^{r(t-u)} dW_u \sim N(se^{\mu t}, \ldots)$$

Уравнение Фоккера-Планка

Пусть $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \Sigma(t, X_t)dW_t$

Теорема

Пусть $h(t,x) = \mathbb{E}\left[h(T, X_T) | X_t = x\right]$. Тогда:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x} + 0.5\Sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t,x) = 0$$

Уравнение Фоккера-Планка

Пусть $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \Sigma(t, X_t)dW_t$

Теорема

Пусть $h(t,x) = \mathbb{E}\left[h(T, X_T) | X_t = x\right]$. Тогда:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x} + 0.5\Sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \stackrel{def}{=} \frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t,x) = 0$$

Теорема

Пусть $p(t,x)$ – плотность процесса X_t. Тогда она удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)p(t,x)\right] + 0.5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Sigma^2(t,x)p(t,x)\right] \stackrel{def}{=} A^*[p](t,x)$$

Уравнение Фоккера-Планка

- Пусть $h(t, X)$ – бесконечно гладкая финитная функция:

$$0 = h(T, X_T) = h(0, X_0) + \int_0^T dh(t, X_t) = [\text{Формула Ито}]$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t, X_t)\right) dt + \int_0^T \frac{\partial h}{\partial X_t} \Sigma(t, X_t) dW_t$$

где $A[h](t, x) = \mu(t, x)\dfrac{\partial h}{\partial x} + 0.5\Sigma^2(t, x)\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$

Уравнение Фоккера-Планка

- Пусть $h(t, X)$ – бесконечно гладкая финитная функция:

$$0 = h(T, X_T) = h(0, X_0) + \int_0^T dh(t, X_t) = [\text{Формула Ито}]$$
$$= \int_0^T \left(\frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t, X_t) \right) dt + \int_0^T \frac{\partial h}{\partial X_t} \Sigma(t, X_t) dW_t$$

где $A[h](t, x) = \mu(t, x) \frac{\partial h}{\partial x} + 0.5 \Sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$

- Берём слева и справа мат. ожидание:

$$\mathbb{E} \int_0^T dt \left(\frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t, X_t) \right) dt = \int_0^T dt \mathbb{E} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t, X_t) \right) dt =$$
$$= \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} dx p(t, x) \left(\frac{\partial h}{\partial t} + A[h](t, x) \right) = 0$$

- Берём интеграл по частям:

$$\int_0^T p(t,x)\frac{\partial h}{\partial t}dt = p(t,x)h(t,x)|_0^T - \int_0^T h(t,x)\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

Уравнение Фоккера-Планка

- Берём интеграл по частям:

$$\int_0^T p(t,x)\frac{\partial h}{\partial t}dt = p(t,x)h(t,x)|_0^T - \int_0^T h(t,x)\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x}dx = -\int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)p(t,x)\right]dx$$

Уравнение Фоккера-Планка

- Берём интеграл по частям:

$$\int_0^T p(t,x)\frac{\partial h}{\partial t}dt = p(t,x)h(t,x)|_0^T - \int_0^T h(t,x)\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x}dx = -\int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)p(t,x)\right]dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\Sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Sigma^2(t,x)p(t,x)\right]dx$$

Уравнение Фоккера-Планка

- Берём интеграл по частям:

$$\int_0^T p(t,x)\frac{\partial h}{\partial t}dt = p(t,x)h(t,x)|_0^T - \int_0^T h(t,x)\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x}dx = -\int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)p(t,x)\right]dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\Sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Sigma^2(t,x)p(t,x)\right]dx$$

Итого:

$$0 = \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} dx h(t,x)\left(-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*[p](t,x)\right)$$

Уравнение Фоккера-Планка

- Берём интеграл по частям:

$$\int_0^T p(t,x)\frac{\partial h}{\partial t}dt = p(t,x)h(t,x)|_0^T - \int_0^T h(t,x)\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x}dx = -\int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)p(t,x)\right]dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\Sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} h(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Sigma^2(t,x)p(t,x)\right]dx$$

Итого:

$$0 = \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} dx h(t,x)\left(-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*[p](t,x)\right)$$

- В силу произвольности функции $h(t,x)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A^*[p](t,x) \overset{def}{=} -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)p(t,x)\right] + 0.5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Sigma^2(t,x)p(t,x)\right]$$

Формула Дюпира

Формула Дюпира

Пусть $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$. Тогда цены опционов $C(T, K) = e^{-rT}\mathbb{E}(S_T - K)^+$ удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial C}{\partial T} + rK\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(T, K)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

И обратно, если мы в качестве локальной волатильности выберем функцию:

$$\sigma^2_{loc}(t, S) = 2\frac{C_T + rKC_K}{K^2 C_{KK}}|_{T=t, K=S}$$

то попадём в поверхность цен опционов $C(T, K)$.

Формула Дюпира

Док-во для случая $r = 0$.

- Пусть $p(t, x)$ – плотность процесса S_t.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_K^{\infty} (x - K) \frac{\partial p(T, x)}{\partial T} dx = [\text{Фоккер-Планк}]$$

$$= \int_K^{\infty} (x - K) A^*[p](T, x) dx = \int_K^{\infty} (x - K) 0.5 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[x^2 \sigma^2 p \right] dx$$

Формула Дюпира

Док-во для случая $r = 0$.

- Пусть $p(t,x)$ – плотность процесса S_t.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_K^\infty (x-K)\frac{\partial p(T,x)}{\partial T}dx = [\text{Фоккер-Планк}]$$

$$= \int_K^\infty (x-K)A^*[p](T,x)dx = \int_K^\infty (x-K)0.5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\sigma^2 p\right]dx$$

- Берём интеграл по частям:

$$\int_K^\infty (x-K)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\sigma^2 p\right]dx = -\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\sigma^2 p\right]dx = \sigma^2 K^2 p$$

Формула Дюпира

Док-во для случая $r = 0$.

- Пусть $p(t, x)$ – плотность процесса S_t.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_K^\infty (x-K)\frac{\partial p(T,x)}{\partial T} dx = [\text{Фоккер-Планк}]$$

$$= \int_K^\infty (x-K) A^*[p](T,x) dx = \int_K^\infty (x-K) 0.5 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\sigma^2 p\right] dx$$

- Берём интеграл по частям:

$$\int_K^\infty (x-K)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\sigma^2 p\right] dx = -\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\sigma^2 p\right] dx = \sigma^2 K^2 p$$

- Из домашки $\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2} = p(T, K)$

Формула Дюпира

Док-во для случая $r = 0$.

- Пусть $p(t, x)$ – плотность процесса S_t.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_K^\infty (x - K)\frac{\partial p(T, x)}{\partial T} dx = [\text{Фоккер-Планк}]$$

$$= \int_K^\infty (x - K)A^*[p](T, x)dx = \int_K^\infty (x - K)0.5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\sigma^2 p\right] dx$$

- Берём интеграл по частям:

$$\int_K^\infty (x - K)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\sigma^2 p\right] dx = -\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\sigma^2 p\right] dx = \sigma^2 K^2 p$$

- Из домашки $\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2} = p(T, K)$
- Итого:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(T, K)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$