Здесь и далее будем считать, что $\xi \sim Be(p)$ если

$$\xi = \begin{cases} +1, \text{с вер. } p \\ -1, \text{с вер. } 1-p \end{cases}$$

Задача 1. Пусть ξ, η – i.i.d. Найти $\mathbb{E}[\xi|\xi+\eta]$.

Задача 2. (Условное мат. ожидание). Пусть $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$ – двумерный гауссовский вектор. Найти $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$. Убедиться, что

- $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|Y\right]\right] = \mathbb{E}X$
- Если $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, то $\mathbb{E}\left[X|Y\right] = \mathbb{E}X$.

Задача 3. Пусть $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d., $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$ – случайное блуждание. Убедитесь, что процесс $M_t = X_t^2 - t$ мартингал.

Задача 4. Пусть $\xi_t \sim Be(p)$ – i.i.d., $p \neq 1/2$, $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$ – несимметричное случайное блуждание.

- При каком α процесс $Y_t = X_t - \alpha t$ является мартингалом?
- При каком β процесс $Y_t = \beta^{X_t}$ является мартингалом?

Задача 5. (Задача о разорении) Пусть X_t – симметричное случайное блуждание, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация, порождённая X_t. Пусть:

$$\tau = \inf_{t \geq 0} \{X_t = a \wedge X_t = -b\}$$

где $a, b > 0$ – целые числа.

- Убедитесь, что τ – момент остановки
- Найти $\mathbb{P}(X_\tau = a)$
- Найти $\mathbb{E}\tau$

Указание Воспользуйтесь мартингальным свойством $X_t, X_t^2 - t$ и теоремой Дуба.

Задача 6. (Задача о разорении) Пусть $\xi_t \sim Be(p)$ – i.i.d., $p \neq 1/2$, $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$ – несимметричное случайное блуждание.Пусть:

$$\tau = \inf_{t \geq 0} \{X_t = a \wedge X_t = -b\}$$

где $a, b > 0$ – целые числа.

- Найти $\mathbb{P}(X_\tau = a)$

- Найти $\mathbb{E}\tau$

Указание. Используйте результаты из задачи 3, или выпишите линейное рекуретное соотношение на $\mathbb{P}(X_\tau = a)$, используя формулу полной вероятности.

Задача 7. Пусть ξ_t – квадратично-интегрируемый мартингал, докажите, что:

$$\mathrm{cov}(\xi_p - \xi_q, \xi_t - \xi_s) = 0$$

при $s \leq t \leq q \leq p$

Задача 8. Пусть W_t – броуновское движение относительно непрерывной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, т.е.:

- $W_0 = 0$
- Траектории W_t непрерывны почти наверное
- $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ и $W_t - W_s \perp \mathcal{F}_s$

Докажите, что:

- W_t – мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
- $W_t^2 - t$ – мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
- Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. При каких α процесс $Y_t = e^{\alpha t + \lambda W_t}$ является мартингалом?

Задача 9. Пусть

- $\Omega = \mathbb{R}, = \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{P}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2} dx$
- $f(x) = e^{-0.5a^2 + a\cdot x}$
- $d\mathbb{Q}(x) = f(x) d\mathbb{P}(x)$

Показать, что $\mathbb{Q}$ – вероятностная мера. Найти $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi$ и распределение ξ относительно меры $\mathbb{Q}$.

Задача 10. Покажите, что в дискретном времени в определении момента остановки достаточно потребовать $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t$.