
Задача 1. Докажите, что у броуновского движения почти наверное бесконечная полная вариация.

Доказательство

- От противного. Пусть первая вариация равна $V < \infty$.
- Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ – произвольное разбиение с диаметром δ :

$$\delta = \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$$

- Вычислим сумму из определения квадратичной вариации:

$$\sum_{k=0}^{n-1} [B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]^2 \leq \max_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \leq \max_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \cdot V$$

- В силу непрерывности $\max_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$
- Отсюда квадратичная вариация стремится к нулю, противоречие. □