Здесь и далее будем считать, что $\xi \sim Be(p)$ если

$$\xi = \begin{cases} +1, \text{с вер. } p \\ -1, \text{с вер. } 1-p \end{cases}$$

Задача 1. Пусть $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d., $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$ – случайное блуждание. Убедитесь, что процесс $M_t = X_t^2 - t$ мартингал.

Задача 2. Пусть $\xi_t \sim Be(p)$ – i.i.d., $p \neq 1/2$, $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$ – несимметричное случайное блуждание.

- При каком α процесс $Y_t = X_t - \alpha t$ является мартингалом?
- При каком β процесс $Y_t = \beta^{X_t}$ является мартингалом?

Задача 3. (Задача о разорении) Пусть X_t – симметричное случайное блуждание, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая X_t. Пусть:

$$\tau = \inf_{t \geq 0} \{X_t = a \vee X_t = -b\}$$

где $a, b > 0$ – целые числа. Т.е. τ – первый момент времени, когда процесс X_t принимает значение a или $-b$.

- Убедитесь, что τ – момент остановки
- Найти $\mathbb{P}(X_\tau = a)$
- Найти $\mathbb{E}\tau$

Задача 4. (Задача о разорении) Пусть $\xi_t \sim Be(p)$ – i.i.d., $p \neq 1/2$, $X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$ – несимметричное случайное блуждание.Пусть:

$$\tau = \inf_{t \geq 0} \{X_t = a \vee X_t = -b\}$$

где $a, b > 0$ – целые числа.

- Найти $\mathbb{P}(X_\tau = a)$
- Найти $\mathbb{E}\tau$

Задача 5. Пусть X_t – квадратично-интегрируемый мартингал, докажите, что:

$$\text{cov}(X_p - X_q, X_t - X_s) = 0$$

при $s \leq t \leq q \leq p$