

Задача 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение. Показать, что для любой эквивалентной меры $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ выполнено:

$$[W]_t = t$$

\mathbb{Q} -почти наверное.

Задача 2. Найти стоимость дериватива $\Phi(S_T) = S_T \mathbb{I}(S_T \geq K)$ с помощью замены меры при $N_t = S_t$.

Задача 3. Рассмотрим рынок с тремя активами:

$$\begin{aligned} dB_t &= 0 \\ dS_t^1 &= S_t^1 \sigma_1 dW_t^1 \\ dS_t^2 &= S_t^2 \sigma_2 dW_t^2 \end{aligned}$$

где W_t^1, W_t^2 – два броуновских движения с корреляцией ρ . Найти стоимость обменного опциона с пэйоффом:

$$\Phi(S_T^1, S_T^2) = (S_T^1 - S_T^2)^+$$

Задача 4. Реплицировать с помощью ванильных опционов пэйофф:

$$\Phi(S_T) = g(S_T)$$

где $g(x)$ – гладкая финитная функция. Найти стоимость дериватива с таким пэйоффом.

Задача 5 (Variance swap). Пусть $dX_t = X_t \sigma_t dB_t$ – процесс Ито, σ_t – согласованный процесс.

Покажите, что:

$$\int_0^T \sigma_t^2 dt = -2 \ln \frac{X_T}{X_0} + \int_0^T \frac{2}{X_t} dX_t$$