Лекция 2. Случайные процессы в непрерывном времени

September 27, 2025

Рекап прошлой лекции

- УМО относительно σ-алгебры и с.в.: определение, основные свойства
- Случайный процесс – совокупность с.в., проиндексированных временем
- Фильтрация – последовательность вложенных σ-алгебр, формализуют поток информации, доступный к моменту t
- Мартингал – $\mathbb{E}\left[X_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = X_t$. "Непредсказуемый" процесс. Случайное блуждание как пример мартингала.
- Дискретный стохастический интеграл – PnL торговой стратегии.
- Теорема Дуба об остановке: $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$

Случайные процессы

Пусть $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Случайный процесс – набор случайных величин $\xi_t, t \in [0, T]$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

Конечномерные распределения

Всевозможные совместные распределения с.в. $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$ называются конечномерными распределениями процесса ξ_t:

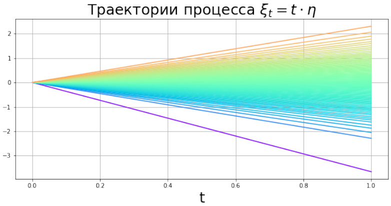
$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \dots, \xi_{t_n} \leq x_n)$$

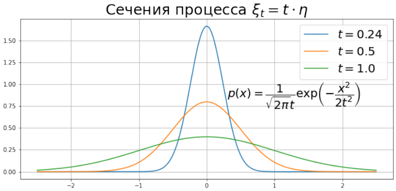
- Случайный процесс – функция двух переменных $\xi_t = \xi(t, \omega)$, измеримая по второму аргументу $\forall t$.
- Отображение $t : \xi_t(\omega)$ при фиксированном ω – траектория(реализация) процесса.

Примеры случайных процессов

Пусть $\mathcal{T} = [0, 1]$, $\eta \sim N(0, 1)$. Положим $\xi_t = t \cdot \eta$. Свойства:

- $\mathbb{E}\xi_t = 0$
- $\mathrm{Var}\xi_t = t^2$
- $cov(\xi_t, \xi_s) = ts$



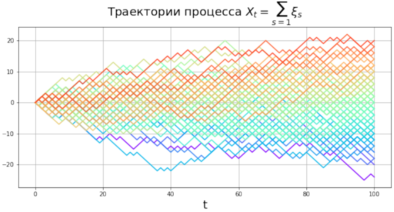


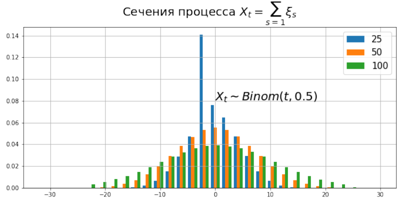
Пусть $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $\xi_t \sim Be(1/2)$ – i.i.d.

$$X_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$$

Свойства:

- $\mathbb{E}X_t = 0, \ \mathrm{Var}X_t = t$
- $\mathbb{E}\left[X_t | X_{t-1}\right] = X_{t-1}$
- $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \min(t, s)$
- Приращения $X_t - X_s \sim Binom^*(t - s, 0.5)$, независимы.



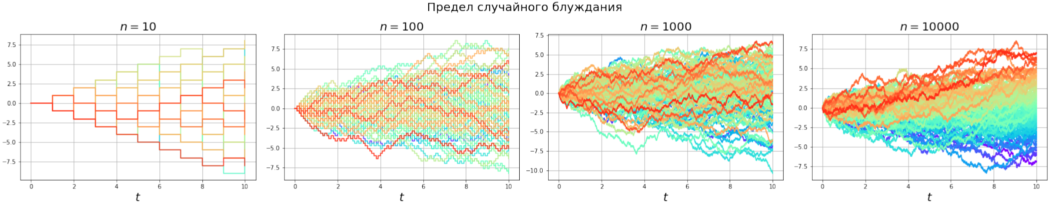


Предел случайного блуждания

Пусть X_k – случайное блуждание. Введём процесс с непрерывным временем:

$$B_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{\lfloor n \cdot t \rfloor}$$

- $\mathbb{E} B_n(t) = 0, \ \mathrm{Var} B_n(t) = \dfrac{\lfloor n \cdot t \rfloor}{n} \approx t$
- $B_n(t) - B_n(s) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} Binom^*(\lfloor n \cdot t \rfloor - \lfloor n \cdot s \rfloor, 0.5) \to N(0, t - s)$ при $n \to \infty$.



Броуновское движение

Определение

Случайный процесс B_t называется броуновским движением (винеровским процессом), если:

- $B_0 = 0$
- $\forall s < t: \ B_t - B_s \sim N(0, t - s)$
- $\forall s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ приращения $B_{t_2} - B_{s_2}, B_{t_1} - B_{s_1}$ – независимы
- Траектории B_t почти наверное непрерывны по t

Марковский процесс

Определение

Процесс X_t называется **марковским**, если он удовлетворяет марковскому свойству:

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s)$$

где $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – естественная фильтрация.

Эквивалентное определение: $\forall f$ – ограниченная измеримая функция, выполнено:

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t) | X_s\right] (= g_f(X_s))$$

Будущее, при условии настоящего, не зависит от прошлого.

Гауссовский процесс

Определение

Процесс X_t называется **гауссовским**, если $\forall t_1 < \ldots < t_n$ случайный вектор $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ имеет многомерное нормальное распределение. Распределение гауссовского процесса однозначно задаётся функцией мат. ожидания и ковариацией:

$$m(t) = \mathbb{E}X_t$$

$$c(t, s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$$

При этом $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \sim N(\mu, \Sigma)$, где $\mu_i = m(t_i), \Sigma_{i,j} = c(t_i, t_j)$.

Непрерывность и дифференцируемость в с.к.

Определение

Процесс X_t называется непрерывным в среднеквадратичном, если:

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}(X_{t+\delta} - X_t)^2 = 0$$

Определение

Процесс X_t называется дифференцируемым в среднеквадратичном, если $\exists$ процесс $(Y_t)_{t\geq 0}$:

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}\left(\frac{X_{t+\delta} - X_t}{\delta} - Y_t\right)^2 = 0$$

Вариация функции/процесса

Определение

Полная вариацией функции/процесса X_t называется величина:

$$V_t(X) = \sup_P \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|$$

где sup берётся по всем разбиением P отрезка $[0, t]$.

Для дифференцируемых функций $V_t(X) = \int_0^t |X_t'| dt$.

Вариация функции/процесса

Определение

Полная вариацией функции/процесса X_t называется величина:

$$V_t(X) = \sup_P \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|$$

где sup берётся по всем разбиением P отрезка $[0, t]$.

Определение

Квадратичной вариацией процесса X_t называется процесс:

$$[X]_t = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

где предел берётся по всем разбиениям интервала $[0, t]$ с диаметром δ,

Свойства броуновского движения

- $B_t \sim N(0, t)$
- Броуновское движение непрерывно в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \to +0} \mathbb{E} \left(B_{t+\delta} - B_t\right)^2 = 0$$

- Процесс НЕ дифференцируем в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \to +0} \mathbb{E} \left(\frac{B_{t+\delta} - B_t}{\delta}\right)^2 = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} = \infty$$

- Конечная квадратичная вариация:

$$[B]_T = \int_0^T (dB_t)^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{t_k})^2 = T$$

- Бесконечная полная вариация: $V_t(B) = \infty$.
- $B_t, B_t^2 - t$ – мартингалы
- Самоподобие: $\forall \alpha > 0$ процесс $C_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_{\alpha t}$ тоже БД.

Квадратичная вариация броуновского движения

- Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ – произвольное разбиение с диаметром δ:

$$\delta = \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$$

- Пусть $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2$. Тогда:

$$\mathbb{E}S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(t_{k+1} - t_k) = T$$

$$\mathrm{Var} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1} - t_k)^2 \leq 2T\delta$$

- По неравенству Чебышева $S_n \to T$ при $\delta \to 0$.
- $[B]_t = \lim_{\delta \to 0} S_n = T$.

Интеграл Ито для простых процессов

Пусть B_t – броуновское движение, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ – естественная фильтрация.

Определение

Процесс $g(t)$ называется простым, если $\exists$ числа $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ такие, что $g(t) = g(t_k)$ на $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Интеграл Ито для простого процесса

Пусть $g(t)$ – простой процесс, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$. Будем называть интегралом Ито случайную величину:

$$\int_0^T g(t) dB_t = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k) \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \right]$$

Интеграл Ито для простых процессов: свойства

Пусть $Z_t = \int_0^t g(s)dB_s$. Тогда:

- $Z_t \in \mathcal{F}_t$
- $\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = Z_s$
- $\mathbb{E}Z_t = 0$
- $\mathrm{Var} Z_t = \mathbb{E}\left[\int_0^t g^2(t)dt\right]$ – изометрия Ито.

Изометрия Ито

$$Z_t = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\Delta B_{t_k}$$

$$\mathrm{Var} Z_t = \mathbb{E} Z_t^2$$

$$\mathbb{E} Z_t^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)^2 \left(\Delta B_{t_k}\right)^2 + 2\sum_{i<j} g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j}\right) =$$

$$= A_1 + A_2$$

Изометрия Ито: продолжение

$$A_1 = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k)\left(\Delta B_{t_k}\right)^2 = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_k}}\left[g^2(t_k)\left(\Delta B_{t_k}\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k)\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_k}}\left(\Delta B_{t_k}\right)^2 = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} g^2(t_k)\Delta t = \mathbb{E}\int_0^T g^2(t)dt$$

$$A_2 = 2\mathbb{E}\sum_{i<j} g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j} = 2\mathbb{E}\sum_{i<j} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_j}}\left[g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j}\right] =$$

$$= 2\mathbb{E}\sum_{i<j} g(t_i)g(t_j)\Delta B_{t_i}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_j}}\left[\Delta B_{t_j}\right] = 0$$

Итого:

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^T g(t)dB_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T g^2(t)dt\right]$$

Интеграл Ито для произвольного процесса

- Пусть $g(t)$ – согласованный процесс, $\mathbb{E}g^2(t) < \infty$
- Пусть $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность простых процессов таких, что

$$\int_0^t \mathbb{E}[g_n(s) - g(s)]^2 ds \to 0, n \to \infty$$

- Для каждого n определим $Z_n = \int_0^t g_n(s)dB_s$
- Можно показать, что $\exists Z$ такой, что $Z_n \to Z$ в с.к..
- Определим интеграл как:

$$\int_0^t g(s)dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} g_n(t_k)\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]$$

Пример

Задача

Вычислить

$$\int_0^t 2B_s dB_s = \dots$$

Пример

Задача

Вычислить
$$\int_0^t 2B_s dB_s = \dots$$

Детерминированный случай:
$$\int_0^t 2f(s)df(s) = \int_0^t df^2 = f^2(t)$$

Пример

Задача

Вычислить

$$\int_0^t 2B_s dB_s = \dots$$

Детерминированный случай:

$$\int_0^t 2f(s)df(s) = \int_0^t df^2 = f^2(t)$$

Стохастический случай:

$$\Delta\left(B_{t_k}^2\right) = B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2 = \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\left(B_{t_{k+1}} + B_{t_k}\right)$$
$$= \Delta B_{t_k}\left(2B_{t_k} + \Delta B_{t_k}\right) = 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} + [\Delta B_{t_k}]^2$$

Пример

Задача

Вычислить

$$\int_0^t 2B_s dB_s = \dots$$

Детерминированный случай:

$$\int_0^t 2f(s)df(s) = \int_0^t df^2 = f^2(t)$$

Стохастический случай:

$$\Delta\left(B_{t_k}^2\right) = B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2 = \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\left(B_{t_{k+1}} + B_{t_k}\right)$$
$$= \Delta B_{t_k}\left(2B_{t_k} + \Delta B_{t_k}\right) = 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} + [\Delta B_{t_k}]^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\left(B_{t_k}^2\right) - [\Delta B_{t_k}]^2 = B_t^2 - \sum_{k=0}^{n-1} [\Delta B_{t_k}]^2 \to B_t^2 - t$$

Свойства

- Линейность:

$$\int_0^T [\alpha g(t) + \beta h(t)]\, dB_t = \alpha \int_0^T g(t) dB_t + \beta \int_0^T h(t) dB_t$$

- Линейность по пределу интегрирования:

$$\int_0^T g(t) dB_t = \int_0^s g(t) dB_t + \int_s^T g(t) dB_t,\ 0 < s < T$$

- Изометрия Ито:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T g(t) dB_t\right] = 0,\ \mathrm{Var}\left[\int_0^T g(t) dB_t\right] = \int_0^T g^2(t) dt$$

- Таблица умножения стох. дифференциалов:

$$(dB_t)^2 = dt,\ dB_t dt = 0,\ dB_t dB_s = 0,\ t \neq s$$

Процесс Ито

Определение

Пусть μ_t, σ_t – согласованные с $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ процессы, $X_0 \in \mathcal{F}_0$. Будем называть процессом Ито процесс вида:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

В дифференциальной форме это можно записать как:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Процесс Ито

Определение

Пусть μ_t, σ_t – согласованные с $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ процессы, $X_0 \in \mathcal{F}_0$. Будем называть процессом Ито процесс вида:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

В дифференциальной форме это можно записать как:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Интеграл Ито по процессу Ито

Пусть X_t – процесс Ито, g_t – согласованный процесс. Определим:

$$\int_0^T g_t dX_t = \int_0^T \mu_t g_t dt + \int_0^T \sigma_t g_t dB_t$$

Формула Ито для броуновского движения

Теорема

Пусть B_t – броуновское движение, $f(t, x)$ – гладкая функция. Тогда:

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) + f_s(s, B_s)\right] ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$$

Формула Ито для броуновского движения

Теорема

Пусть B_t – броуновское движение, $f(t, x)$ – гладкая функция. Тогда:

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) + f_s(s, B_s)\right] ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$$

Неформально интегральную запись можно понимать как:

$$df(t, B_t) = \left[\frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) + f_t(t, B_t)\right] dt + f_x(t, B_t) dB_t$$

Формула Ито для броуновского движения

Неформально интегральную запись можно понимать как:

$$df(t, B_t) = \left[\frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) + f_t(t, B_t)\right] dt + f_x(t, B_t) dB_t$$

Доказательство (Для случая $f = f(x)$) Разложим функцию $f(B_t)$ в ряд Тейлора до второго порядка малости:

$$f(B_t + dB_t) - f(B_t) = f_x(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(B_t) dB_t^2 + \ldots =$$

$$= f_x(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(B_t) dt + o(dt)$$

□

Пример

- $f(x) = x^2$. $Y_t = f(B_t)$

$$dY_t = 2B_t dB_t + dt$$

$$Y_t = t + 2\int_0^t B_s dB_s$$

- $f(x) = e^x$, $Y_t = f(B_t)$

$$dY_t = \frac{1}{2} Y_t dt + Y_t dB_t$$

- При каком α процесс $e^{\alpha t + \sigma B_t}$ является мартингалом?

Формула Ито

Формула Ито позволяет разложить процесс $Y_t = f(t, B_t)$ на "предсказуемую" и мартингальную часть:

$$f(t, B_t) = A_t + M_t$$

где

- $A_t = f(0,0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) + f_s(s, B_s)\right] ds$ – процесс ограниченной вариации.
- $M_t = \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$ – мартингал.

Формула Ито для процесса Ито

Теорема

Пусть X_t – процесс Ито:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

$f(t, x)$ – гладкая функция. Тогда $Y_t = f(t, X_t)$ процесс Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t,$$

где

$$\mu_t^Y = f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2$$
$$\sigma_t^Y = f_x(t, X_t)\sigma_t$$

Доказательство Аналогично предыдущему случаю □

Интегральная запись:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

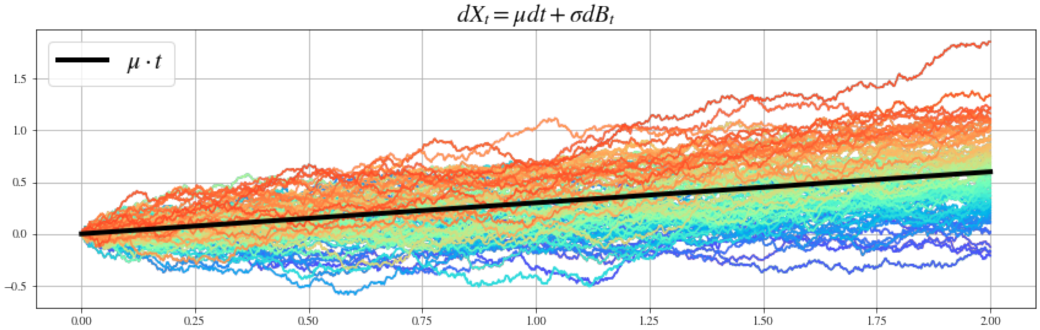
Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Пример. Броуновское движение со сносом

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$



Пример. Геометрическое броуновское движение

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим детерменированное уравнение:

$$dX_t = X_t \mu dt \to X_t = e^{\mu t}$$

Замена переменных:

$$X_t = e^{Y_t} \longrightarrow Y_t = \log X_t$$

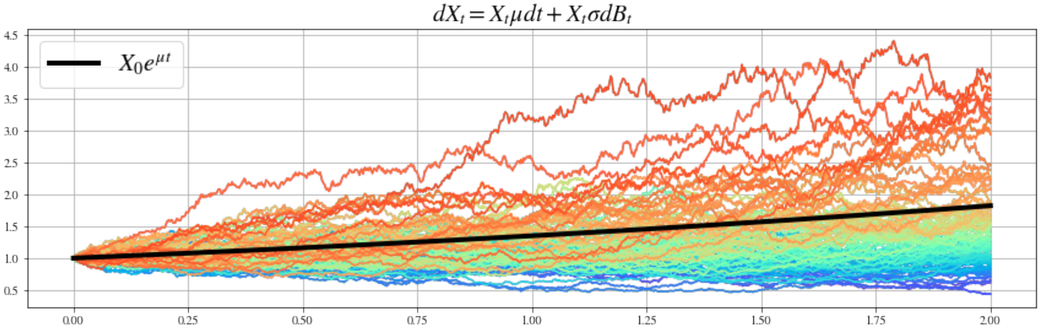
$$dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{(dX_t)^2}{X_t^2} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right]$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

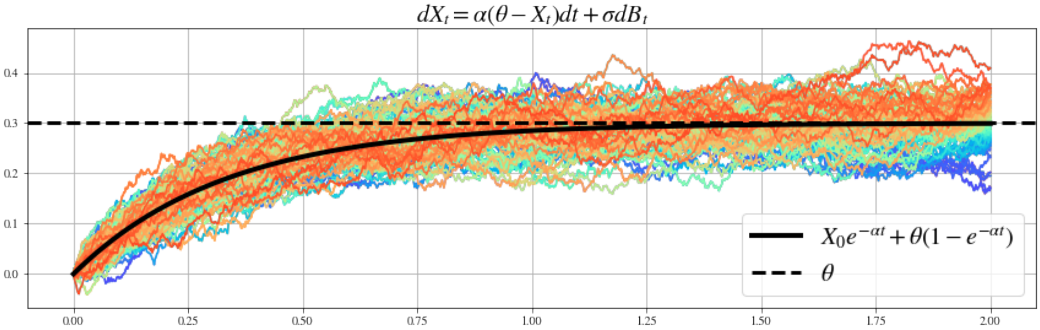
$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right]$$

$$\mathbb{E}X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\mathbb{E}\exp\left[\sigma B_t\right] = X_0 e^{\mu t}$$



Пример. Процесс Орнштейна-Уленбека

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$



Пример. Броуновский мост

Определение

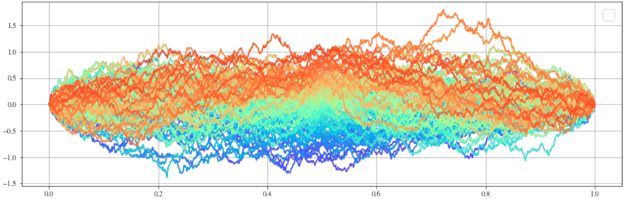
Броуновский мост это гауссовский процесс X_t, $t \in [0,1]$:

- $\mathbb{E}X_t = 0$
- $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1-t),\ s \le t$

Если B_t – БД, то $X_t = B_t - t \cdot B_1$ – броуновский мост.

Броуновский мост как процесс Ито

$$dX_t = a(t)X_t dt + \sigma dB_t$$



Теорема существования

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Теорема

Пусть

- $|\mu(t,x) - \mu(t,y)| \leq K|x-y|$
- $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$
- $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,y)| \leq K(1+|x|)$

Тогда $\exists!$ решение СДУ $(X_t)_{t\geq 0}$, причем:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ адаптированный к $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ процесс,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ имеет непрерывные траектории,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ – марковский процесс

Формула Феймана-Каца: мотивировка

- Процесс цены X_t:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

- Случайная выплата, зависящая от цены X_T: $Y_T = \Phi(X_T)$.
- Ожидание выплаты в момент t:

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

- В силу марковости:

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|X_t\right] = f(t, X_t)$$

для некоторой функции $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Постановка задачи

Найти функцию $f(t, x)$ такую, что:

$$f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$$

Формула Феймана-Каца

- Предположим, что $f(t,x)$ гладкая, тогда по формуле Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t,$$

где

$$\mu_t^Y = f_t(t,X_t) + f_x(t,X_t)\mu(t,X_t) + 0.5\cdot f_{xx}(t,X_t)\sigma^2(t,X_t)$$
$$\sigma_t^Y = f_x(t,X_t)\sigma^2(t,X_t)$$

- Y_t – мартингал Леви, поэтому $\mu_t^Y = 0$, откуда:

$$f_t(t,x) + f_x(t,x)\mu(t,x) + 0.5\cdot f_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x) = 0$$
$$f(T,x) = \Phi(x)$$

Формула Феймана-Каца

Пусть X_t удовлетворяет СДУ $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$.

Теорема

- Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет УРЧП:

$$f_t(t,x) + f_x(t,x)\mu(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x) = 0$$
$$f(T,x) = \Phi(x)$$

  Тогда:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = f(t, X_t)$$

- Пусть $f(t,x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$. Тогда $f(t,x)$ удовлетворяет уравнению:

$$f_t(t,x) + f_x(t,x)\mu(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x) = 0$$
$$f(T,x) = \Phi(x)$$

Пример

Решить УРЧП:

$$f_t(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x) = 0$$
$$f(T,x) = x^2$$

Пример

Решить УРЧП:

$$f_t(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x) = 0$$
$$f(T,x) = x^2$$

- $\mu(t,x) = 0,\ \sigma(t,x) = 1 \to X_t = B_t$.
- По формуле Феймана-Каца:

$$f(t,x) = \mathbb{E}[B_T^2 | B_t = x] = \mathbb{E}[(x + (B_T - B_t))^2 | B_t = x] = \mathbb{E}(x+\xi)^2$$

  где $\xi \sim N(0, T-t)$.
- Отсюда:

$$f(t,x) = x^2 + (T-t)$$

Рекап второй лекции

- Броуновское движение как предел случайных блужданий.
- Основные свойства: мартингальность, самоподобие, бесконечная полная вариация, конечная квадратичная вариация.
- Интеграл Ито: непрерывный аналог дискретного стохастического интеграла
- Изометрия Ито. Таблица умножения стохастических дифференциалов.
- Лемма/формула Ито: формула замены переменных в стохастическом интеграле
- Формула Феймана-Каца – связь между УРЧП и СДУ.