Задача 1. Решить СДУ:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$

где $\alpha, \theta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$.
Найти $\mathbb{E}X_t, \mathrm{Var}(X_t)$.

Решение Рассмотрим случай $\sigma = \theta = 0$. Уравнение сводится к:

$$dX_t = -\alpha X_t dt \to X_t = Ce^{-\alpha t}.$$

Будем искать решение общей задачи в виде $X_t = Y_t \cdot e^{-\alpha t}$, где Y_t – процесс Ито. По формуле Ито:

$$dY_t = d(e^{\alpha t}X_t) = e^{\alpha t}dX_t + \alpha e^{\alpha t}X_t dt = e^{\alpha t}\left(\alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t\right) + \alpha e^{\alpha t}X_t dt = e^{\alpha t}\left(\alpha\theta dt + \sigma dB_t\right).$$

Правая часть не зависит от Y_t, поэтому можем проинтегрировать, откуда:

$$Y_t = Y_0 + \theta(e^{\alpha t} - 1) + \sigma\int_0^t e^{\alpha s}dB_s.$$

Делая обратную замену, получим:

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \theta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dB_s.$$

Отсюда:

$$\mathbb{E}X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \theta(1 - e^{-\alpha t}).$$

$$\mathrm{Var}X_t = \sigma^2\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}ds = \sigma^2\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}.$$

Сечения процесса X_t имеют нормальное распределение:

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(X_0 e^{-\alpha t} + \theta(1 - e^{-\alpha t}),\ \sigma^2\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right).$$

При $t \to \infty$ $\mathbb{E}X_t \to \theta, \mathrm{Var}X_t \to \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}$.

Задача 2 (Формула Башелье). Решить УРЧП:

$$\begin{aligned} &f_t + \overline{\mu}f_x + \frac{\overline{\sigma}^2}{2}f_{xx} = 0, 0 \le t < T, x \in \mathbb{R} \\ &f(T, x) = \max(x - K, 0) \end{aligned}$$

где $\overline{\sigma} > 0, \overline{\mu} \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$ – константы.

Решение

Формула Феймана-Каца:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(t,x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow f(t,x) = \mathbb{E}\left[f(t,X_t)|X_t = x\right]$$

где процесс X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$$

Смотрим внимательно на наше УРЧП и на формулу Феймана-Каца и замечаем, что в нашем случае:

$$\mu(t,X_t) = \overline{\mu}, \sigma(t,X_t) = \overline{\sigma}$$

Поэтому в нашей задаче:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\left[\max(X_T - K, 0)|X_t = x\right]$$

где X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \overline{\mu}dt + \overline{\sigma}dB_t$$

Проинтегрируем уравнение от t до T, учитывая условие $X_t = x$:

$$X_T = x + \overline{\mu}(T-t) + \sigma(B_T - B_t)$$

Нетрудно видеть, что $X_T \sim \mathcal{N}\left(x + \overline{\mu}(T-t), \overline{\sigma}^2(T-t)\right)$. Поэтому:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\max(\xi, 0)$$

где $\xi \sim \mathcal{N}\left(x + \overline{\mu}(T-t) - K, \overline{\sigma}^2(T-t)\right)$. Обозначим $\gamma = x + \overline{\mu}(T-t) - K$

$$\xi = \gamma + \sigma\sqrt{T-t}\eta$$

тогда $\eta \sim N(0,1)$

$$f(t,x) = \mathbb{E}\max(\gamma + \sigma\sqrt{T-t}\eta, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\gamma}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty}(\gamma + \sigma\sqrt{T-t}x)e^{-0.5x^2}dx = ...$$