

Лекция 4. Рынок с непрерывным временем

October 9, 2025

- Стохастические дифф. уравнения. Теорема существования, марковость.
- Формула Феймана-Каца.
- Прямое и обратное уравнение Колмогорова.

- Динамика портфелей. Условие самофинансируемости.
- Случайные платёжные обязательства.
- Арбитражность.
- Реплицируемые платёжные обязательства.
- Уравнение Блэка-Шоулза. Мартингальность цены.

Динамика портфелей

- N – число торгуемых активов (акций)
- h_t^i – число i -ых акций на интервале $[t, t + \Delta)$
- $h_t = [h_t^1, \dots, h_t^N]$ – портфель
- S_t^i – цена i -го актива в момент t
- $V_t = \sum_i h_t^i S_t^i = h_t \cdot S_t$ – капитал портфеля h в момент t
- Приращение:

$$\Delta V_t^h = V_{t+\Delta}^h - V_t^h = h_t \cdot \Delta S_t + \Delta h_t \cdot S_t + \Delta h_t \cdot \Delta S_t$$

Уравнение самофинансируемости

Определение

Портфель называется **самофинансируемым**, если покупка новых активов производится только за счёт продажи старых.

Условие самофинансируемости:

$$V_{t+\Delta}^h = h_t \cdot S_{t+\Delta} = h_{t+\Delta} \cdot S_{t+\Delta}$$

$$\Delta V_t^h = h_t \cdot \Delta S_t$$

$$\Delta h_t \cdot S_t + \Delta h_t \cdot \Delta S_t = 0$$

При непрерывной торговле $\Delta \rightarrow 0$ уравнение самофинансируемости записывается как:

$$dV_t^h = h_t \cdot dS_t$$

$$V_t^h = V_0^h + \int_0^t h_u \cdot dS_u$$

Модель Блэка-Шоулза

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t .

Банковский счёт:

$$B_0 = 1$$
$$dB_t = rB_t dt$$

Акция:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$
$$S_t = S_0 e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

Динамика самофинансируемого портфеля $h_t = (x_t, y_t)$

$$dV_t^h = x_t dS_t + y_t dB_t = x_t dS_t + (V_t^h - x_t \cdot S_t) r dt$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t .

Определение

Дериватив – контракт, который платит в момент T случайную сумму денег $X \in \mathcal{F}_T$.

Пример Европейский колл-опцион: $X = (S_T - K)^+$

Определение

Дериватив называется простым, если $X = \Phi(S_T)$. Φ – функция выплаты.

Пример Для европейского колл-опциона $\Phi(x) = (x - K)^+$.

Пример Азиатский опцион $X = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+$ не является простым.

Основная задача – найти *справедливую* стоимость контракта $p(t, X) \in \mathcal{F}_t$ в произвольный момент времени $t < T$.

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \wedge \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \wedge \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Рынок арбитражный, если существует арбитражный портфель.

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \wedge \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Рынок арбитражный, если существует арбитражный портфель.

Пример. Пусть

$$S_t = 1 + W_t^2.$$

Построить арбитражный портфель.

Определение

Дериватив называется реплицируемым, если \exists самофинансируемый портфель $h_t = (x_t, y_t)$ такой, что:

$$V_T^h \stackrel{a.s.}{=} \Phi(S_T)$$

Пример Пусть $\Phi(S_T) = S_T - K$. Реплицирующий портфель:

$$x_t = 1, y_t = -Ke^{-rT}$$

Теорема

Цена реплицируемого дериватива Φ равна стоимости реплицирующего портфеля $h_t = (x_t, y_t)$:

$$p(t, \Phi) = V_t^h = x_t S_t + y_t B_t$$

Пример.

$$p(t, S_T - K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – самофинансируемый портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – самофинансируемый портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Предположим, что цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$ – гладкая функция своих аргументов.
Динамика цены:

$$\begin{aligned} dF(t, S_t) &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS_t^2 = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 0.5 \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t \end{aligned}$$

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – самофинансируемый портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Предположим, что цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$ – гладкая функция своих аргументов.
Динамика цены:

$$\begin{aligned} dF(t, S_t) &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS_t^2 = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 0.5 \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t \end{aligned}$$

Для репликации нужно $dV = dF$. Приравнивая коэф. при dt, dS_t получим:

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\partial F}{\partial S}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + r S_t \frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} &= r F \end{aligned}$$

Теорема

Пусть $\Phi(S_T)$ – простой дериватив, тогда его цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$, где $F(t, S)$ является решением УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T, S) = \Phi(S).$$

Простой дериватив является реплицируемым, веса реплицирующего портфеля задаются формулами:

$$x_t = \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial S},$$
$$B_t y_t = F(t, S_t) - \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial S} S_t.$$

Теорема

Пусть функция $F(t, S)$ удовлетворяет УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T, S) = \Phi(S).$$

Тогда решение может быть выражено через условное мат. ожидание:

$$F(t, S) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-t)} \Phi(S_T) | S_t = S \right]$$

где S_u подчиняется геометрическому броуновскому движению:

$$dS_u = rS_u du + \sigma S_u dW_u, u > t$$
$$S_t = S$$

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняется уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

называется риск-нейтральной \mathbb{Q} .

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$, $\tilde{V}_t = \frac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Доказательство.

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

$$d\tilde{V}_t = x_t d\tilde{S}_t = \sigma x_t \tilde{S}_t dW_t$$

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Теорема

Модель Блэка-Шоулза безарбитражна.

Доказательство. Пусть $(h_t)_{t \geq 0}$ – арбитражный портфель. Пусть $V_0^h = 0, V_T^h \geq 0$. Тогда:

$$0 = V_0^h = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \frac{V_T^h}{B_T} \rightarrow \mathbb{Q}(V_T = 0) = 1$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Цена:

$$p(t, S_T - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Цена:

$$p(t, S_T - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Форвардная цена

Форвардная цена – страйк, при котором цена форвардного контракта равна нулю:

$$p(0, S_T - K) = 0$$

$$F = S_0 e^{rT}; p(t, S_T - F) = S_t - S_0 e^{rt}$$

Пример. Европейский колл-опцион

Определение

Европейский колл-опцион со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Пример. Европейский колл-опцион

Определение

Европейский колл-опцион со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Цена колл-опциона задаётся формулой:

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

где $\tau = T - t$ – время до экспирации.

Пример. Европейский колл-опцион

Доказательство. Введём $\tau = T - t$ – время до экспирации.

$$\begin{aligned} C(t, S_T) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}(S_T - K) \mathbb{I}_{S_T \geq K} = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} [e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}] - Ke^{-r\tau} \mathbb{Q}(S_T \geq K). \end{aligned}$$

1) Вычислим $\mathbb{Q}(S_T \geq K)$:

$$S_T = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma(W_T - W_t)} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau}},$$

где $\xi \sim N(0, 1)$ – стандартная нормальная с.в..

$$\begin{aligned} S_T \geq K &\longleftrightarrow \\ S_t \exp [(r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau}] &\geq K \longleftrightarrow \\ (r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau} &\geq \log(K/S_t) \longleftrightarrow \\ \xi &\geq -\frac{\log(S_t/K) + (r - 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} -d_2. \end{aligned}$$

Итого:

Пример. Европейский колл-опцион

2) Вычислим $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} [e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}]$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} [e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}] = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 \tau + \sigma x \sqrt{\tau} - \frac{x^2}{2} \right] dx.$$

Рассмотрим отдельно выражение под экспонентой и выделим полный квадрат:

$$-\frac{1}{2} (\sigma^2 \tau - 2x\sigma\sqrt{\tau} + x^2) = -\frac{1}{2} (x - \sigma\sqrt{\tau})^2.$$

Сделаем замену переменных в интеграле $y = x - \sigma\sqrt{\tau}$; $d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{\tau}$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t} [e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}] = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-0.5y^2} dy = S_t N(d_1) \quad \square$$

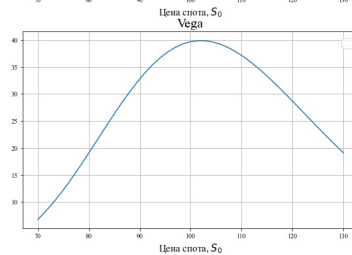
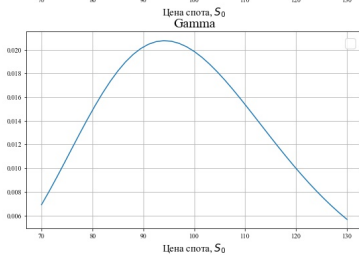
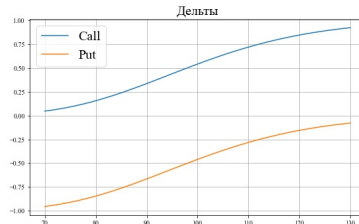
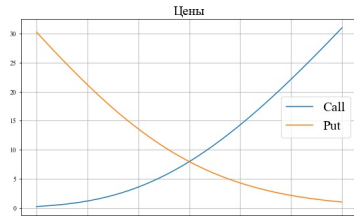
Греками называются частные производные цен опционов:

$$\Delta = \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\nu = \frac{\partial C(t, S)}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{\tau}$$

$$\Theta = \frac{\partial C(t, S)}{\partial t} = rC - rS\Delta - 0.5\sigma^2 S^2 \Gamma$$



- Call-Put parity:

$$\begin{aligned} S_T - K &= (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \rightarrow \\ S_t - e^{-r\tau} K &= C(t, S_t) - P(t, S_t) \end{aligned}$$

- Call-Put parity:

$$\begin{aligned} S_T - K &= (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \rightarrow \\ S_t - e^{-r\tau} K &= C(t, S_t) - P(t, S_t) \end{aligned}$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \rightarrow C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t, S_t; 0) = S_t$$

- Call-Put parity:

$$\begin{aligned} S_T - K &= (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \rightarrow \\ S_t - e^{-r\tau} K &= C(t, S_t) - P(t, S_t) \end{aligned}$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \rightarrow C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t, S_t; 0) = S_t$$

- Выпуклость по страйку:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (S_T - K)^+ = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \delta(S_T - K) = e^{-r\tau} p(K)$$

- Call-Put parity:

$$\begin{aligned} S_T - K &= (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \rightarrow \\ S_t - e^{-r\tau} K &= C(t, S_t) - P(t, S_t) \end{aligned}$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \rightarrow C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t, S_t; 0) = S_t$$

- Выпуклость по страйку:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r\tau} \mathbb{E}^Q \frac{\partial^2}{\partial K^2} (S_T - K)^+ = e^{-r\tau} \mathbb{E}^Q \delta(S_T - K) = e^{-r\tau} p(K)$$

- Границы:

$$C(t, S_t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^Q (S_T - K)^+ \geq e^{-r\tau} (\mathbb{E}^Q S_T - K)^+ = (S_t - e^{-r\tau} K)^+$$