
Задача 1. Пусть

$$\begin{cases} dX_t = X_t(\mu_x dt + \sigma_x dB_t), \\ dY_t = Y_t(\mu_y dt + \sigma_y dZ_t), \end{cases}$$

где $dB_t \cdot dZ_t = \rho dt$ – броуновские движения с корреляций ρ, $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ – константы. Выписать уравнения для процессов $X_t^\alpha, X_t \cdot Y_t, \dfrac{X_t}{Y_t}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Смысл задачи в том, чтобы показать, что GBM замкнуто относительно операций возведения в степень и произведения. Решение СДУ:

$$X_t = X_0 \exp\big((\mu_x - 0.5\sigma_x^2)t + \sigma_x B_t\big)$$
$$Y_t = Y_0 \exp\big((\mu_y - 0.5\sigma_y^2)t + \sigma_y Z_t\big)$$

1. Введём $U_t = X_t^\alpha$

$$U_t = X_t^\alpha = X_0^\alpha \exp\big(\alpha(\mu_x - 0.5\sigma_x^2)t + \alpha\sigma_x B_t\big) = U_0 \exp\big((\mu_u - 0.5\sigma_u^2)t + \sigma_u B_t\big)$$

Сравнивая выражения слева и справа видим, что:

$$U_0 = X_0^\alpha$$
$$\sigma_u = \alpha\sigma_x$$
$$\mu_u - 0.5\sigma_u^2 = \alpha(\mu_x - 0.5\sigma_x^2) \to \mu_u = \alpha\mu_x + 0.5\sigma_x^2\left(\alpha^2 - \alpha\right)$$

В терминах СДУ:

$$dU_t = U_t\left(\mu_u dt + \sigma_u dB_t\right)$$

2.

$$U_t = X_t \cdot Y_t = X_0 Y_0 \exp\left((\mu_x + \mu_y - 0.5\sigma_x^2 - 0.5\sigma_y^2) + \sigma_x B_t + \sigma_y Z_t\right)$$

Подберём σ_u так, чтобы процесс:

$$W_t = \frac{\sigma_x B_t + \sigma_y Z_t}{\sigma_u}$$

был броуновским движением. Для этого достаточно $\mathrm{Var} W_t = t$:

$$\mathrm{Var} W_t = \frac{\sigma_x^2 t + \sigma_y^2 t + 2\rho\sigma_x\sigma_y t}{\sigma_u^2} = t$$

Откуда:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y}$$
$$U_t = U_0 \exp\big((\mu_u - 0.5\sigma_u^2)t + \sigma_u W_t\big)$$

где

$$
\begin{aligned}
U_0 &= X_0 \cdot Y_0 \\
\sigma_u &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y} \\
\sigma_u W_t &= \sigma_x B_t + \sigma_y Z_t \\
\mu_u &= \mu_x + \mu_y + \rho\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}
$$

3. $U_t = X_t Y_t^{-1}$ – аналогично.

Задача 2 (Броуновский мост). Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = a(t)X_t dt + dB_t$$

где $a(t)$ – детерменированная функция, B_t – броуновское движение, $X_0 = 0$. Найдите $a(t)$ такое, что процесс X_t, определённый по формуле выше, является броуновским мостом.

Броуновский мост это гауссовский процесс X_t: $\mathbb{E}X_t = 0$, $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1-t)$, $s \leq t$

Решение. Пусть $\beta_t = \mathbb{E}X_t$, тогда:

$$d\beta_t = a(t)\beta_t dt,$$

и $\beta_0 = 0$, откуда $\beta_t = 0$. Пусть $Y_t = X_t^2$, тогда:

$$dY_t = 2X_t dX_t + (dX_t)^2 = 2a(t)X_t^2 dt + dt + 2X_t dB_t.$$

Пусть $\gamma_t = \mathbb{E}Y_t$, тогда:

$$\frac{d\gamma_t}{dt} = (2a(t)\gamma_t + 1)\,.$$

Отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{2\gamma_t}\left(\frac{d\gamma_t}{dt} - 1\right).$$

Мы хотим, чтобы $\gamma_t = t \cdot (1-t)$. Т.к. $\dfrac{d\gamma_t}{dt} = 1 - 2t$, то

$$a(t) = \frac{-2t}{2t(1-t)} = -\frac{1}{1-t}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1-t)$. Видно, что при $t \to 1$ $a(t) \to -\infty$, т.е. скорость возврата к среднему стремится к бесконечности, что и загоняет X_t в ноль.

Задача 3 (Формула Феймана-Каца). Пусть f удовлетворяет УРЧП

$$
\begin{aligned}
&f_t + \mu(t,x)f_x + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}f_{xx} = rf, 0 \leq t < T \\
&f(T,x) = \Phi(x)
\end{aligned}
$$

где $r \in \mathbb{R}$. Докажите, что:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Phi(X_T) | X_t = x\right]$$

Решение. Замена неизвестной функции $f(t,x) = e^{-r(T-t)}g(t,x)$. Тогда:

$$f_t = e^{-r(T-t)}g_t + rf$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $g(t,x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}&g_t + \mu(t,x)g_x + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}g_{xx} = 0, 0 \le t < T\\&g(T,x) = \Phi(x)\end{aligned}$$

и по классической формуле Феймана-Каца:

$$g(t,x) = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|X_t = x\right]$$

Задача 4 (Процесс Орнштейна-Уленбека). Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$\begin{aligned}&dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t\\&X_0 = x_0\end{aligned}$$

где $\alpha > 0$. Выпишите прямое уравнение Колмогорова на плотность процесса X_t. Найдите стационарное решение (плотность, для которой $\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = 0$).

Решение Уравнение Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left((x-\theta)\cdot p\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Из условия $\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0$ получим:

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left((x-\theta)\cdot p\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Интегрируем левую и правую часть, получим:

$$\alpha(x-\theta)\cdot p + \frac{\sigma^2}{2}p_x = C$$

Чтобы плотность интегрировалась в единицу, нужно $C = 0$, откуда:

$$\frac{p_x}{p} = -\alpha\frac{2(x-\theta)}{\sigma^2}$$

Интегрируем левую и правую часть, получим:

$$p(x) = C\cdot\exp\left(-\frac{\alpha(x-\theta)^2}{\sigma^2}\right)$$

C находится из нормировки. Видно, что это нормальная плотность с параметрами $\mathcal{N}\left(\theta, \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$

Задача 5. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области $x^2 + y^2 \leq 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и граничным условиям $u(x, y) = f(x, y)$ при $x^2 + y^2 = 1$.
Доказать, что:

$$u(x, y) = \mathbb{E}\left[f(X_\tau, Y_\tau)|(X_0 = x, Y_0 = y)\right]$$

где (X_t, Y_t) – двумерное броуновское движение, стартующее из точки (x, y), момент остановки τ определяется как:

$$\tau = \inf_t \{X_t^2 + Y_t^2 \geq 1\}$$

Решение. Пусть $U_t = u(X_t, Y_t)$. По формуле Ито:

$$U_t = \int_0^t dU_s = u(x, y) + \int_0^t \Delta u(X_s, Y_s) ds + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x}(X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial u}{\partial y}(X_t, Y_t) dY_t\right)$$

Так как $\Delta u(x, y) = 0$, то первый интеграл занулится. Отсюда U_t – мартингал (как интеграл Ито по броуновскому движению), тогда по теореме Дуба:

$$\mathbb{E} U_\tau = U_0 = u(x, y)$$

С другой стороны при $t = \tau$ точка (X_τ, Y_τ) лежит на круге, поэтому $U_\tau = u(X_\tau, Y_\tau) = f(X_\tau, Y_\tau)$, откуда:

$$u(x, y) = \mathbb{E} f(X_\tau, Y_\tau)$$

ч.т.д.