

# Лекция 1. Теория вероятностей. Случайные процессы с дискретным временем

September 19, 2025

- Вероятностное пространство: определения и свойства
- Условное математическое ожидание
- Замена меры, производная Радона-Никодима
- Фильтрация: определение и свойства
- Случайные процессы: основные определения
- Мартингалы, моменты остановки
- Теоремы Дуба. Дискретный стохастический интеграл

## Определение

Вероятностное пространство это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где:

- $\Omega$  – пространство элементарных исходов,
- $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  –  $\sigma$ -алгебра событий,
- $\mathbb{P}$  – счётно-аддитивная вероятностная мера.

## Определение

Пусть  $\Omega$  – множество. Семейство подмножеств  $\Omega$   $\mathcal{F}$  называется алгеброй, если:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}: A \cup B \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}: \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

Алгебра  $\mathcal{F}$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если она замкнута относительно счётного объединения:

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- $\mathcal{F} = (\emptyset, \Omega)$  – тривиальная  $\sigma$ -алгебра
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$  – множество всех подмножеств
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

Пусть  $\Omega$  – множество,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра. Тогда:

- $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$
- $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- Если  $G$  –  $\sigma$ -алгебра, то  $\mathcal{F} \cap G$  –  $\sigma$ -алгебра
- Если  $\{\mathcal{F}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$  – семейство  $\sigma$ -алгебр, то  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$  –  $\sigma$ -алгебра.

## Определение

Пусть  $\Omega = \mathbb{R}$ . Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $B(\mathbb{R})$  – минимальная сигма-алгебра, содержащая все множества вида  $(-\infty, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

По определению  $\sigma$ -алгебры, борелевская  $\sigma$ -алгебра содержит также все отрезки, лучи, интервалы и полуинтервалы, открытые и закрытые множества.

## Определение

Вероятностная мера  $\mathbb{P}$  это неотрицательная функция на  $\mathcal{F}$ , удовлетворяющая свойствам:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Пример. Пусть  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ . Тогда  $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{n}$  – вероятностная мера.

# Случайные величины

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство.

## Определение

Функция  $\xi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется измеримой относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ , если  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Измеримые функции также будем называть случайными величинами (коротко с.в.). Обозначение  $\xi \in \mathcal{F}$ . Множество  $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$  также будем записывать как  $\{\xi < x\}$ .

## Утверждение

Если  $\xi \in \mathcal{F}$ , то:

- $\{\xi \geq x\} \in \mathcal{F}$
- $\{y \leq \xi < x\} \in \mathcal{F}$
- $\{\xi = x\} \in \mathcal{F}$

## Определение

Пусть  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – функция. Положим

$$\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

## Утверждение

$\sigma(\xi)$  – минимальная  $\sigma$ -алгебра, относительно которой  $\xi$  измерима.



## Определение

Функция распределения  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  с.в.  $\xi$  называется функцией:

$$F = \mathbb{P}(\xi < x).$$

Определение корректно, так как  $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$

## Определение

Распределением  $\mu_\xi$  с.в.  $\xi$  называется вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , определённая как:

$$\mu_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Случайные величины переносят меру  $\mathbb{P}$  с  $(\Omega, \mathcal{F})$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

## Определение

Мат. ожидание  $\mathbb{E}\xi$  с.в.  $\xi$  это интеграл Лебега по  $\Omega$ :

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

## Утверждение

Для произвольной функции  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что  $g(\xi)$  интегрируема выполнено:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

Если  $\mu_{\xi}$  имеет плотность  $p_{\xi}(x)$ , то:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) p_{\xi}(x) dx$$

# Сигма-алгебры и разбиения

Пусть  $\Omega$  – пространство элементарных исходов.

Пусть  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$  – разбиение множества  $\Omega$ , т.е.:

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$



$H = \sigma(\mathcal{A})$  –  $\sigma$ -алгебра, порождённая разбиением. Состоит из элементов вида  $B = \bigcup_k A_{n_k}$ .

## Теорема

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство. Пусть  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – принимает конечное число значений  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Пусть  $A_i = \xi^{-1}(a_i)$ . Тогда  $\xi(\omega)$  измерима  $\iff \forall i A_i \in \mathcal{F}$

*Доказательство.*  $\{\xi < x\} = \bigcup_{a_i < x} \{\xi = a_i\} = \bigcup_{a_i < x} A_i$ .

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство. Пусть  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(B) \neq 0$ .

### Определение

Условная вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Определение

Пусть  $\xi \in \mathcal{F}$ . Условным мат. ожиданием  $\xi$  при условии  $B$  будем называть число:

$$\mathbb{E}^B \xi = \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_B)}{P(B)}$$

Также будем использовать обозначение  $\mathbb{E}[\xi|B]$

# УМО для дискретной $\sigma$ -алгебры

Пусть  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$  – разбиение множества  $\Omega$ ,  $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$  –  $\sigma$ -алгебра, порождённая этим разбиением.

## Определение

Пусть  $\xi \in \mathcal{F}$ . Условным мат. ожиданием  $\xi$  при условии  $\mathcal{H}$  будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{A_i} \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_{A_i})}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{A_i} \mathbb{E}^{A_i} \xi$$

$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}]$  – дискретная случайная величина:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}](\omega) = \mathbb{E}^{A_i} \xi, \text{ если } \omega \in A_i$$

## Задача

Пусть  $\xi \sim N(0, 1)$ ,  $\mathcal{H} = \sigma(\{\xi \geq 0\}, \{\xi < 0\})$ . Найти  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}]$

Пусть  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$  – разбиение,  $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$ . Пусть  $\eta = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}]$ .  
Тогда:

- $\eta \in \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}$ :

$$\mathbb{E}[\eta \cdot \mathbb{I}_A] = \mathbb{E}[\xi \cdot \mathbb{I}_A]$$

Первое утверждение очевидно, второе достаточно проверить для  $A \in \mathcal{A}$ .

## Определение

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство, пусть  $\xi$  – интегрируемая с.в. Пусть  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра. Тогда с.в.  $\eta$ , удовлетворяющая свойствам:

- $\eta \in \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}$ :

$$\mathbb{E}[\eta \cdot \mathbb{I}_A] = \mathbb{E}[\xi \cdot \mathbb{I}_A]$$

называется условным мат. ожиданием  $\xi$  при условии  $\mathcal{H}$  и обозначается:

$$\eta = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{H}]$$

*Замечание* В отличие от предыдущего определения  $\mathcal{H}$  – произвольная  $\sigma$ -подалгебра. Можно доказать, что такая с.в.  $\eta$  всегда существует и п.н. единственна.



- Линейность

$$\mathbb{E} [\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{H}] = \alpha\mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}] + \beta\mathbb{E} [\eta|\mathcal{H}]$$

- Если  $\xi \in H$ , то  $\mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}] = \xi$
- Если  $\xi \perp H$ , то  $\mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}] = \mathbb{E}\xi$
- Повторное мат. ожидание. Пусть  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ .

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}] | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [\xi|\mathcal{G}]$$

В частности:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}])$$

- Неравенство Йенсена. Если  $f$  выпуклая, то:

$$f(\mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}]) \leq \mathbb{E} [f(\xi)|\mathcal{H}]$$

- Если  $\eta \in \mathcal{H}$ , то

$$\mathbb{E} [\eta \cdot \xi|\mathcal{H}] = \eta \cdot \mathbb{E} [\xi|\mathcal{H}]$$

## Утверждение

Пусть  $\xi$  – квадратично-интегрируемая с.в., т.е.  $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ . Пусть  $\mathcal{H}$  –  $\sigma$ -подалгебра  $\mathcal{F}$ . Тогда:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}] = \arg \min_{z \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - z)^2$$

## Утверждение

Пусть  $\xi$  – квадратично-интегрируемая с.в., т.е.  $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ . Пусть  $\mathcal{H}$  –  $\sigma$ -подалгебра  $\mathcal{F}$ . Тогда:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}] = \arg \min_{z \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - z)^2$$

Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Положим:

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = \mathbb{E}[\xi|\sigma(\eta)]$$

Так как  $\mathbb{E}[\xi|\eta] \in \sigma(\eta)$ , то  $\exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = g(\eta)$$

## Утверждение

Пусть  $\xi$  – квадратично-интегрируемая с.в., т.е.  $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ . Пусть  $\mathcal{H}$  –  $\sigma$ -подалгебра  $\mathcal{F}$ . Тогда:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}] = \arg \min_{z \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(\xi - z)^2$$

Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Положим:

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = \mathbb{E}[\xi|\sigma(\eta)]$$

Так как  $\mathbb{E}[\xi|\eta] \in \sigma(\eta)$ , то  $\exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = g(\eta)$$

## Утверждение

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = \arg \min_{g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \mathbb{E}(\xi - g(\eta))^2$$

# УМО относительно случайной величины

## Задача

Пусть  $\xi, \eta$  – i.i.d. Найти  $\mathbb{E}[\xi|\xi + \eta]$ .

## Задача

Пусть  $X, Y$  имеют совместное нормальное распределение с параметрами  $\mu = (\mu_X, \mu_Y), \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ . Найти  $\mathbb{E}[X|Y]$

# Абсолютная непрерывность мер

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  – измеримое пространство (множество с  $\sigma$ -алгеброй). Пусть  $\mathbb{Q}, \mathbb{P}$  – меры на  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

## Определение

Мера  $\mathbb{Q}$  абсолютно непрерывна относительно  $\mathbb{P}$ , если  $\forall A \in \mathcal{F}$ :

$$\mathbb{P}(A) = 0 \rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

Обозначение  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

## Определение

Мера  $\mathbb{Q}$  эквивалентна  $\mathbb{P}$ , если  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ . Обозначение  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

# Абсолютная непрерывность мер: примеры

Примеры:

- Пусть  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ . Тогда:

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \rightarrow \mathbb{Q}(\{n\}) = 0$$

- Пусть  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Пусть

$$\mathbb{P}(dx) = p(x)dx, \mathbb{Q}(dx) = q(x)dx.$$

Тогда

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \Leftrightarrow \text{supp}(p) \subseteq \text{supp}(q)$$

где

$$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

# Абсолютная непрерывность мер: примеры

Пусть  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Пусть  $d\mathbb{P}(x) = \mathbb{I}(x \in [-1, 1])$ ,  $d\mathbb{Q}(x) = \mathbb{I}(x \in [0, 1])$ .

- Верно ли, что  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ ?
- Верно ли, что  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ ?



# Производная Радона-Никодима

Пусть  $\mathbb{P}$  – мера,  $f \in \mathcal{F}$  – функция,  $f(\omega) \geq 0$ . Определим меру  $\mathbb{Q}$  по формуле:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}$$

Тогда  $\mathbb{Q}$  – мера и  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ .

Верно и обратное:

## Теорема Радона-Никодима

Пусть  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ . Тогда  $\exists f \in \mathcal{F}, f(\omega) \geq 0$ :

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Обозначение:  $f(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

# Производная Радона-Никодима: примеры

- Пусть  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ . Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(n) = \frac{\mathbb{Q}(\{n\})}{\mathbb{P}(\{n\})} \cdot \mathbb{I}(\mathbb{P}(\{n\}) \neq 0)$$

при  $n \in \mathbb{N}$ .

- Пусть  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Пусть

$$\mathbb{P}(dx) = p(x)dx, \mathbb{Q}(dx) = q(x)dx$$

и  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ . Тогда:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \cdot \mathbb{I}(p(x) \neq 0)$$

# Производная Радона-Никодима: свойства

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F})$  – измеримое пространство
- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$  – вероятностные меры
- $f = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$  – производная Радона-Никодима
- $\xi \in \mathcal{F}$  – случайная величина.

Тогда:

- $Q(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) dQ(\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega) f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\xi \cdot f]$
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} 1 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} f = 1$

## Задача

Пусть  $\xi \sim N(0, 1)$ ,  $p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2}$ .

- Найти меру (плотность) относительно которой  $\xi \sim N(a, 1)$ .
- Найти производную Радона-Никодима  $f$ .
- Убедиться, что  $\int f d\mathbb{P} = 1$ ,  $\mathbb{E}[f \cdot \xi] = a$ .

## Определение

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство. Пусть  $\mathcal{T}$  – некоторое множество индексов. Случайным процессом  $\xi$  будем называть совокупность с.в.  $\{\xi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ , заданных на одном вероятностном пространстве.

- Случайный процесс – функция двух переменных:  
 $\xi : \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , измеримая по второму аргументу.
- Если  $\mathcal{T}$  конечно, то случайный процесс = многомерная с.в.
- Обычно  $\mathcal{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+, [0, T]\}$ .
- Для фиксированного  $t \in \mathcal{T}$  отображение  $\omega \mapsto \xi(t, \omega)$  которое обозначим  $\xi_t$  – сечение процесса  $\xi$ .
- Для фиксированного  $\omega$  отображение  $t \mapsto \xi(t, \omega)$  – детерминированная функция, реализация (траектория) случайного процесса.

## Конечномерные распределения

Всевозможные совместные распределения с.в.  $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$  называются конечномерными распределениями процесса  $\xi_t$ :

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \dots, \xi_{t_n} \leq x_n)$$

- Мат. ожидание случайного процесса:  $m(t) = \mathbb{E}\xi_t$
- Автоковариационная функция:  $b(t, s) = \text{cov}(\xi_t, \xi_s)$

# Случайные процессы: пример

*Примеры.*

- $\mathcal{T} = [0, 1]$ . Пусть  $\eta \sim N(0, 1)$ . Положим  $\xi_t = t \cdot \eta$ .
- Пусть  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ,  $\xi_t \sim Be(1/2)$  – i.i.d.

*Упражнение.* Для каждого примера:

- опишите траектории и сечения процесса  $\xi_t$ ,
- выпишите функции конечномерных распределений,
- мат. ожидание и ковариационную функцию.

# Случайные процессы: пример

Здесь и далее будем считать, что  $\xi \sim Be(p)$  если

$$\xi = \begin{cases} +1, \text{ с вер. } p \\ -1, \text{ с вер. } 1 - p \end{cases}$$

Пусть  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ,  $\xi_t \sim Be(1/2)$  – i.i.d.

## Определение

Простое случайное блуждание  $X_t$  это случайный процесс:

$$X_t = \sum_{s=1}^t \xi_s$$

$$X_0 = 0$$

Свойства:

- $\mathbb{E}X_t = 0$ ,  $\mathbb{D}X_t = t$
- $\mathbb{E}[X_t | X_{t-1}] = X_{t-1}$
- $\text{cov}(X_t, X_s) = \min(t, s)$

Пусть  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ .

## Определение

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство.

Фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  называется последовательность вложенных  $\sigma$ -подалгебр:

$$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} : \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$$

где  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  –  $\sigma$ -под алгебры.

$\mathcal{F}_t$  – информация, доступная к моменту времени  $t$ .

Процесс  $\{\xi_t\}$  – **адаптированный**, если  $\xi_t \in \mathcal{F}_t \forall t \in \mathbb{N}$ .

Процесс  $\{\xi_t\}$  – **предсказуемый**, если  $\xi_t \in \mathcal{F}_{t-1} \forall t \in \mathbb{N}$ .



## Определение

Пусть  $\{\xi_t\}$  – случайный процесс. Определим:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{\xi_s, s \leq t\}),$$

т.е.  $\mathcal{F}_t$  – минимальная  $\sigma$ -алгебра, относительно которой все с.в.  $\xi_s, s \leq t$  измеримы. Тогда

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  – фильтрация
  - $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$  – адаптированный к фильтрации процесс
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  называется **естественной фильтрацией**.

## Определение

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  – фильтрация. Случайный процесс  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  называется **мартингалом** относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , если:

- $\mathbb{E}|\xi_t| < \infty$  – интегрируемость
  - $\xi_t \in \mathcal{F}_t$  – адаптированность
  - $\mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_s] = \xi_s$  для всех  $s \leq t$  – мартингальное свойство.
- 
- Если фильтрация явно не указана, в качестве неё берётся естественная фильтрация процесса  $(\xi_t)_{t \geq 0}$ .
  - Процесс называется суб(супер) мартингалом, если:

$$\mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_s] \geq (\leq) \xi_s$$

# Мартингалы: примеры

- Случайное блуждание. Пусть

- $\xi_t$  — i.i.d.,  $\mathbb{E}\xi_t = 0$ ,
- $X_t = \sum_{s=1}^t \xi_s$

Мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s] = X_s$$

- Геометрическое случайное блуждание.

- $\xi_t$  — i.i.d.,  $\mathbb{E}\xi_t = 1$ ,  $\xi_t > 0$
- $X_t = \prod_{s=1}^t \xi_s$

Мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[X_s \cdot \frac{X_t}{X_s} | \mathcal{F}_s\right] = X_s \cdot \mathbb{E}\left[\frac{X_t}{X_s} | \mathcal{F}_s\right] = X_s$$

# Мартингалы: свойства

- В дискретном случае достаточно требовать свойства:

$$\mathbb{E}[\xi_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \xi_t$$

- $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi_0 = \text{const}$
- Если  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  – мартингал,  $f(x)$  – выпуклая (вогнутая) функция, то процесс  $\eta_t = f(\xi_t)$  – суб (супер) мартингал.
- Мартингалы Леви: если  $\eta$  – произвольная интегрируемая случайная величина, то процесс  $\xi_t = \mathbb{E}[\eta | \mathcal{F}_t]$  – мартингал. В частности, на интервале  $[0, T]$  мартингал генерируется своим терминальным значением:

$$\xi_t = \mathbb{E}[\xi_T | \mathcal{F}_t]$$

- Пусть  $\xi_t$  – квадратично-интегрируемый мартингал, тогда его приращения некоррелированы:

$$\text{cov}(\xi_p - \xi_q, \xi_t - \xi_s) = 0$$

при  $s \leq t \leq q \leq p$

# Дискретный стохастический интеграл

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  – дискретная фильтрация.

## Определение

Пусть  $(X_t)_{t \geq 0}, (Y_t)_{t \geq 0}$  – случайные процессы. Будем называть процесс  $Z_t$ , определённый как:

$$Z_t = (X \star Y)_t = \sum_{s=0}^t X_s (Y_s - Y_{s-1})$$

при условии  $Y_{-1} = 0$  дискретным стохастическим интегралом.

# Дискретный стохастический интеграл

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  – вероятностное пространство,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  – дискретная фильтрация.

## Утверждение

Пусть

- $(X_t)_{t \geq 0}$  – предсказуемый процесс
- $(Y_t)_{t \geq 0}$  – мартингал
- $\forall t \ X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1})$  – интегрируемая с.в.

Тогда стохастический интеграл  $(X \star Y)$  является мартингалом.

*Доказательство* Пусть  $Z_t = (X \star Y)_t$ , тогда:

$$Z_t = Z_{t-1} + X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1})$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= Z_{t-1} + \mathbb{E}[X_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] = \\ &= Z_{t-1} + X_t \cdot \mathbb{E}[(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] = Z_t\end{aligned}$$

## Определение

Случайная величина  $\tau$ , принимающая значения из  $\mathcal{T}$  называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации  $(F_t)_{t \geq 0}$ , если

$$\forall t \geq 0 \{ \tau \leq t \} \in F_t$$

В любой момент  $t$  можем решить, является ли  $\tau$  моментом остановки на основании информации до момента  $t$ .

## Определение

Случайная величина  $\tau$ , принимающая значения из  $\mathcal{T}$  называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации  $(F_t)_{t \geq 0}$ , если

$$\forall t \geq 0 \{ \tau \leq t \} \in F_t$$

В любой момент  $t$  можем решить, является ли  $\tau$  моментом остановки на основании информации до момента  $t$ .

*Пример.* Пусть  $X_t$  – адаптированный процесс. Рассмотрим:

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$$

где  $A \subseteq \mathbb{R}$  – борелевское множество.  $\tau$  – марковский процесс.



## Определение

Случайная величина  $\tau$ , принимающая значения из  $\mathcal{T}$  называется моментом остановки (марковским моментом) относительно фильтрации  $(F_t)_{t \geq 0}$ , если

$$\forall t \geq 0 \{ \tau \leq t \} \in F_t$$

В любой момент  $t$  можем решить, является ли  $\tau$  моментом остановки на основании информации до момента  $t$ .

*Пример.* Пусть  $X_t$  – адаптированный процесс. Рассмотрим:

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$$

где  $A \subseteq \mathbb{R}$  – борелевское множество.  $\tau$  – марковский процесс.

*Доказательство:*

$$\{\tau \leq t\} = \{\exists s \leq t : X_s \in A\} = \bigcup_{s=0}^t \{X_s \in A\} \in F_t$$

## Теорема

Пусть  $\xi_t$  – мартингал,  $\tau$  – момент остановки. Тогда остановленный процесс  $\xi_t^\tau = \xi_{\min(t, \tau)}$  является мартингалом.

## Теорема

Пусть  $\xi_t$  – мартингал,  $\tau$  – момент остановки. Тогда остановленный процесс  $\xi_t^\tau = \xi_{\min(t, \tau)}$  является мартингалом.

*Доказательство* Введём  $h_t = \mathbb{I}(\tau \geq t) = 1 - \mathbb{I}(\tau \leq t - 1) \in F_{t-1}$ .

$$\xi_t^\tau = \sum_{s=0}^t h_s(\xi_s - \xi_{s-1}) = (h \star \xi)_t.$$

Т.е.  $\xi_t^\tau$  – стохастический интеграл по мартингалу, значит, тоже мартингал. □

# Теорема Дуба об оптимальной остановке

## Теорема

Пусть  $\xi_t$  – мартингал,  $\tau$  – момент остановки. Пусть выполнено одно из условий:

- $\tau$  – ограничено, т.е.  $\exists c : \mathbb{P}(\tau \leq c) = 1$
- $\mathbb{E}\tau < \infty$ ,  $\exists c : \forall t \mathbb{E}[|\xi_{t+1} - \xi_t| \mathcal{F}_t] \leq c$
- $\xi_t^\tau$  равномерно ограничено, т.е.  $\exists c : \forall t |\xi_t^\tau| \leq c$

Тогда  $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$

# Теорема Дуба об оптимальной остановке

## Теорема

Пусть  $\xi_t$  – мартингал,  $\tau$  – момент остановки. Пусть выполнено одно из условий:

- $\tau$  – ограничено, т.е.  $\exists c : \mathbb{P}(\tau \leq c) = 1$
- $\mathbb{E}\tau < \infty$ ,  $\exists c : \forall t \mathbb{E}[|\xi_{t+1} - \xi_t| \mathcal{F}_t] \leq c$
- $\xi_t^\tau$  равномерно ограничено, т.е.  $\exists c : \forall t |\xi_t^\tau| \leq c$

Тогда  $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$

*Доказательство* По предыдущей теореме  $\xi_t^\tau$  – мартингал, откуда  $\mathbb{E}\xi_t^\tau = \mathbb{E}\xi_0$ . Переходим к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$\mathbb{E}\xi_t^\tau = \mathbb{E}\xi_{\min(t, \tau)} \rightarrow \mathbb{E}\xi_\tau$$

Условия теоремы нужны для обоснования сходимости. □

# Теорема Дуба о разложении

## Теорема

Пусть  $\xi_t$  – согласованный интегрируемый процесс. Тогда

$\exists!$   $(M_t)_{t \geq 0}$  и  $(A_t)_{t \geq 0}$  такие, что:

- $M_t$  – мартингал,
- $A_t$  – предсказуемый процесс и  $A_0 = 0$
- $X_t = M_t + A_t$

# Теорема Дуба о разложении

*Доказательство.* Пусть такое разложение существует, тогда:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[M_t + A_t | \mathcal{F}_{t-1}] = M_{t-1} + A_t = X_{t-1} + (A_t - A_{t-1})$$

Положим:

- $A_0 = 0, A_t = A_{t-1} + \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] - X_{t-1}$
- $M_t = X_t - A_t$

Очевидно,  $A_t$  – предсказуемый процесс, разложение  $X_t = M_t + A_t$  выполнено автоматически, достаточно проверить мартингальность  $M_t$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] - A_t = \\ &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] - (A_{t-1} + \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] - X_{t-1}) = \\ &= X_{t-1} - A_{t-1} = M_{t-1}\end{aligned}$$