Лекция 4. Рынок с непрерывным временем

October 8, 2025

Рекап прошлой лекции

- Стохастические дифф. уравнения. Теорема существования, марковость.
- Формула Феймана-Каца.
- Прямое и обратное уравнение Колмогорова.

План лекций

- Динамика портфелей. Условие самофинансируемости.
- Случайные платёжные обязательства.
- Арбитражность.
- Реплицируемые платёжные обязательства.
- Уравнение Блэка-Шоулза. Мартингальность цены.

Динамика портфелей

Динамика портфелей

- N – число торгуемых активов (акций)
- h_t^i – число i-ых акций на интервале $[t, t + \Delta)$
- $h_t = [h_t^1, \ldots, h_t^N]$ – портфель
- S_t^i – цена i-го актива в момент t
- $V_t = \sum_i h_t^i S_t^i = h_t \cdot S_t$ – капитал портфеля h в момент t
- Приращение:

$$\Delta V_t^h = V_{t+\Delta}^h - V_t^h = h_t \cdot \Delta S_t + \Delta h_t \cdot S_t + \Delta h_t \cdot \Delta S_t$$

Уравнение самофинансируемости

Определение

Портфель называется **самофинансируемым**, если покупка новых активов производится только за счёт продажи старых.
Условие самофинансируемости:

$$V_{t+\Delta}^h = h_t \cdot S_{t+\Delta} = h_{t+\Delta} \cdot S_{t+\Delta}$$
$$\Delta V_t^h = h_t \cdot \Delta S_t$$
$$\Delta h_t \cdot S_t + \Delta h_t \cdot \Delta S_t = 0$$

При непрерывной торговле $\Delta \to 0$ уравнение самофинансируемости запиывается как:

$$dV_t^h = h_t \cdot dS_t$$

$$V_t^h = V_0^h + \int_0^t h_u \cdot dS_u$$

Модель Блэка-Шоулза

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t.
Банковский счёт:

$$B_0 = 1$$
$$dB_t = rB_t dt$$

Акция:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$
$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - 0.5\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

Динамика самофинансируемого портфеля $h_t = (y_t, s_t)$

$$dV_t^h = y_t dB_t + x_t dS_t = x_t dS_t + (V_t^h - x_t \cdot S_t) r dt$$

Платежные обязательства

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, W_t – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, порождённая W_t.

Определение

Дериватив – контракт, который платит в момент T случайную сумму денег $X \in \mathcal{F}_T$.

Пример Европейский колл-опцион: $X = (S_T - K)^+$

Определение

Дериватив называется простым, если $X = \Phi(S_T)$. Φ – функция выплаты.

Пример Для европейского колл-опциона $\Phi(x) = (x - K)^+$.

Пример Азиатский опцион $X = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+$ не является простым.

Общая задача финансовой математики

Основная задача – найти *справедливую* стоимость контракта $p(t, X) \in \mathcal{F}_t$ в произвольный момент времени $t < T$.
При $t = T$ очевидно $p(T, X) = X$.

Безарбитражность

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$

$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \ \wedge \ \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Безарбитражность

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \,\wedge\, \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Рынок арбитражный, если существует арбитражный портфель.

Безарбитражность

Определение

Портфель h арбитражный, если

$$V_0^h = 0$$
$$\mathbb{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \ \wedge \ \mathbb{P}(V_T^h > 0) > 0$$

Рынок арбитражный, если существует арбитражный портфель.

Пример. Пусть

$$S_t = 1 + W_t^2.$$

Построить арбитражный порфель.

Неплицируемый дериватив

Определение

Дериватив называется реплицируемым, если $\exists$ самофинансируемый портфель $h_t = (x_t, y_t)$ такой, что:

$$V_T^h \overset{a.s.}{=} \Phi(S_T)$$

Пример Пусть $\Phi(S_T) = S_T - K$. Реплицирующий портфель:

$$x_t = 1, \; y_t = -Ke^{-rT}$$

Теорема

Цена реплицируемого деривативa Φ равна стоимости реплицирующего портфеля $h_t = (x_t, y_t)$:

$$p(t, \Phi) = V_t^h = x_t S_t + y_t B_t$$

Пример.

$$p(t, S_T - K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Цены

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – самофинансируемый портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Цены

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – самофинансируемый портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Предположим, что цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$ – гладкая функция своих аргументов. Динамика цены:

$$dF(t, S_t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS_t^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 0.5 \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t$$

Цены

Пусть $h_t = (x_t, y_t)$ – самофинансируемый портфель:

$$dV_t = x_t dS_t + (V_t - x_t \cdot S_t) r dt$$

Предположим, что цена $p(t, \Phi) = F(t, S_t)$ – гладкая функция своих аргументов. Динамика цены:

$$dF(t, S_t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS_t^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 0.5\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS_t$$

Для репликации нужно $dV = dF$. Приравнивая коэф. при dt, dS_t получим:

$$x_t = \frac{\partial F}{\partial S},$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} + r S_t \frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF$$

Уравнение Блэка-Шоулза

Теорема

Пусть $\Phi(S_T)$ – простой дериватив, тогда его цена $p(t,\Phi) = F(t,S_t)$, где $F(t,S)$ является решением УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T,S) = \Phi(S).$$

Простой дериватив является реплицируемым, веса реплицирующего портфеля задаются формулами:

$$x_t = \frac{\partial F(t,S_t)}{\partial S},$$
$$B_t y_t = F(t,S_t) - \frac{\partial F(t,S_t)}{\partial S} S_t.$$

Пример

Пусть $\Phi(x) = (x - K)$. Выше мы показали, что $p(t, \Phi) = S_t - e^{-r(T-t)}K = F(t, S_T)$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -re^{-r(T-t)}K$$
$$rS\frac{\partial F}{\partial S} = rS$$
$$\sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$$

Подставляем всё в уравнение, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS_t\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -re^{-r(T-t)}K + rS = r(S_t - e^{-r(T-t)}K) = rF$$

ч.т.д.

Формула Феймана-Каца

Теорема

Пусть функция $F(t, S)$ удовлетворяет УРЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF,$$
$$F(T, S) = \Phi(S).$$

Тогда решение может быть выраженно через условное мат. ожидание:

$$F(t, S) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)|S_t = S\right]$$

где S_u подчиняется геометрическому броуновскому движению:

$$dS_u = rS_u du + \sigma S_u dW_u, u > t$$
$$S_t = S$$

Риск-нейтральная мера

Определение

Мера, относительно которой цена процесса подчиняются уравнению:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

называется риск-нейтральной $\mathbb{Q}$.

Утверждение

Относительно риск-нейтральной меры дисконтированные цены $\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}, \widetilde{V_t} = \frac{V_t}{B_t}$ мартингалы.

Доказательство.

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t dW_t$$

$$d\widetilde{V}_t = x_t d\widetilde{S}_t = \sigma x_t \widetilde{S}_t dW_t$$

Безарбитражность

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Безарбитражность

Формула прайсинга:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Теорема

Модель Блэка-Шоулза безарбитражна.

Доказательство. Пусть $(h_t)_{t\geq 0}$ – арбитражный портфель. Пусть $V_0^h = 0, V_T^h \geq 0$. Тогда:

$$0 = V_0^h = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{V_T^h}{B_T} \to \mathbb{Q}(V_T = 0) = 1$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Цена:

$$p(t, S_T - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Пример. Форвард.

Определение

Форвардный контракт со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = S_T - K$$

Цена:

$$p(t, S_T - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Форвардная цена

Форвардная цена – страйк, при котором цена форвардного контракта равна нулю:

$$p(0, S_T - K) = 0$$

$$F = S_0 e^{rT}; p(t, S_T - F) = S_t - S_0 e^{rt}$$

Пример. Европейский колл-опцион

Определение

Европейский колл-опцион со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Пример. Европейский колл-опцион

Определение

Европейский колл-опцион со страйком K и датой погашения T это случайное платёжное обязательство с функцией выплаты:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Цена колл-опциона задаётся формулой:

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_1 = d_2 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

где $\tau = T - t$ – время до экспирации.

Пример. Европейский колл-опцион

Доказательство. Введём $\tau = T - t$ – время до экспирации.

$$C(t, S_T) = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}(S_T - K)\mathbb{I}_{S_T \geq K} =$$
$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau}S_T\mathbb{I}_{S_T \geq K}\right] - Ke^{-r\tau}\mathbb{Q}(S_T \geq K).$$

1) Вычислим $\mathbb{Q}(S_T \geq K)$:

$$S_T = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau+\sigma(W_T-W_t)} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau+\sigma\xi\sqrt{\tau}},$$

где $\xi \sim N(0,1)$ – стандартная нормальная с.в..

$$\begin{aligned}
&S_T \geq K \longleftrightarrow \\
&S_t \exp\left[(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau}\right] \geq K \longleftrightarrow \\
&(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma\xi\sqrt{\tau} \geq \log(K/S_t) \longleftrightarrow \\
&\xi \geq -\frac{\log(S_t/K) + (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \overset{def}{=} -d_2.
\end{aligned}$$

Итого:

Пример. Европейский колл-опцион

2) Вычислим $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}\right]$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}\right] = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-d_2}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\tau + \sigma x\sqrt{\tau} - \frac{x^2}{2}\right] dx.$$

Рассмотрим отдельно выражение под экспонентой и выделим полный квадрат:

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^2\tau - 2x\sigma\sqrt{\tau} + x^2\right) = -\frac{1}{2}\left(x - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2.$$

Сделаем замену переменных в интеграле $y = x - \sigma\sqrt{\tau}$; $d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{\tau}$:

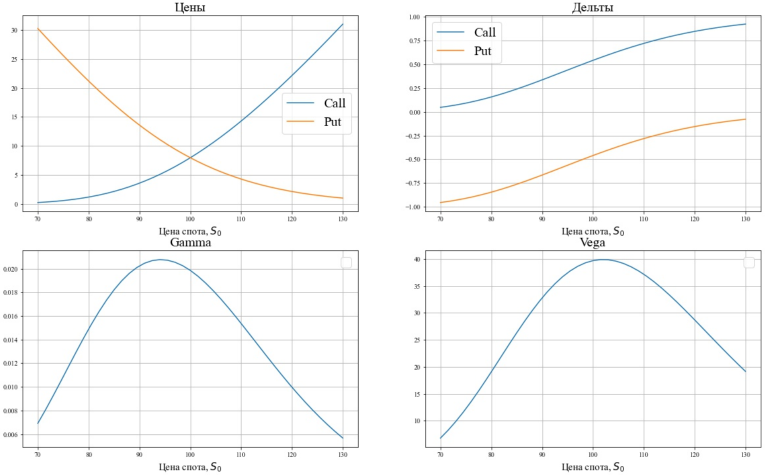
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}\left[e^{-r\tau} S_T \mathbb{I}_{S_T \geq K}\right] = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-d_1}^{\infty} e^{-0.5y^2} dy = S_t N(d_1) \; \square$$

Греки

Греками называются частные производные цен опционов:

$$\Delta = \frac{\partial C(t,S)}{\partial S} = N(d_1)$$
$$\Gamma = \frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$
$$\nu = \frac{\partial C(t,S)}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{\tau}$$
$$\Theta = \frac{\partial C(t,S)}{\partial t} = rC - rS\Delta - 0.5\sigma^2 S^2 \Gamma$$

Греки


Цены
Call
Put
Цена спота, S_0
Дельты
Call
Put
Цена спота, S_0
Gamma
Цена спота, S_0
Vega
Цена спота, S_0

Свойства

- Call-Put parity:

$$
\begin{aligned}
&S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \to \\
&S_t - e^{-r\tau} K = C(t, S_t) - P(t, S_t)
\end{aligned}
$$

Свойства

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \rightarrow$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \rightarrow C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

  В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t; S_t; 0) = S_t$$

Свойства

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \to$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \to C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

  В частности:

$$C(t, S_t; K) \leq C(t; S_t; 0) = S_t$$

- Выпуклость по страйку:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{\partial^2}{\partial K^2}(S_T - K)^+ = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\delta(S_T - K) = e^{-r\tau}p(K)$$

Свойства

- Call-Put parity:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \to$$
$$S_t - e^{-r\tau}K = C(t, S_t) - P(t, S_t)$$

- Монотонность по страйку. Если $K_1 < K_2$

$$(S_T - K_1) > (S_T - K_2) \to C(t, S_t; K_1) > C(t, S_t; K_2)$$

  В частности:

$$C(t, S_t; K) \le C(t; S_t; 0) = S_t$$

- Выпуклость по страйку:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\frac{\partial^2}{\partial K^2}(S_T - K)^+ = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\delta(S_T - K) = e^{-r\tau}p(K)$$

- Границы:

$$C(t, S_t) = e^{-r\tau}\mathbb{E}^{Q}(S_T - K)^+ \ge e^{-r\tau}(\mathbb{E}^{Q}S_T - K)^+ = (S_t - e^{-r\tau}K)^+$$

Рекап лекции

- Условие самофинансируемости
- Деривативы (платёжные обязательства) – определения и примеры
- Арбитражный портфель
- Реплицируемые Деривативы
- Формула Блэка-Шоулза.