Лекция 6. Локальная волатильность

October 22, 2025

Модель Блэка-Шоулза

Основные предположения:

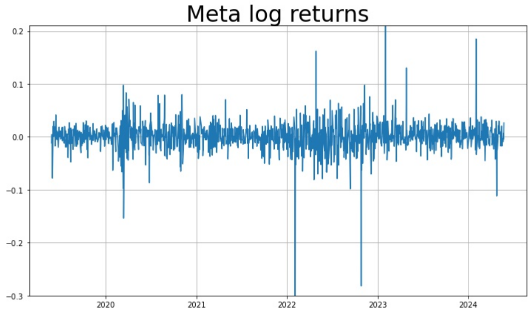
- Лог-доходности независимы и имеют нормальное распределение
- Параметры модели (ставка и волатильность) постоянные или зависят только от времени.
- Можно брать кредиты/класть на счёт деньги под одну и ту же ставку r
- Нет кредитного риска
- Непрерывная торговля, без комиссий и market impact

Исторические доходности

- Определим лог-доходности для реального процесса и геометрического броуновского движения:

$$L_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-\delta}}$$

- Визуально очень отличаются:

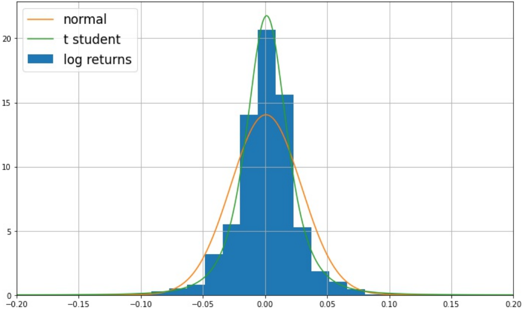


Исторические доходности

- Исторические доходности имеют толстые хвосты
- Коэффициент эксцесса(kurtosis):

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}\left(L_t - \mathbb{E}L_t\right)^4}{\sigma^4} - 3$$

- Для нормального $\kappa = 0$, для историчесских данных $\hat{\kappa} \approx 23$.



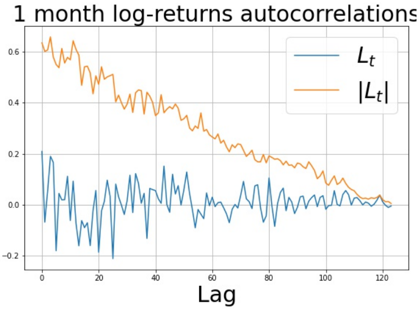
Исторические доходности

- Для геометрического броуновского движения:

$$L_t \perp L_{t+s}, \ \forall s \geq \Delta t$$

- Для рыночных данных:

$$\mathrm{cov}(L_t, L_{t+s}) \approx 0, \ \mathrm{cov}(|L_t|, |L_{t+s}|) \neq 0$$



Другие стилизованные факты

- Корреляция между волатильностью и ценой
- Кластеризация волатильности
- Прыжки в доходностях

Вменяемая волатильность

- Формула Блэка-Шоулза:

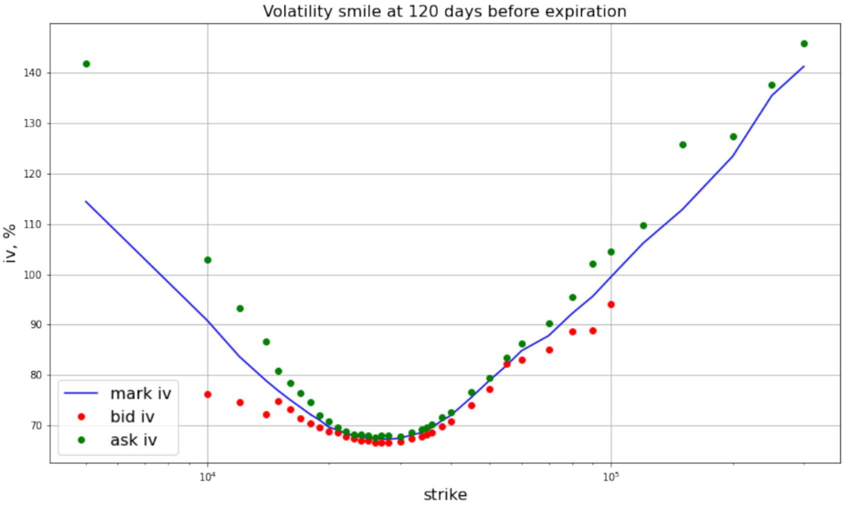
$$C_{BS}(S; T, K, r, \sigma) = S\Phi(d_1) - e^{-rT} K\Phi(d_2)$$

- Знаем рыночные цены $C^M(T, K)$, можем решить уравнение относительно σ_{iv}:

$$C_{BS}(S, T, K, r, \sigma_{iv}) = C^M(T, K)$$

- В модели Блэка-Шоулза $\sigma_{iv} = \sigma$ – постоянная. На практике $\sigma_{iv} = \sigma_{iv}(T, K)$.

Вменяемая волатильность



Вменяемая волатильность

- Как считать σ_{iv}? Метод Ньютона:

$$0 = f(\sigma^*) \approx f(\sigma) + (\sigma^* - \sigma) f'(\sigma)$$

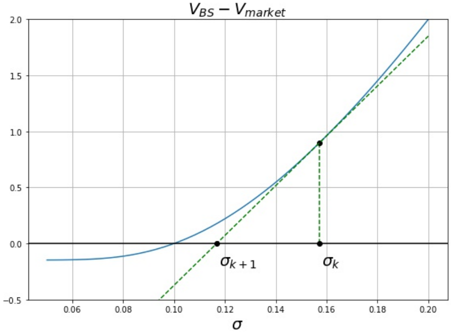
$$\sigma^* = \sigma - \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}$$

Вменяемая волатильность

- Как считать σ_{iv}? Метод Ньютона:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{f(\sigma_k)}{f'(\sigma_k)}$$

- Здесь $f(\sigma) = C_{BS}(\sigma) - C_{market}, f'(\sigma) = \dfrac{\partial C_{BS}(\sigma)}{\partial \sigma}$



Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$ – функция локальной волатильности.

Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$ – функция локальной волатильности.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma(t)$ – GBM, модель Блэка-Шоулза.

Модели локальной волатильности

- Пусть динамика процесса задаётся СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s \end{cases}$$

- $\sigma(t, S_t)$ – функция локальной волатильности.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma(t)$ – GBM, модель Блэка-Шоулза.
- Пример: $\sigma(t, S_t) = \frac{\beta}{S_t} \rightarrow$

$$dS_t = S_t rdt + \sigma dW_t$$

$$S_t = se^{rt} + \beta \int_0^t e^{r(t-u)} dW_u \sim N(se^{\mu t}, \dots)$$

Формула Бридена-Литценбергера

Теорема

Пусть $C(T,K)$ – цены колл-опционов с датой погашения T и страйком K. Тогда риск-нейтральная плотность с.в. S_T задатся формулой:

$$p(T,K) = e^{rT}\frac{\partial^2 C(T,K)}{\partial K^2}$$

Доказательство

$$C(T,K) = \mathbb{E}^Q e^{-rT}(S_T - K)^+ = e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)p(T,K)dx$$

$$\frac{\partial C(T,K)}{\partial K} = e^{-rT}\frac{\partial}{\partial K}\left(\int_K^\infty (x-K)p(T,K)dx\right) = -e^{-rT}\int_K^\infty p(T,K)dx$$

$$\frac{\partial^2 C(T,K)}{\partial K^2} = e^{-rT}p(T,K)$$

Прямое уравнение Колмогорова

- Риск-нейтральная динамика процесса:

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

- Инфинитизимальный оператор:

$$[Af](t, S) = rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t)S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

- Сопряжённый оператор:

$$[A^* f](t, S) = -r\frac{\partial(Sf)}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\sigma^2(t, S)S^2 f)}{\partial S^2}$$

- Прямое уравнение Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [A^* f](t, S) = -r\frac{\partial(Sp)}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\sigma^2(t, S)S^2 p)}{\partial S^2}$$

Формула Дюпира

Формула Дюпира

Пусть RN-динамика процесса S_t задаётся моделью локальной волатильности:

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

Тогда поверхность цен колл-опционов $C(T, K)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2(T, K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK\frac{\partial C}{\partial K}$$

В частности, если $C^M(T, K)$ – рыночная поверхность цен опционов, и

$$\sigma^2_{Dup}(t, S) = \left.\frac{\frac{\partial C^M}{\partial T} + rK\frac{\partial C^M}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 C^M}{\partial K^2}}\right|_{T=t, K=S}$$

то модель точно описывает рыночные цены.

Формула Дюпира: доказательство

- Общая формула ценообразования:

$$C(T,K) = \mathbb{E}^Q (S_T - K)^+ = \int_K^\infty (x-K) p(T,x) dx$$

- Вычислим производную по T:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_K^\infty (x-K) \frac{\partial p(T,x)}{\partial T} dx = [\text{Уравнение Колмогорова}]$$

$$= \frac{1}{2} \int_K^\infty (x-K) \frac{\partial^2 (x^2 \sigma(T,x) p(T,x))}{\partial x^2} dx = [\text{по частям}]$$

$$= -\frac{1}{2} \int_K^\infty \frac{\partial (x^2 \sigma(T,x) p(T,x))}{\partial x} = \frac{1}{2} K^2 \sigma(T,K) p(T,K)$$

- По формуле Бридена-Литценбергера:

$$p(T,K) = \frac{\partial^2 C(T,K)}{\partial K^2}$$

□

Связь с implied volatility

- Log moneyness:

$$k = \ln\left(\frac{K}{S_0 e^{rT}}\right)$$

- Total variance:

$$\omega(T, k) = T\sigma_{iv}^2(T, S_0 e^{rT+k})$$

- Формула Блэка-Шоулза:

$$C_{BS}(T, K) = S_0\left(N\left(-\frac{k}{\sqrt{\omega}} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\right) - e^k N\left(-\frac{k}{\sqrt{\omega}} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\right)\right)$$

- Формула Дюпира:

$$\sigma_{Dup}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{1 - \frac{k}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} + \frac{k^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}}$$

Связь с implied volatility

- Формула Дюпира:

$$\sigma^2_{Dup}(T,K) = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{1 - \frac{k}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} + \frac{k^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}}$$