Лекция 2. Случайные процессы в непрерывном времени

September 11, 2025

Стохастические дифф. уравнения

Интегральная запись:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Пример. Броуновское движение со сносом

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

- Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

- Рассмотрим детерминированное уравнение:

$$dX_t = X_t \mu dt \to X_t = e^{\mu t}$$

- Замена переменных:

$$X_t = e^{Y_t} \longrightarrow Y_t = \log X_t$$

- Формула Ито:

$$dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{(dX_t)^2}{X_t^2} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t$$

- Решение

$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right]$$

Процесс Орнштейна-Уленбека

- Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

- Замена переменных:

$$X_t = e^{-\alpha t} Y_t \longrightarrow Y_t = e^{\alpha t} X_t$$

- Формула Ито:

$$dY_t = e^{\alpha t} X_t \alpha dt + e^{\alpha t} dX_t = e^{\alpha t} \sigma dW_t \to Y_t = X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

- Решение:

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

$$X_t \sim N\left(X_0 e^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right)$$

Сильное и слабое решение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $(W_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – естественная фильтрация. Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Определение

Процесс X_t, определённый на том же вероятностном пространстве и обращающий уравнение в тождество называется **сильным** решением СДУ.

Определение

Пара из вероятностного пространства $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ и процесса $\tilde{X}_t$ называется слабым решением СДУ, если выполнено:

$$d\tilde{X}_t = \mu(t, \tilde{X}_t)dt + \sigma(t, \tilde{X}_t)d\tilde{W}_t$$

Сильное и слабое решение: пример

СДУ

$$\begin{cases} dX_t = -\operatorname{sgn}(X_t)dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

имеет слабое решение, но не имеет сильное.s

Теорема существования и единственности

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Теорема

Пусть

- $|\mu(t,x) - \mu(t,y)| \leq K|x-y|$
- $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$
- $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,y)| \leq K(1+|x|)$

Тогда $\exists!$ решение СДУ $(X_t)_{t\geq 0}$, причем:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ адаптированный к $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ процесс,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ имеет непрерывные траектории,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ – марковский процесс,
- $\exists C \in \mathbb{R}^+ : \ \mathbb{E}X_t^2 \leq Ce^{Ct}(1+x_0^2)$

Инфинитезимальный оператор

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Определение

Дифференциальный оператор A, действующий на гладкие функции $h(x)$ следующим образом:

$$Ah(x) = \mu(t,x)\frac{\partial h}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x)$$

называется инфинитезимальным оператором, или обратным оператором Колмогорова.

Формулу Ито можно записать как:

$$df(t, X_t) = \{\frac{\partial f}{\partial t} + Af\}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dW_t$$

Формула Феймана-Каца

Рассмотрим краевую задачу на функцию $F(t,x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + AF = 0 \\ F(T,x) = \Phi(x) \end{cases}$$

Пусть $(X_u)_{u \geq t}$ удовлетворяет СДУ

$$\begin{cases} dX_u = \mu(u, X_u)du + \sigma(u, X_u)dW_u \\ X_t = x \end{cases}$$

Рассмотрим процесс $Y_u = F(u, X_u)$. По формуле Ито:

$$Y_T = Y_t + \int_t^T \left[\frac{\partial F}{\partial u} + AF\right] du + \int_t^T \sigma(u, X_u)\frac{\partial F}{\partial x} dW_u$$

Первый интеграл равен нулю, второй является мартингалом, откуда:

$$Y_t = \mathbb{E}\left[Y_T | \mathcal{F}_t\right] \to F(t,x) = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T) | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T) | X_t = x\right]$$

Формула Феймана-Каца

Утверждение

- Процесс $F(t, X_t)$ мартингал относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + AF = 0$$

- Процесс $F(t, X_t)$ мартингал относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ тогда и только тогда, когда:

$$F(t, x) = \mathbb{E}\left[F(T, X_T) | X_t = x\right]$$

Уравнение Колмогорова

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

A – его инфинитазимальный оператор, A^* – сопряженный оператор.
Пусть $p(s, y; t, x)$ – переходная плотность процесса X_t, т.е.

$$\mathbb{P}(X_t \in A | X_s = y) = \int_A p(s, y; t, x)dx$$

Тогда $p(s, y; t, x)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(s, y; t, x) = A^* p(s, y; t, x) \\ p(s, y; t, x) \to \delta(x - y) \text{ при } t \to s \end{cases}$$