Модель Хестона

Рассмотрим модель Хестона с нулевой процентной ставкой:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= \sqrt{v_t}dW_t, \\
dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dZ_t, \\
dW_t dZ_t &= \rho dt
\end{aligned}
$$

Двумерное уравнение Фоккера-Планка

Для совместной плотности $p(t, S, v)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}[\kappa(\theta - v)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}[S^2 vp] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}[\xi^2 vp] + \rho\xi\frac{\partial^2}{\partial S \partial v}[Svp]$$

Интегрирование по v

Интегрируем по v от 0 до $+\infty$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial t} dv = &-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}[\kappa(\theta - v)p]dv \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S^2}[S^2 vp]dv \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2}[\xi^2 vp]dv \\ &+ \rho\xi\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S \partial v}[Svp]dv\end{aligned}$$

Анализ слагаемых

1. $\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial t} dv = \frac{\partial p}{\partial t}$
2. $-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}[\kappa(\theta - v)p]dv = 0$ (граничные условия)
3. $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S^2}[S^2 vp]dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left[S^2 \int_0^\infty vpdv\right]$
4. $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2}[\xi^2 vp]dv = 0$ (граничные условия)
5. $\rho\xi \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S \partial v}[Svp]dv = 0$ (граничные условия)

Условное математическое ожидание

Заметим, что:

$$\int_0^{\infty} vp(t,S,v)dv = \mathbb{E}[v_t|S_t = S]p(t,S)$$

где:

$$\mathbb{E}[v_t|S_t = S] = \frac{1}{p(t,S)} \int_0^{\infty} vp(t,S,v)dv$$

Итоговое уравнение

Получаем уравнение для маргинальной плотности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(S^2\mathbb{E}[v_t|S_t = S]p(t,S)\right)$$

Следствие:

$$\sigma^2_{\mathrm{loc}}(t,S) = \mathbb{E}[v_t|S_t = S]$$

Теорема Дьёндь

Теорема (Gyöngy, 1986):
Для процесса со стохастической волатильностью:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t$$

существует процесс с локальной волатильностью:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_{\text{loc}}(t, S_t) S_t dW_t$$

с одинаковыми одномерными распределениями, где:

$$\sigma^2_{\text{loc}}(t, S_t) = \mathbb{E}[v_t | S_t]$$