Задача 1. Пусть

$$\begin{cases} dX_t = X_t(\mu_x dt + \sigma_x dB_t), \\ dY_t = Y_t(\mu_y dt + \sigma_y dZ_t), \end{cases}$$

где $dB_t \cdot dZ_t = \rho dt$ – броуновские движения с корреляций ρ, $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ – константы. Выписать уравнения для процессов $X_t^\alpha, X_t \cdot Y_t, \dfrac{X_t}{Y_t}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 2 (Броуновский мост). Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = a(t)X_t + dB_t$$

где $a(t)$ – детерменированная функция, B_t – броуновское движение. Найдите $a(t)$ такое, что процесс X_t, определённый по формуле выше, является броуновским мостом.
Броуновский мост это гауссовский процесс X_t: $\mathbb{E}X_t = 0$, $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1-t)$, $s \leq t$

Задача 3 (Формула Феймана-Каца). Пусть f удовлетворяет УРЧП

$$f_t + \mu(t,x) f_x + \frac{\sigma^2(t,x)}{2} f_{xx} = rf, 0 \leq t < T$$
$$f(T,x) = \Phi(x)$$

где $r \in \mathbb{R}$. Докажите, что:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Phi(X_T) | X_t = x\right]$$

Задача 4 (Процесс Орнштейна-Уленбека). Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$
$$X_0 = x_0$$

Выпишите прямое уравнение Колмогорова на плотность процесса X_t. Найдите стационарное решение (плотность, для которой $\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = 0$).

Задача 5. Пусть $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области $x^2 + y^2 \leq 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и граничным условиям $u(x,y) = f(x,y)$ при $x^2 + y^2 = 1$.
Доказать, что:

$$u(x,y) = \mathbb{E}\left[f(X_\tau, Y_\tau) | (X_0 = x, Y_0 = y)\right]$$

где (X_t, Y_t) – двумерное броуновское движение, стартующее из точки (x,y), момент остановки τ определяется как:

$$\tau = \inf_t \{X_t^2 + Y_t^2 \geq 1\}$$