Лекция 3. Стохастические дифференциальные уравнения

October 4, 2025

Рекап прошлой лекции

- Броуновское движение как предел случайного блуждания. Аксиоматические определения, основные свойства.
- Основные понятия стох. анализа: непрерывность и дифференцируемость в с.к., полная и квадратичная вариация процесса.
- Интеграл Ито. Мартингальность, изометрия Ито. Отличия от интеграла Римана.
- Процессы Ито.
- Формула Ито, таблица умножения стох. дифференциалов.

Стохастические диф. уравнения

Интегральная запись:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

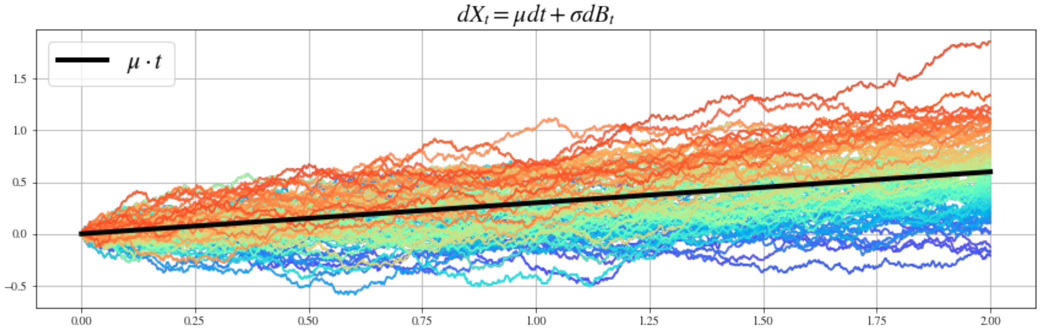
Дифференциальная запись:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Пример. Броуновское движение со сносом

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$



Пример. Геометрическое броуновское движение

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим детерменированное уравнение:

$$dX_t = X_t \mu dt \to X_t = e^{\mu t}$$

Замена переменных:

$$X_t = e^{Y_t} \longrightarrow Y_t = \log X_t$$

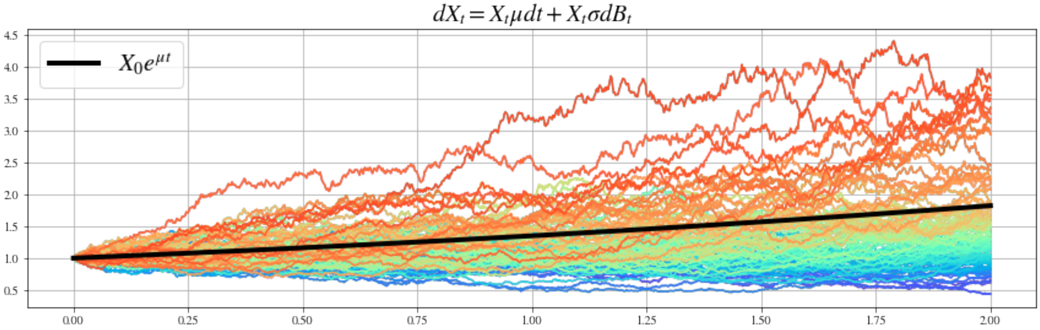
$$dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{(dX_t)^2}{X_t^2} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right]$$

Пример. Геометрическое броуновское движение

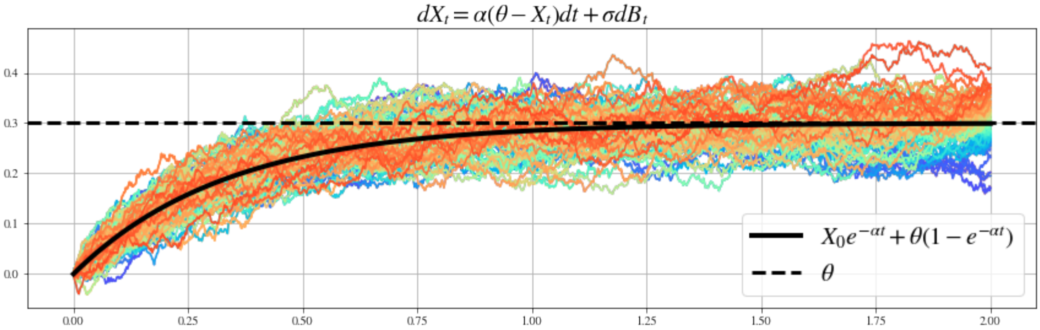
$$X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right]$$

$$\mathbb{E}X_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right] \mathbb{E}\exp\left[\sigma B_t\right] = X_0 e^{\mu t}$$



Пример. Процесс Орнштейна-Уленбека

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$



Пример. Броуновский мост

Определение

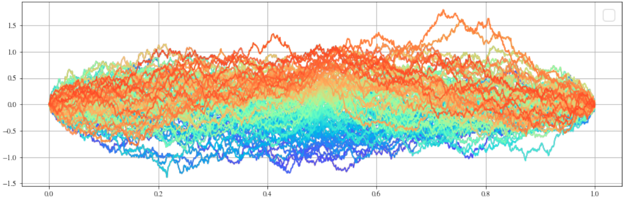
Броуновский мост это гауссовский процесс X_t, $t \in [0, 1]$:

- $\mathbb{E}X_t = 0$
- $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = s \cdot (1 - t),\ s \leq t$

Если B_t – БД, то $X_t = B_t - t \cdot B_1$ – броуновский мост.

Броуновский мост как процесс Ито

$$dX_t = a(t)X_t dt + \sigma dB_t$$



Теорема существования

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Теорема

Пусть

- $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq K|x - y|$
- $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
- $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, y)| \leq K(1 + |x|)$

Тогда $\exists!$ решение СДУ $(X_t)_{t \geq 0}$, причем:

- $(X_t)_{t \geq 0}$ адаптированный к $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ процесс,
- $(X_t)_{t \geq 0}$ имеет непрерывные траектории,
- $(X_t)_{t \geq 0}$ – марковский процесс

Численное решение СДУ: схема Эйлера

- Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ – разбиение $[0, t]$
- Схема Эйлера:

$$\hat{X}_{t_{k+1}} = \hat{X}_{t_k} + \mu(t_k, \hat{X}_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, \hat{X}_{t_k})\sqrt{\Delta t_k}\xi_k$$

  где $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ – i.i.d.
- При $\Delta t_k \to 0$ дискретный процесс $\hat{X}_{t_k} \to X_t$.
- Дискретная марковская цепь:

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{t_{k+1}} \in A | \mathcal{F}_{t_k}) = \mathbb{P}(\hat{X}_{t_{k+1}} \in A | X_{t_k}) = \mathcal{N}\left(\hat{X}_{t_k} + \mu(t_k, \hat{X}_{t_k})\Delta t_k, \sigma^2(t_k, \hat{X}_{t_k})\Delta t_k\right)$$

Формула Фейнмана-Каца: мотивировка

- Процесс цены X_t:
$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$
- Случайная выплата, зависящая от цены X_T: $Y_T = \Phi(X_T)$.
- Ожидание выплаты в момент t:
$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t\right]$$
- В силу марковости:
$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T)|X_t\right] = f(t, X_t)$$
для некоторой функции $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Постановка задачи

Найти функцию $f(t, x)$ такую, что:
$$f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$$

Формула Феймана-Каца

- Предположим, что $f(t, x)$ гладкая, тогда по формуле Ито:

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_t^Y &= f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\mu(t, X_t) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t) \\ \sigma_t^Y &= f_x(t, X_t)\sigma^2(t, X_t) \end{aligned}$$

- Y_t – мартингал Леви, поэтому $\mu_t^Y = 0$, откуда:

$$\begin{aligned} & f_t(t, x) + f_x(t, x)\mu(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x) = 0 \\ & f(T, x) = \Phi(x) \end{aligned}$$

Формула Феймана-Каца

Пусть X_t удовлетворяет СДУ $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$.

Теорема

- Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет УРЧП:

$$f_t(t,x) + f_x(t,x)\mu(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x) = 0$$
$$f(T, x) = \Phi(x)$$

  Тогда:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = f(t, X_t)$$

- Пусть $f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$. Тогда $f(t, x)$ удовлетворяет уравнению:

$$f_t(t,x) + f_x(t,x)\mu(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x) = 0$$
$$f(T, x) = \Phi(x)$$

Пример

Решить УРЧП:

$$f_t(t, x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t, x) = 0$$
$$f(T, x) = x^2$$

Пример

Решить УРЧП:

$$f_t(t,x) + 0.5 \cdot f_{xx}(t,x) = 0$$
$$f(T,x) = x^2$$

- $\mu(t,x) = 0,\ \sigma(t,x) = 1 \to X_t = B_t$.
- По формуле Феймана-Каца:

$$f(t,x) = \mathbb{E}[B_T^2 | B_t = x] = \mathbb{E}[(x + (B_T - B_t))^2 | B_t = x] = \mathbb{E}(x+\xi)^2$$

  где $\xi \sim N(0, T-t)$.
- Отсюда:

$$f(t,x) = x^2 + (T-t)$$

Инфинитезимальный оператор

Пусть задано стохастическое дифф. уравнение:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Определение

Дифференциальный оператор A, действующий на гладкие функции $h(x)$ следующим образом:

$$Ah(x) = \mu(t, x)\frac{\partial h}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x)$$

называется инфинитезимальным оператором.

Формулу Ито можно записать как:

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + Af\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dW_t$$

Формула Феймана-Каца

Пусть X_t удовлетворяет СДУ $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$,
A – инфинитезимальный оператор процесса X_t.

Теорема

- Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет УРЧП:

$$f_t(t, x) + Af = 0$$
$$f(T, x) = \Phi(x)$$

  Тогда:

$$Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t] = f(t, X_t)$$

- Пусть $f(t, x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$. Тогда $f(t, x)$ удовлетворяет уравнению:

$$f_t(t, x) + Af = 0$$
$$f(T, x) = \Phi(x)$$

Обратное уравнение Колмогорова

- Пусть $\Phi(x) = \delta(x - y)$ – дельта-функция.
- Переходная плотность

$$p(t, x; T, y) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x]$$

- $p(t, x; T, y)dy = \mathbb{P}(X_T \in [y, y + dy]|X_t = x)$.
- **Обратное уравнение Колмогорова**:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x; T, y) + Ap(t, x; T, y) = 0$$
$$p(t, x; T, y) \to \delta(x - y) \text{ при } t \to T$$

Дискретная модель

- Однородная марковская цепь. Переходные веростноятс:
$$\pi(x,y) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x)$$
- Динамика функций:
$$f(t,x) = \mathbb{E}(\Phi(X_T)|X_t = x)$$
$$f(t,x) = \mathbb{E}(f(t+1, X_{t+1})|X_t = x) = \sum_y \pi(x,y) f(t+1,y)$$
- В матричной форме:
$$\vec{f}_t = \pi \vec{f}_{t+1}$$
- Динамика маргинального распределения:
$$p_t(x) = \mathbb{P}(X_t = x) = \sum_y \mathbb{P}(X_t = x | X_{t-1} = y)\mathbb{P}(X_{t-1} = y) = \sum_y \pi(y,x) p_{t-1}(y)$$
- В матричной форме:
$$\vec{p}_t = \pi^\top \vec{p}_{t-1}$$

Прямое уравнение Колмогорова

- Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

- Инфинитезимальный оператор процесса X_t:

$$Ah(x) = \mu(t, x)\frac{\partial h}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x)$$

- $p(s, y)$ – плотность распределения с.в. X_s в точке y
- $h(s, y)$ – произвольная гладкая финитная функция, $0 \leq s \leq t$.
- Формула Ито:

$$h(t, X_t) = h(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial s} + Ah\right)(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s)dB_s$$

- В силу финитности $h(t, X_t) = h(0, X_0) = 0$.

Прямое уравнение Колмогорова

- Возьмем слева и справа мат. ожидание:

$$\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial s} + Ah\right)(s, X_s)ds = 0$$

- Поменяем местами интегрирование и мат. ожидание:

$$\int_0^t ds \mathbb{E}\left(\frac{\partial h}{\partial s} + Ah\right)(s, X_s) = 0$$

- Запишем мат. ожидание как интеграл по плотности:

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(s, y)\left(\frac{\partial h}{\partial s} + Ah\right)(s, y) = 0$$

Прямое уравнение Колмогорова

- Проинтегрируем по частям:

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} h(s,y)\left(-\frac{\partial p}{\partial s} + A^* p\right)(s,y) = 0$$

где сопряженный оператор A^*:

$$A^* h = -\frac{\partial\left(\mu(t,x)\cdot h(x)\right)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\sigma^2(t,x)h(x)\right)}{\partial x^2}$$

- В силу произвольности $h(s,y)$ получим **прямое уравнение Колмогорова**:

$$-\frac{\partial p}{\partial s}(s,y) + A^* p(s,y) = 0$$

Прямое уравнение Колмогорова

Пусть X_t удовлетворяет СДУ $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, A – инфинитезимальный оператор процесса X_t, A^* – его сопряженный.

Теорема

Пусть $p(s, y)$ – плотность распределения с.в. X_s в точке y. Тогда $p(s, y)$ удовлетворяет уравнению:

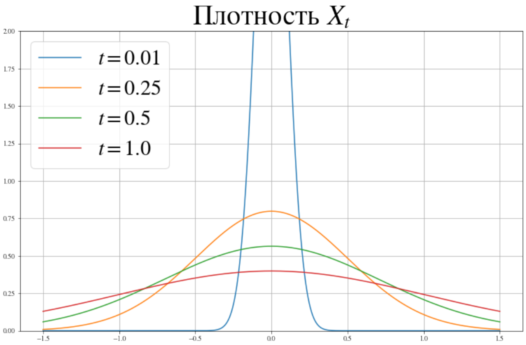
$$-\frac{\partial p}{\partial s}(s, y) + A^* p(s, y) = 0$$

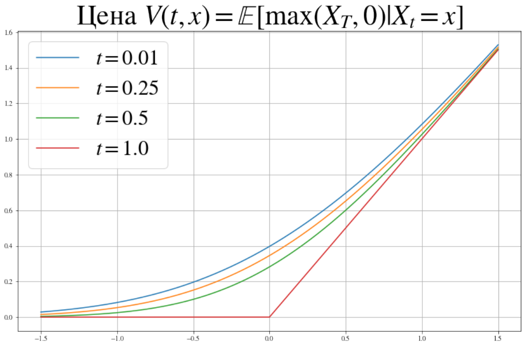
с начальными условиями:

$$p(s, y) \to \delta(y - X_0), \; s \to +0$$

Уравнение Колмогорова и формула Феймана-Каца

- Уравнение Колмогорова: динамика плотности вперёд во времени
- Уравнение (формула) Феймана-Каца: динамика УМО назад во времени





Прямое уравнение Колмогорова: пример

- $X_t = B_t$. Прямое уравнение Колмогорова на плотность $p(t, x)$:

$$p_t = 0.5 p_{xx}$$
$$p(0, x) = \delta(x - x_0)$$

- Уравнение на характеристическую функцию $\phi(t, k) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x) e^{ikx} dx$:

$$\phi_t = -0.5 k^2 \phi$$
$$\phi(0, k) = e^{ikx_0}$$

- Решение:

$$\phi(t, k) = \exp\left(ikx_0 - \frac{tk^2}{2} \right)$$

- Восстановление плотности:

$$p(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t, k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2t} \right)$$

Приложения

Прямое уравнение Колмогорова: пример

- Пусть $X_t = B_t$
- $\mu(t,x) = 0, \ \sigma(t,x) = 1$
- $A = A^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
- Обратное уравнение Колмогорова на плотность $p(t,x)$:

$$p_t = \frac{1}{2} p_{xx}$$

- Ищем решение в автомодельном виде: $p(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} g(\xi)$ где $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$.
- $p_x = \dfrac{g'}{t}, p_{xx} = \dfrac{g''}{t^{3/2}}$
- $p_t = -g'\dfrac{x}{2t} - g\dfrac{1}{2t^{3/2}} = -\dfrac{(g'\xi + g)}{2t^{3/2}}$
- Подставляем в уравнение:

$$-\frac{(g'\xi + g)}{2t^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{g''}{t^{3/2}}$$

Прямое уравнение Колмогорова: пример

- Подставляем в уравнение:

$$-\frac{(g'\xi + g)}{2t^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{g''}{t^{3/2}}$$

- Переносим всё в одну сторону:

$$g'' + g'\xi + g = 0$$
$$g'' + (g\xi)' = 0$$
$$g' + g\xi = 0$$

- Итого:

$$g = C\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

- Из условий нормировки:

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

Уравнение Колмогорова: численное решение

- Введём сетку по времени и по пространству

$$t_n = n \cdot \Delta, \ x_m = m \cdot h$$

- Введём сеточные функции

$$p_m^n = p(t_n, x_m)$$

- Аппроксимуруем производные:

$$p_t(t_n, x_m) \approx \frac{p_m^{n+1} - p_m^n}{\Delta}, \ p_{xx}(t_n, x_m) \approx \frac{p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n}{h^2}$$

- Уравнение:

$$\frac{p_m^{n+1} - p_m^n}{\Delta} = \frac{\sigma^2}{2h^2}\left(p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n\right)$$

- Выразим p_m^{n+1}:

$$p_m^{n+1} = p_m^n + \frac{\Delta\sigma^2}{2h^2}\left(p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n\right)$$

Уравнение Колмогорова: численное решение

- Выразим p_m^{n+1}:

$$p_m^{n+1} = p_m^n + \frac{\Delta\sigma^2}{2h^2}\left(p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n\right)$$

- Пусть $h^2 = \Delta\sigma^2$.

$$p_m^{n+1} = \frac{p_{m+1}^n + p_{m-1}^n}{2}$$