



Основные виды деривативов



План

- Абсолютное и относительное ценообразование
- Деривативы: определение и примеры
- Ключевые понятия финансовой математики: безарбитражность и репликация
- Форварды
- Опционы



Абсолютный прайсинг

- Контракт. $\omega \in \{\text{орёл, решка}\}$ -- монетка.

$$\xi = \begin{cases} 120, \omega = \text{орёл} \\ 80, \omega = \text{решка} \end{cases}$$

- За сколько готовы купить?
- Функция полезности $u(x)$
- Cash equivalent:

$$\begin{aligned} u(v) &= \mathbb{E}u(\xi) \\ v &= u^{-1}(\mathbb{E}u(\xi)) \end{aligned}$$

- v – сумма денег, которая эквивалента контракту ξ с точки зрения полезности



Относительный прайсинг

- Контракт: платит стоимость акции в момент T .
$$S_T = \begin{cases} 120, & \omega = \text{орёл} \\ 80, & \omega = \text{решка} \end{cases}$$
- Стоимость акции сегодня $S_0 = 100$
- Какая справедливая стоимость контракта?



Относительный прайсинг

- Контракт: платит стоимость акции в момент T .

$$S_T = \begin{cases} 200, \omega = \text{орёл} \\ 80, \omega = \text{решка} \end{cases}$$

- Стоимость акции сегодня $S_0 = 100$
- Какая справедливая стоимость контракта?
- Репликация: можем купить акцию сегодня за S_0 , в T продать акцию за S_T . Цена контракта S_0
- Арбитраж: если готовы купить контракт за $\bar{S} = 130$, то:
 - Продаём контракт за 130
 - Покупаем акцию за 100
 - В T продаём акцию, отдаём пэйофф
 - 30 – безрисковая прибыль.
- Если можем реплицировать, не нужна функция полезности

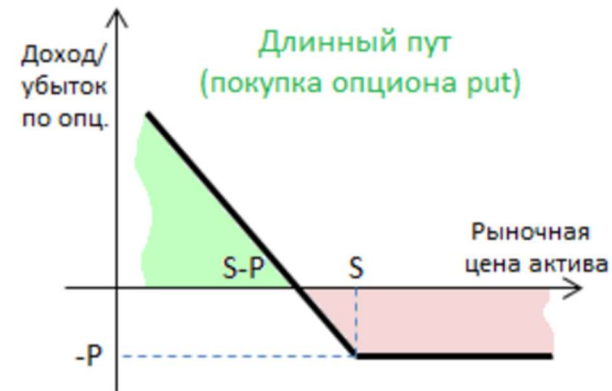
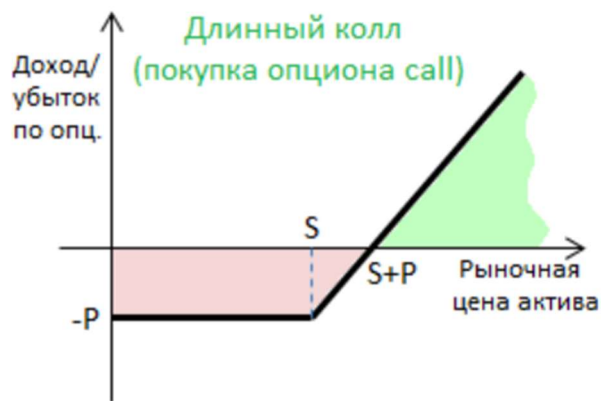


Деривативы

- Дериватив (производный финансовый инструмент) -- договор (контракт), по которому стороны получают право или обязуются выполнить некоторые действия в отношении базового актива. Обычно предусматривается возможность купить, продать, предоставить, получить некоторый товар или ценные бумаги.
- Форвард – обязательство купить/продать заданный актив в момент времени T в будущем по фиксированной цене K
- (Европейский) опцион Call/Put – право купить/продать заданный актив в момент времени T в будущем по фиксированной цене K
- T – дата экспирации. K – страйк.

Деривативы: математика

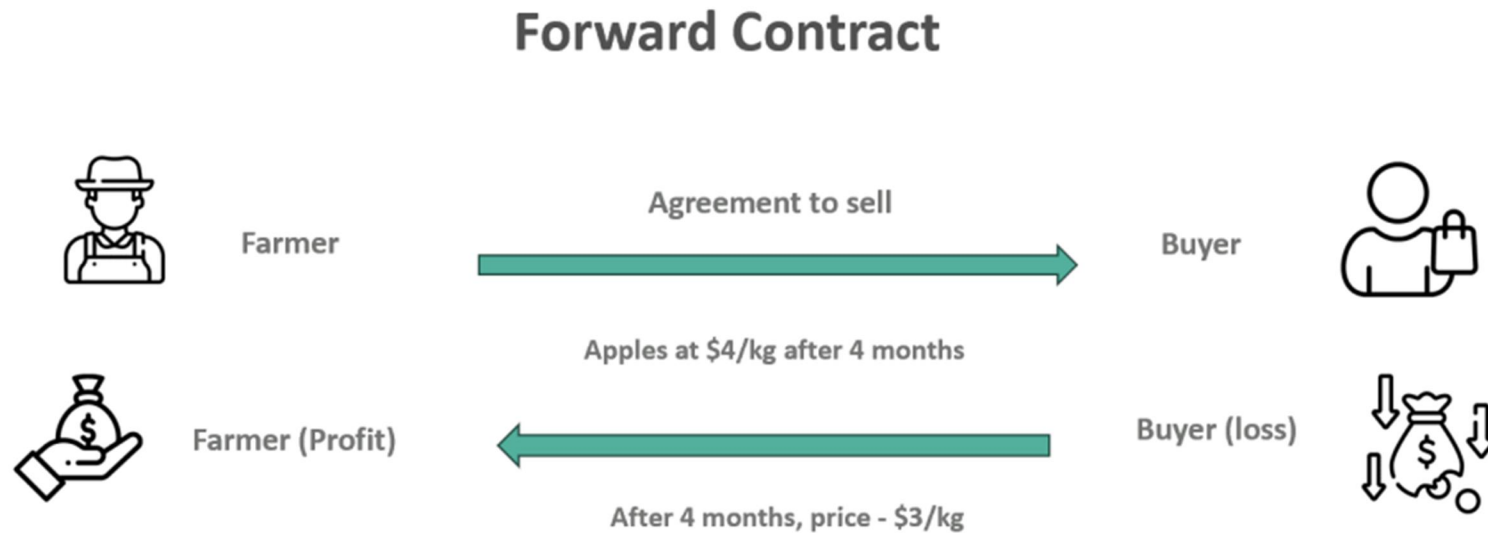
- Дериватив (производный финансовый инструмент) – контракт, который выплачивает случайную сумму денег $\Phi(S_T)$, зависящую от стоимости базового актива, в момент времени T .
- Форвард:
 - $\Phi(S_T) = S_T - K$ – long forward
 - $\Phi(S_T) = K - S_T$ – short forward
- Опцион:
 - $\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+ - \text{call}$
 - $\Phi(S_T) = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+ - \text{put}$





Зачем нужны деривативы?

- Хеджирование рисков: фиксируем цену сделки в будущем.



Примеры: опцион пополнения депозита

Без пополнения

Сколько хотите вложить

10 000 ₽

Минимальная сумма вклада 10 000 ₽

На какой срок

3 мес. 6 мес. 1 год 1,5 года 2 года

С пополнением ☐

С частичным снятием ☐

19,20%	+ 478,68 ₽
доходность, годовых	доход по вкладу

С пополнением

Сколько хотите вложить

10 000 ₽

Минимальная сумма вклада 10 000 ₽

На какой срок

3 мес. 6 мес. 1 год 1,5 года 2 года

С пополнением ☒

Максимальная сумма вклада с учетом пополнений 1 000 000 ₽

С частичным снятием ☐

13,70%	+ 341,56 ₽
доходность, годовых	доход по вкладу

Примеры: бронирование билета

Как забронировать авиабилет

Хорошие авиабилеты быстро раскупают. Иногда можно упустить выгодную цену или удобный рейс, если не купить билет сразу. На Туту вы можете забронировать понравившийся билет, а потом выкупить заказ или отменить.

Что нужно знать о бронировании

- Стоимость услуги — от 199 ₽, она зависит от цены билета.
- На время бронирования цена билета зафиксирована.
- Срок бронирования для каждого билета свой, он зависит от перевозчика.
- Услуга доступна не для всех авиабилетов. Например, нельзя забронировать билет, если вылет сегодня.
- Если не выкупить билет в срок, бронь отменится автоматически. Мы не списываем деньги за невыкупленный билет и за отмену бронирования.
- Стоимость услуги бронирования не возвращается, даже если вы отменили бронь.

Премия(цена) опциона

Страйк

Право, а не
обязательство



Линейность цены

- Φ_1, Φ_2 – платёжные обязательства
- $\Pi[\Phi]$ – цена платёжного обязательства. Функционал.
- $\Pi[\Phi_1 + \Phi_2] = \Pi[\Phi_1] + \Pi[\Phi_2]$
- Если не так, то арбитраж:
- Если $\Pi[\Phi_1 + \Phi_2] > \Pi[\Phi_1] + \Pi[\Phi_2]$, продаём $\Phi_1 + \Phi_2$, покупаем Φ_1, Φ_2 , разница – безрисковая прибыль.



Арбитражный портфель

- Портфель X_t арбитражный, если:

$$\begin{aligned}X_0 &= 0 \\P(X_T \geq 0) &= 1 \\P(X_T > 0) &> 0\end{aligned}$$

- 0 вложений, ненулевая вероятность положительной выплаты
- Безрисковая прибыль.



Цена форварда

- Активы: акция S_t
- Банковский счёт: можем класть деньги на депозит/брать в кредит под ставку r .
- $\Pi[\Phi(S_T)]$ -- цена дериватива с пэйоффом $\Phi(S_T)$
- $\Pi[S_T] = S_0$ -- можем реплицировать покупкой акции в момент $t = 0$
- $\Pi[K] = e^{-rT} K$ -- можем реплицировать, положив на депозит $e^{-rT} \cdot K$ в момент $t = 0$
- $\Pi[S_T - K] = \Pi[S_T] - \Pi[K] = S_0 - e^{-rT} \cdot K$



Форвардная цена

- Форвардная цена F_T -- страйк форварда такой, что $\Pi[S_T - F_T] = 0$.
- $F_T = ?$
- $\Pi[S_T - F_T] = S_0 - e^{-rT} \cdot F_T \rightarrow F_T = S_0 e^{rT}$



Call-Put Parity

- Реплицировать пут-опцион через колл-опцион и форвард
- Пэйоффы:

$$(S_T - K)^+ = (K - S_T)^+ + S_T - K$$

- Цены:

$$Call(K) = Put(K) + Forw(K)$$

- Следствие:

$$Call(K) \geq Forw(K) = S_0 - e^{-r} K$$

так как $Put(K) \geq 0$



Опционные стратегии: straddle

- Реплицировать пэйофф $\Phi(S_T) = |S_T - K|$
- Торговля волатильностью



Неравенства

- Пусть $C(K)$ – цена колл-опциона со страйком K , $P(K)$ -- цена пут-опциона.
- Доказать, что $C(K)$ монотонно убывает со страйком
- Доказать, что $P(K)$ монотонно возрастает со страйком
- Доказать, что $C(K), P(K)$ – выпуклая функция (дз)
- Пусть $r = 0$. Доказать, что $C(K, T_1) \leq C(K, T_2)$ при $T_1 \leq T_2$.
- Указание: предположите противное, постройте арбитражный портфель. Воспользуйтесь неравенством(слайд Call-Put parity):

$$C_t(K, T) \geq (S_t - K)^+$$

где $C_t(K, T)$ -- цена колл-опциона в момент $t \leq T$.



Американские опционы

- Американский call-put опцион – право купить базовый актив по фиксированной цене K в произвольный момент времени $t \in [0, T]$

$$C^E(K, T) \leq C^A(K, T)$$

$$P^E(K, T) \leq P^A(K, T)$$

- Дома: доказать, что для акции без дивидендов цена американского колл-опциона совпадает с ценой европейского колл-опциона при $r \geq 0$
- Указание:

$$C^E(K, T; t) \geq S_t - e^{-r(T-t)}K \geq S_t - K$$



Азиатский опцион

$$\Phi(\{S_t\}_{t \leq T}) = (A_T - K)^+$$

где $A_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ -- среднее значение цены за период

- Пэйофф зависит от траектории
- Зачем?
- Пусть $\sigma_u^2 = \text{var}(S_u)$ -- монотонно возрастает как функция от u
- Доказать, что

$$\text{var}(A_T) \leq \text{var}(S_T)$$

Указание:

Покажите, что

$$\text{var}(T \cdot A_T) = \int_0^T \int_0^T \text{cov}(S_u, S_v) du dv$$

И воспользуйтесь неравенством Коши-Буняковского.