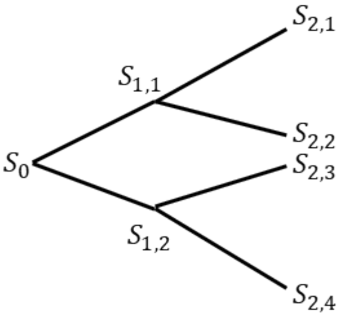
Лекция 9. Динамические модели: продолжение

May 19, 2025

Постановка

- Динамика $t = 0, 1, \ldots, T$
- В каждый момент времени можем перейти в одно из b состояний. Состояния образуют дерево
- $S_{t,j}$ – j-ое состояние мира в момент времени t
- b – branching number: число состояний, достижимых из текущего
- В момент t доступно b^t состояний



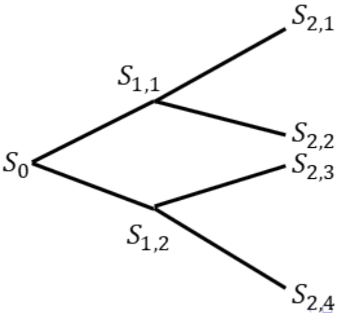
Постановка: вероятностное пространство

- Вероятностная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, \dots, b\}^T$
- $\omega \in \Omega,\ \omega = (\omega_0, \dots, \omega_{T-1})$.
- $\omega_t = k$ – в момент t перешли в состояние $k \in \{1, \dots, b\}$.
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$ – σ-алгебра событий
- $\mathbb{P}(\{\omega\}) = b^{-T}$

Пример

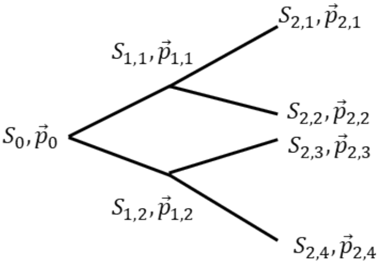
- $b = 2$, $T = 2$
- События:

$$S_{2,1} = \{(1,1)\},\ S_{2,2} = \{(1,2)\}$$
$$S_{2,3} = \{(2,1)\},\ S_{2,4} = \{(2,2)\}$$
$$S_{1,1} = \{(1,1),(1,2)\},\ S_{1,2} = \{(2,1),(2,2)\}$$
$$S_0 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$



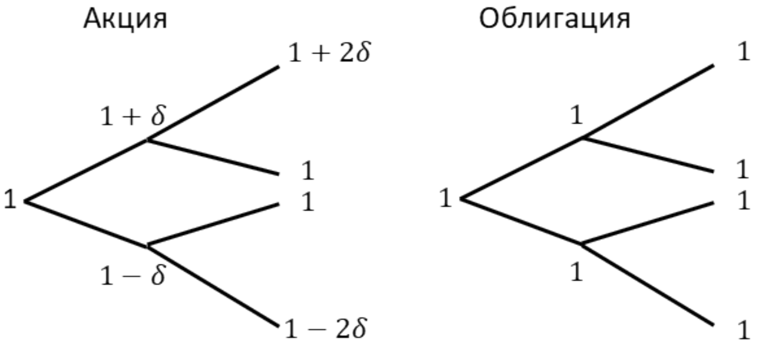
Активы

- n активов
- $p = (p_0, \ldots, p_T)$ – вектор цен активов, векторный случайный процесс.
- p_t^i – цена i-го актива в момент t, с.в.
- $p_{t,j}^i$ – цена i-го актива в состоянии $S_{t,j}$, число



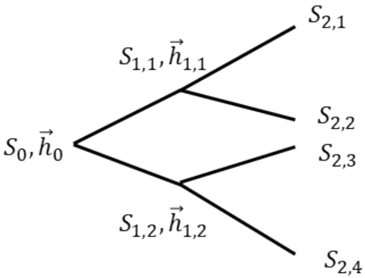
Пример

Два актива: акция и облигация.



Портфели

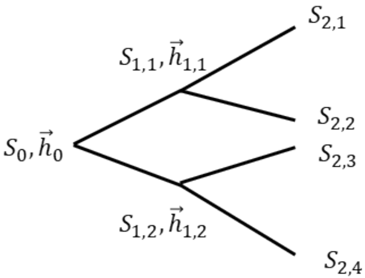
- Портфель h – векторный случайный процесс $h = (h_0, \dots, h_{T-1}, h_T)$.
- h_t^i – доля i-го актива в портфеле h в периоде $[t, t+1)$
- $h_T = 0$ – в последний момент продаём весь портфель
- Множество портфелей образует пространство альтернатив



Портфели

- $h = (h_1, \ldots, h_{T-1}, h_T)$ – портфель
- Портфель определяется весами в каждом узле дерева (кроме терминальных)
- Размерность пространства портфелей:

$$N_h = n_{assets} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} b^t = n_{assets} \frac{b^T - 1}{b - 1}$$



Цены

- $h = (h_1, \dots, h_{T-1})$ – портфель
- Цена портфеля случайный процеесс $V_t^h = \langle h_t, p_t \rangle$
- Цена портфеля в $t+1$ до ребалансировки: $\langle h_t, p_{t+1} \rangle$
- Цена после ребалансировки: $\langle h_{t+1}, p_{t+1} \rangle$
- Разность задаёт поток портфеля в момент $t+1$

$$f_{t+1}^h = \langle p_{t+1}, h_t - h_{t+1} \rangle$$

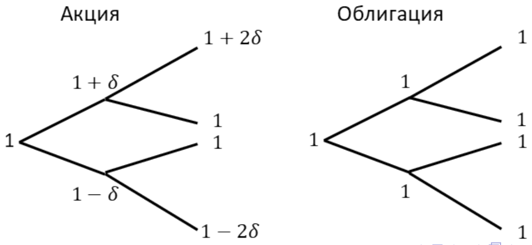
Пример

Портфель: шортим облигацию, покупаем акцию.

$$h = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Потоки и цены портфеля:

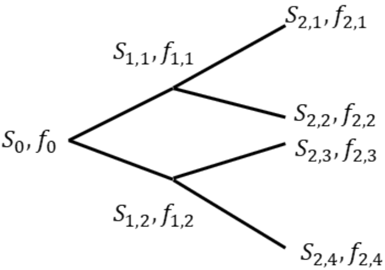
$$f^h = \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\delta \\ 0 \\ 0 \\ -2\delta \end{pmatrix} \right), \; V^h = \left(0, \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$



Потоки

- Поток $f = (f_1, \ldots, f_T)$ – случайный процесс
- Поток однозначно определяется своими значениями в узлах дерева (кроме корня)
- Размерность пространства потоков:

$$N_f = \sum_{t=1}^{T} b^t = b \cdot \frac{b^T - 1}{b - 1}$$



Постановка

- Пространство альтернатив – портфели $V_H = \mathbb{R}^{N_h}$
- Пространство потоков $V_F = \mathbb{R}^{N_f}$
- Задача – по произвольному потоку f найти реплицирующий портфель h и его стоимость в момент t:

$$q_t(f) = V_t^h$$

Основные определения

- Закон одной цены: портфели с одинаковыми потоками имеют одинаковую цену:

$$\left(\forall t \; f_t^h = f_t^g\right) \rightarrow \left(\forall t \; V_t^h = V_t^g\right)$$

- Полнота: любой поток реплицируем портфелем из торгуемых активов.

Необходимое условие полноты

- Поток однозначно определяется своими значениями в каждом узле дерева
- Размерность пространства потоков:

$$N_f = \sum_{t=1}^{T} b^t = b\frac{b^T - 1}{b - 1}$$

- Портфель определяется весами в каждом узле дерева (кроме терминальных)
- Размерность пространства альтернатив(портфелей):

$$N_h = n_{assets} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} b^t = n_{assets}\frac{b^T - 1}{b - 1}$$

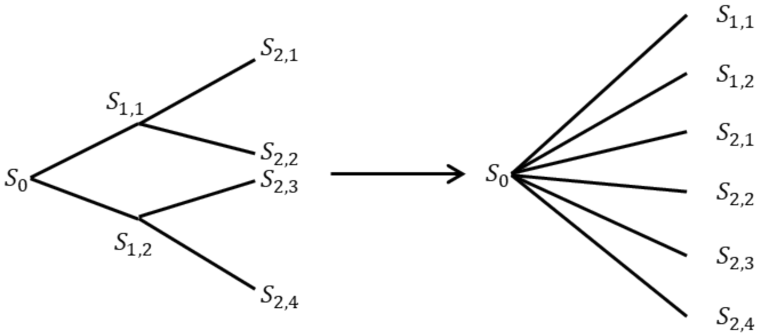
- Для полноты необходимо $N_h \geq N_f$, откуда $n_{assets} \geq b$.

Сведение к одношаговой модели

- Матрица выплат активов:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^1_{2,1} & p^1_{2,2} & p^1_{2,3} & p^1_{2,4} \\ 0 & 0 & p^2_{2,1} & p^2_{2,2} & p^2_{2,3} & p^2_{2,4} \end{pmatrix}^\top$$

- Для двух активов рынок не полный.



Базис в пространстве портфелей

- Пространство альтернатив – портфели $V_H = \mathbb{R}^{N_h}$
- Рассмотрим базисные стратегии $[i, S_{t,j}]$ – купили i-ый актив в состоянии $S_{t,j}$, продали в момент $t+1$
- Этой стратегии соответствует портфель h, у которого $h^i_{t,j} = 1$, остальные элементы нулевые.
- Поток портфеля f^h:

$$
\begin{aligned}
f^h_{t,j} &= -p^i_{t,j} \\
f^h_{t+1,j_1} &= p^i_{t+1,j_1} \\
&\vdots \\
f^h_{t+1,j_b} &= p^i_{t+1,j_b}
\end{aligned}
$$

где $j_1, \ldots, j_b$ – номера состояний, доступные из состояния $S_{t,j}$.

Базис в пространстве портфелей

- Цены базовых стратегий:

$$P = \left(p_0^1, p_0^2, \dots, p_0^{n_{assets}}, 0, \dots, 0\right)$$

- Матрица потоков F базисных стратегий:

стратегия / состояние	$[1, S_0]$	$[2, S_0]$	$[1, S_{1,1}]$	$[2, S_{1,1}]$	$[1, S_{1,2}]$	$[2, S_{1,2}]$
S_0	$-p^1(S_0)$	$-p^2(S_0)$				
$S_{1,1}$	$p^1(S_{1,1})$	$p^2(S_{1,1})$	$-p^1(S_{1,1})$	$-p^2(S_{1,1})$		
$S_{1,2}$	$p^1(S_{1,2})$	$p^2(S_{1,2})$			$-p^1(S_{1,2})$	$-p^2(S_{1,2})$
$S_{2,1}$			$p^1(S_{2,1})$	$p^2(S_{2,1})$		
$S_{2,2}$			$p^1(S_{2,2})$	$p^2(S_{2,2})$		
$S_{2,3}$					$p^1(S_{2,3})$	$p^2(S_{2,3})$
$S_{2,4}$					$p^1(S_{2,4})$	$p^2(S_{2,4})$

Пример: полнота

Два актива: акция и облигация

$$Fh = f \to h = F^{-1} f$$

$$\begin{pmatrix} 1+\delta & 1 & -1-\delta & -1 & 0 & 0 \\ 1-\delta & 1 & 0 & 0 & -1+\delta & -1 \\ 0 & 0 & 1+2\delta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\delta & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\delta} & \frac{-1}{2\delta} & \frac{1}{4\delta} & \frac{1}{4\delta} & \frac{-1}{4\delta} & \frac{-1}{4\delta} \\ \frac{\delta-1}{2\delta} & \frac{\delta+1}{2\delta} & \frac{\delta-1}{4\delta} & \frac{\delta-1}{4\delta} & \frac{\delta+1}{4\delta} & \frac{\delta+1}{4\delta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\delta} & \frac{-1}{2\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2\delta} & \frac{2\delta+1}{2\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\delta} & \frac{-1}{2\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\delta-1}{2\delta} & \frac{1}{2\delta} \end{pmatrix}$$

Пример: риск-нейтральная мера

- Два актива: акция и облигация

$$P = F^T Q \to Q = (F^T)^{-1} P$$

- Q_j – цены базовых потоков
- $q(f) = \frac{1}{2}(f_{1,1} + f_{1,2}) + \frac{1}{4}(f_{2,1} + f_{2,2} + f_{2,3} + f_{2,4}) = \sum_t \mathbb{E}_0^Q f_t$

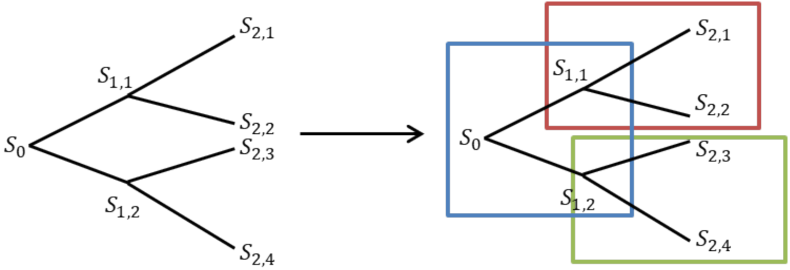
$$\left(\begin{pmatrix} 1+\delta & 1 & -1-\delta & -1 & 0 & 0 \\ 1-\delta & 1 & 0 & 0 & -1+\delta & -1 \\ 0 & 0 & 1+2\delta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\delta & 1 \end{pmatrix}^T\right)^{(-1)} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Связь с одноперiодной моделью

- Многошаговый рынок полный $\Leftrightarrow$ одношаговый рынок (F, p) полный
- Многошаговый рынок удовлетворяет БА(ЗОЦ) $\Leftrightarrow$ одношаговый рынок (F, p) удовлетворяет БА(ЗОЦ)

Сведение к одношаговой модели

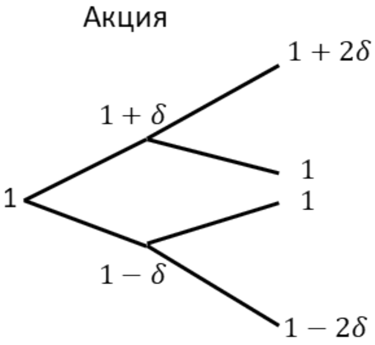
- Сводим к последовательности одношаговых моделей
- Векторы цен зависят от состояния $p_{t,j} = p(S_{t,j}) \in \mathbb{R}^n$
- Матрицы потоков тоже: $F_{t,j} = F(S_{t,j}) \in \mathbb{R}^{b \times n}$
- $F_{t,j} = [p_{t+1,j_1}, \dots, p_{t+1,j_b}]^T$
- $j_1, \dots, j_b$ – номера состояний, доступных из $S_{t,j}$.

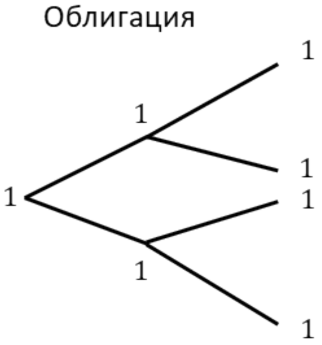


Пример

- Два актива: акция и облигация.
- $p(S_0) = (1,1)^T,\ p(S_{1,1}) = (1+\delta, 1)^T, p(S_{1,2}) = (1-\delta, 1)^T$

$$F(S_0) = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix},\ F(S_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1+2\delta & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ F(S_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2\delta & 1 \end{pmatrix}$$





Торговые стратегии

- Стратегия $[i, S_{t,j}]$: покупаем i-ый актив в состоянии $S_{t,j}$, продаём в $t+1$
- Матрица потоков:

стратегия / состояние	$[1,S_0]$	$[2,S_0]$	$[1,S_{1,1}]$	$[2,S_{1,1}]$	$[1,S_{1,2}]$	$[2,S_{1,2}]$
S_0	$-p^1(S_0)$	$-p^2(S_0)$				
$S_{1,1}$	$p^1(S_{1,1})$	$p^2(S_{1,1})$	$-p^1(S_{1,1})$	$-p^2(S_{1,1})$		
$S_{1,2}$	$p^1(S_{1,2})$	$p^2(S_{1,2})$			$-p^1(S_{1,2})$	$-p^2(S_{1,2})$
$S_{2,1}$			$p^1(S_{2,1})$	$p^2(S_{2,1})$		
$S_{2,2}$			$p^1(S_{2,2})$	$p^2(S_{2,2})$	$F(S_{1,2})$	
$S_{2,3}$					$p^1(S_{2,3})$	$p^2(S_{2,3})$
$S_{2,4}$	$F(S_0)$		$F(S_{1,1})$		$p^1(S_{2,4})$	$p^2(S_{2,4})$

Операторы ценообразования

- В каждом узле свои операторы ценообразования
- Функционал прайсинга $q_{t,j}$:

$$p_{t,j} = F_{t,j}^{\top} q_{t,j}$$

- Стох. дисконт фактор:

$$m_{t,j} = \frac{q_{t,j}}{\pi_{t,j}}$$

- Дисконт-фактор:

$$d_{t,j} = q_{t,j}^{j_1} + \ldots + q_{t,j}^{j_b}$$

- Риск-нейтральная мера:

$$\nu_{t,j} = \frac{q_{t,j}}{d_{t,j}}$$

Прайсинг в многошаговой модели

- В момент $t = T - 1$:

$$V^f_{T-1}(S_{T-1,j}) = f_{T,j_1} q^{j_1}_{T-1,j} + \ldots + f_{T,j_b} q^{j_b}_{T-1,j} = d_{T-1,j} \mathbb{E}^Q_{T-1,j} f_T$$

- $\mathbb{E}^Q_{T-1,j}$ – мат. ожидание в риск-нейтральной мере при условии $S(T-1, j)$
- В терминах процессов:

$$V^f_{T-1} = d_{T-1} \mathbb{E}^Q_{T-1} f_T$$

- В произвольный момент t:

$$V^f_t = d_t \mathbb{E}^Q_t \left[f_{t+1} + V^f_{t+1} \right]$$

$$V^f_t = \mathbb{E}^Q_t \left[d_t f_{t+1} \right] + \mathbb{E}^Q_t \left[\mathbb{E}^Q_{t+1} \left[d_t d_{t+1} f_{t+2} \right] \right] + \ldots$$

Прайсинг в многошаговой модели

- Введём $D_{s+1} = d_0 \dots d_s$
- $\dfrac{D_{s+1}}{D_t} = d_t d_{t+1} \dots d_s$
- Телескопическое свойство УМО:

$$V_t^f = \mathbb{E}_t^Q \left[\frac{D_{t+1}}{D_t} f_{t+1} \right] + \mathbb{E}_t^Q \left[\frac{D_{t+2}}{D_t} f_{t+2} \right] + \dots + \mathbb{E}_t^Q \left[\frac{D_T}{D_t} f_T \right]$$

Прайсинг в риск-нейтральной мере

$$D_t \cdot V_t^f = \mathbb{E}_t^Q \sum_{s>t} D_s f_s$$

Прайсинг в многошаговой модели

- Введём $M_{s+1} = m_0 \dots m_s$
- $\dfrac{M_{s+1}}{M_t} = m_t m_{t+1} \dots m_s$

$$V_t^f = \mathbb{E}_t \left[m_t (f_{t+1} + V_{t+1}^f) \right] =$$

$$= \mathbb{E}_t \left[\frac{M_{t+1}}{M_t} f_{t+1} \right] + \mathbb{E}_t \left[\frac{M_{t+2}}{M_t} f_{t+2} \right] + \dots + \mathbb{E}_t \left[\frac{M_T}{M_t} f_T \right]$$

Прайсинг в реальной мере

$$M_t \cdot V_t^f = \mathbb{E}_t \sum_{s>t} M_s f_s$$

Связь с однопериодными моделями

- Многопериодный рынок полный $\Leftrightarrow$ все однопериодные рынки $(F_{t,j}, p_{t,j})$ полные.
- Многопериодный рынок ЗОЦ(БА) $\Leftrightarrow$ все однопериодные рынки $(F_{t,j}, p_{t,j})$ ЗОЦ(БА).
- В полном рынке произвольный поток можно реплицировать, комбинируя базовые стратегии $[i, S_{t,j}]$.

Связь операторов ценообразования

Теорема

Операторы ценообразования эквиваленты:

$$V_t^f = \mathbb{E}_t^Q \sum_{s>t} \frac{D_s}{D_t} f_s = \mathbb{E}_t \sum_{s>t} \frac{M_s}{M_t} f_s =^* V_t^h$$

где h – портфель, реплицирующий поток f.

Мартингальное свойство цен

- Процесс $\{\xi_t\}$ называется мартингалом, если $\mathbb{E}_t \xi_{t+1} = \xi_t$
- Рассмотрим портфель h, который держит i-ый актив до момента T
- $f_T^h = p_T^i, f_s^h = 0, s < T$
- Цена портфеля:

$$V_t^h = p_t^i = V_t^{f^h} = \mathbb{E}_t^Q \frac{D_T}{D_t} p_T^i$$

$$\tilde{p}_t^i = D_t p_t^i = \mathbb{E}_t^Q D_T p_T^i$$

- Дисконтированная цена – мартингал в риск-нейтральной мере:

$$\mathbb{E}_t^Q \tilde{p}_{t+1}^i = \mathbb{E}_t^Q \left[\mathbb{E}_{t+1}^Q D_T p_T^i \right] = \mathbb{E}_t^Q D_T p_T^i = \tilde{p}_t^i$$

Пример (Cox-Ross-Rubinstein binomial model)

- Два актива, акция и облигация
- Цена акции:

$$p^1_{t+1} = \begin{cases} p^1_t \cdot u, & \text{с вероятностью } 0.5 \\ p^1_t \cdot d & \text{с вероятностью } 0.5 \end{cases},$$

  $d < u$, $p^1_0 = s$.
- Цена облигации

$$p^2_{t+1} = p^2_t \cdot R$$

  $p^2_T = 1 \to p^2_t = R^{-(T-t)}$.
- При каких условиях на d, u, R рынок безарбитражен?
- Найти операторы ценообразования в каждый момент времени: q_t, d_t, ν_t, m_t
- Найти цену деривативa, который платит K, т.е. потока $(p^1_T - K)^+$ в момент T и построить реплицирующий портфель.

Пример (Cox-Ross-Rubinstein binomial model)

- $F_t^T q_t = p_t$

$$F_t = \begin{pmatrix} p_t^1 \cdot u & p_t^2 \cdot R \\ p_t^1 \cdot d & p_t^2 \cdot R \end{pmatrix}$$

- Уравнение на q_t

$$p_t^1 u q_t^1 + p_t^1 d q_t^2 = p_t^1$$
$$p_t^2 R q_t^1 + p_t^2 R q_t^2 = p_t^2$$

- $q_t = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{R-d}{u-d}, \dfrac{u-R}{u-d}\right)$, $d_t = \dfrac{1}{R}$.
- $\nu_t = \left(\dfrac{R-d}{u-d}, \dfrac{u-R}{u-d}\right)$
- $m_t = 2q_t$
- Безарбитражность при $d < R < q$.

Пример (Cox-Ross-Rubinstein binomial model)

- В момент экспирации цена равна выплате:

$$V_T = \Phi(p_T^1)$$

где $\Phi(x) = (x - K)^+$ – пэйофф опциона.

- В произвольный момент времени:

$$V_t = d_t \mathbb{E}_t^Q V_{t+1} = \frac{1}{R} \cdot (\nu_1 V_{t+1}(p_t^1 \cdot u) + \nu_2 V_{t+1}(p_t^1 \cdot d))$$

- В $t = 0$ расписываем рекурсивно, группируя слагаемые:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{R} \cdot (\nu_1 V_1(s \cdot u) + \nu_2 V_1(s \cdot d)) = \\ &= \frac{1}{R^2} \cdot (\nu_1^2 V_2(s \cdot u^2) + 2\nu_1\nu_2 V_2(s \cdot u \cdot d) + \nu_2^2 V_2(s \cdot d^2) = \\ &= \ldots = \\ &= \frac{1}{R^T} \sum_{k=0}^{T} C_T^k \nu_1^k \nu_2^{T-k} \Phi(s \cdot u^k \cdot d^{T-k}) \end{aligned}$$

Пример (Cox-Ross-Rubinstein binomial model)

- Реплицирующий портфель h_t:

$$F_t h_t = V_{t+1}$$

- Уравнения на h_t^1, h_t^2:

$$p_t^1 \cdot u \cdot h_t^1 + p_t^2 \cdot R \cdot h_t^2 = V_{t+1}(p_t^1 \cdot u)$$
$$p_t^1 \cdot d \cdot h_t^1 + p_t^2 \cdot R \cdot h_t^2 = V_{t+1}(p_t^1 \cdot d)$$

- Репликация (зависит от времени t и стейта p_t^1):

$$h_t^1 = \frac{V_{t+1}(p_t^1 \cdot u) - V_{t+1}(p_t^1 \cdot d)}{p_t^1(u-d)}$$
$$h_t^2 = \frac{uV_{t+1}(p_t^1 \cdot d) - dV_{t+1}(p_t^1 \cdot u)}{p_{t+1}^2(u-d)}$$

Сравнение одноопериодной и многопериодной моделей

	Однопериодная	Многопериодная
Временной горизонт	$t \in \{0, 1\}$	$t \in \{0, 1, \ldots, T\}$
Пространство альтернатив	Портфели активов	Динамические стратегии
Полнота	Статическая: $n_{assets} = n_{state}$	Динамическая: $n_{assets} = b$
Арбитраж	Арбитражный портфель	Арбитражные стратегии
Функционал прайсинга	$F^T q = p$	$F_t^T q_t = p_t$
SDF	$m = \frac{q}{\pi}$	$m_t = \frac{q_t}{\pi_t}$
Цены	$d\mathbb{E}^Q f = \mathbb{E}(m \cdot f)$	$V_t^f = \mathbb{E}_t \sum_{s>t} \frac{D_s}{D_t} f_s$ $V_t^f = \mathbb{E}_t \sum_{s>t} \frac{M_s}{M_t} f_s$