

Задача 1. (Оптимизация функции полезности) Решите задачу оптимизации с ограничениями.

$$\begin{cases} u(x, y) = x^\alpha y^\beta \rightarrow \max \\ p_x \cdot x + p_y \cdot y = 1 \end{cases}$$

Задача 2. (Санкт-Петербургский парадокс): Вам предложили игру, в которой последовательно кидается монетка:

1. Если орел - вы получаете 1 у.е. и игра заканчивается, если решка - переходите к следующему броску
2. Если орел - вы получаете 2 у.е. и игра заканчивается, если решка - переходите к следующему броску
3. Если орел - вы получаете 4 у.е. и игра заканчивается, если решка - переходите к следующему броску
4. ...

Найдите мат. ожидание выигрыша в игре. Найдите Cash Equivalents для функции полезности $u(x) = \log_2 x$

Задача 3. Докажите неравенство Йенсена: Пусть ξ - случайная величина, u - вогнутая функция ($u'' < 0$), тогда

$$u(\mathbb{E}\xi) \geq \mathbb{E}(u(\xi))$$

Задача 4. (Продолжение) Пусть дисперсия σ^2 случайной величины ξ мала. Решите уравнение относительно x :

$$u(x) = \mathbb{E}(u(\xi))$$

с точностью до $o(\sigma^2)$ (здесь o : o -малое)

Задача 5. Найти функции полезности с:

- постоянным абсолютным риск-неприятием $-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha = \text{const}$ (CARA)
- постоянным относительным риск-неприятием $\rho(x) = -x \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)} = \text{const}$ (CRRA)
- * линейной толерантностью $\tau(x) = -\frac{u'(x)}{u''(x)} = A + Bx$ (HARA)

Задача 6. Определить риск-премию:

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2), \quad u(x) = -e^{-\alpha x}$$