

Лекция 11. Fixed income

May 31, 2025

Операторы ценообразование в многошаговой модели

Теорема

Операторы ценообразования эквиваленты:

$$V_t^f = \mathbb{E}_t^Q \sum_{s>t} \frac{D_s}{D_t} f_s = \mathbb{E}_t \sum_{s>t} \frac{M_s}{M_t} f_s =^* V_t^h$$

где h – портфель, реплицирующий поток f .

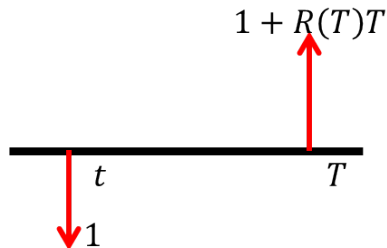
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство
- $(\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_{\overline{T}})$ – фильтрация
- Торгуются бескупонные облигации (Т-облигация) с датой погашения в $T \in \{1, 2, \dots, \overline{T}\}$
- $p_t(T) \in \mathcal{F}_t$ – цена облигации с датой погашения в T в момент t
- Свойства:

$$p_T(T) = 1,$$

$$p_t(T) = 0 \text{ при } t > T$$

Контракты: депозит

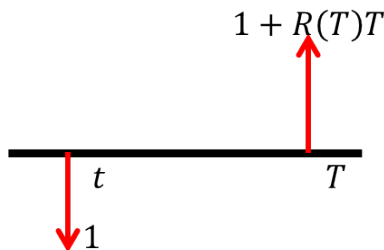
- Поток $f_T = 1 + R \cdot T$
- Реплицирующий портфель: $1 + R \cdot T$ T -облигаций
- Цена потока $V_0^f = p_0(T) \cdot (1 + R \cdot T)$



Контракты: депозит

- Цена потока $V_0^f = p_0(T) \cdot (1 + R \cdot T)$
- При какой ставке $R = R_0(T)$ депозит стоит 1?

$$R_0(T) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{p_0(T)} - 1 \right)$$



Процентные ставки

- Длинная процентная ставка в момент t на срок $T - t$:

$$R_t(T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{p_t(T)} - 1 \right)$$

- Короткая процентная ставка:

$$r_t = R_t(t + 1) = \frac{1}{p_t(t + 1)} - 1$$

- Связь цены облигации и короткой ставки:

$$p_t(t + 1) = \frac{1}{1 + r_t} = d_t \cdot \mathbb{E}_t^Q 1 \rightarrow d_t = p_t(t + 1)$$

- Цены облигаций:

$$p_t(T) = \mathbb{E}_t^Q [d_t d_{t+1} \dots d_{T-1}] = \mathbb{E}_t^Q \prod_{s \geq t}^{T-1} (1 + r_s)^{-1}$$

Контракты: Forward start deposit

- Поток $f_T = -1, f_S = 1 + F \cdot (S - T), S > T$.
- Реплицируем портфелем h с компонентами:

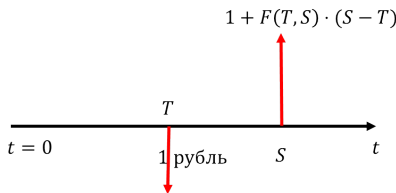
$$h^T = -1, h^S = 1 + F \cdot (S - T)$$

- Цена FSD:

$$V_0^f = -p_0(T) + (1 + F \cdot (S - T))p_0(S)$$

- Форвардная ставка:

$$F_0(T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{p_0(T)}{p_0(S)} - 1 \right)$$

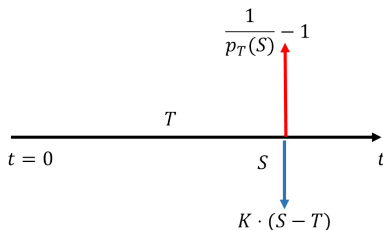


Контракты: FRA

- В момент S получаем плавающую ставку, платим фиксированную:

$$f_S = (R_T(S) - K) \cdot (S - T)$$

- Плавающая ставка $R_T(S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{1}{p_T(S)} - 1 \right) \in \mathcal{F}_T$



Контракты: FRA

- В момент S получаем плавающую ставку, платим фиксированную:

$$f_S = (R_T(S) - K) \cdot (S - T)$$

- Плавающая ставка $R_T(S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{1}{p_T(S)} - 1 \right) \in \mathcal{F}_T$
- Цена в T :

$$V_T^f = p_T(S) \cdot f_S = p_T(T) - p_T(S) \cdot (1 + K(S - T))$$

- Реплицирующий портфель в $t = 0$:

$$h^T = 1, h^S = -(1 + K(S - T))$$

- Цена в $t = 0$:

$$V_0^f = p_0(T) - p_0(S) \cdot (1 + K(S - T))$$

- Форвардная ставка $F(T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{p_0(T)}{p_0(S)} - 1 \right) -$
страйк, при котором цена равна нулю.

- Короткая форвардная ставка:

$$f_t(s) = F_t(s, s+1) = \frac{p_t(s)}{p_t(s+1)} - 1$$

- Связь с ценами:

$$p_t(s+1) = \frac{p_t(s)}{1 + f_t(s)}$$

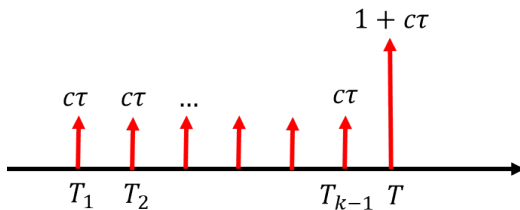
$$p_t(T) = \prod_{s \geq t}^{T-1} (1 + f_t(s))^{-1} = \mathbb{E}_t^Q \prod_{s \geq t}^{T-1} (1 + r_s)^{-1}$$

Облигация с фиксированным купоном

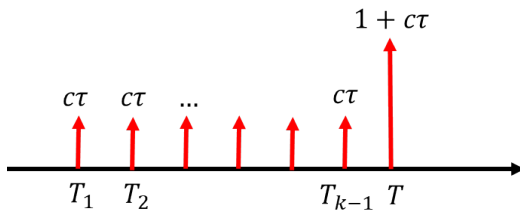
Определение

Облигация с фиксированным купоном – контракт с потоками

$$f_t = (c\tau + \delta_{t,T}) \cdot \mathbb{I}(1 \leq t \leq T)$$



Облигация с фиксированным купоном



- Реплицируем купонный платеж в момент T_i : покупаем $c\tau$ бескупонных облигаций с датой погашения T_i .
- Цена всей облигации:

$$V_0^f = \sum_{i=1}^n p_0(T_i) c\tau + p_0(T)$$

Облигация с плавающим купоном

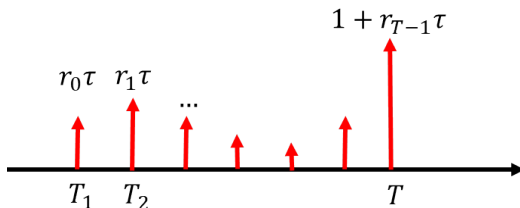
Определение

Облигация с плавающим купоном – контракт с потоками

$$f_t = (c_t\tau + \delta_{t,T}) \cdot \mathbb{I}(1 \leq t \leq T)$$

где ставка купона определяется в момент $t - 1$:

$$c_t = r_{t-1} \in F_{t-1}$$



Облигация с плавающим купоном

- t -ый купон это FRA с нулевым страйком:

$$V_0^t = p_0(t-1) - p_0(t)$$

- Стоимость облигации:

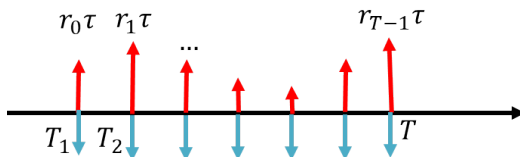
$$V_0^f = \sum_{t=1}^T (p_0(t-1) - p_0(t)) + p_0(T) = p_0(0) = 1$$

Определение

Своп это контракт на обмен фиксированных платежей на плавающие:

$$f_t = (r_{t-1} - K) \cdot \tau \cdot \mathbb{I}(1 \leq t \leq T)$$

K – фиксированная ставка свопа.



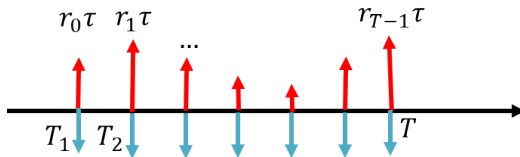
Процентный своп

- Своп = плавающий бонд - фиксированный бонд.

$$V_0^{swap} = V_0^{float} - V_0^{fix} = 1 - p_0(T) - K \cdot \tau \cdot \sum_{t=1}^T p_0(t)$$

- Swap-rate – страйк, при котором $V^{swap} = 0$:

$$R_0^{swap}(T) = \frac{1 - p_0(T)}{\tau \cdot \sum_{t=1}^T p_0(t)}$$



Нелинейные контракты

Определение

Кэп на процентную ставку со страйком K и сроком T это контракт с потоками:

$$f_t = (r_{t-1} - K)^+ \cdot \tau \cdot \mathbb{I}(1 \leq t \leq T)$$

Определение

Флор на процентную ставку со страйком K и сроком T это контракт с потоками:

$$f_t = (K - r_{t-1})^+ \cdot \tau \cdot \mathbb{I}(1 \leq t \leq T)$$

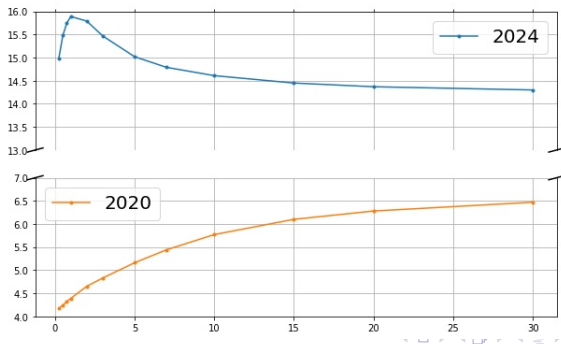
- Нелинейность = цена не является линейной функцией от цен торгуемых активов
- Для нахождения цены и реплицирующего портфеля необходимо знать динамику цен облигаций

- Ставки по вкладам, Сбер (2024):

1-2 мес	3-5 мес	6-7 мес	8-11 мес	1 год	> 1.5 год
12.5%	15%	18%	15%	14%	13.5%

- Ставка ЦБ
- Ruonia
- Кривая доходности ОФЗ:

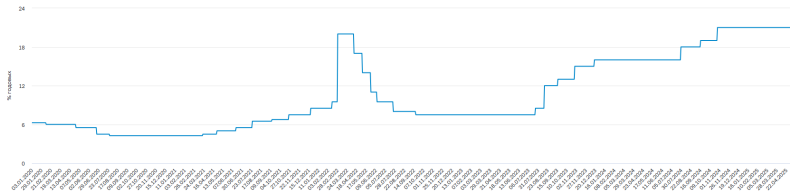
Доходность ОФЗ



Ключевая ставка Банка России

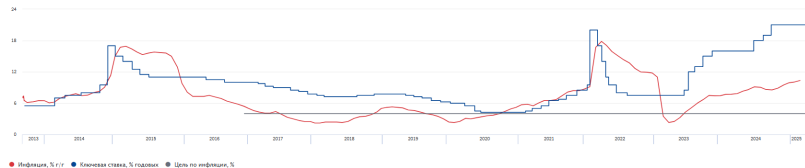
01.01.2020 - 15.05.2025

Ключевая ставка



Ключевая ставка ЦБ

Ключевая ставка Банка России и инфляция



Эталонная процентная ставка RUONIA

RUONIA (Ruble Overnight Index Average) — взвешенная процентная ставка однодневных межбанковских кредитов (депозитов) в рублях, отражающая оценку стоимости необеспеченного заимствования на условиях овернайт.

RUONIA рассчитывается по данным отчетности крупнейших кредитных организаций по форме 0409701 «Отчет об операциях на валютных и денежных рынках», представляемой кредитными организациями в Банк России в соответствии с Указанием Банка России от 10.04.2023 № [6406-У](#) «О формах, сроках, порядке составления и представления отчетности кредитных организаций (банковских групп) в Центральный банк Российской Федерации, а также о перечне информации о деятельности кредитных организаций (банковских групп)».

Базы данных - RUONIA

Динамика ставки RUONIA и параметров расчёта

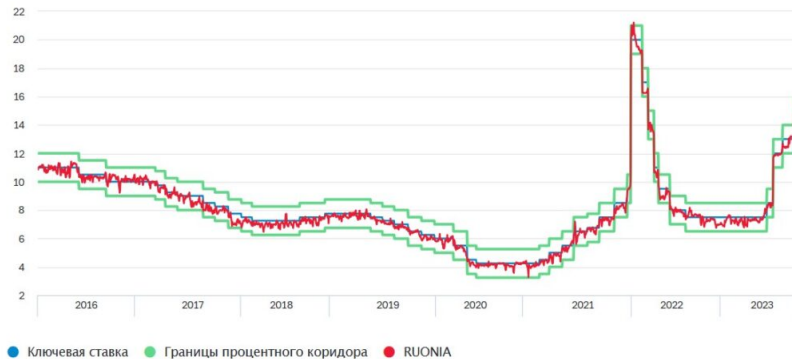
07.05.2025 - 14.05.2025

XLSX

Дата ставки	Ставка RUONIA, %	Объём сделок RUONIA, млрд руб.	Количество сделок, ед.	Количество участников RUONIA, совершавших сделки в данный день, ед.	Минимальная процентная ставка, %	25-й процентиль по процентным ставкам, %	75-й процентиль по процентным ставкам, %	Максимальная процентная ставка, %	Статус расчёта	Дата публикации
14.05.2025	20,67	371,81	48	19	19,80	20,55	21,00	21,25	Стандартный	15.05.2025
13.05.2025	20,67	368,93	42	17	19,80	20,55	20,80	20,90	Стандартный	14.05.2025
12.05.2025	20,67	243,35	36	19	19,80	20,50	20,75	20,80	Стандартный	13.05.2025
07.05.2025	20,67	376,67	46	20	19,80	20,50	20,75	20,85	Стандартный	12.05.2025

Ruonia и ключевая ставка

(% годовых)



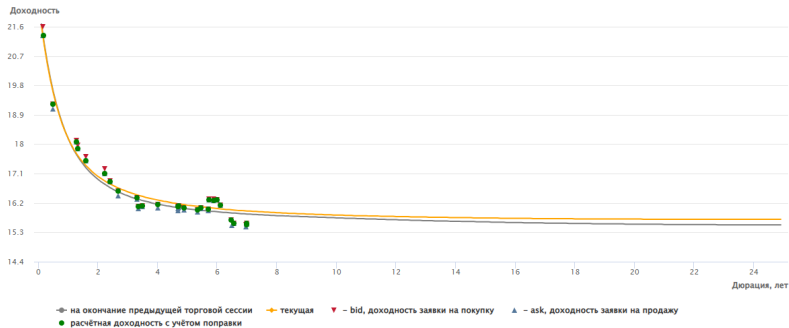
Источник: Банк России.

Кривая бескупонной доходности ОФЗ

Доходность/дюрация

Доходность/срок до погашения

Графики и значения КБД Московской биржи



На данном графике выпуски ОФЗ представлены по дюрации

Построение кривой доходности

- Пусть торгуются 4 облигации с годовыми купонами и погашением через 1, 2, 3 и 4 года.
- c_i – купон i -ой облигации
- V_i^M – рыночная цена i -ой облигации
- $p_0(i)$ – цена бескупонной облигации с погашением через i лет.
- СЛАУ относительно цен бескупонных облигаций $p_0(i)$:

$$\begin{pmatrix} 1 + c_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 1 + c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & c_3 & 1 + c_3 & 0 \\ c_4 & c_4 & c_4 & 1 + c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \\ p_0(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^M \\ V_2^M \\ V_3^M \\ V_4^M \end{pmatrix}$$