Лекция 9. Случайные процессы в дискретном времени

June 1, 2025

Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Функция $\xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Измеримые функции также будем называть случайными величинами (коротко с.в.). Обозначение $\xi \in \mathcal{F}$. Множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ также будем записывать как $\{\xi < x\}$.

Утверждение

Если $\xi \in \mathcal{F}$, то:

- $\{\xi \geq x\} \in \mathcal{F}$
- $\{y \leq \xi < x\} \in \mathcal{F}$
- $\{\xi = x\} \in \mathcal{F}$

Сигма-алгебры и разбиения

Пусть Ω – пространство элементарных исходов.
Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение множества Ω, т.е.:

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset$$

$H = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая разбиением. Состоит из элементов вида $B = \bigcup_k A_{n_k}$.

Сигма-алгебры и случайные величины

Пусть ξ – дискретная случайная величина, т.е. $\mathrm{Im}(\xi) = \{a_1 < \ldots < a_n\}$. ξ порождает разбиение:

$$\mathcal{A} = \{A_i = \{\xi = a_i\}\}_{i=1}^{n}$$

Определим $\sigma(\xi)$ – σ-алгебра, порождённая с.в. ξ:

$$\sigma(\xi) \stackrel{def}{=} \sigma(\mathcal{A})$$

Это минимальная σ - алгебра, относительно которой с.в. ξ измерима.

Сигма-алгебры и случайные величины

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Тогда дискретная функция $\xi(\omega)$ измерима $\Longleftrightarrow \forall i\ A_i \in \mathcal{F}$

Доказательство. $\{\xi < x\} = \bigcup\limits_{a_i < x} \{\xi = a_i\} = \bigcup\limits_{a_i < x} A_i$.

Условное мат. ожидание

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) \neq 0$.

Определение

Условная вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии B будем называть число:

$$\mathbb{E}^B \xi = \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_B\right)}{P(B)}$$

Также будем использовать обозначение $\mathbb{E}\left[\xi | B\right]$

Дискретный случай

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – разбиение множества Ω, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая этим разбиением.

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии $\mathcal{H}$ будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_{A_i}\right)}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \mathbb{E}^{A_i}\xi$$

$\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\xi$ – дискретная случайная величина:

$$\left[\mathbb{E}^{H}\xi\right](\omega) = \mathbb{E}^{A_i}\xi, \text{если } \omega \in A_i$$

Пример

Пусть

$$\Omega = \mathbb{R},\ \xi(\omega) = \omega,\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Пусть $\mathcal{A} = \{(-\infty, 0), [0, \infty)\}$, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$.
Найти $\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\xi$

Условная плотность

Пусть X, Y – непрерывные случайные величины с совместной плотностью $f_{XY}(x, y)$. Маргинализированые плотности:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dx$$

Определение

Условной плотностью X при условии $Y = y$ называется функция:

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Введённая функция действительно является плотностью:

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$$

Условное мат. ожидание в непрерывном случае

Определение

Условным мат. ожидание X при условии $Y = y$ будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int\limits_{\mathbb{R}} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y) dx$$

Задача:

$$(X, Y) \sim N(0, \Sigma),\ \Sigma = \begin{pmatrix} 1, & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $\mathbb{E}[X|Y = y]$.

Свойства условного математического ожидания

- Линейность

$$\mathbb{E}^H\left[\alpha\xi + \beta\eta\right] = \alpha\mathbb{E}^H\xi + \beta\mathbb{E}^H\eta$$

- Если $\xi \in H$, то $\mathbb{E}^H\xi = \xi$
- Если $\xi \perp H$, то $\mathbb{E}^H\xi = \mathbb{E}\xi$
- Повторное мат. ожидание. Пусть $G \subseteq H$.

$$\mathbb{E}^G\left[\mathbb{E}^H\xi\right] = \mathbb{E}^G\xi$$

В частности:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^H\xi\right]$$

Определение

Дискретный случайный процесс – набор случайных величин $\xi_n, n = 1, 2, \ldots$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

Пример: случайное блуждание

Пусть $\xi_k, k = 1, 2, \dots$ – независимые одинаково распределённые величины (заданные на одном вероятностном пространстве):

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{с вер. } 0.5 \\ -1, & \text{с вер. } 0.5 \end{cases}$$

Определение

Случайное блуждание это процесс вида:

$$X_{k+1} - X_k = \xi_k,\ X_0 = 0$$

Свойства:

- $X_k = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i$
- $\mathbb{E} X_k = 0$
- $\mathbb{D} X_k = k$
- $\mathbb{E}\left[X_k | X_{k-1}\right] = X_{k-1}$

Фильтрация

Определение

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.
Фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ называется последовательность вложенных σ-подалгебр:

$$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}: \ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$$

где $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ – σ-под алгебры.

$\mathcal{F}_t$ – информация, доступная к моменту времени t.
Процесс $\{X_n\}$ – адаптированный, если $X_n \in \mathcal{F}_n \forall n$.
Процесс $\{X_n\}$ – предсказуемый, если $X_n \in \mathcal{F}_{n-1} \forall n$.

Пример. Случайное блуждание

Ω – множество последовательностей из $+1, -1$.
Пусть $\mathcal{F}_t$ – цилиндрическая σ-алгебра, порожденная множествами вида:

$$A_{a_0,\dots,a_{t-1}} = \{\omega : \omega_i = a_i, i < t\}$$

Например,

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_{-1}\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{A_1, A_{-1}, A_{1,1}, A_{1,-1}, \dots\}$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация. Пусть $\xi_k = \xi_k(\omega) = \omega_k$
Пусть X_t – случайное блуждание, порождённое ξ_k.

Пример. Случайное блуждание

Ω – множество последовательностей из $+1, -1$.
Пусть $\mathcal{F}_t$ – цилиндрическая σ-алгебра, порожденная множествами вида:

$$A_{a_0,\dots,a_{t-1}} = \{\omega : \omega_i = a_i, i < t\}$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация.
Пусть $\xi_k = \xi_k(\omega) = \omega_k$
Пусть X_t – случайное блуждание, порождённое ξ_k.
Тогда

$$X_t \in \mathcal{F}_t$$

$$S_t = \sum_{k\leq t} X_k \in \mathcal{F}_t$$

$$m_t = \min_{k\leq t}(x_k) \in \mathcal{F}_t$$

$$m_{t+1} \notin \mathcal{F}_t$$

Мартингалы

Определение

Процесс $\{X_n\}$ на фильтрованном вероятностном пространстве назвывается мартингалом, если он интегрируемый, адаптированный и выполнено мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = X_n$$

- Процесс $\{X_n\}$ – суб (супер) мартингал, если:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} \geq X_n \ (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} \leq X_n)$$

- Суб-мартингал в среднем растёт. Супер-мартингал в среднем падает.
- Пусть $\{X_n\}$ – мартингал, $g(x)$ – выпуклая функция, $g(X_n)$ – интегрируемо. Тогда $g(X_n)$ – суб-мартингал.

Примеры

- Случайное блуждание $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, где ξ_k – i.i.d, $\mathbb{E}\xi_k = 0$.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}\left[X_n + \xi_{n+1}\right] = X_n + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}\xi_{n+1} = X_n$$

- "Геометрическое" случайное блуждание: $X_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k$, где ξ_k – i.i.d, $\mathbb{E}\xi_k = 1$.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}\left[X_n \cdot \xi_{n+1}\right] = X_n \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}\xi_{n+1} = X_n$$

В силу телоскопического свойства $\forall m > 0$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+m} = X_n$$

В частности:

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$$

Мартингалы имеют постоянное мат. ожидание.