Лекция 6. Финансовый рынок, продолжение

April 6, 2025

План

- Правильное определение безарбитражности
- Фундаментальные теоремы финансов: повторение
- Основные формулы ценообразования: риск-нейтральная мера, стохастический дисконт-фактор
- CAPM
- Полнота рынка опционов
- Рынки с непрерывным пространством потоков/активов

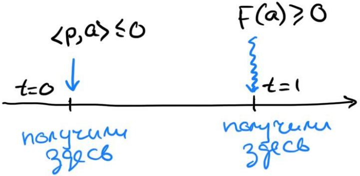
Постулат 3: Безарбитражность

Определение

Рынок безарбитражный (в сильном смысле)
$Fh \geq 0 \to \langle p, h \rangle \geq 0$

Определение

Арбитражный портфель h: $Fh \geq 0 \& \langle p, h \rangle < 0$



Безарбитражность и закон одной цены

Утверждение

Безарбитражность $\Rightarrow$ Закон одной цены.

Пусть $Fh = 0$. $Fh \geq 0 \to \langle p, h \rangle \geq 0$. $Fh \leq 0 \to \langle p, h \rangle \leq 0$.
Отсюда $\langle p, h \rangle = 0$.

Первая фундаментальная теорема (сильная форма)

Теорема

Рынок безарбитражный $\Leftrightarrow \exists q \geq 0$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle$$

$p = F^\top q$

Доказательство: $\Rightarrow$. $K = \{F^\top q, q \geq 0\}$ – выпуклое множество. Пусть $p \notin K$. По теореме об отделимости:

$$\exists h : \forall k \in K : \langle p, h \rangle < 0 \& \langle k, h \rangle \geq 0$$

Последнее означает, что $\langle F^\top q, h \rangle = \langle q, Fh \rangle \geq 0 \forall q \geq 0$. Это равносильно $Fh \geq 0$ (докажите). h – арбитражнйы портфель, противоречие.

$\Leftarrow$: Очевидно.

Фундаментальные теоремы финансов

- Закон одной цены(ЗОЦ):

$$Fh = \theta \to \langle p, h \rangle = 0$$

- Безарбитражность(БА):

$$Fh \geq 0 \to \langle p, h \rangle \geq 0$$

- Полнота:

$$\forall f \in \mathbb{R}^n \exists h : f = Fh$$

	1-ая фунд. теорема	2-ая фунд. теорема
Слабая форма	ЗОЦ $\Leftrightarrow \exists q : p = F^\top q$	ЗОЦ + Полнота $\Leftrightarrow \exists! q : p = F^\top q$
Сильная форма	БА $\Leftrightarrow \exists q \geq 0 : p = F^\top q$	БА + Полнота $\Leftrightarrow \exists! q \geq 0 : p = F^\top q$

Связь с линейной алгеброй

- Закон одной цены(ЗОЦ):

$$\mathrm{Ker} F \leq \mathrm{Ker} p \Leftrightarrow p \in \mathrm{Im} F^{\top}$$

- Полнота:

$$\mathrm{Im} F = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \ker F^{\top} = \{\theta\}$$

Формулы ценообразования

Основные формулы ценообразования деривативов

Фундаментальные цены

Прайсинг как линейный функционал

$$q(f) = \langle q, f \rangle$$

где $q \geq 0$ – функционал прайсинга.

$$q = (q_1, \ldots, q_n), \ q_i = q(e_i)$$

где e_i – столбцы единичной матрицы, фундаментальные потоки, q_i – цены фундаментальных потоков.

Риск-нейтральная мера

- Рынок (F, p) безарбитражный
- $q \geq 0$ – неотрицательный функционал прайсинга
- $d = \sum_i q_i > 0$ – дисконт-фактор, стоимость облигации
- $\nu = \frac{q}{d}$ – риск-нейтральная мера.

$$q(f) = \langle q, f \rangle = \sum_i q_i f_i = d \sum_i \nu_i f_i = d \cdot \mathbb{E}^Q(f)$$

Прайсинг в риск-нейтральной

$$q(f) = d \cdot \mathbb{E}^Q(f)$$

где $\mathbb{E}^Q(\cdot)$ – мат. ожидание в риск-нейтральной мере.

Стохастический дисконт-фактор

$$q(f) = \langle q, f \rangle = \sum_i q_i f_i = \sum_i \pi_i \frac{q_i}{\pi_i} f_i = \mathbb{E}(m \cdot f)$$

Прайсинг в физической мере

$$q(f) = \mathbb{E}(m \cdot f)$$

где $m = \frac{q}{\pi}$ - стохастический дисконт-фактор

Основные формулы ценообразования

Теорема

Следующие операторы ценообразования эквивалентны:

$$q(f) = \langle q, f \rangle = d\mathbb{E}^Q(f) = \mathbb{E}(m \cdot f) =^* \langle p, F^{-1} f \rangle$$

$q = (FF^\top)^{-1} Fp$
$m = q/\pi$
$\nu = q/d$
* – для полных рынков. $h = F^{-1} h$ – хэдж.

Доходности

- $q(f) > 0$
- $R_f = \dfrac{f}{q(f)}$ – доходность (гросс)
- $q(R_f) = d \cdot \mathbb{E}^Q R_f = \mathbb{E}(m \cdot R_f) = 1$
- $R_0 = \dfrac{1}{q(e)} = \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{\mathbb{E}(m)}$ – доходность облигации

Утверждение

Стохастическия риск-премия $R_f - R_0$ ортогональна стохастическому дисконт-фактору:

$$\mathbb{E}(m(R_f - R_0)) = 0$$

Риск-премия

Риск-премия зависит только от систематического риска : корреляции со стохастическим дискон-фактором.

$$\mathbb{E}(m(R_f - R_0)) = \mathbb{E}(m)(\mathbb{E}(R_f) - R_0) + \mathrm{cov}(R_f, m) = 0$$

$$\mathbb{E}(R_f) - R_0 = -\frac{\mathrm{cov}(R_f, m)}{\mathbb{E}(m)}$$

Замечание. В риск-нейтральной мере риск-премия равна нулю:

$$\mathbb{E}^Q(R_f) - R_0 = 0$$

CAPM

Пусть $R_m = \dfrac{m}{q(m)}$.

$$\mathbb{E}(R_m) - R_0 = -\frac{\operatorname{cov}(R_m, m)}{\mathbb{E}(m)}$$

$$\mathbb{E}(R_f) - R_0 = -\frac{\operatorname{cov}(R_f, m)}{\mathbb{E}(m)}$$

$$\beta_f = \frac{cov(R_f, m)}{cov(R_m, m)} = \frac{cov(R_f, R_m)}{cov(R_m, R_m)}$$

$$\mathbb{E}(R_f) - R_0 = \beta_f(\mathbb{E}(R_m) - R_0))$$

Полнота рынка опционов

Рассмотрим однопериодный рынок с n состояниями, которые задаются значениями акции:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}$$

На рынке также торгуются n опционов с разными страйками $f_j = \max(f - j, 0), j = 0, 1, \dots, n-1$:

$$f_0 = f, \; f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ n-1 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ n-2 \end{pmatrix}, \dots, f_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Полнота рынка опционов

- $p = (p_0, \dots, p_{n-1})$ – цены опционов.
- Матрица потоков:

$$F = [f_0, \dots, f_{n-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\det F = 1 \to$ рынок (F, p) полный.

Полнота рынка опционов

Рассмотрим колл-спреды:

$$f_0 - f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 - f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, f_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда базис:

$$\begin{cases} e_1 = f_0 - 2f_1 + f_2 \\ e_2 = f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \dots \\ e_{n-2} = f_{n-3} - 2f_{n-2} + f_{n-1} \\ e_{n-1} = f_{n-2} - 2f_{n-1} \\ e_n = f_{n-1} \end{cases}$$

Полнота опционов

Утверждение

Одноопериодный рынок (F, p) с n-состояниями на котором торгуются n колл-опционов полон и удовлетворяет закону одной цены.
Если цены опционов выпуклы: $p_j < \frac{1}{2}(p_{j-1} + p_{j+1})$, то рынок безарбитражный:

$$q_j = q(e_j) = p_{j-1} + p_{j+1} - 2p_j > 0$$

Рынок с бесконечным пространством исходов

$\Gamma(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$
$\Gamma^*(X)$ – множество мер над множеством X.

Объект	Конечный рынок	Бесконечный рынок
Базовые активы	$a \in A$	
Портфели	$h \in \mathbb{R}^k$	
Цены базовых активов	$(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^k$	
Цена портфеля	$p(h) = \Sigma_i p_i h_i$	
Пространство исходов	$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$	
Потоки	$f \in \mathbb{R}^n$	
Поток актива	$F : A \mapsto \mathbb{R}^n$	
Поток портфеля	$f = Fh$	
Функционал прайсинга	$q \in \mathbb{R}^n$	
Цена потока	$q(f) = \Sigma_i q_i f_i$	

Рынок с бесконечным пространством исходов

$\Gamma(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$
$\Gamma^*(X)$ – множество мер над множеством X.

Объект	Конечный рынок	Бесконечный рынок
Базовые активы	$a \in A$	$a \in A$
Портфели	$h \in \mathbb{R}^k$	$h \in \Gamma^*(A)$
Цены базовых активов	$(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k$	$p \in \Gamma(A)$
Цена портфеля	$p(h) = \Sigma_i p_i h_i$	$p(h) = \int_A p(a) dh(a)$
Пространство исходов	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	$\Omega (= \mathbb{R})$
Потоки	$f \in \mathbb{R}^n$	$f \in \Gamma(\Omega)$
Поток актива	$F: A \mapsto \mathbb{R}^n$	$F: A \mapsto \Gamma(\Omega)$
Поток портфеля	$f = Fh$	$f = \int_A F(a) dh(a)$
Функционал прайсинга	$q \in \mathbb{R}^n$	$q \in \Gamma^*$
Цена потока	$q(f) = \Sigma_i q_i f_i$	$q(f) = \int_\Omega f(\omega) dq(\omega)$

Операторы ценообразования

Операторы ценообразования эквивалентны:

$$q(f) = \langle q, f\rangle = \mathbb{E}(m \cdot f) = d\mathbb{E}^Q(f)$$

- $\langle q, f\rangle = \int_\Omega f(\omega)dq(\omega)$
- $\mathbb{E}(m \cdot f) = \int_\Omega m(\omega)f(\omega)d\pi(\omega)$,
- $m(\omega) = \dfrac{dq}{dp}$ – производная Радона-Никодима.
- $\mathbb{E}^Q(f) = \int_\Omega f(\omega)d\nu(\omega)$
- $d\nu(\omega) = dq(\omega)/d$ – риск-нейтральная мера,
- $d = q(\Omega) = \int_\Omega dq(\omega)$ – дисконт-фактор.

Проблема

Замечание

На рынке с континуальным пространством исходов конечный набор торгуемых инструментов не обеспечивает полноты

Как определять цены? Число известных цен - конечно, число состояний - бесконечно...

Параметризация ядра ценообразования

Нужно зафиксировать продолжение линейного оператора стоимости с подпространства $\operatorname{Im} F$ на все пространство потоков Г.

Стандартный рецепт продолжения оператора ценообразование

Параметризовать риск-нейтральное распределение, параметры которого определять из известных цен.

Если число известных цен и число параметров распределения равны то в общем случае это позволит однозначно определять ядро ценообразования.

Пример

Пусть пространство состояний рынка задано будущей ценой S.
На рынке торгуется одна акция и облигация с ценами S_0 и D
Тогда предположим, что риск-нейтральное мера (цены фундаментальных инструментов) $S \sim N(a, 1)$.
Имеем:

$$D = dE^Q(1) = d$$

$$S_0 = dE^Q(S) = d \cdot a$$

Ядро ценообразования задается:
Дисконт-фактор: $d = D$
Риск-нейтральная мера $\nu \sim N(\frac{S_0}{d}, 1)$

Формула Башелье

Пусть риск-нейтральная мера задана нормальным распределением $S \sim N(S_0, \sigma^2)$.
Найдем стоимость колл-опциона $f(S) = (S - K)^+$.

$$E^Q(f) =$$

где Φ и ϕ - функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Формула Башелье

Пусть риск-нейтральная мера задана нормальным распределением $S \sim N(S_0, \sigma^2)$.
Найдем стоимость колл-опциона $f(S) = (S - K)^+$.

$$E^Q(f) = (S_0 - K)\Phi(d) + \sigma\phi(d), d = \frac{S_0 - K}{\sigma}$$

где Φ и ϕ - функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Формула Блэка-Шоулса

Пусть риск-нейтральная мера задана логнормальным распределением $S = S_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2+\sigma\xi}$, $\xi \sim N(0,1)$.
Найдем стоимость колл-опциона $f(S) = (S-K)^+$.

$$E^Q(f) =$$

Формула Блэка-Шоулса

Пусть риск-нейтральная мера задана логнормальным распределением $S = S_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\xi}$, $\xi \sim N(0,1)$. Найдем стоимость колл-опциона $f(S) = (S - K)^+$.

$$E^Q(f(S)) = S\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + 0.5\sigma^2}{\sigma},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma$$

Полнота опционов

Рассмотрим рынок с пространством исходов $\Omega = \mathbb{R}(S)$.
Пусть на рынке торгуется континуальное семейство опционов

$$f_K(S) = (S - K)^+$$

Полнота опционов

Рассмотрим рынок с пространством исходов $\Omega = \mathbb{R}(S)$. Пусть на рынке торгуется континуальное семейство опционов

$$f_K(S) = (S - K)^+$$

с ценами $C(K)$.
Стратегии колл-спреды:

$$\frac{\partial}{\partial S} f_K(S) = \theta(S - K)$$

Стратегии бабочки (butterfly):

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} f_K(S) = \delta(S - K)$$

- образует базис с подходящем пространстве потоков
$f : \mathbb{R}(S) \to \mathbb{R}$

Полнота опционов

Утверждение

Однопериодный рынок на котором торгуются колл-опционы с произвольным страйком полный и безарбитражный. Если $\frac{\partial^2}{\partial K^2} C(K) > 0$, то рынок безарбитражный.

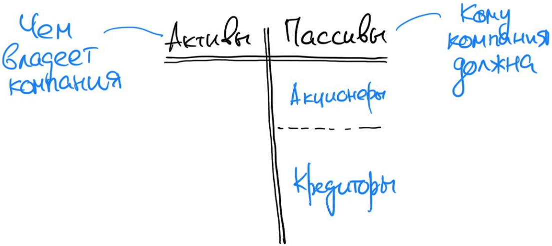
$$C(K) = \int_K^\infty (S-K)q(S)dS$$

$$\frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2} = q(K) > 0$$

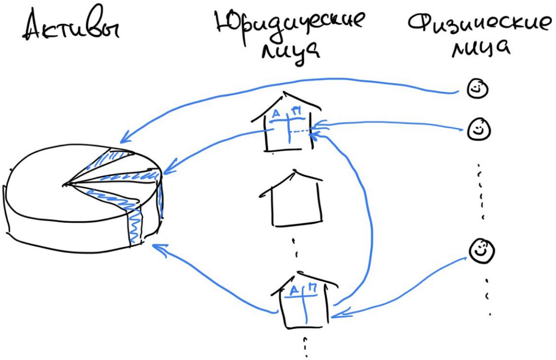
Репликация произвольного (гладкого финитного) пэйоффа:

$$f(S) = \int_{\mathbb{R}} f(K)\delta(S-K)dK = \int_R f''(K)(S-K)^+ dK$$

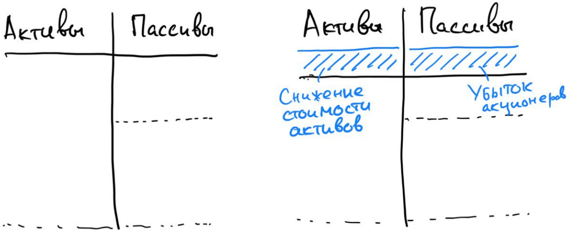
Бухучет


Чем владеет компания
Активы
Пассивы
Кому компания должна
Акционеры
Кредиторы

Владение активами



Убыток


Активы
Пассивы
Активы
Пассивы
Снижение
стоимости
активов
Убыток
акционеров

Модель Мертона