

Пространство альтернатив

Рассмотрим двухпериодную модель экономики $t \in \{0, 1\}$. В момент времени $t = 0$ мы всё знаем об экономике, в момент $t = 1$ реализуется одно из n состояний мира. Пусть заданы экзогенные вероятности каждого состояния $\pi_1, \dots, \pi_n, \pi_i > 0$.

Пространство альтернатив задаётся набором активов a_1, \dots, a_k , которыми мы можем торговать, формируя портфели $a = h_1 a_1 + \dots + h_k a_k$, где $h_i \in \mathbb{R}$ – вес i -го актива в портфеле a . Будем также отождествлять портфель с вектором его весов $h = (h_1, \dots, h_k)^\top \in \mathbb{R}^k$. Будем считать, что веса портфеля – вещественные числа, т.е. доступны короткие и дробные позиции. Таким образом, пространство альтернатив задаётся пространством портфелей $V_H \cong \mathbb{R}^k$.

Каждый актив задаётся вектором потока: $a_j \rightarrow f_j = (f_j^1, \dots, f_j^n)^\top \in \mathbb{R}^n$. f_j^i – сумма денег, которую платит j -ый актив в момент $t = 1$, если реализовалось i -ое состояние мира.

Векторы потоков всех базовых образуют матрицу потоков:

$$F = [f_1, \dots, f_k] \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

Поток портфеля h базовых активов задаётся матричным произведением:

$$Fh = \sum_{i=1}^k f_i h_i$$

Произвольный поток f это вектор длины n . Множество всех потоков f образует векторное пространство $V_F \cong \mathbb{R}^n$. Таким образом, матрицу потоков F можно рассматривать как оператор из пространства портфелей в пространство потоков:

$$F : V_H \mapsto V_F$$

Пример

Пусть торгуется два инструмента a_1 – облигация, a_2 – акция. Пусть существует два состояния мира: рост и падение акции.

Поток облигации a_1 : $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Поток акции a_2 : $f_2 = \begin{pmatrix} 1 + \delta \\ 1 - \delta \end{pmatrix}$

Матрица потоков:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \delta \\ 1 & 1 - \delta \end{pmatrix}$$

Произвольный портфель $h = (h_1, h_2)$ имеет поток

$$f = Fh = f_1 h_1 + f_2 h_2 = \begin{pmatrix} h_1 + h_2(1 + \delta) \\ h_1 + h_2(1 - \delta) \end{pmatrix}$$

Полнота

Векторы выплат произвольных портфелей h образуют подпространство в пространстве потоков V_H :

$$\{Fh, h \in R^k\} = \text{Im } F \subseteq \mathbb{R}^n$$

Рынок называется **полным**, если $\text{Im } F = \mathbb{R}^n$. С точки зрения линейной алгебры это означает, что система f_1, \dots, f_k полны в пространстве \mathbb{R}^n , или что ранг матрицы F равен числу состояний n .

На полном рынке произвольный поток $f \in \mathbb{R}^n$ может быть реплицирован портфелем из базовых активов: $\exists h \in \mathbb{R}^k : f = Fh$.

Пример

Рынок из предыдущего примера полон при $\delta \neq 0$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \delta \\ 1 & 1 - \delta \end{pmatrix}, \det F = -2\delta \neq 0.$$

Рассмотрим рынок с $n = 3$ и двумя активами:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \delta \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 - \delta \end{pmatrix}.$$

Данный рынок не является полным, так как $\text{rank } F = 2 < 3$. В частности, поток $f = (\delta, 0, 0)^\top$ нельзя реплицировать портфелем из базовых активов.

Важным примером полного рынка служат система Эрроу-Дебре активов, которая задаётся единичной матрицей потоков:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

при $k = n$.

Ценообразование в пространстве активов

Пусть $p_1 = p(a_1), \dots, p_k = p(a_k)$ – экзогенный вектор цен базовых активов.

Наша задача – найти цену $p(a)$ произвольного портфеля $a = h_1a_1 + \dots + h_ka_k$.

Определение (Безарбитражность в 0-периодной модели) Функционал прайсинга p называется безарбитражным, если не существует последовательности торгов портфелями a^j такой, что:

$$\sum_j a^j = 0, \quad \sum_j p(a_j) > 0.$$

Теорема

Рынок безарбитражен \Leftrightarrow функционал прайсинга p линейный:

$$p(\alpha a) = \alpha p(a), \quad p(a + b) = p(a) + p(b)$$

Доказательство

От противного. Пусть $p(a + b) - p(a) - p(b) > 0$. Тогда последовательность торгов:

- Продали $a + b$ за $p(a + b)$
- Купили a за $p(a)$
- Купили b за $p(b)$

приносит арбитражную прибыль $p(a + b) - p(a) - p(b) > 0$.

Таким образом, цена портфеля определяется $a = a_1 h_1 + \dots + a_k h_k$ задается:

$$p(a) = \langle p, h \rangle = \sum_{i=1}^k p_i h_i$$

Ценообразование в пространстве потоков

Выше мы определили стоимость произвольного портфеля через стоимость базовых активов $p = (p_1, \dots, p_k)$. Задача ценообразования – найти стоимость произвольного потока $f \in \mathbb{R}^n : q(f)$.

Здесь и далее под рынком будем подразумевать пару (F, p) матрицы потоков и вектора цен базовых активов.

Определение. (Закон одной цены)

Рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены, если портфели с одинаковыми потоками имеют одинаковые цены:

$$Fh = Fg \rightarrow \langle p, h \rangle = \langle p, g \rangle$$

Закон одной цены эквивалентен импликации:

$$Fh = 0 \rightarrow \langle p, h \rangle = 0$$

Если потоки f_1, \dots, f_k линейно-независимы, то рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены $\forall p$.

Действительно, в этом случае единственным портфелем с нулевым потоком будет нулевой портфель $:Fh = 0 \Leftrightarrow h = 0$, а его цена всегда нулевая $\langle p, h \rangle = 0$.

Если потоки f_1, \dots, f_k линейно зависимы, т.е., например, f_1 представляется линейной комбинацией потоков других базовых активов:

$$f_1 = \sum_{j>1}^k h_j f_k$$

то закон одной цены накладывает ограничение на цену первого актива:

$$p(a_1) = \sum_{j>1}^k h_j p(a_j)$$

Перейдем к формулировке первой фундаментальной теореме в слабой форме:

Теорема

Рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle,$$

где q – функционал ценообразования (функционал прайсинга) на пространстве потоков, $p = F^\top q$.

Первая фундаментальная теорема утверждает, что существует функционал ценообразования на пространстве потоков, который согласован с ценами базовых активов: цены потоков базовых активов совпадают с ценами базовых активов (в силу линейности это справедливо и для портфелей).

Доказательство.

\Rightarrow Пусть $f = Fh \in \text{Im } F$. Положим по определению:

$$\langle q, f \rangle = \langle p, h \rangle$$

В силу закона одной цены данное определение корректно: не зависит от выбора портфеля h . На всё пространство функционал q продолжается по линейности.

\Leftarrow Очевидно.

Заметим, что функционал ценообразования на пространстве потоков q может быть неединственный.

Теорема. Вторая фундаментальная теорема:

Рынок полный и удовлетворяет закону одной цены $\Leftrightarrow \exists! q \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle.$$

\Rightarrow Существование следует из первой теоремы. Докажем единственность от противного. Пусть $\exists q_1, q_2 : p = F^\top q_1 = F^\top q_2$ и $q_1 \neq q_2$. Тогда $q = q_1 - q_2 \in \text{Ker } F^\top$. В силу полноты $\exists m : q = Fm$. Тогда:

$$\|q\| = \langle q, q \rangle = \langle q, Fm \rangle = \langle F^\top q, m \rangle = \langle 0, m \rangle = 0$$

откуда $q = 0$, а значит $q_1 = q_2$, противоречие.

Определение. Рынок (F, p) безарбитражный, если $Fh \geq 0 \rightarrow \langle p, h \rangle \geq 0$.

Альтернативное определение: $Fh \leq 0 \rightarrow \langle p, h \rangle \leq 0$.

Определение. Портфель h арбитражный, если:

$$Fh \geq 0 \& \langle p, h \rangle < 0$$

или

$$Fh \leq 0 \& \langle p, h \rangle > 0$$

Рынок безарбитражный, если не существует арбитражных портфелей.

Теорема

Рынок (F, p) безарбитражный $\Leftrightarrow \exists q \geq 0$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle,$$

$p = F^\top q$, q – неотрицательный функционал ценообразования в пространстве потоков.

Эта теорема утверждает, что безарбитражность эквивалентна существованию неотрицательного функционала прайсинга в пространстве потоков, который согласован с ценами базовых активов: цены потоков базовых активов f_j совпадают с ценами базовых активов $p_j = p(a_j)$. В силу линейности, аналогичное справедливо и для портфелей.

Доказательство. \Rightarrow

Пусть рынок безарбитражный. Рассмотрим множество $K = \{F^\top q, q \geq 0\}$. Множество K является выпуклым и замкнутым.

Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т.е. $\nexists q \geq 0 : p = F^\top q$, а значит $p \notin K$.

Тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств существует гиперплоскостью задаваемая вектором h , которая разделяет множество K и точку p , т.е.:

$$\exists h \in \mathbb{R}^k : \langle p, h \rangle < 0, \langle k, h \rangle \geq 0 \forall k \in K$$

Последнее означает, что $\langle F^\top q, h \rangle = \langle k, Fh \rangle \geq 0$ для всех $q \geq 0$. Это эквивалентно (докажите), что $Fh \geq 0$. Таким образом:

$$Fh \geq 0 \& \langle p, h \rangle < 0$$

а значит h – арбитражный портфель, что противоречит условию теоремы. ЧТД.

\Leftarrow Пусть $p = F^\top q$. Пусть $Fh \geq 0$. Тогда

$$\langle p, h \rangle = \langle F^\top q, h \rangle = \langle q, Fh \rangle = \sum_{i=1}^n q_i (Fh)_i \geq 0$$

так как все слагаемые в сумме неотрицательные.

Примеры...

Основные формулы ценообразования

Фундаментальные цены

Пусть рынок (F, p) безарбитражен. Выше мы показали, что это эквивалентно существованию неотрицательного функционала ценообразования $q \geq 0$, поэтому мы можем перенести ценообразование с пространства активов на пространство потоков.

Пусть $f \in \mathbb{R}^n$ – произвольный поток. Его цена задаётся как:

$$q(f) = \langle q, f \rangle = \sum_i q_i f_i$$

где $q_i = q(e_i)$ – фундаментальные цены, цена фундаментального потока e_i , который платит 1 в i -ом состоянии мира и 0 в остальных.

Риск-нейтральная мера

Пусть $d = q(e) = \sum_i q_i > 0$ – цена облигации, дисконт-фактор. Определим вектор $\nu = \frac{q}{d}$. Тогда $\nu \geq 0$, $\sum_i \nu_i = 1$, поэтому вектор ν можно отождествить с вероятностной мерой. Эту меру будем называть риск-нейтральной. Тогда формула ценообразования имеет вид:

$$q(f) = \sum_i q_i f_i = d \sum_i \frac{q_i}{d} f_i = d \sum_i \nu_i f_i = d \mathbb{E}^Q(f)$$

где $E^Q(\cdot)$ – мат. ожидание в риск-нейтральной мере Q .

Стохастический дисконт-фактор

Пусть π_1, \dots, π_n – экзогенные вероятности состояний мира, $\pi_i > 0$. Положим $m = \frac{q}{\pi} \Leftrightarrow m_i = \frac{q_i}{\pi_i}$ – стохастический дисконт-фактор.

$$q(f) = \sum_i q_i f_i = \sum_i \pi_i \frac{q_i}{\pi_i} f_i = \mathbb{E}(m \cdot f)$$

Полный рынок

Если рынок полный, то любой поток реплицируемый. Пусть $h \in \mathbb{R}^k$ – реплицирующий портфель, т.е. $f = Fh$ ($h = F^{-1}f$, если F обратима). Тогда цену потока можно определить как цену реплицирующего портфеля:

$$q(f) = p(h) = \langle p, h \rangle$$

Теорема.

Следующие операторы ценообразования эквивалентны:

$$q(f) = \langle q, f \rangle = d \cdot \mathbb{E}^Q(f) = \mathbb{E}(m \cdot f) =^* \langle p, h \rangle$$

CAPM

Пусть f – произвольный поток. Пусть $q(f) > 0$. Определим вектор доходности(гросс):

$$R_f = \frac{f}{q(f)}$$

Цена такого потока равна единице:

$$q(R_f) = q\left(\frac{f}{q(f)}\right) = \frac{q(f)}{q(f)} = 1$$

Пусть также e – вектор из единиц, пусть R_0 – доходность облигации:

$$R_0 = \frac{1}{q(e)} = \frac{1}{d} = \frac{1}{\mathbb{E}(m)}$$

Определение. $R_f - R_0$ – стохастическая риск-премия: избыточная доходность рискового потока f над безрисковой доходностью.

$\mathbb{E}R_f - R_0$ – (ожидаемая) риск-премия.

Утверждение. Стохастическая риск-премия ортогональна стохастическому дисконт-фактору.

Запишем цену R_f через стохастический дисконт-фактор:

$$q(R_f) = \mathbb{E}(m \cdot R_f) = 1$$

$R_f - R_0$ Тогда:

$$q(R_f - R_0) = \mathbb{E}(m(R_f - R_0)) = 0$$

Утверждение. Риск-премия зависит только от систематического риска: корреляции со стох. дисконт-фактором.

$$\mathbb{E}(m \cdot (R_f - R_0)) = \mathbb{E}(m)(\mathbb{E}(R_f) - R_0) + \text{cov}(R_f, m) = 0$$

откуда

$$\mathbb{E}(R_f) - R_0 = -\frac{\text{cov}(R_f, m)}{\mathbb{E}(m)}$$

CAPM. Пусть $R_m = \frac{m}{q(m)}$. Запишем предыдущую формулу для R_f и R_m :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_f) - R_0 &= -\frac{\text{cov}(R_f, m)}{\mathbb{E}(m)} \\ \mathbb{E}(R_m) - R_0 &= -\frac{\text{cov}(R_m, m)}{\mathbb{E}(m)}\end{aligned}$$

Поделим первое уравнение на второе, обозначим:

$$\beta_f = \frac{\text{cov}(R_f, m)}{\text{cov}(R_m, m)}$$

Откуда:

$$\mathbb{E}(R_f) - R_0 = \beta_f (\mathbb{E}(R_m) - R_0)$$

Риск-премия произвольного потока f зависит от риск-премии стох. дисконт-фактора линейно с коэффициентом, зависящим от ковариации f и m .

Полнота рынка опционов

Пусть X – измеримое множество. Обозначим через $\Gamma(X)$ – множество функций над X : $\Gamma(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$, через $\Gamma^*(X)$ – множество мер над множеством X .

Пусть $a \in A$ – пространство активов. Будем считать, что A – измеримое пространство. Тогда произвольный портфель активов задаётся мерой $h \in \Gamma^*(A)$, т.е. пространство портфелей (пространство альтернатив) совпадает с $\Gamma(A)$.

Пусть $p \in \Gamma(A)$ – функция цены. Ценообразование на пространстве портфелей задаётся через интеграл:

$$p(h) = \int_A p(a)dh(a)$$

Пусть Ω – пространство исходов, множество состояний мира в момент $t = 1$. Аналогично, считаем, что Ω – измеримое пространство. Часто мы параметризуем пространство исходов ценой акции, в этом случае $\Omega = \mathbb{R}$.

Произвольный поток f задаётся как случайная величина, т.е. $f \in \Gamma(\Omega)$.

Пример: пусть состояния мира параметризуются ценой акции $S \in \mathbb{R}$. Поток колл-опциона со страйком K :

$$f_K(S) = \max(S - K, 0) = (S - K)^+$$

Поток форварда со страйком K :

$$\text{Forw}_K(S) = S - K$$

Будем считать, что каждый актив задаётся своим потоком, т.е. пусть есть оператор $F : A \rightarrow \Gamma(\Omega)$, которая ставит в соответствие каждому активу a его поток $F(a) \in \Gamma(\Omega)$.

Пусть $h \in \Gamma^*(A)$ – портфель. Тогда поток портфеля задаётся через интеграл:

$$f_h = \int_A F(a)dh(a)$$

Поточечно это можно понимать как:

$$f_h(\omega) = \int_A F[a](\omega)dh(a)$$

$q \in \Gamma^*(\Omega)$ – функционал прайсинга.

$$q(f) = \int_{\Omega} f(\omega)dq(\omega)$$

Объект	Конечный рынок	Бесконечный рынок
Базовые активы	$a \in A$	$a \in A$
Портфели	$h \in \mathbb{R}^k$	$h \in \Gamma^*(A)$
Цены базовых активов	$(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k$	$p \in \Gamma(A)$
Цена портфеля	$p(h) = \sum_i p_i h_i$	$p(h) = \int_A p(a) dh(a)$
Пространство исходов	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	$\Omega (= \mathbb{R})$
Потоки	$f \in \mathbb{R}^n$	$f \in \Gamma(\Omega)$
Поток актива	$F: A \mapsto \mathbb{R}^n$	$F: A \mapsto \Gamma(\Omega)$
Поток портфеля	$f = Fh$	$f = \int_A F(a) dh(a)$
Функционал прайсинга	$q \in \mathbb{R}^n$	$q \in \Gamma^*$
Цена потока	$q(f) = \sum_i q_i f_i$	$q(f) = \int_{\Omega} f(\omega) dq(\omega)$

Полнота рынка опционов

Рассмотрим рынок с пространством исходов $\Omega = \mathbb{R}(S)$. Считаем, что состояния мира параметризованы ценой акции $S \in \mathbb{R}$ в момент $t = 1$.

Пусть на рынке торгуются колл-опционы на акцию. Пространство активов параметризовано страйком опциона $A = \mathbb{R}(K)$. Поток опциона со страйком K задаётся как $f_K(S) = (S - K)^+$. Пусть портфель h (мера) имеет плотность, $dh(K) = h(K)dK$. Тогда поток портфеля задаётся через интеграл:

$$f_h(S) = \int_{\mathbb{R}(K)} (S - K)^+ h(K) dK$$

Рынок опционов является полным, в том смысле, что $\forall f$ – гладкая и финитная функция, $\exists h$:

$$f = \int_{\mathbb{R}(K)} (S - K)^+ h(K) dK$$

где портфель $h(K)$ (его плотность) задаётся как $h(K) = f''(K)$.

Пусть $p(K)$ – цена опциона со страйком K . Рынок безарбитражен, если $p' \leq 0$, $p'' \geq 0$. При этом плотность риск-нейтральной меры задаётся как

$$q(S) = \frac{\partial^2 p(K)}{\partial K^2} \Big|_{K=S}$$

Операторы ценообразования эквиваленты:

$$q(f) = \int_{\mathbb{R}(S)} f(S) q(S) dS = \int_{\mathbb{R}(S)} f(S) \frac{\partial^2 p(K)}{\partial K^2} \Big|_{K=S} dS = \int_{\mathbb{R}(K)} p(K) \frac{\partial^2 f(S)}{\partial S^2} \Big|_{S=K} dK = \int_{\mathbb{R}(K)} p(K) h(K) dK = f_h(S)$$

где h – реплицирующий портфель.

Два подхода к ценообразованию: считаем среднюю выплату в риск-нейтральной мере \Leftrightarrow считаем стоимость реплицирующего портфеля.