Лекция 3. Функция полезности или рынок одного агента

March 8, 2025

Карта курса

- **Введение** - зачем нужны финансы?
- **Экономика** - как моделируются агенты и рынки?
- **Финансы** - как определяется стоимость финансовых инструментов?
- **Деривативы** - модели определения стоимости разных финансовых инструментов

Ограничения функции полезности

Напоминание: Непрерывная функция полезности

Теорема Дебрё (Debreu)

Отношение предпочтений удовлетворяет следующим аксиомам

- $\preceq$ - полно
- $\preceq$ - транзитивно
- $\preceq$ - непрерывно

тогда и только тогда, когда $\preceq$ задается непрерывной функцией полезности:

$$a \preceq b \Leftrightarrow u(\alpha) \leq u(\beta)$$

При этом $u \sim u' \Leftrightarrow u' = v \circ u$, v - монотонна и непрерывна.

Монотонность

Определение

Отношение предпочтения $\preceq$ - монотонно, если

$$x \geq y \Rightarrow x \succeq y$$

Здесь: $x = (x_1, \ldots) \geq y = (y_1, \ldots) \Leftrightarrow x_j \geq y_j$

Утверждение

Отношение предпочтения монотонно тогда и только тогда, когда u - монотонна.

Вогнутость

Определение

Отношение предпочтения $\preceq$ вогнуто (или уважает избегание риска), если

$$x \succeq z, y \succeq z \Rightarrow x(1-\alpha) + y\alpha \succeq z, \alpha \in (0,1)$$

Утверждение

Отношение предпочтения вогнуто тогда и только тогда, когда u - вогнуто.

Квазилинейность

Определение

Отношение предпочтения $\preceq$ на множестве альтернатив $\mathbb{R}_+(x) \times A(a)$ квазилинейно, если

- $(x, a) \preceq (x', a) \Leftrightarrow x \leq x'$
- $\forall a \in A\ \exists x \in \mathbb{R} : (0, a) \sim (x, a_-)$, где $(0, a_-) \preceq (0, a)\ \forall a$
- $(x, a) \preceq (x', a') \Rightarrow (x + t, a) \preceq (x' + t, a')\ \forall t$

Утверждение

Отношение предпочтения квазилинейно тогда и только тогда, когда u - квазилинейно: $u(x, a) = x + v(a)$.

Однопериодный рынок одного агента: как функция полезности порождает ценообразование

Рынки

# Агентов \ # Периодов	Статика (1 период)	Динамика (∞ периодов)
1 агент	Оптимизация $a^* = \operatorname{argmax}_R u(a)$	Оптимальное управление $a^*(t) = \operatorname{argmax}_R U[a(t)]$
N агентов	Теория игр $a^* = \mathrm{Nash}(u_1, \ldots, u_N)$	Дифференциальные игры $a^*(t) = \mathrm{Nash}(U_1, \ldots, U_N)$

Пример: work-life balance

- x - количество часов работы
- y - количество часов отдыха
- $u(x, y)$ - функция полезности

Пример: work-life balance

- x - количество часов работы
- y - количество часов отдыха
- $u(x, y)$ - функция полезности

$$\begin{cases} u(x, y) \to max \\ x + y = 24 \end{cases} \tag{1}$$

Пример: work-life balance

- x - количество часов работы
- y - количество часов отдыха
- $u(x, y)$ - функция полезности

$$\begin{cases} u(x, y) \to max \\ x + y = 24 \end{cases} \tag{1}$$

$$0 = \frac{d}{dx} u(x, 24 - x) = u'_x - u'_y$$

Равновесие: предельная польза от работы = предельной пользе от отдыха

Пример: CES-функция полезности

CES-функция (constant elasticity of substitution)

$$u(x,y) = (\alpha x^{1/\rho} + \beta y^{1/\rho})^{\rho}$$

$$E = \frac{d\log(x/y)}{d\log\left(u'_x/u'_y\right)} = \frac{1}{1-\rho}$$

- $\rho = 1$: $u(x,y) = \alpha x + \beta y$
- $\rho = -\infty$: $u(x,y) = min(\alpha x, \beta y)$ (функция Леонтьева)
- $\rho = 0$: $u(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ (функция Кобба-Дугласа)

Общий случай: выбор при бюджетных ограничениях

- $x = (x_1 \dots, x_n)$ - активы
- $p = (p_1, \dots, p_n)$ - экзогенные цены
- $< p, x >= w$ - бюджетное ограничение
- $u(x)$ - функция полезности

Оптимизационная задача: $u(x) \to max$ при $< p, x >= w$

$$L(x, \lambda) = u(x) - \lambda(< p, x > -w)$$

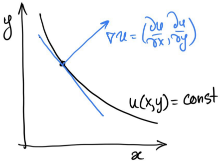
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda p \\ < p, x >= w \end{cases}$$

Терминология

- Линия уровня функции полезности - гиперповерхность безразличия:

$$u(x) = const$$

Задает сравнение различных портфелей x - абсолютный прайсинг.



- Градиент функции полезности - гиперплоскость безразличия:

$$du = \nabla u(a) dx = u'_1 dx_1 + \ldots + u'_n dx_n = 0,$$

Задает сравнение различных приращений портфелей dx - локальный/относительный прайсинг.

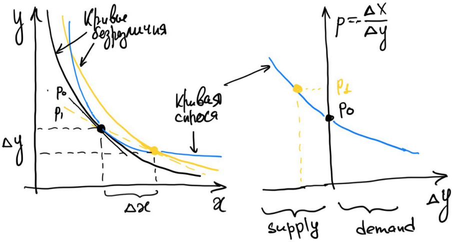
Функция спроса (Абсолютный прайсинг)

Функция спроса ($\Delta x, \Delta y$ - конечные величины):

$$P \mapsto \Delta y(P), P = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

где

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - P_x \cdot \Delta x - P_y \cdot \Delta y \to max_{\Delta x, \Delta y}, P = \frac{P_y}{P_x}$$

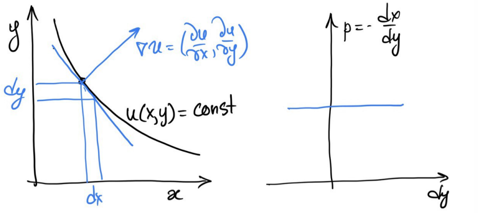


Предельная цена (Относительный прайсинг)

Предельная цена (dx, dy - бесконечномалые приращения):

$$p = -\frac{dx}{dy}$$

$$u(x + dx, y + dy) = u(x, y)$$



Отступление: Преобразование Лежандра

Определение

Пусть $f, f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - являются преобразованием Лежандра друг друга, если:

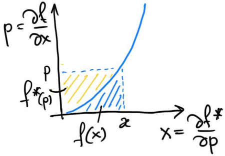
$$(x, \frac{\partial f}{\partial x}) = (\frac{\partial f^*}{\partial p}, p)$$

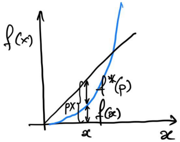
Утверждение

Если f-выпукла:

$$f^*(p) = \sup_x (< p, x > - f(x))$$

$$f(x) = \sup_p (< p, x > - f^*(p))$$

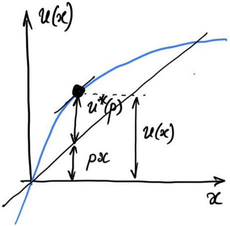


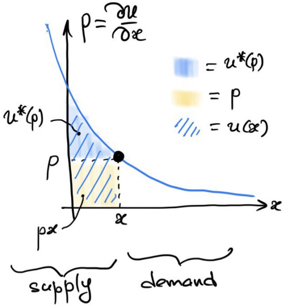


Функция спроса как преобразование Лежандра

Пусть p - цены в терминах единиц полезности (например, квазилинейная). Тогда задача потребителя:

$$\underbrace{u^*(p)}_{\text{surplus}} = \sup_x (\underbrace{u(x)}_{\text{utility}} - \underbrace{< p, x >}_{\text{costs}})$$





Задача фирмы

$$\underbrace{c^*(p)}_{\text{прибыль}} = \sup_q (\underbrace{< p, x >}_{\text{доход}} - \underbrace{c(x)}_{\text{расходы}})$$

- x - товары
- $c(x)$ - производственная функция (затраты на производство x)
- $c^*(p)$ - прибыль при ценах p

Однопериодный финансовый рынок одного агента

Напоминание: Ожидаемая функция полезности

Теорема (фон Нейман - Моргенштерн)

Отношение предпочтений удовлетворяет следующим аксиомам

- $\preceq$ - полно
- $\preceq$ - транзитивно
- $\preceq$ - непрерывно
- $\preceq$ - независимо

тогда и только тогда, когда $\preceq$ задается функцией полезности фон Неймана - Моргенштерна:

$$a \preceq b \Leftrightarrow \mathbb{E}u(\alpha) \leq \mathbb{E}u(\beta)$$

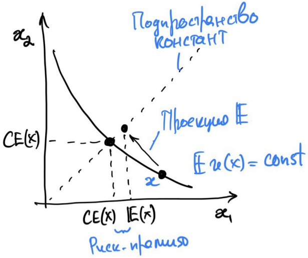
При этом $u \sim u' \Leftrightarrow u' = \alpha u + \beta$.

Кэш-эквивалент (абсолютный прайсинг)

Определение

Пусть $x \in A$, определим $CE : A \to \mathbb{R}$:

$$u(CE(x)) = \mathbb{E}u(x)$$



Стохастический дисконт фактор (относительный прайсинг)

Пусть $B = \{y : \mathbb{E}u(y) = \mathbb{E}u(x)\}$ - гиперповерхность безразличия, $T_x B$ - гиперплоскость безразличия: $w \in T_x B$ если

$$\mathbb{E}(u'(x)w) = 0$$

Стоимость $p(v)$ актива $v \in T_\xi A$ определяется так, чтобы вектор $w = -p(v)\mathbf{1} + v \in T_\xi B$.
Тогда:

$$p(v) = \mathbb{E}(\frac{u'(\xi)}{\mathbb{E}u'(\xi)} v) = \mathbb{E}(mv)$$

m - стохастический дисконт фактор (stochastic discount factor/pricing kernel/marginal rate of substitution)

Риск-нейтральная мера

$$p(v) = \mathbb{E}(mv) = \mathbb{E}^Q(v)$$

$$m = \frac{dQ}{dP}$$

Пример

Вы выиграли контракт:

$$f = \begin{cases} \$1 \text{ mln}, \pi_1 = 1/2 \\ \$0, \pi_2 = 1/2 \end{cases}$$

За сколько вы готовы его продать?
$p(f) =?$

$$f = \begin{cases} \$1 \text{ mln}, q_1 =?, m_1 =? \\ \$0, q_2 =?, m_2 =? \end{cases}$$