Пусть торгуются бескупонные облигации со всеми датами погашения. Пусть $p_t(T)$ – цена облигации с датой погашения T в момент времени t.

Задача 1 (FRA). FRA – контракт, который обменивает плавающую ставку на фиксированную:

$$f_S = (T - S) \cdot (R_T(S) - K)$$

где

$$R_T(S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{p_T(S)} - 1\right) \in \mathcal{F}_T$$

длинная спот-ставка в момент T на срок $S - T$.

- Чему равна стоимость V_0^f такого контракта в момент $t = 0$?
- Распишите явно, как реплицировать его, торгуя облигациями с разным сроком погашения: сколько и каких облигаций покупать/продавать в разные моменты времени.

Задача 2 (Forward start swap). Рассмотрим процентный своп, который начинает действовать в будущем, т.е. контракт с потоками:

$$f_t = (r_{t-1} - K) \cdot \tau \cdot \mathbb{I}(T < t \le S)$$

где $T < S$ – даты начала и конца свопа.

- Чему равна стоимость V_0^f такого контракта в момент $t = 0$?
- При какой ставке K стоимость контракта равна нулю?

Задача 3 (Построение кривой доходности). Пусть на рынке котируются своп-ставки для свопов с платежами раз в год ($\tau = 1$) на сроки 1, 2, 3, 4 года:

Срок	1Y	2Y	3Y	4Y
Своп-ставка	5%	6.71%	8.88%	9.9%

- Найдите цены бескупонных облигаций $p_0(i)$ при $i = 1, 2, 3, 4$, согласованные с котировками своп-ставок
- Найдите длинные спот-ставки $R_0(i)$ для всех сроков.

Задача 4 (Арбитраж). Пусть в рамках предыдущей задачи вам предлагают бесплатно (без потоков в $t = 0$) заключить FRA (платим фиксированную ставку, получаем плавающую) с первого по второй год ($T = 1, S = 2$) со страйком $K = 12\%$.

- Возникают ли здесь арбитражные возможности?
- Если да, как их реализовать?