Лекция 2. Теория принятия решений

March 1, 2025

Карта курса

- **Введение** - зачем нужны финансы?
- **Экономика** - как моделируются агенты и рынки?
- **Финансы** - как определяется стоимость финансовых инструментов?
- **Деривативы** - модели определения стоимости разных финансовых инструментов

Маршрут лекции

Примеры

Пример 1: монетка на миллион

Вы выиграли контракт:

$$f = \begin{cases} \$1 \text{ mln}, \pi_1 = 1/2 \\ \$0, \pi_2 = 1/2 \end{cases}$$

За сколько вы готовы его продать?

Пример 2: Санкт-Петербургский парадокс(1/2)

Игра:

- орел: выигрыш 1, решка: продолжаем
- орел: выигрыш 2, решка: продолжаем
- орел: выигрыш 4, решка: продолжаем
- ...

Сколько готовы заплатить за участие в такой игре?

Пример 2: Санкт-Петербургский парадокс(2/2)

- $F = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$
- $F = 2$ с вероятностью $\frac{1}{4}$
- $F = 4$ с вероятностью $\frac{1}{8}$
- ...

Пример 2: Санкт-Петербургский парадокс(2/2)

- $F = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$
- $F = 2$ с вероятностью $\frac{1}{4}$
- $F = 4$ с вероятностью $\frac{1}{8}$
- ...

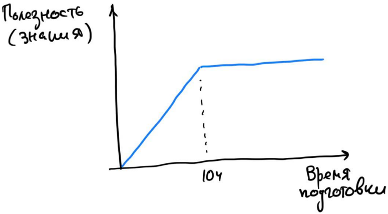
$$\mathbb{E}F = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots = \infty$$

Пример 3: Подготовка к экзамену

Студент решает, сколько часов посвятить изучению материала перед экзаменом. Первые 10 часов подготовки значительно повышают его понимание темы — полезность (ожидаемая оценка) растет. Однако после 10 часов дополнительное время почти не влияет на результат: материал уже усвоен, и дальнейшая "зубрёжка" не улучшает знаний, но и не вредит.

Пример 3: Подготовка к экзамену

Студент решает, сколько часов посвятить изучению материала перед экзаменом. Первые 10 часов подготовки значительно повышают его понимание темы — полезность (ожидаемая оценка) растет. Однако после 10 часов дополнительное время почти не влияет на результат: материал уже усвоен, и дальнейшая "зубрёжка" не улучшает знаний, но и не вредит.

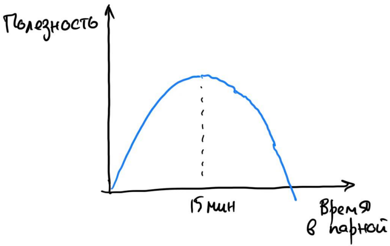


Пример 4: Баня

Предположим, студент решает, сколько минут провести в сауне. Первые 15 минут приносят удовольствие и расслабление (полезность растет). Однако после 15 минут пребывания жара становится некомфортной: начинает кружиться голова, учащается сердцебиение, и каждая дополнительная минута приносит все больше дискомфорта (полезность убывает)

Пример 4: Баня

Предположим, студент решает, сколько минут провести в сауне. Первые 15 минут приносят удовольствие и расслабление (полезность растет). Однако после 15 минут пребывания жара становится некомфортной: начинает кружиться голова, учащается сердцебиение, и каждая дополнительная минута приносит все больше дискомфорта (полезность убывает)



Пространство альтернатив: какими объектами могут быть представлены альтернативы?

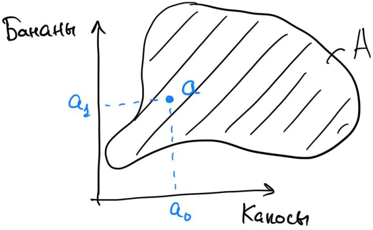
Несколько альтернатив

$$A = \{a, b, c, \ldots\}$$

- конечное множество

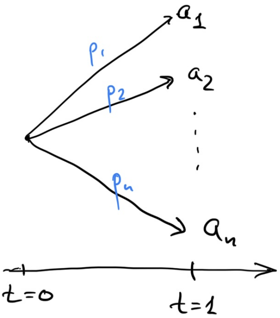
Векторное представление потребительской корзины

- $A \subset \mathbb{R}^n$ - множество корзин
- $a = (a_0, \ldots, a_n) \in A$ - набор товаров/портфель



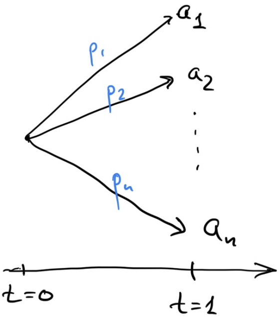
Одноnериодная выплата

- $A \subset \mathbb{R}^n$ - множество допустимых инструментов
- $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ - выплаты в разных состояниях мира (payoff)



Лотереи

- $A \subset \mathbb{R}^n$ - множество лотерей при фиксированных выплатах
- $a = (p_1, \dots, p_n) \in A$ - вероятности выплат



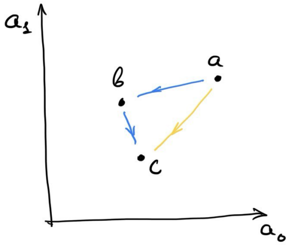
Финансовые инструменты в общем случае

- Финансовый инструмент в однопериодной модели/Лотерея $\sim$ Случайная величина, $A \subset L^0(\Omega, \mu)$
- Финансовый инструмент в многопериодной модели $\sim$ Случайный вектор/последовательность, $A \subset (L^0(\Omega, \mu))^n$
- Финансовый инструмент в непрерывной модели $\sim$ Стохастический процесс, $A \subset L^0(\Omega \times \mathbb{R}, \mu \times B)$

Отношение предпочтения: Как моделировать выбор между альтернативами?

Отношение предпочтения

- A - множество допустимых альтернатив (портфелей)
- $a = (a_0, \ldots, a_n) \in A$ - альтернатива
- $a \preceq b$ - отношение предпочтения = бинарное отношение (подмножество $R \subset A \times A$)

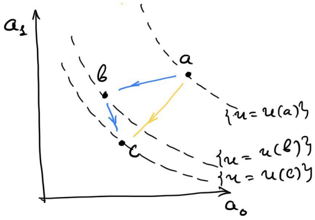


Функция полезности

Определение

Пусть A - множество альтернатив. Отношение задается $u : A \to \mathbb{R}$ - функцией полезности, если

$$a \preceq b \Leftrightarrow u(a) \leq u(b)$$



Аксиома полноты

Определение

Отношение предпочтения полное, если

$$\forall a, b : a \preceq b \vee b \preceq a$$

Аксиома транзитивности

Определение

Отношение предпочтения транзитивное, если

$$a \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$$

Контрпример: Framing

Дискретная функция полезности

Теорема

Пусть A - конечно. Отношение предпочтений удовлетворяет следующим аксиомам[a]

- $\preceq$ - полно
- $\preceq$ - транзитивно

тогда и только тогда, когда $\preceq$ задается функцией полезности:

$$a \preceq b \Leftrightarrow u(a) \leq u(b)$$

При этом $u \sim u' \Leftrightarrow u' = v \circ u$, v - монотонна.

[a] Такое бинерное отношение в экономике называют рациональное отношение, в математике - отношение предпорядка

Доказательство

Доказательство

1. Доказательство по индукции по размеру множества. Для $n = 0$ (когда $A = \emptyset$) утверждение тривиально, так как $\{u(a) \mid a \in A\} = \emptyset$.

Доказательство

1. Доказательство по индукции по размеру множества. Для $n = 0$ (когда $A = \emptyset$) утверждение тривиально, так как $\{u(a) \mid a \in A\} = \emptyset$.
2. Индуктивный переход. Пусть $C(A) = \{a : a \succeq b, b \in A\}$, тогда $\#(A \setminus C(A)) \leq n$. Положим $u(C(A)) = n + 1$.

Доказательство

1. Доказательство по индукции по размеру множества. Для $n = 0$ (когда $A = \emptyset$) утверждение тривиально, так как $\{u(a) \mid a \in A\} = \emptyset$.
2. Индуктивный переход. Пусть $C(A) = \{a : a \succeq b, b \in A\}$, тогда $\#(A \setminus C(A)) \leq n$. Положим $u(C(A)) = n + 1$.
3. Пусть $a \succeq b$. Если $a \in C(A)$, то $u(a) = n + 1 \geq u(b)$. Если $a \notin C(A)$, то по транзитивности $b \notin C(A)$, и, следовательно, $a, b \in A \setminus C(A)$, а значит, $u(a) \geq u(b)$.

Доказательство

1. Доказательство по индукции по размеру множества. Для $n = 0$ (когда $A = \emptyset$) утверждение тривиально, так как $\{u(a) \mid a \in A\} = \emptyset$.
2. Индуктивный переход. Пусть $C(A) = \{a : a \succeq b, b \in A\}$, тогда $\#(A \setminus C(A)) \leq n$. Положим $u(C(A)) = n + 1$.
3. Пусть $a \succeq b$. Если $a \in C(A)$, то $u(a) = n + 1 \geq u(b)$. Если $a \notin C(A)$, то по транзитивности $b \notin C(A)$, и, следовательно, $a, b \in A \setminus C(A)$, а значит, $u(a) \geq u(b)$.
4. Пусть $u(a) \geq u(b)$. Аналогично рассматривая два случая: $u(a) = n + 1$ и $u(a) \leq n$, получаем $a \succeq b$.

Аксиома непрерывности

Определение

Отношение предпочтения непрерывно: если для любой последовательности $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$, такой что $x_n \to x$, $y_n \to y$, и $x_n \preceq y_n$ для всех n, выполняется $x \preceq y$.

Контрпример: Лексикографический порядок

Лексикографическое отношение

Для двух товарных наборов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ в $\mathbb{R}^2_+$:

$$x \succ_{\text{lex}} y \iff \begin{cases} x_1 > y_1, & \text{или} \\ x_1 = y_1 \text{ и } x_2 > y_2 \end{cases}$$

- Пример: $(3, 1) \succ_{\text{lex}} (2, 100500)$
- Приоритет первого товара над вторым

Отсутствие функции полезности

Теорема

Не существует функции полезности $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, представляющей $\succ_{\text{lex}}$.

Доказательство

1. Предположим противное: $\exists$ непрерывная u, где

$$\mathrm{x} \succ_{\mathrm{lex}} \mathrm{y} \iff u(\mathrm{x}) > u(\mathrm{y}).$$

2. Рассмотрим:
   - Точку $x = (a, b)$
   - Последовательность $\mathrm{x}_n = (a + \frac{1}{n}, c)$, где $c < b$
3. По лексикографическому порядку:

$$\mathrm{x}_n \succ_{\mathrm{lex}} x \; \forall n \implies u(\mathrm{x}_n) > u(x)$$

4. При $n \to \infty$:

$$\mathrm{x}_n \to (a, c) \implies \text{по непрерывности } u(a, c) \geq u(a, b)$$

5. Но $(a, b) \succ_{\mathrm{lex}} (a, c) \implies u(a, b) > u(a, c)$. Противоречие.

Непрерывная функция полезности

Теорема Дебрё (Debreu)

Отношение предпочтений удовлетворяет следующим аксиомам

- $\preceq$ - полно
- $\preceq$ - транзитивно
- $\preceq$ - непрерывно

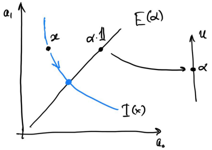
тогда и только тогда, когда $\preceq$ задается непрерывной функцией полезности:

$$a \preceq b \Leftrightarrow u(\alpha) \leq u(\beta)$$

При этом $u \sim u' \Leftrightarrow u' = v \circ u$, v - монотонна и непрерывна.

Доказательство

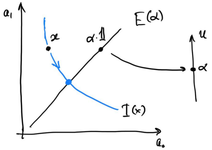
Частный случай: $A = \mathbb{R}^n_+$, $\preceq$ - монотонное (если $a >> b$, то $a \succeq b$).



Доказательство

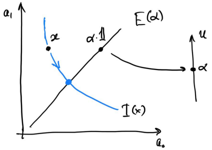
Частный случай: $A = \mathbb{R}^n_+$, $\preceq$ - монотонное (если $a >> b$, то $a \succeq b$).

1. $E(\alpha) = \alpha \cdot (1, 1, \ldots, 1)^T$, $E = \cup E(\alpha)$, $u(E(\alpha)) = \alpha$



Доказательство

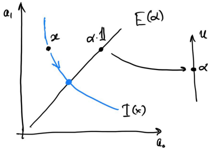
Частный случай: $A = \mathbb{R}^n_+$, $\preceq$ - монотонное (если $a >> b$, то $a \succeq b$).



1. $E(\alpha) = \alpha \cdot (1, 1, \ldots, 1)^T$, $E = \cup E(\alpha)$, $u(E(\alpha)) = \alpha$
2. $I(x) = \{y : y \sim x\}$. Аксиома непрерывности: $I(x) \cap E \neq \emptyset$. Действительно: $A^+ = \{\alpha : E(\alpha) \succeq x\}$, $A^- = \{\alpha : E(\alpha) \preceq x\}$, $A^+ \cup A^- = \mathbb{R}$, $\overline{A^{\pm}} = A^{\pm} \Rightarrow A^+ \cap A^- \neq \emptyset$

Доказательство

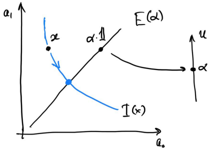
Частный случай: $A = \mathbb{R}^n_+$, $\preceq$ - монотонное (если $a >> b$, то $a \succeq b$).



1. $E(\alpha) = \alpha \cdot (1, 1, \dots, 1)^T$, $E = \cup E(\alpha)$, $u(E(\alpha)) = \alpha$
2. $I(x) = \{y : y \sim x\}$. Аксиома непрерывности: $I(x) \cap E \neq \emptyset$. Действительно: $A^+ = \{\alpha : E(\alpha) \succeq x\}$, $A^- = \{\alpha : E(\alpha) \preceq x\}$, $A^+ \cup A^- = \mathbb{R}$, $\overline{A^\pm} = A^\pm \Rightarrow A^+ \cap A^- \neq \emptyset$
3. $u(x) = \alpha, \alpha = sup(A^+ \cap A^-)$

Доказательство

Частный случай: $A = \mathbb{R}^n_+$, $\preceq$ - монотонное (если $a >> b$, то $a \succeq b$).



1. $E(\alpha) = \alpha \cdot (1, 1, \dots, 1)^T$, $E = \cup E(\alpha)$, $u(E(\alpha)) = \alpha$
2. $I(x) = \{y : y \sim x\}$. Аксиома непрерывности: $I(x) \cap E \neq \emptyset$. Действительно: $A^+ = \{\alpha : E(\alpha) \succeq x\}$, $A^- = \{\alpha : E(\alpha) \preceq x\}$, $A^+ \cup A^- = \mathbb{R}$, $\overline{A^\pm} = A^\pm \Rightarrow A^+ \cap A^- \neq \emptyset$
3. $u(x) = \alpha, \alpha = sup(A^+ \cap A^-)$
4. Проверка, что построенное u задает $\preceq$.

Теория ожидаемой полезности

Как сравнивать альтернативы $a \preceq b$?
Ответ: $U(a) \leq U(b)$
Проблема: $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $n = \infty$
Можно ли упростить $U(a)$?

Теория ожидаемой полезности

Как сравнивать альтернативы $a \preceq b$?
Ответ: $U(a) \leq U(b)$
Проблема: $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $n = \infty$
Можно ли упростить $U(a)$?
Ответ (теория ожидаемой полезности):

$$U(a) = \mathbb{E}u(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} p_j u(a_j)$$

$$\alpha = \begin{cases} a_1, p_1 \\ \dots \\ a_n, p_n \end{cases}$$

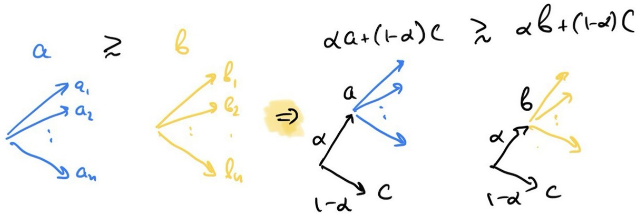
Аксиома независимости

Пусть пространство A - выпукло: если $a, b \in A$, тогда $pa + (1-p)b \in A$ при $p \in [0,1]$

Определение

Отношение предпочтения независимо, если

$$a \preceq b \Rightarrow (1-p)a + pc \preceq (1-p)b + pc \;\forall c$$



Контрпример: Парадокс Алле

Ожидаемая функция полезности

Теорема (фон Нейман - Моргенштерн)

Отношение предпочтений удовлетворяет следующим аксиомам

- $\preceq$ - полно
- $\preceq$ - транзитивно
- $\preceq$ - непрерывно
- $\preceq$ - независимо

тогда и только тогда, когда $\preceq$ задается функцией полезности фон Неймана - Моргенштерна:

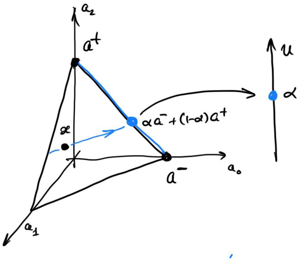
$$a \preceq b \Leftrightarrow \mathbb{E}u(\alpha) \leq \mathbb{E}u(\beta)$$

При этом $u \sim u' \Leftrightarrow u' = \alpha u + \beta$.

Доказательство

Частный случай: A - множество случайных величин с конечным фиксированным набором выплат:

$$A = \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(a_0, \ldots, a_n) : a_0 + \ldots + a_n = 1, a_j \geq 0$$

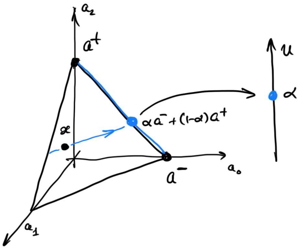


1. Аксиома независимости: $a \sim b \Rightarrow (1-p)a + pc \sim (1-p)b + pc \;\forall c$

Доказательство

Частный случай: A - множество случайных величин с конечным фиксированным набором выплат:

$$A = \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(a_0, \ldots, a_n) : a_0 + \ldots + a_n = 1, a_j \geq 0$$

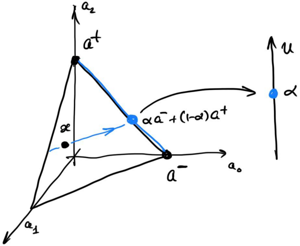


1. Аксиома независимости: $a \sim b \Rightarrow (1-p)a + pc \sim (1-p)b + pc \ \forall c$
2. $a^+ \in \max A, a^- \in \min A$

Доказательство

Частный случай: A - множество случайных величин с конечным фиксированным набором выплат:

$$A = \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(a_0, \ldots, a_n) : a_0 + \ldots + a_n = 1, a_j \geq 0$$

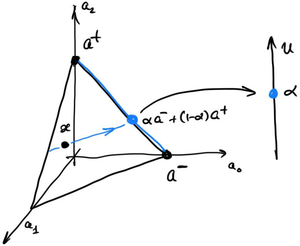


1. Аксиома независимости: $a \sim b \Rightarrow (1-p)a + pc \sim (1-p)b + pc \; \forall c$
2. $a^+ \in \max A, a^- \in \min A$
3. $E(\alpha) = \alpha a^+ + (1-\alpha)a^-$, $u(E(\alpha)) = \alpha$

Доказательство

Частный случай: A - множество случайных величин с конечным фиксированным набором выплат:

$$A = \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(a_0, \dots, a_n) : a_0 + \dots + a_n = 1, a_j \geq 0$$

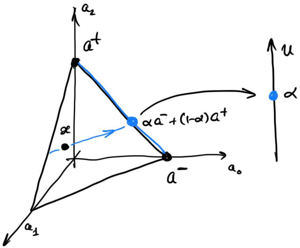


1. Аксиома независимости: $a \sim b \Rightarrow (1-p)a + pc \sim (1-p)b + pc \ \forall c$
2. $a^+ \in \max A, a^- \in \min A$
3. $E(\alpha) = \alpha a^+ + (1-\alpha)a^-$, $u(E(\alpha)) = \alpha$
4. $u(x) = \alpha, \ E(\alpha) \in (I(x) \cap E)$

Доказательство

Частный случай: A - множество случайных величин с конечным фиксированным набором выплат:

$$A = \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(a_0, \ldots, a_n) : a_0 + \ldots + a_n = 1, a_j \geq 0$$



1. Аксиома независимости: $a \sim b \Rightarrow (1-p)a + pc \sim (1-p)b + pc \ \forall c$
2. $a^+ \in \max A, a^- \in \min A$
3. $E(\alpha) = \alpha a^+ + (1-\alpha)a^-$, $u(E(\alpha)) = \alpha$
4. $u(x) = \alpha, \ E(\alpha) \in (I(x) \cap E)$
5. Проверка, что построенное u задает $\preceq$ и линейно.