Лекция 7. CAPM

April 12, 2025

План

- Портфельная теория Марковица
- Эффективная граница
- Теорема о двух фондах
- Безрисковый актив. Касательный портфель
- Произвольная функция полезности

Портфельная теория Марковица

- R_i – случайная доходность i-го актива, $i \in \overline{1, n}$
- $\mathbb{E}R_i = \mu_i, \ \mathrm{cov}(R_i, R_j) = \Sigma_{ij}$
- Портфель $h = (h_1, \ldots, h_n)$. h_i – доля i-го актива в портфеле. $\sum_i h_i = 1$
- Ожидание и дисперсия доходности портфеля h

$$\mu(h) = \mathbb{E} \sum_i R_i h_i = \sum_i \mu_i h_i = \mu^\top h$$

$$\sigma^2(h) = \mathrm{cov}\left(\sum_i R_i h_i \right) = \sum_{ij} h_i h_j \Sigma_{ij} = h^\top \Sigma h$$

Пример

- Два актива, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$
- Портфель $h = (h_1, h_2) = (h_1, 1 - h_1)$
- Зафиксируем доходность:

$$\mu_2 + h_1(\mu_1 - \mu_2) = r \to h_1 = \frac{r - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

- Дисперсия:

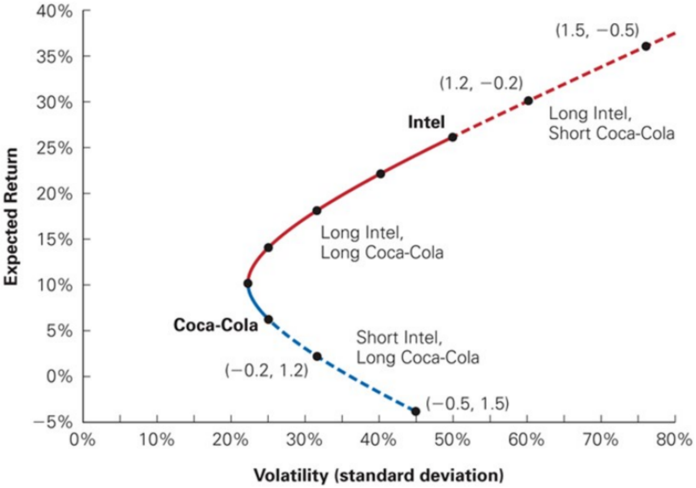
$$\sigma^2(h) = \sigma_1^2 h_1^2 + \sigma_2^2 h_2^2 + \sigma_1\sigma_2\rho h_1 h_2 = A' h_1^2 + B' h_1 + C'$$

$$\sigma^2(r) = Ar^2 + Br + C$$

- Множество портфелей образует гиперболу в осях (σ, r)

Пример

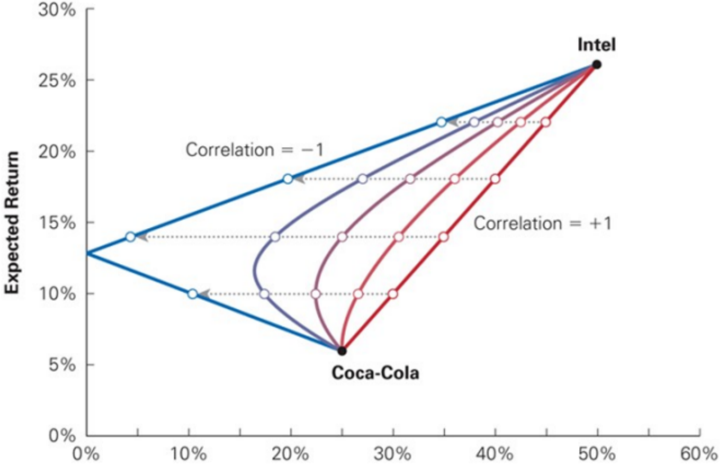
Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



Пример, $\rho = -1$

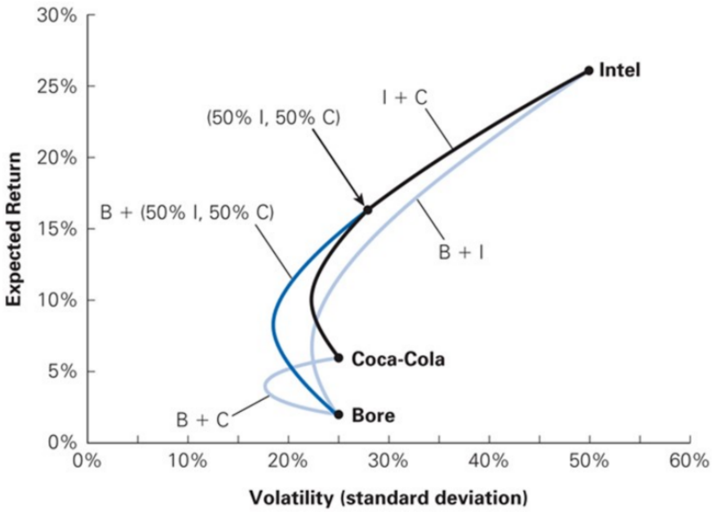
- Что если $\rho \to -1$?

Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



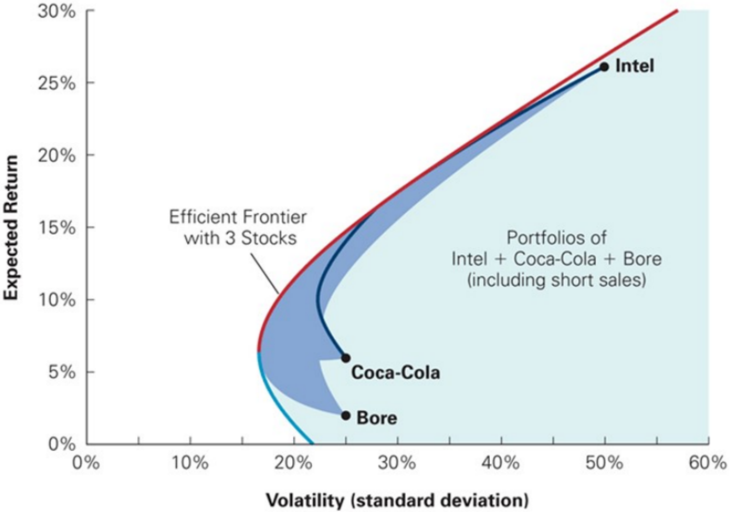
Множество портфелей

Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



Множество портфелей

Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



Эффективная граница

Доминирующий портфель

Портфель h доминирует портфель g, если $\mu(h) \geq \mu(g)$ и $\sigma(h) < \sigma(g)$ или $\mu(h) > \mu(h)$ и $\sigma(h) \leq \sigma(g)$.

- Множество доминирующих портфелей в осях (σ, r):

$$\sigma^2(r) = \min_h h^T \Sigma h$$
$$\text{s.t. } e^T h = 1$$
$$\mu^T h = r$$

- e – вектор из единиц, r – таргетная доходность.
- Какие доходноси r достижимы с помощью таких стратегий?

Эффективная граница

- Лагранжиан:

$$L(h, \alpha, \beta) = h^T \Sigma h - 2\alpha(e^T h - 1) - 2\beta(\mu^T h - r)$$

- F. O. C. :

$$2\Sigma h - 2\alpha e - 2\beta\mu = 0 \to h = \Sigma^{-1}(\alpha e + \beta\mu)$$

- Обозначим $a = e^T \Sigma^{-1} e$, $b = e^T \Sigma^{-1} \mu$, $c = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$.
- Ограничения:

$$a\alpha + b\beta = 1$$
$$b\alpha + c\beta = r$$

$$\alpha(r) = \frac{c - br}{ca - b^2}, \beta(r) = \frac{ar - b}{ca - b^2}$$

Эффективная граница: продолжение

- Веса эффективного портфеля – линейная функция доходности r:

$$h = h(r) = \Sigma^{-1} (\alpha(r)e + \beta(r)\mu)$$

- Оптимальная дисперсия – квадратичная функция r:

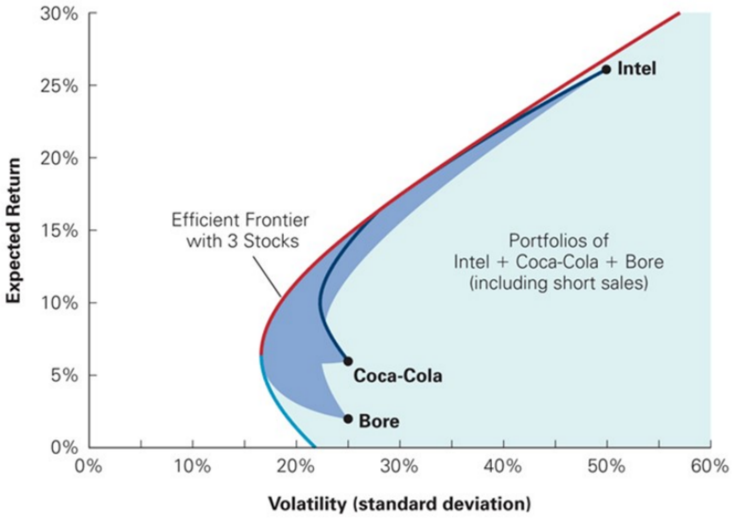
$$\sigma^2(r) = h^T \Sigma h = \frac{ar^2 - 2br + c}{ac - b^2}$$

- Минимальная достижимая дисперсия:

$$r^* = \frac{b}{a}, \quad \sigma^2_{min} = \sigma^2(r^*) = \frac{c - \frac{b^2}{a}}{ac - b^2} = \frac{1}{a}$$

Множество портфелей

Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



Теорема о двух фондах

Теорема

Пусть h_1, h_2 – два эффективных портфеля с доходностями r_1, r_2. Тогда $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ портфель $h = \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2$ – эффективный портфель с доходностью $\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2$.

Теорема

Любой эффективный портфель можно представить как линейную комбинацию каких-либо двух эффективных портфелей.

Эффективная граница с безрисковым активом

- Безрисковый актив: доходностью r_f и вола $\sigma_f = 0$
- Вкладываем h в рисковые активы, $1 - e^T h$ в безрисковый:

$$\sigma^2(r) = \min_h h^T \Sigma h$$
$$\text{s.t. } \mu^T h + (1 - e^T h) \cdot r_f = r$$

- Функция Лагранжа:

$$L(h, \lambda) = h^T \Sigma h - 2\lambda(\mu^T h + (1 - e^T h) \cdot r_f - r)$$

- FOC: $\Sigma h - \lambda(\mu - er_f) = 0 \to h = \lambda \sigma^{-1}(\mu - e \cdot r_f)$
- Условие на доходность:

$$\lambda = \frac{r - r_f}{(\mu - er_f)^T \Sigma^{-1}(\mu - er_f)} = \frac{r - r_f}{H^2}$$

где $H^2 = (\mu - er_f)^T \Sigma^{-1}(\mu - er_f)$

Эффективная граница с безрисковым активом

- Оптимальные веса:

$$h(r) = \Sigma^{-1}(\mu - er_f) \times \frac{r - r_f}{H^2}$$

- Эффективная граница линейная в координатах $(r, \sigma(r))$.

$$\sigma^2(r) = h^T \Sigma h = \left(\frac{r - r_f}{H}\right)^2$$

$$r = r_f + H\sigma(r)$$

Эффективная граница с безрисковым активом

- Оптимальные веса:

$$h(r) = \Sigma^{-1}(\mu - er_f) \times \frac{r - r_f}{H^2}$$

- Эффективная граница линейная в координатах $(r, \sigma(r))$.

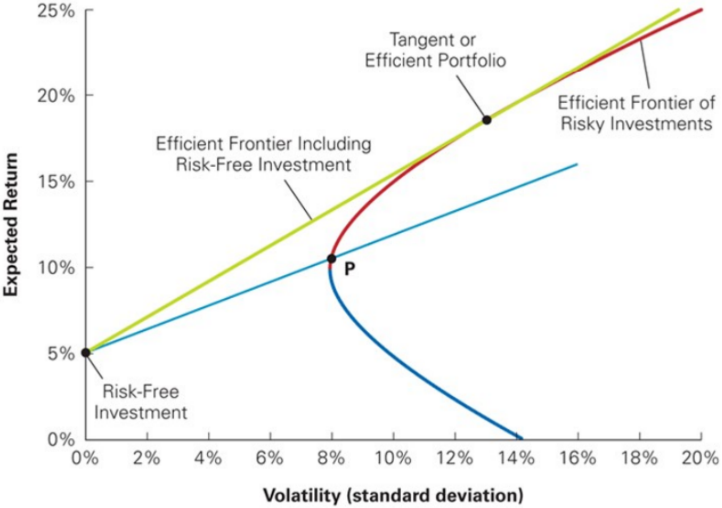
$$\sigma^2(r) = h^T \Sigma h = \left(\frac{r - r_f}{H}\right)^2$$

$$r = r_f + H\sigma(r)$$

- Если $e^T h(r) = 1$, то портфель лежит на эффективной границе рисковых активов – касательный портфель h_T. Чему равна его доходность?

Эффективная граница с безрисоквым активом

Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



CAPM

- Касательный портфель h_T, (r_T, σ_T).
- Максимизирует коэффициент Шарпа $\dfrac{r_T - r_f}{\sigma_T}$
- Добавим i-ый актив $h = \alpha e_i + (1-\alpha)h_T$

$$r(\alpha) = \alpha\mu_i + (1-\alpha)r_T$$
$$\sigma^2(\alpha) = \alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_T^2 + 2\alpha(1-\alpha)\mathrm{cov}(R_i, R_T)$$

- При малых $\alpha : \sigma(\alpha) \approx \sigma_T(1+\alpha(\beta_i - 1))$, $\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i,R_T)}{\sigma_T^2}$.3
- Условие оптимальности:

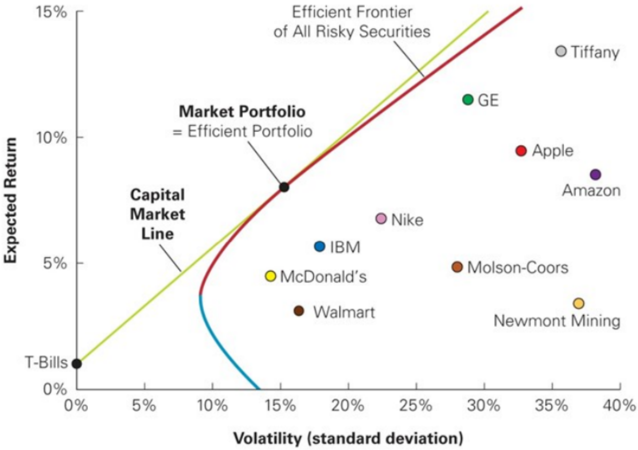
$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{r(\alpha)-r_f}{\sigma(\alpha)}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0 \to \left(\frac{dr(\alpha)/d\alpha}{d\sigma(\alpha)/d\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{r_T - r_f}{\sigma_T}$$

- CAPM:

$$\mu_i - r_f = \beta_i(r_T - r_f)$$

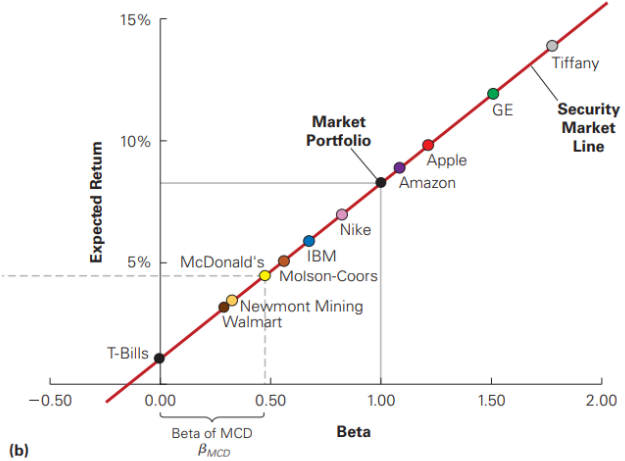
Множество оптимальных портфелей лежит на прямой $r = r_f + H \cdot \sigma$ – capital market line.

Figure: Source Berk-DeMarzo Corporate Finance



Security market line

Доходности активов лежат на прямой $\mu_i = r_f + \beta_i(r_T - r_f)$



Теорема о двух фондах

Теорема

Любой портфель, вкладывающий α в касательный портфель h_T и $1-\alpha$ в безрисковый актив является эффективным.

- Доходность нового портфеля: $r(\alpha) = \alpha r_T + (1-\alpha) r_f$
- Волатильность: $\sigma(\alpha) = \alpha \sigma_T$
- Sharp-ratio:

$$Sharp(\alpha) = \frac{r(\alpha) - r_f}{\sigma(\alpha)} = \frac{\alpha r_T + (1-\alpha) r_f - r_f}{\alpha \sigma_T} = \frac{r_T - r_f}{\sigma_T}$$

Теорема

Любой эффективный портфель может быть получен как вложение в касательный портфель и безрисковый актив.

Произвольная функция полезности

- Пусть $u(x)$ – вогнутая функция полезности.
- Оптимальные портфели

$$\max \mathbb{E}u(R(h))$$
$$s.t. e^T h = 1$$

где $R(h) = \sum_i h_i R_i$ – случайная доходность портфеля h.

- F.O.C.:

$$\mathbb{E}\left[u'(R(h))R_i\right] = -\lambda$$
$$\mathbb{E}\left[u'(R(h))\right]\mu_i + \mathrm{cov}(u'(R(h)), R_i) = -\lambda$$
$$\mu_i + \mathrm{cov}(m, R_i) = -\frac{\lambda}{\mathbb{E}\left[u'(R(h))\right]} = const$$

где $m = \dfrac{u'(R(h))}{\mathbb{E}u'(R(h))}$ – стохастический дисконт фактор.

Произвольная функция полезности

- F.O.C.:

$$\mu_i + \mathrm{cov}(m, R_i) = -\frac{\lambda}{\mathbb{E}\left[u'(R(h))\right]} = const$$

- Для безрискового актива:

$$\mu_i + \mathrm{cov}(m, R_i) = r_f \to \mu_i - r_f = \mathrm{cov}(m, R_i)$$

- Для оптимального портфеля h:

$$r + \mathrm{cov}(m, R) = r_f \to r - r_f = -\mathrm{cov}(m, R)$$

- Делим одно на другое, получим:

$$\mu_i = r_f + \beta_i\left(r - r_f\right)$$

где $\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(m,R_i)}{\mathrm{cov}(m,R)}$, $r = \mathbb{E}R = \mu^T h$ – ожидаемая доходность оптимального портфеля.

Теорема Рубинштейна

Теорема

Пусть (ξ, η) – гауссовский вектор, f – гладкая функция. Тогда

$$\operatorname{cov}(\xi, f(\eta)) = \mathbb{E}(f'(\eta)) \cdot \operatorname{cov}(\xi, \eta)$$

Нормальное распределение доходностей

- Пусть доходности R_i образуют гауссовский вектор $N(\mu, \Sigma)$.

$$\operatorname{cov}(u'(R(h)), R_i) = \mathbb{E}\left[u''(R(h))\right] \cdot \operatorname{cov}(R(h), R_i)$$

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R(h), R_i)}{\operatorname{cov}(R(h), R(h))}$$

- Нормальное распределение определяется моментами 1-го и 2-го порядка $\rightarrow$ задача эквивалента mean-variance анализу.