Лекция 10. Прайсинг деривативов в динамической модели

May 24, 2025

План лекции

- Пример: модель Cox-Ross-Rubinstein
- Операторы ценообразования
- Реплицирующий портфель
- Разные типы опционов: европейский, американский, азиатский, барьерный.

Пример (Cox-Ross-Rubinstein binomial model)

- Два актива, акция и облигация
- Цена акции S_t:

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t \cdot u, & \text{с вероятностью } 0.5 \\ S_t \cdot d & \text{с вероятностью } 0.5 \end{cases},$$

  $d < u$, $S_0 = s$.
- Цена облигации

$$B_{t+1} = B_t \cdot R$$

  $B_T = 1 \to B_t = R^{-(T-t)}$.
- При каких условиях на d, u, R рынок безарбитражен?
- Найти операторы ценообразования в каждый момент времени: q_t, d_t, ν_t, m_t
- Найти цену деривatива, который платит K, т.е. потока $(S_T - K)^+$ в момент T и построить реплицирующий портфель.

CRR, операторы ценообразования

- $F_t^T q_t = p_t$

$$F_t = \begin{pmatrix} S_t \cdot u & B_t \cdot R \\ S_t \cdot d & B_t \cdot R \end{pmatrix}$$

- Уравнение на q_t

$$S_t \cdot u \cdot q_t^1 + S_t \cdot d \cdot q_t^2 = S_t$$
$$b_t \cdot R \cdot q_t^1 + b_t \cdot R \cdot q_t^2 = b_t$$

- $q_t = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}, \frac{u-R}{u-d}\right)$, $d_t = \frac{1}{R}$.
- $\nu_t = \left(\frac{R-d}{u-d}, \frac{u-R}{u-d}\right)$
- $m_t = 2q_t$
- Безарбитражность при $d < R < q$.

CRR, реплицирующий портфель

- Реплицирующий портфель h_t:

$$F_t h_t = V_{t+1}$$

- Уравнения на h_t^1, h_t^2:

$$S_t \cdot u \cdot h_t^1 + B_t \cdot R \cdot h_t^2 = V_{t+1}^u$$
$$S_t \cdot d \cdot h_t^1 + B_t \cdot R \cdot h_t^2 = V_{t+1}^d$$

- Репликация (зависит от времени t и стейта):

$$h_t^1 = \frac{V_{t+1}^u - V_{t+1}^d}{S_t(u-d)}$$
$$h_t^2 = \frac{u \cdot V_{t+1}^d - d \cdot V_{t+1}^u}{B_t \cdot R \cdot (u-d)}$$

Европейский опцион

Определение

Европейский опцион – контракт, который даёт право на покупку (call) или продажу (put) акции по фиксированной цене K в фиксированный момент времени T.

Более широко, европейский опцион – контракт, который платит случайную сумму денег $\Phi(S_T)$ в фиксированный момент T.

- Потоки $f_T = \Phi(S_T),\ f_t = 0, t < T$

Европейский опцион: прайсинг

- В момент экспирации цена равна выплате:

$$V_T = \Phi(S_T)$$

- В произвольный момент времени:

$$V_t = d_t \mathbb{E}_t^Q V_{t+1}(S_{t+1}) = \frac{1}{R} \cdot (\nu_1 V_{t+1}(S_t \cdot u) + \nu_2 V_{t+1}(S_t \cdot d)) \in \sigma(S_t)$$

- В $t = 0$ расписываем рекурсивно, группируя слагаемые:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{R} \cdot (\nu_1 V_1(s \cdot u) + \nu_2 V_1(s \cdot d)) = \\ &= \frac{1}{R^2} \cdot \left(\nu_1^2 V_2(s \cdot u^2) + 2\nu_1\nu_2 V_2(s \cdot u \cdot d) + \nu_2^2 V_2(s \cdot d^2)\right) = \\ &= \ldots = \\ &= \frac{1}{R^T} \sum_{k=0}^{T} C_T^k \nu_1^k \nu_2^{T-k} \Phi(s \cdot u^k \cdot d^{T-k}) \end{aligned}$$

- Вычислительная сложность $O(T)$ или $O(T^2)$.

Американский опцион

Определение

Американский опцион – контракт, который даёт право на покупку (call) или продажу (put) акции по фиксированной цене K в произвольный момент времени $0 \leq t \leq T$.

- Более широко, американский опцион – контракт, по которому держатель может потребовать получить сумму денег $\Phi(S_t)$ в произвольный момент времени $0 \leq t \leq T$
- Если держатель опциона реализует своё право в момент t, то он получает выплату $\Phi(S_t)$
- Стоимость американского опциона = стоимость портфеля, реплицирующего рационального держателя опциона

Американский опцион: прайсинг

- V_t – стоимость американского опциона в момент t при условии, что он не исполнился до момента времени t
- Потоки в момент t:

$$f_t = \begin{cases} \Phi(S_t), & \text{исполнил опцион} \\ 0, & \text{не исполнил опцион} \end{cases}$$

- Стоимость опциона при условии, что не исполнили его сегодня в момент t (continuation value):

$$C_t = \frac{1}{R}\mathbb{E}_t^Q V_{t+1} = \frac{1}{R}\left(\nu_1 V_{t+1}^u + \nu_2 V_{t+1}^d\right)$$

- Рациональный клиент выбирает максимум:

$$V_t = \max\left(C_t, \Phi(S_t)\right) = \begin{cases} C_t, & C_t > \Phi(S_t), \\ \Phi(S_t), & C_t \le \Phi(S_t) \end{cases}$$

- Вычислительная сложность $O(T^2)$.

Американский опцион: свойства

Утверждение

Пусть V_t^E, V_t^A – цена европейского и американского опционов с одинаковым пэйоффом $\Phi(S_t)$. Тогда $V_t^E \le V_t^A$

Утверждение

Пусть V_t^E, V_t^A – цена европейского и американского колл-опционов $\Phi(S_t) = (S_t - K)^+$. Тогда $V_t^E = V_t^A$

- Неравенство Йенсена + мартингальное свойство цены:

$$V_t^E = R^{-(T-t)}\mathbb{E}_t^Q(S_T - K)^+ \ge (\mathbb{E}_t^Q R^{-(T-t)} S_T - R^{-(T-t)} K)^+ =$$
$$= (S_t - R^{-(T-t)} K)^+ \ge (S_t - K)^+ = \Phi(S_t)$$

- Европейский опцион всегда дороже пэйоффа сегодня $\rightarrow$ американский опцион не выгодно досрочно гасить $\rightarrow$ $V_t^E = V_t^A$.

Азиатский опцион

Определение

Азиатский опцион – дериватив, пэйофф которого зависит от средней цены $A_T = \sum_{t=0}^{T} S_t$,

$$f_T = \Phi(S_T, A_T)$$

Например $\Phi(S_T, A_T) = \left(\frac{A_T}{T+1} - K\right)^+$

- Потоки:

$$f_T = \Phi(S_T, A_T), \ f_t = 0, t < T.$$

Утверждение

Пусть V_t – цена азиатского опциона в момент t. Тогда $V_t \in \sigma(S_t, A_t)$

Азиатский опцион: прайсинг

- Для $t = T$ очевидно: $V_T = \Phi(S_T, A_T)$
- Пусть выполнено для $t + 1$
- Для t можем перейти в два состояния:

$$(S_{t+1}, A_{t+1}) = \begin{cases} (S_t \cdot u, A_t + S_t \cdot u), \text{с вер. } 0.5 \\ (S_t \cdot d, A_t + S_t \cdot d), \text{с вер. } 0.5 \end{cases}$$

- Шаг индукции:

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{R}\mathbb{E}_t^Q V_{t+1}(S_{t+1}, A_{t+1}) = \\ &= \frac{1}{R}(\nu_1 V_{t+1}(S_t \cdot u, A_t + S_t \cdot u) + \nu_2 V_{t+1}(S_t \cdot d, A_t + S_t \cdot d)) \\ &= V_t(S_t, A_t) \in \sigma(S_t, A_t) \end{aligned}$$

- Вычислительная сложность $O(2^T)$ – перебираем все пути.

Азиатский опцион: прайсинг

- Усредняем выплату по всем путям. Сложность $O(2^T)$.
- Метод Монте Карло:

$$V_0 = \frac{1}{R^T}\mathbb{E}^Q \Phi^B(S_T, m_T) \approx \frac{1}{R^T}\frac{1}{N_{sim}}\sum_{j=1}^{N_{sim}} \Phi^B\left(S_T^{(j)}, m_T^{(j)}\right)$$

- Сложность $O(T \cdot N_{sim})$, ошибка $O(N_{sim}^{-1/2})$
- Считаем цены на фиксированной сетке по A_t, в промежуточных значениях интерполируем.
- Сложность $O(T^2 \cdot N_{grid})$, ошибка $O(N_{grid}^{-1})$.

Барьерные опционы

- У барьерных опционов выплата происходит только если цена преодолела заранее определённый барьер B
- Пусть $\Phi(S_T)$ – пэйофф базового контракта,

$$M_t = \max_{s \leq t}(S_t), \; m_t = \min_{s \leq t}(S_t)$$

- Down-and-In

$$\Phi^B(S_T, m_T) = \mathbb{I}(m_T \leq B) \cdot \Phi(S_T)$$

- Down-and-Out

$$\Phi^B(S_T, m_T) = \mathbb{I}(m_T > B) \cdot \Phi(S_T)$$

- Up-and-In

$$\Phi^B(S_T, M_T) = \mathbb{I}(M_T \geq B) \cdot \Phi(S_T)$$

- Up-and-Out

$$\Phi^B(S_T, M_T) = \mathbb{I}(M_T < B) \cdot \Phi(S_T)$$

Барьерные опционы: прайсинг

- V_t – цена Down-and-In или Down-and-Out опциона
- $V_t \in \sigma(S_t, m_t)$
- Для $t = T$ очевидно: $V_T = \Phi(S_T, m_T)$
- Для t можем перейти в два состояния:

$$(S_{t+1}, m_{t+1}) = \begin{cases} (S_t \cdot u, m_t), \text{с вер. } 0.5 \\ (S_t \cdot d, \min(m_t, S_t \cdot d)), \text{с вер. } 0.5 \end{cases}$$

- Шаг индукции:

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{R}\mathbb{E}_t^Q V_{t+1}(S_{t+1}, m_{t+1}) = \\ &= \frac{1}{R}(\nu_1 V_{t+1}(S_t \cdot u, m_t) + \nu_2 V_{t+1}(S_t \cdot d, \min(m_t, S_t \cdot d))) \\ &= V_t(S_t, m_t) \in \sigma(S_t, m_t) \end{aligned}$$

Барьерные опционы: прайсинг

- Усредняем выплату по всем путям. Сложность $O(2^T)$.
- Добавляем переменную m_t (M_T). Сложность $O(T^3)$.
- Метод Монте Карло:

$$V_0 = \frac{1}{R^T}\mathbb{E}^Q \Phi^B(S_T, m_T) \approx \frac{1}{R^T}\frac{1}{N_{sim}}\sum_{j=1}^{N_{sim}} \Phi^B\left(S_T^{(j)}, m_T^{(j)}\right)$$

- Сложность $O(T \cdot N_{sim})$, ошибка $O(N_{sim}^{-1/2})$

Американский барьерный опцион

- То же рекурентное соотношение на цену V_t:

$$V_t(S_t, m_t) = \max\left(C_t, \Phi^B(S_t, m_t)\right)$$

- Усредняем выплату по всем путям. Сложность $O(2^T)$.
- Добавляем переменную m_t (M_T). Сложность $O(T^3)$.
- Метод Монте Карло? American monte carlo.

Сравнение

Название	Свойства	Измеримость	Сложность
Европейский	$\Phi(S_T)$ в T	$\sigma(S_t)$	$O(T), O(T^2)$
Американский	$\Phi(S_\tau)$ в τ	$\sigma(S_t)$	$O(T^2)$
Азиатский	$\Phi(S_T, A_T)$ в T	$\sigma(S_t, A_t)$	$O(2^T)$ $O^*(T \cdot N_{sim})$ $O^*(T^2 \cdot N_{grid})$
Барьерный	$\Phi(S_T, M_t/m_t)$	$\sigma(S_t, M_t/m_t)$	$O(2^T)$ $O^*(T \cdot N_{sim})$ $O(T^3)$