Лекция 8. Случайные процессы в дискретном времени

May 16, 2025

Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство.

Определение

Функция $\xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Измеримые функции также будем называть случайными величинами (коротко с.в.). Обозначение $\xi \in \mathcal{F}$. Множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ также будем записывать как $\{\xi < x\}$.

Утверждение

Если $\xi \in \mathcal{F}$, то:

- $\{\xi \geq x\} \in \mathcal{F}$
- $\{y \leq \xi < x\} \in \mathcal{F}$
- $\{\xi = x\} \in \mathcal{F}$

Сигма-алгебры и разбиения

Пусть Ω – пространство элементарных исходов.
Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – разбиение множества Ω, т.е.:

$$\bigcup_i A_i = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset$$

$H = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая разбиением. Состоит из элементов вида $B = \bigcup_k A_{n_k}$.

Сигма-алгебры и случайные величины

Пусть ξ – дискретная случайная величина, т.е. $\mathrm{Im}(\xi) = \{a_1 < \ldots < a_n\}$. ξ порождает разбиение:

$$\mathcal{A} = \{A_i = \{\xi = a_i\}\}_{i=1}^{n}$$

Определим $\sigma(\xi)$ – σ-алгебра, порождённая с.в. ξ:

$$\sigma(\xi) \stackrel{def}{=} \sigma(\mathcal{A})$$

Это минимальная σ - алгебра, относительно которой с.в. ξ измерима.

Сигма-алгебры и случайные величины

Теорема

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Тогда дискретная функция $\xi(\omega)$ измерима $\Longleftrightarrow \forall i \; A_i \in \mathcal{F}$

Доказательство. $\{\xi < x\} = \bigcup\limits_{a_i < x} \{\xi = a_i\} = \bigcup\limits_{a_i < x} A_i.$

Условное мат. ожидание

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) \neq 0$.

Определение

Условная вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии B будем называть число:

$$\mathbb{E}^B \xi = \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_B\right)}{P(B)}$$

Также будем использовать обозначение $\mathbb{E}\left[\xi | B\right]$

Дискретный случай

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ – разбиение множества Ω, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$ – σ-алгебра, порождённая этим разбиением.

Определение

Пусть $\xi \in \mathcal{F}$. Условным мат. ожиданием ξ при условии $\mathcal{H}$ будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \frac{\mathbb{E}\left(\xi \mathbb{I}_{A_i}\right)}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \mathbb{E}^{A_i}\xi$$

$\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\xi$ – дискретная случайная величина:

$$\left[\mathbb{E}^{H}\xi\right](\omega) = \mathbb{E}^{A_i}\xi, \text{если } \omega \in A_i$$

Пример

Пусть

$$\Omega = \mathbb{R},\ \xi(\omega) = \omega,\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Пусть $\mathcal{A} = \{(-\infty, 0), [0, \infty)\}$, $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A})$.
Найти $\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\xi$

Условная плотность

Пусть X, Y – непрерывные случайные величины с совместной плотностью $f_{XY}(x, y)$. Маргинализированые плотности:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y)dx$$

Определение

Условной плотностью X при условии $Y = y$ называется функция:

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Введённая функция действительно является плотностью:

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x, y)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}dx = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$$

Условное мат. ожидание в непрерывном случае

Определение

Условным мат. ожидание X при условии $Y = y$ будем называть случайную величину:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int\limits_{\mathbb{R}} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y) dx$$

Задача:

$$(X, Y) \sim N(0, \Sigma),\ \Sigma = \begin{pmatrix} 1, & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $\mathbb{E}[X|Y = y]$.

Свойства условного математического ожидания

- Линейность

$$\mathbb{E}^H\left[\alpha\xi+\beta\eta\right]=\alpha\mathbb{E}^H\xi+\beta\mathbb{E}^H\eta$$

- Если $\xi \in H$, то $\mathbb{E}^H\xi=\xi$
- Если $\xi \perp H$, то $\mathbb{E}^H\xi=\mathbb{E}\xi$
- Повторное мат. ожидание. Пусть $G \subseteq H$.

$$\mathbb{E}^G\left[\mathbb{E}^H\xi\right]=\mathbb{E}^G\xi$$

В частности:

$$\mathbb{E}\xi=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^H\xi\right]$$

Случайные процессы

Дискретный случайный процесс – набор случайных величин $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

Случайное блуждание

Рассмотрим процесс вида:

$$X_{k+1} - X_k = \xi_k, \; \xi_k = \begin{cases} 1, & \text{с вер. } 0.5 \\ -1, & \text{с вер. } 0.5 \end{cases}$$

$$X_0 = 0.$$

где ξ_k – независимые.

$$X_k = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i$$

Свойства:

- $\mathbb{E}X_k = 0$
- $\mathbb{D}X_k = k$
- $\mathbb{E}\left[X_k | X_{k-1}\right] = X_{k-1}$

Фильтрация

Определение

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.
Фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ называется последовательность вложенных σ-подалгебр:

$$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}: \; \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$$

где $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ – σ-под алгебры.

$\mathcal{F}_t$ – информация, доступная к моменту времени t.
Процесс $\{X_n\}$ – адаптированный, если $X_n \in \mathcal{F}_n \forall n$.
Процесс $\{X_n\}$ – предсказуемый, если $X_n \in \mathcal{F}_{n-1} \forall n$.

Пример. Случайное блуждание

Ω – множество последовательностей из $+1, -1$.
Пусть $\mathcal{F}_t$ – цилиндрическая σ-алгебра, порожденная множествами вида:

$$A_{a_0,\dots,a_{t-1}} = \{\omega : \omega_i = a_i, i < t\}$$

Например,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\
\mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \Omega, A_1, A_{-1}\} \\
\mathcal{F}_2 &= \{A_1, A_{-1}, A_{1,1}, A_{1,-1}, \dots\}
\end{aligned}$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация. Пусть $\xi_k = \xi_k(\omega) = \omega_k$
Пусть X_t – случайное блуждание, порождённое ξ_k.

Пример. Случайное блуждание

Ω – множество последовательностей из $+1, -1$.
Пусть $\mathcal{F}_t$ – цилиндрическая σ-алгебра, порожденная множествами вида:

$$A_{a_0,\ldots,a_{t-1}} = \{\omega : \omega_i = a_i, i < t\}$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – фильтрация.
Пусть $\xi_k = \xi_k(\omega) = \omega_k$
Пусть X_t – случайное блуждание, порождённое ξ_k.
Тогда

$$X_t \in \mathcal{F}_t$$

$$S_t = \sum_{k\leq t} X_k \in \mathcal{F}_t$$

$$m_t = \max_{k\leq t} x_k \in \mathcal{F}_t$$

$$m_{t+1} \notin \mathcal{F}_t$$

Мартингалы

Процесс $\{X_n\}$ на фильтрованном вероятностном пространстве назвыается мартингалом, если он интегрируемый, адаптированный и выполнено мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = X_n$$

Процесс $\{X_n\}$ – суб (супер) мартингал, если:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} \geq X_n \ (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} \leq X_n)$$

Суб-мартингал в среднем растёт. Супер-мартингал в среднем падает.
Пусть $\{X_n\}$ – мартингал, $g(x)$ – выпуклая функция, $g(X_n)$ – интегрируемо. Тогда $g(X_n)$ – суб-мартингал.

Примеры

$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, где ξ_k – i.i.d, $\mathbb{E}\xi_k = 0$.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} [X_n + \xi_{n+1}] = X_n + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} \xi_{n+1} = X_n$$

$X_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k$, где $\xi_k > 1$ – i.i.d, $\mathbb{E}\xi_k = 1$.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} [X_n \cdot \xi_{n+1}] = X_n \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} \xi_{n+1} = X_n$$

В силу телоскопического свойства $\forall m > 0$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+m} = X_n$$

В частности:

$$\mathbb{E} X_n = \mathbb{E} X_0$$

– постоянное мат. ожидание.

Моменты остановки

Неотрицательная с.в. τ, принимающая значения в целых числах, момент остановки, если

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \forall n$$

Утверждение. Эквивалентно:

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n,\ \{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n$$

Утверждение. τ – момент остановки $\Leftrightarrow \mathbb{I}(\tau \leq n)$ – адаптированный процесс.

Примеры

$\tau = \min_{t \geq 0}\{t : X_t = a\}$
$\tau = \min_{t \geq 0}\{t : X_t \in B\}$, где B – борелевское множество.

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{t \leq n}\{X_t \in B\} \in \mathcal{F}_n$$

Дискретный стохастический интеграл

Пусть H_n – ограниченный предсказуемый процесс, X_n – адаптированный процесс.

$$(H \circ X)$$

Свойства

- $B_t \sim N(0, t)$
- Броуновское движение непрерывно в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \to +0} \mathbb{E} \left(B_{t+\delta} - B_t\right)^2 = 0$$

- Процесс НЕ дифференцируем в среднеквадратичном:

$$\lim_{\delta \to +0} \mathbb{E} \left(\frac{B_{t+\delta} - B_t}{\delta}\right)^2 = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} = \infty$$

- Конечная квадратичная вариация:

$$[B]_T = \int_0^T (dB_t)^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{t_k})^2 = T$$

Квадратическая вариация броуновского движения

Квадратическая вариация:

$$[B]_t = \int_0^t [dB_t]^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} S_n$$

где $t_k = \Delta t \cdot k, \Delta t = \frac{T}{n}$.

$$\mathbb{E}S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\Delta t = T$$

$$\mathbb{D}S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{D}\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2(\Delta t)^2 = 2T\Delta t \to 0$$

Мартингальность

Определение

Процесс X_t называется мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, если $\forall s < t$ выполнено:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_t = X_s$$

Пример – броуновское движение:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} B_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} [B_s + (B_t - B_s)] = B_s + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} [(B_t - B_s)] = B_s$$

Свойства:

- Если X_t, Y_t – мартингалы, то $\alpha X_t + \beta Y_t$ – мартингал.
- $\mathbb{E}^{F_s}(X_t - X_s) = 0$

Пример