Лекция 5. Финансовый рынок

April 2, 2025

Цена

Цена

Рынок в равновесии: что можно сказать о ценах?

Напоминание: рынок совершенной конкуренции

Переход от экономики к финансам

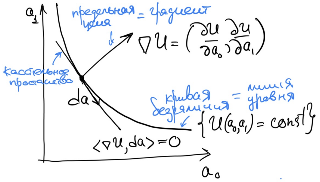
Предельная норма замещения (MRS)

- Линия уровня функции полезности - кривая безразличия
- Градиент функции полезности - предельные нормы замещения активов $a = (a_0, \ldots, a_n)$ отн. полезности u:

$$du = \nabla u(a) da = u'_0 da_0 + \ldots + u'_1 da_n = 0,$$

- Неявная производная - предельная норма замещения одного актива a_j относительно другого a_0:

$$MRS_j^0 = -\frac{da_0}{da_j} = \frac{u'_j}{u'_0}$$



Первая фундаментальная теорема экономики

Первая фундаментальная теорема экономики

Конкурентное равновесие - Парето оптимально

$$\nabla u_i \sim \nabla u_j$$

Агрегированная функция полезности

Рынок совершенной конкуренции нескольких агентов равносилен рынку одного агента

$$u = \sum_i \lambda_i u_i$$

$$\nabla u = \sum_i \lambda_i \nabla u_i = 0$$

Следствие

На рынке совершенной конкуренции - цена линейный функционал (ковектор) на линейном пространстве портфелей

- Равновесие:

$$\nabla u da = u_0' da_0 + u_1' da_1 + \cdots + u_n' da_n = 0$$

- Цена da_j по отношению к da_i:

$$p_j^i = -\frac{da_i}{da_j} = \frac{u_j'}{u_i'}$$

- Цена $(da_1, \ldots, da_n)$ по отношению к a_0:

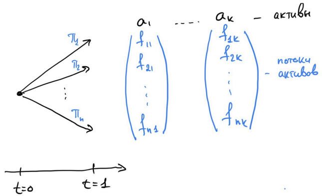
$$p(da_1, \ldots, da_n) = da_0 = \frac{u_1'}{u_0'} da_1 + \ldots + \frac{u_n'}{u_0'} da_n = \langle p, da \rangle$$

- линейный функционал

Фундаментальные теоремы финансов
Однопериодная модель финансового рынка

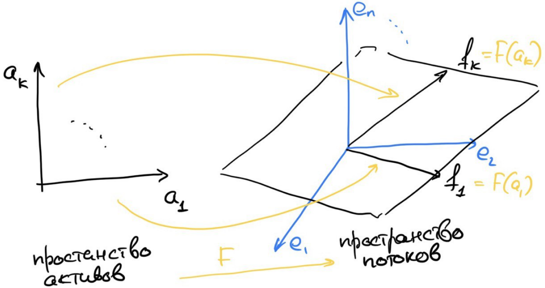
Пространство альтернатив

- два момента времени: $t = 0$ и $t = 1$.
- в момент $t = 1$ n-состояний мира.
- $\pi_1, \ldots, \pi_n$ - экзогенные вероятности, $\pi_j > 0$.
- $a_1, \ldots, a_k$ - k активов
- f_i - потоки (payoffs) активов, $f_i \in \mathbb{R}^n$
- Матрица потоков $F = [f_1, \ldots, f_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$



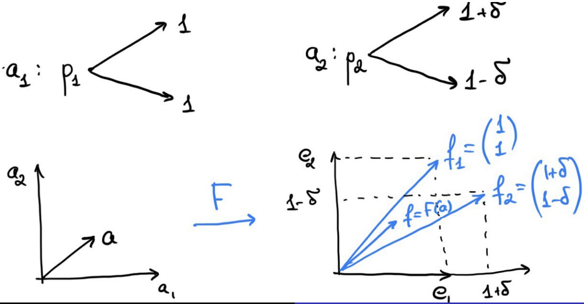
Пространство активов

- Портфель $h \in \mathbb{R}^k$, h_i – вес i-го актива в портфеле.
- Пространство портфелей/активов $V_H = \mathbb{R}^k$.
- Поток(payoff) портфеля h: $Fh = \sum_{i=1}^k h_i f_i$
- Пространство потоков $V_F = \mathbb{R}^n$.
- Множество достижимых потоков $\mathrm{Im} F = \langle F \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
- Рынок полный, если $\mathrm{Im} F = \mathbb{R}^n$



Пример

- два состояния: рост и падение
- a_1 - облигация: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- a_2 - акция: $f_2 = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{pmatrix}$
- $a = h_1 a_1 + h_2 a_2$ - портфель из h_1 облигаций и h_2 акций



Пример: неполный рынок

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Полный ли рынок?

0-периодная цена

Ценообразование в пространстве активов
(тавтологический случай нетривильных теорем)

Безарбитражность (Закон одной цены)

Пусть заданы цены базовых активов $p(a_1) = p_1, \ldots, p(a_k) = p_k$. Задача – определить цену $p(a)$ произвольного портфеля $a = h_1 a_1 + \ldots + h_k a_k$

Определение (Закон одной цены)

Рынок безарбитражный, если несуществует последовательности сделок покупки/продажи портфелей a^j по цене $p(a^j)$ при которой

$$\sum_j a^j = 0, \quad \sum_j p(a^j) > 0$$

Линейность цены

Теорема

Рынок безарбитражный (закон одной цены) $\Leftrightarrow$ p линейный функционал:

$$p(\alpha a) = \alpha p(a), \quad p(a+b) = p(a) + p(b)$$

Иначе: пусть $p(a) + p(b) - p(a+b) > 0$, тогда следующая последовательность сделок приводит к арбитражу:

- Купили портфель $a+b$: заплатили $p(a+b)$
- Продали a: получили $p(a)$
- Продали b: получили $p(b)$
- Итого получили: $p(a) + p(b) - p(a+b) > 0$

Первая фундаментальная теорема

Первая фундаментальная теорема (0-периодная)

Рынок безарбитражный $\Leftrightarrow$ существует единственное ядро ценообразования $p \in V_H^*$, такое, что если

$$a = h_1 a_1 + \ldots + h_n a_n,$$

то

$$p(a) = \langle p, h \rangle = p_1 h_1 + \ldots p_k h_k$$

$h = (h_1, \ldots, h_n)$ - веса портфеля,
$p = (p(a_1), \ldots, p(a_n))$ - цены базисных активов

Ценообразование в пространстве потоков

Постановка

Пусть заданы цены базовых активов $p(a_j) = p_j$.
Каждый инструмент задан потоком (payoff) $a_j \to f_j$.
Задача ценообразования: по представлению инструмента в виде потока определить его цену

$$q : V_F \to \mathbb{R}$$

$$V_F \ni f \to q(f)$$

Постулат 1: Закон одной цены

Определение (Закон одной цены)

Рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены, если:

$$Fh = Fg \to \langle p, h \rangle = \langle p, g \rangle$$

где $h, g \in \mathbb{R}^k$ – портфели.

Утверждение

Закон одной цены $\Leftrightarrow$ $Fh = \theta \to \langle p, h \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(F) \subseteq \mathrm{Ker}(p)$

Утверждение(связь с линейной алгеброй)

$f_1, \ldots, f_k$ - линейно независимы $\Rightarrow$ закон одной цены.
Закон одной цены $\Rightarrow$ согласованность цен:
Если $f_1 = \sum_{j \geq 2} \alpha_j f_j$, то $p(a_1) = \sum_{j \geq 2} \alpha_j p(a_j)$

Первая фундаментальная теорема (слабая форма)

Теорема

Рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены $\Leftrightarrow \exists q \in V_F^*$:

$$\langle p, h\rangle = \langle q, Fh\rangle$$

q – функционал цены на пространстве потоков. $p = F^*q$

Первая фундаментальная теорема (слабая форма)

Теорема

Рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены $\Leftrightarrow \exists q \in V_F^*$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle$$

q – функционал цены на пространстве потоков. $p = F^* q$

Доказательство: $\Rightarrow$ При $f = Fh$, положим по определению:

$$\langle q, f \rangle := \langle p, h \rangle$$

Определение не зависит от выбора портфеля h (докажите). На все пространство продолжаем по линейности.
$\Leftarrow$ Очевидно.

Пример

Рынок с двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон однй цены?

Пример

Рынок с двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон однй цены?
Найдите функционал прайсинга q

Пример

Рынок с двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон однй цены?
Найдите функционал прайсинга q
Условия согласования $F^* q = p \Leftrightarrow \langle q, f_i \rangle = p(a_i)$

$$q_1(1+\delta) + q_2(1-\delta) = 1$$
$$q_1 + q_2 = 1$$

Пример

Рынок с двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон однй цены?
Найдите функционал прайсинга q
Условия согласования $F^* q = p \Leftrightarrow \langle q, f_i \rangle = p(a_i)$

$$q_1(1+\delta) + q_2(1-\delta) = 1$$
$$q_1 + q_2 = 1$$

Единственный функционал прайсинга: $q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пример: неполный рынок

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон однй цены?

Пример: неполный рынок

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон однй цены?
Функционал $q = (1/3, 1/3, 1/3)$ согласован с ценами:

$$\langle q, f_1 \rangle = 1$$
$$\langle q, f_2 \rangle = 1$$

Первая фундаментальная теорема (слабая форма)

Утверждение (связь с линейной алгеброй)

закон одной цены $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} F \subseteq \mathrm{Ker} p \;\Leftrightarrow\; p \in \mathrm{Im} F^*$

Неполный рынок

Решим уравнение:

$$p = F^* q$$

Неполный рынок

Решим уравнение:

$$p = F^* q$$

Псевдообратный оператор:

$$q = (FF^*)^{-1} Fp + \mathrm{Ker} F^*$$

Постулат 2: Полнота

Определение

Рынок полный $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}^n (f)$ - любой поток $f \in \mathbb{R}^n$ реаплицируется торгуемыми активами $f = Fh$.

Утверждение (связь с линейной алгеброй)

Система $f_1, \dots, f_k$ - полна в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ рынок полный

Вторая фундаментальная теорема (слабая форма)

Теорема

Рынок (F, p) удовлетворяет закону одной цены $\Leftrightarrow \exists! q \in V_F^*$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle$$

При этом $q = (FF^*)^{-1}Fp$ - цены фундаментальных активов (Эрроу — Дебрё активов)

Доказательство:

$\Rightarrow$ Существование очевидно. Было показано, что:

$$q = (FF^*)^{-1}Fp + \mathrm{Ker} F^*$$

Полнота $\Leftrightarrow \mathrm{Im} F = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathrm{Ker} F^* = \{\theta\}$ (доказать). Отсюда единственность.

$\Leftarrow$ Очевидно (доказать).

Постулаты финансовой математики и линейная алгебра

Безарбитражность $\approx$ Линейной независимости системе торгуемых активов

Закон одной цены $\Leftrightarrow$ $f_1, \ldots, f_k$ - линейно независимы (+ согласованность).

Полнота рынка = Полноте системе торгуемых активов

Рынок полный $\Leftrightarrow$ $f_1, \ldots, f_k$ - полны

Вторая фундаментальная теорема $\approx$ Система торгуемых активов - базис

$\exists! q(f)$ $\Leftrightarrow$ $f_1, \ldots, f_k$ - базис (+ согласованность, если линейно зависимы)

Связь с линейной алгеброй

Утверждение

$f_1, \ldots, f_k$ - линейно независимы $\Rightarrow \exists q(f)$ (возможно неединст.)

Утверждение

$f_1, \ldots, f_k$ - полны $\Leftrightarrow\ !q(f)$ (возможно неоднозначная)

Утверждение

$f_1, \ldots, f_k$ - базис $\Leftrightarrow \exists! q(f)$

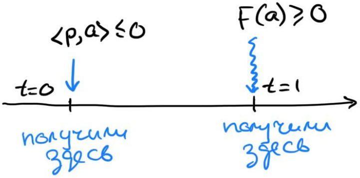
Постулат 3: Безарбитражность

Определение

Рынок безарбитражный (в сильном смысле)
$Fh \geq 0 \to \langle p, h \rangle \geq 0$

Определение

Арбитражный портфель h: $Fh \geq 0 \& \langle p, h \rangle < 0$



Безарбитражность и закон одной цены

Утверждение

Безарбитражность $\Rightarrow$ Закон одной цены.

Пусть $Fh = 0$. $Fh \geq 0 \to \langle p, h \rangle \geq 0$. $Fh \leq 0 \to \langle p, h \rangle \leq 0$. Отсюда $\langle p, h \rangle = 0$.

Первая фундаментальная теорема (сильная форма)

Теорема

Рынок безарбитражный $\Leftrightarrow \exists q \geq 0$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle$$

$p = F^* q$

Доказательство: $\Rightarrow$. $K = \{F^* q, q \geq 0\}$ – выпуклое множество. Пусть $p \notin K$. По теореме об отделимости:

$$\exists h : \forall k \in K : \langle p, h \rangle < 0 \& \langle k, h \rangle \geq 0$$

Последнее означает, что $\langle F^* q, h \rangle = \langle q, Fh \rangle \geq 0 \forall q \geq 0$. Это равносильно $Fh \geq 0$ (докажите). h – арбитражнйы портфель, противоречие.

$\Leftarrow$: Очевидно.

Вторая фундаментальная теорема (сильная форма)

Теорема

Рынок полный и безарбитражный $\Leftrightarrow \exists! q \geq 0$:

$$\langle p, h \rangle = \langle q, Fh \rangle$$

При этом $q = (FF^*)^{-1}Fp$ - цены фундаментальных активов (Эрроу — Дебрё активов)

Пример: Полный рынок с арбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta \in (0, 0.5)$
Вектор цен: $p(a_1) = 0.5, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены?

Пример: Полный рынок с арбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta \in (0, 0.5)$
Вектор цен: $p(a_1) = 0.5, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены? Полный ли рынок?

Пример: Полный рынок с арбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta \in (0, 0.5)$
Вектор цен: $p(a_1) = 0.5, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены? Полный ли рынок?
Выполнено ли условие безарбитражности?

Пример: Неполный рынок с безарбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены?

Пример: Неполный рынок с безарбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены? Полный ли рынок?

Пример: Неполный рынок с безарбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены? Полный ли рынок? Есть ли безарбитражность?

Пример: Неполный рынок с безарбитражной ценой

Рынок двумя активами: акция a_1 и облигация a_2.
Матрица выплат:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1-\delta & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор цен: $p(a_1) = 1, p(a_2) = 1$.
Выполнен ли закон одной цены? Полный ли рынок? Есть ли безарбитражность? Функционал $q = (1/3, 1/3, 1/3)$ согласован с ценами:

$$\langle q, f_1 \rangle = 1$$
$$\langle q, f_2 \rangle = 1$$

Формулы ценообразования

Основные формулы ценообразования деривативов

Фундаментальные цены

Прайсинг как линейный функционал

$$q(f) = \langle q, f \rangle$$

где $q = (FF^*)^{-1} Fp$

Стохастический дисконт-фактор

$$q(f) = \langle q, f \rangle = \sum q_i f_i = \sum \pi_i \frac{q_i}{\pi_i} f_i = \mathbb{E}(m \cdot f)$$

Прайсинг в физической мере

$$q(f) = \mathbb{E}(m \cdot f)$$

где $m = \frac{q}{\pi}$ - стохастический дисконт-фактор

Риск-нейтральная мера

$$q(f) = \langle q, f \rangle = \sum q_i f_i = d \sum \nu_i f_i = d\mathbb{E}^Q(f)$$

где $d = p(e) = \sum q_i$ - стоимость безриск. потока $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\nu_i = \dfrac{q_i}{d}$ – риск-нейтральная вероятность i-го исхода.

Прайсинг в риск-нейтральной

$$q(f) = d\mathbb{E}^Q(f)$$

где d - дисконт-фактор, Q - риск-нейтральная мера.

Риск-нейтральная и физическая мера

Вы выиграли контракт:

$$f = \begin{cases} \$1 \text{ mln}, \pi_1 = 1/2 \\ \$0, \pi_2 = 1/2 \end{cases}$$

За сколько вы готовы его продать?
$q(f) = ?$

$$f = \begin{cases} \$1 \text{ mln}, q_1 = ?, m_1 = ? \\ \$0, q_2 = ?, m_2 = ? \end{cases}$$

Риск-нейтральная мера еще раз

Пусть $d = \sum q_i = 1$ (поток измеряем в настоящих деньгах, а не в будущих: $f^0 = d \cdot f^1$ (например, $d \cdot f^{RUB_1} = f^0$))

- Риск-нейтральные вероятности - цены фундаментальных активов

$$\nu_i = q_i / \sum_j q_j = q_i, \quad q_i = p(e_i^0)$$

- Риск-нейтральные вероятности - такие вероятности, что цена = цене риск-нейтрального инвестора (определяется мат ожиданием):

$$q(f) = \mathbb{E}^Q(f^0)$$

Основные формулы ценообразования

Теорема

Следующие операторы ценообразования эквивалентны:

$$p(\cdot) = \langle q, \cdot \rangle = \mathbb{E}(m\ \cdot) = d\mathbb{E}^Q(\cdot)$$

$q = (FF^*)^{-1}Fp$
$m = q/\pi$
$\nu = q/d$

Доходности

$$R = \frac{f}{q(f)}$$

$$\langle q, R \rangle = \mathbb{E}(mR) = d\mathbb{E}^Q(R) = 1$$

$$R_0 = \frac{e}{p(e)} = \frac{1}{\langle q, e \rangle} = \frac{1}{d} = \frac{1}{\mathbb{E}(m)}$$

Утверждение

Стохастическия риск-премия ортогональна стохастическому дисконт-фактору:

$$\mathbb{E}(m(R - R_0)) = 0$$

Риск-премия

$$\mathbb{E}(m(R - R_0)) = \mathbb{E}(m)(\mathbb{E}(R) - R_0) + \mathrm{cov}(R, m) = 0$$

$$\mathbb{E}(R) - R_0 = -\frac{\mathrm{cov}(R, m)}{\mathbb{E}(m)}$$

- риск-премия зависит только от систематического риска (корреляции со стохастических риск-фактором)

CAPM

$$\mathbb{E}(m(R - R_0)) = \mathbb{E}(m)(\mathbb{E}(R) - R_0) - cov(R, m) = 0$$

$$\mathbb{E}(m(R_m - R_0)) = \mathbb{E}(m)(\mathbb{E}(R_m) - R_0) - cov(R_m, m) = 0$$

$$\beta = \frac{cov(R, R_m)}{cov(R_m, R_m)}$$

$$\mathbb{E}(R) - R_0 = \beta(\mathbb{E}(R_m) - R_0))$$