Семинар 6. Американские опционы

November 17, 2025

Контракты американского типа

Определение

Американский опцион с функцией выплатой $\Phi(t, S_t)$ – контракт, держатель которого может получить случайную сумму денег $\Phi(t, S_t)$ в произвольный момент времени $t \leq T$.

- Выплата может произойти в произвольный момент времени.
- Стоимость европейского контракта:

$$V_0^E = \mathbb{E} e^{-rT} \Phi(T, S_T)$$

- Стоимость американского контракта:

$$V_0^A = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau} \Phi(\tau, S_\tau)$$

- V_0^A – стоимость реплицирующей стратегии.
- Дата погашения τ – марковский момент $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
- Принимаем решение об экспирации на основании информации из прошлого.

Американские опционы: свойства

- Оценка снизу:
$$V_0^A \geq \max_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} e^{-rt} \Phi(t, S_t)$$
В частности $V_0^A \geq V_0^E$, $V_0^A \geq \Phi(0, S_0)$.
- Оценка сверху:
$$V_0^A \leq \mathbb{E} \max_{0 \leq t \leq T} e^{-rt} \Phi(t, S_t)$$

Американский колл-опцион: свойства

- Неравенство для европейского колл-опциона при $r > 0$:

$$V_t^E = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t\right] \geq \left(\mathbb{E}\left[e^{-rT}(S_T - K) | \mathcal{F}_t\right]\right)^+ =$$
$$= (S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ > (S_t - K)^+$$

- Отсюда $V_t^E \geq \Phi(t, S_t) \to V_t^A = V_t^E$

Бермудский опцион

Определение

Бермудский опцион с функцией выплатой $\Phi(t, S_t)$ – контракт, держатель которого может получить случайную сумму денег $\Phi(t, S_t)$ в один из дискретных моментов времени $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

Бермудский опцион: уравнение на цену

- Стоимость бермудского контракта:

$$V_0^B = \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}} \mathbb{E} e^{-r\tau} \Phi(\tau, S_\tau)$$

  где $\overline{\mathcal{T}}$ – множество моментов остановки со значениями из $\{t_1, \dots, t_n\}$.
- $V_{t_k}^B$ – стоимость бермудского опциона в момент t_k при условии, что не экспирировались до момента t_k.
- Continuation value – стоимость, при условии что не экспирируемся в t_k:

$$C_{t_k} = \mathbb{E}\left[e^{-r\Delta t_k} V_{t_{k+1}}^B | \mathcal{F}_t\right]$$

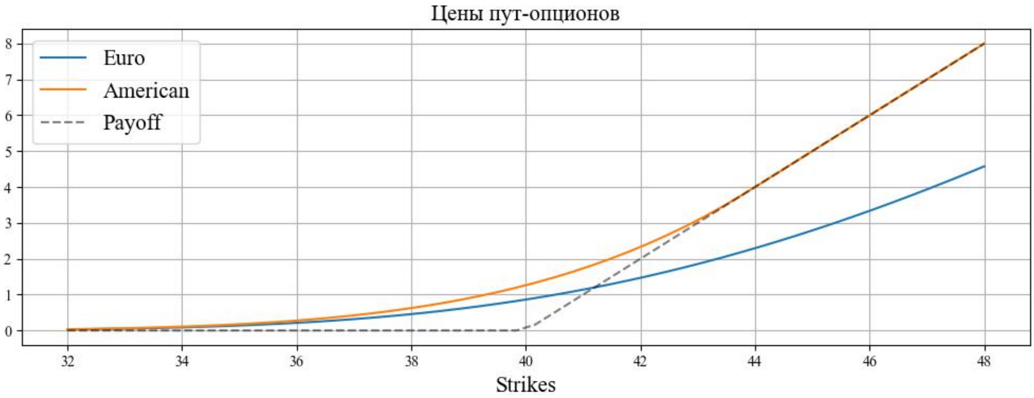
- Динамическое программирование:

$$V_{t_k} = \max(\Phi(t_k, S_{t_K}), C_{t_k})$$

- Оптимальный момент остановки:

$$\tau = \inf\{t_k : \Phi(t_k, S_{t_K}) > C_{t_k}\}$$

Бермудский опцион: цены



Perpetual american put

Задача

Найти стоимость вечного американского пут-опциона $T = \infty$:

$$V(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau}(K - S_\tau)$$

где супремум берётся по всем марковским моментам $\mathcal{T}$, $S_0 = s$.

Perpetual american put

- Задача однородная по времени. Ищем решение в классе моментов остановки:

$$\tau_L = \inf\{t \geq 0, S_t = L\}$$

- Исполняем опцион в первый момент, когда цена пробъёт уровень $L < s$.
- Найдем ожидаемую выплату для такой стратегии:

$$V_L(s) = \mathbb{E}e^{-r\tau_L}(K - S_{\tau_L}) = (K - L)\mathbb{E}e^{-r\tau_L}$$

  Считаем, что $e^{-r\tau_L}(K - S_{\tau_L}) = 0$ при $\tau_L = \infty$ (выплаты не происходит).
- Нужно найти преобразование Лапласа от $\tau_L, \mathbb{E}e^{-r\tau_L}$.

Преобразование Лапласа

- Рассмотрим броуновское движение со сносом
$$X_t = \mu t + W_t$$
- Пусть $a, b > 0$. Введём моменты остановки:
$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$$
$$\tau_b = \inf\{t \geq 0 : X_t = -b\}$$
- Найдем β такое, что $M_t = e^{\beta X_t - rt}$ – мартингал:
$$M_t = \exp\left(\beta X_t - rt\right) = \exp\left(\beta W_t + (\beta\mu - r)t\right)$$
- Условие мартингальности:
$$\beta\mu - r = -\frac{\beta^2}{2} \to \beta_\pm = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2r}$$
- Заметим, что при $r > 0$ выполнено: $\beta_+ > 0, \beta_- < 0$.

Преобразование Лапласа

- Введём $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. Так как $|X_\tau| \leq \max(a, b)$, выполнена теорема Дуба:

$$1 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}e^{\beta a - r\tau_a}\mathbb{I}(\tau_a \leq \tau_b) + \mathbb{E}e^{-\beta b - r\tau_b}\mathbb{I}(\tau_a > \tau_b)$$

- Выберем $\beta = \beta_- < 0$ и устремим $a \to \infty$. Тогда $e^{\beta_- a} \to 0$, откуда

$$1 = \mathbb{E}e^{-\beta_- b - r\tau_b}\mathbb{I}(\tau_b < \infty) = e^{-\beta_- b}\mathbb{E}e^{-r\tau_b}$$

поэтому

$$\mathbb{E}e^{-r\tau_b} = e^{\beta_- b} = e^{(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r})b}$$

Perpetual american put: продолжение

- Замена переменных:

$$X_t = \frac{1}{\sigma}\log\frac{S_t}{s} = \frac{1}{\sigma}(r - 0.5\sigma^2)t + W_t$$

- Условие пересечения порога $L < s$:

$$S_t = L \Leftrightarrow X_t = \frac{1}{\sigma}\log\frac{L}{s} = -b$$

- Для $\mu = \frac{1}{\sigma}(r - 0.5\sigma^2)$

$$\beta_- = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r} = \frac{-2r}{\sigma}$$

- Преобразование Лапласа:

$$\mathbb{E}e^{-r\tau_L} = e^{\beta_- b} = \exp\left(\frac{-2r}{\sigma^2}\log\frac{s}{L}\right) = \left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

Perpetual american put: продолжение

- Итого, ожидание выплаты для такой стратегии:

$$v_L(s) = \begin{cases} K - s, 0 \le s \le L \\ (K - L) \left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, s \ge L \end{cases}$$

- Оптимальная граница L:

$$\frac{\partial v_L(s)}{\partial L} = 0 \to L^* = \frac{2r}{2r + \sigma^2} K$$

- При таком выборе L производная по s непрерывна (smooth pasting):

$$\left.\frac{\partial v_{L^*}(s)}{\partial s}\right|_{L^*-0} = \left.\frac{\partial v_{L^*}(s)}{\partial s}\right|_{L^*+0} = -1$$

Perpetual american put: цены