

Лекция 13. Численные методы для модели Хестона

December 12, 2025

Определение

Риск-нейтральная динамика в модели Хестона задаётся системой СДУ:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sqrt{v_t}dW_t \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dZ_t\end{aligned}$$

где W_t, Z_t – два броуновских движения с корреляцией ρ .

Стоимость колл-опциона:

$$\begin{aligned}C_t(T, K) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T \mathbb{I}(S_T > K) | \mathcal{F}_t] - e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [K \mathbb{I}(S_T > K) | \mathcal{F}_t] = \\ &= S_t \mathbb{Q}_S(S_T > K | \mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)} K \mathbb{Q}(S_T > K | \mathcal{F}_t)\end{aligned}$$

Прайсинг европейских опционов в модели Хестона

Утверждение

Пусть $\varphi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{iu \ln S_T} | \mathcal{F}_t]$ – условная хар. функция процесса $\ln S_T$. Тогда цены европейских колл-опционов выражаются по формуле:

$$C_t(T, K) = S_t \mathbb{Q}_S(S_T > K | \mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)} K \mathbb{Q}(S_T > K | \mathcal{F}_t)$$

где вероятности исполнения вычисляются как:

$$\mathbb{Q}(S_T > K | \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(u)}{iu} du \right]$$

$$\mathbb{Q}_S(S_T > K | \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\varphi}(u)}{iu} du \right]$$

и $\tilde{\varphi}(u) = \frac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)}$ – условная хар. функция в мере \mathbb{Q}_S .

Характеристическая функция в модели Хестона

Пусть $\tau = T - t$ – время до погашения. Зафиксируем u . Пусть

$$d = \sqrt{(\rho\xi iu - \kappa)^2 + \xi^2(iu + u^2)}, \quad g = \frac{\rho\xi iu - \kappa + d}{\rho\xi iu - \kappa - d}$$

Лемма

Характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(T - \tau; u) + D(T - \tau; u)v + iux)$$

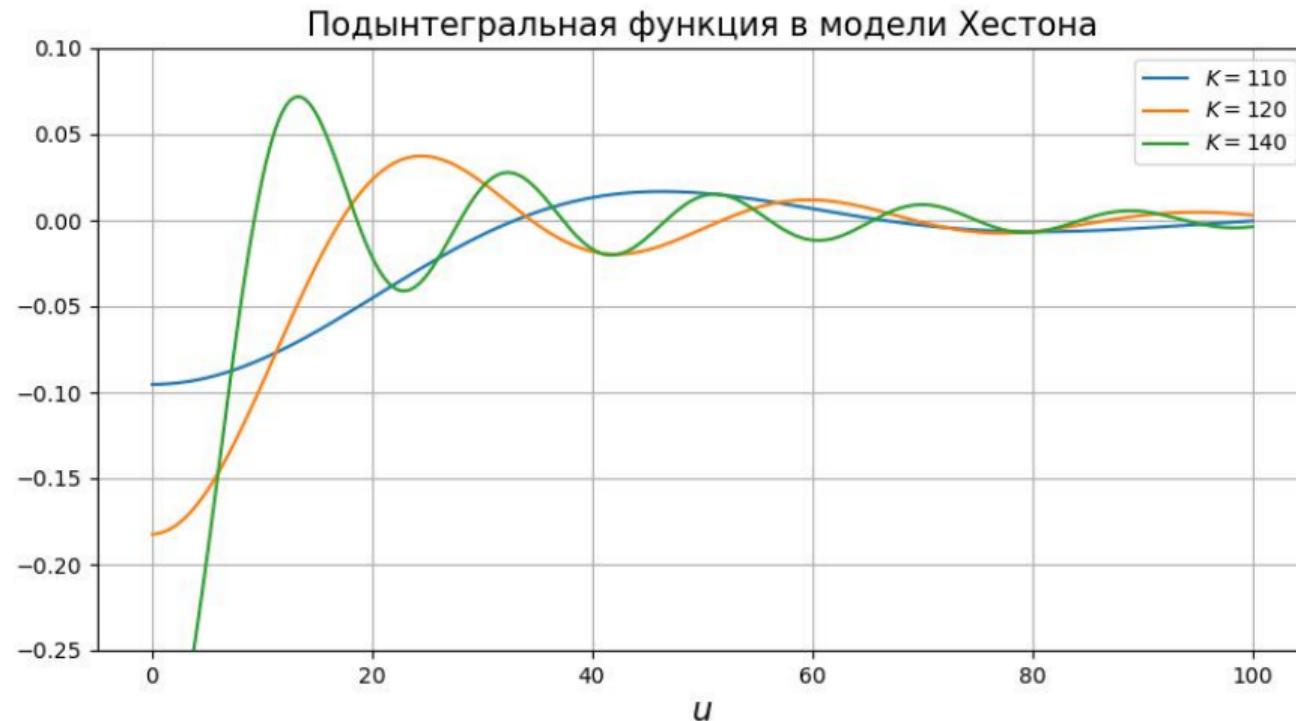
где функции $C(\tau; u), D(\tau; u)$ задаются как:

$$D(\tau; u) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d}{\xi^2} \left(\frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}} \right),$$

$$C(\tau; u) = iur\tau + \frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left((\kappa - \rho\xi iu - d)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right).$$

Подынтегральная функция в интеграле Хестона

- Подынтегральная функция для $T = 1/52$



- Пусть X – с.в. с известной хар. функцией $\phi(u)$
- Рассмотрим задачу вычисления мат. ожидания:

$$I = \mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$$

где $f(x)$ – плотность с.в. X

Ряд Фурье для плотности

- Пусть функция $f(x)$ определена на $[0, \pi]$. Тогда её можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx), \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- С помощью замены переменных можно определить ряд Фурье для интервала $[a, b]$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx$$

- Из формулы Эйлера:

$$A_n = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \varphi \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{na\pi}{b-a} \right) \right\},$$

где

$$\tilde{\varphi}(u) = \int_a^b e^{iux} f(x) dx.$$

Ряд Фурье для плотности

- С помощью замены переменных можно определить ряд Фурье для интервала $[a, b]$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx$$

- Из формулы Эйлера:

$$A_n = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \varphi\left(\frac{n\pi}{b-a}\right) \exp\left(-i\frac{na\pi}{b-a}\right) \right\},$$

где

$$\tilde{\varphi}(u) = \int_a^b e^{iux} f(x) dx.$$

- Если интервал $[a, b]$ достаточно велик, мы можем аппроксимировать

$$A_n \approx F_n := \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \varphi\left(\frac{n\pi}{b-a}\right) \exp\left(-i\frac{na\pi}{b-a}\right) \right\},$$

где $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) dx$ — характеристическая функция $f(x)$.

Ряд Фурье для плотности

- Если интервал $[a, b]$ достаточно велик, мы можем аппроксимировать

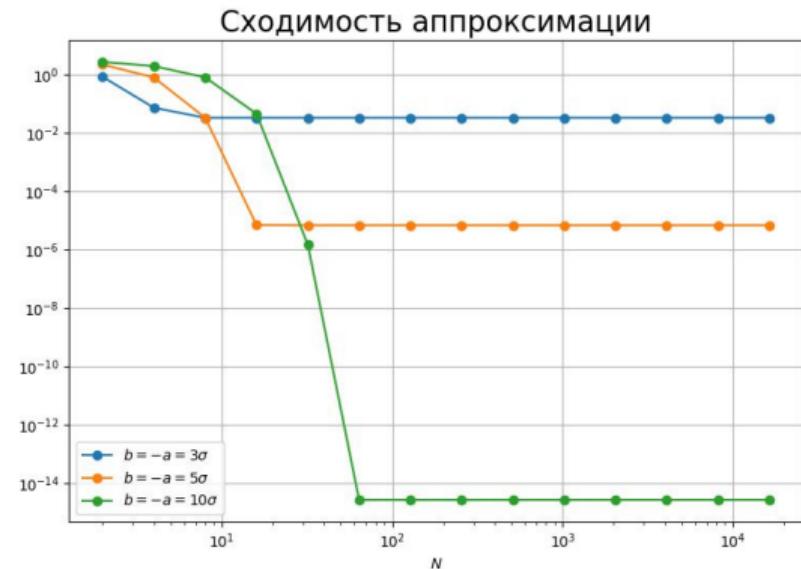
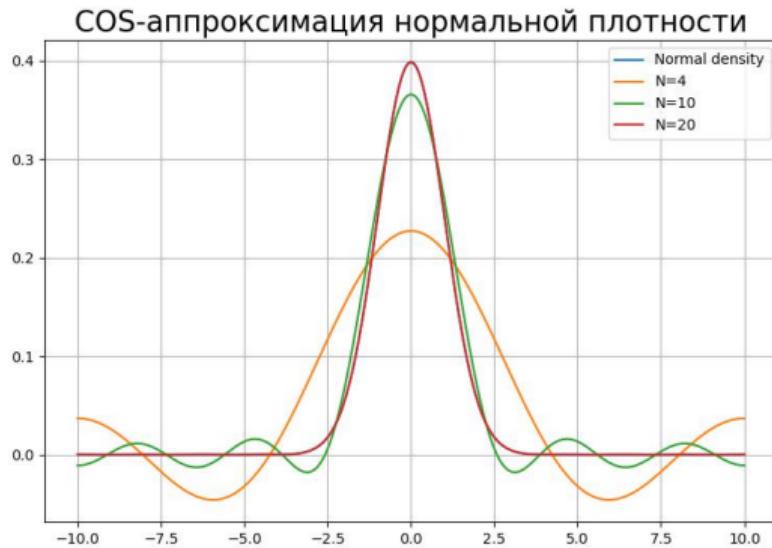
$$A_n \approx F_n := \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \varphi \left(\frac{n\pi}{b-a} \right) \exp \left(-i \frac{n a \pi}{b-a} \right) \right\},$$

где $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) dx$ — характеристическая функция $f(x)$.

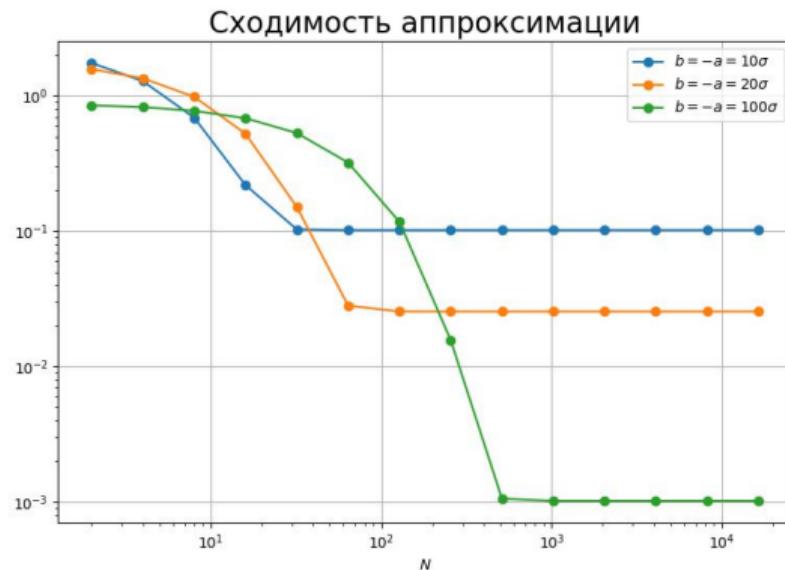
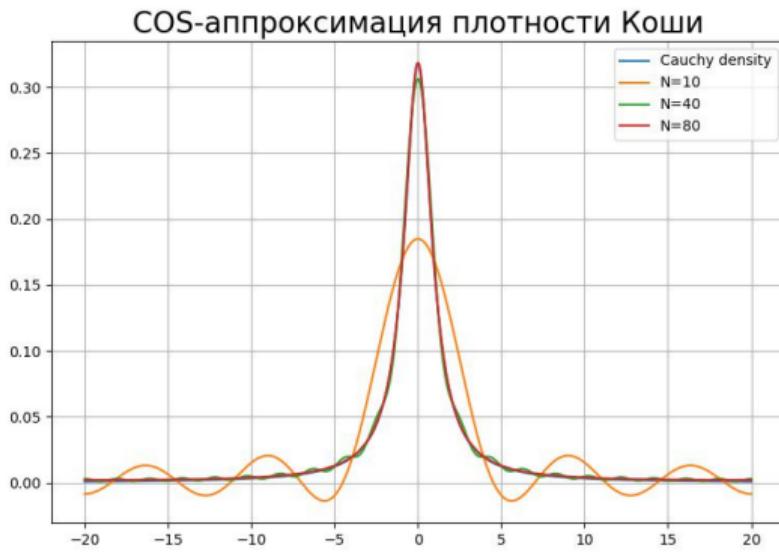
- Коэффициенты F_n могут быть вычисленны через хар. фунцкию.
- Конечное число слагаемых дают хорошее приближение:

$$f(x) \approx \hat{f}_N(x) = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^N F_n \cos \left(n \pi \frac{x-a}{b-a} \right)$$

Пример: аппроксимация нормальной плотности



Пример: аппроксимация плотности Коши



Аппроксимация мат. ожидания

- Приблизим

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx \approx \int_a^b g(x)f(x)dx$$

- Подставим приближение $\hat{f}_N(x)$ для $f(x)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}g(X) &\approx \int_a^b g(x) \left(\frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^N F_n \cos \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \right) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{F_0 G_0}{2} + \sum_{n=1}^N F_n G_n \right),\end{aligned}$$

где

$$G_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \cos \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right) dx.$$

Применение для колл-опционов

- Пусть $X_T = \log(S_T/K)$
- Цена колл-опциона:

$$V = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

где $g(x) = K(e^x - 1)^+$

- Коэффициенты G_n могут быть вычисленны аналитически:

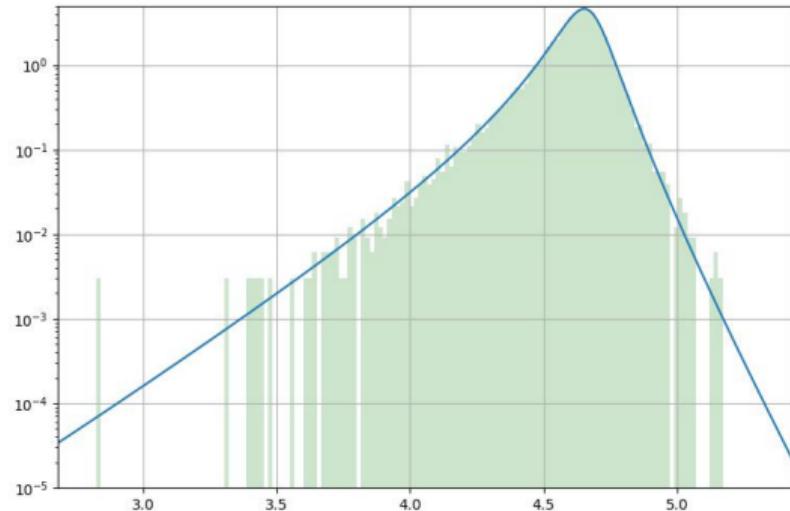
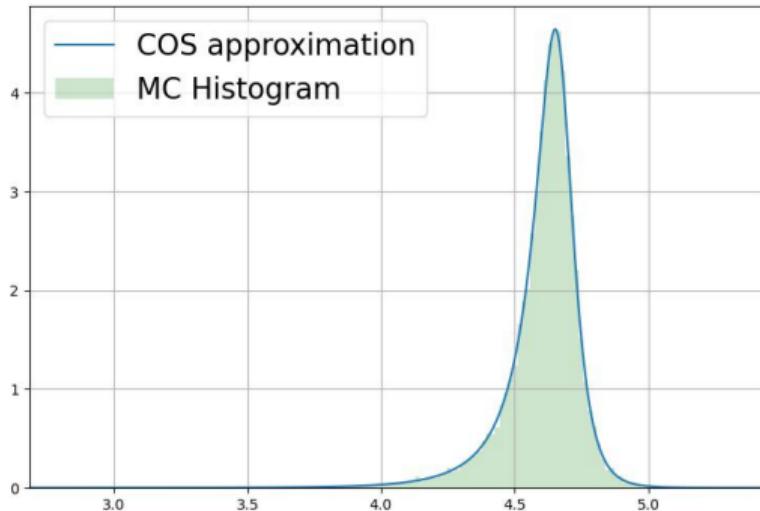
$$G_n = K \cdot \frac{2}{b-a} \int_0^b (e^x - 1) \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx = \dots$$

- Оценка цены опциона:

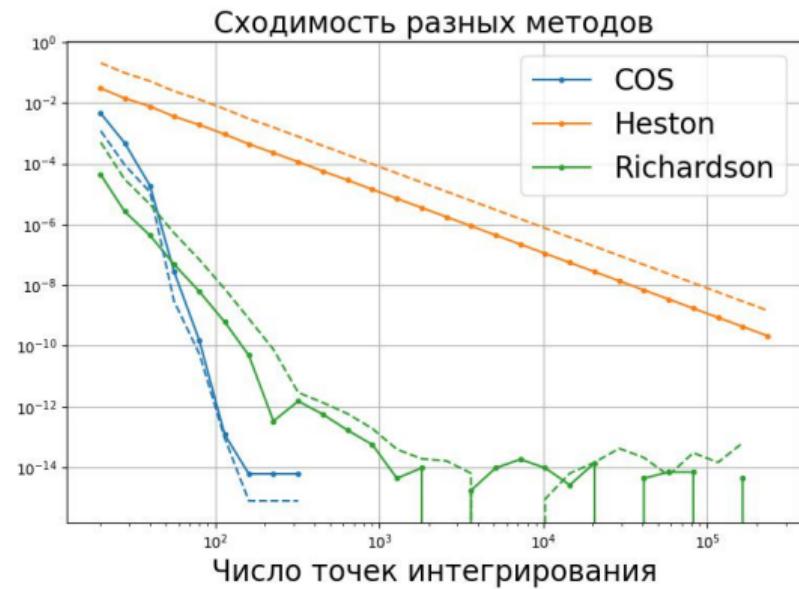
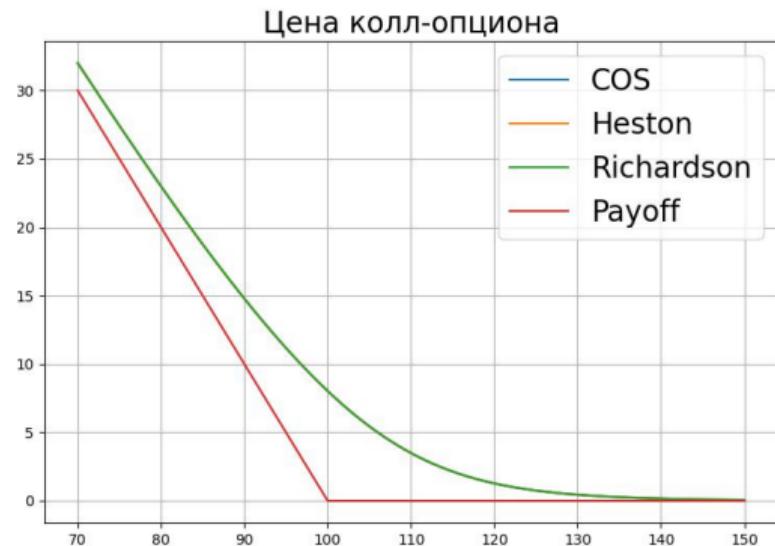
$$\hat{V} = e^{-rT} \frac{b-a}{2} \left(\frac{F_0 G_0}{2} + \sum_{n=1}^N F_n G_n \right)$$

Применение для колл-опционов

Гистограмма распределения $\ln S_T$



Применение для колл-опционов



Методы Монте-Карло для модели Хестона

Семплирование в модели Хестона: схема Эйлера

- СДУ в терминах лог-цены $X_t = \log S_t$:

$$dX_t = (r - 0.5v_t)dt + \sqrt{v_t}dW_t$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dZ_t$$

- Схема Эйлера:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + (r - 0.5v_{t_{k-1}})\Delta t + \sqrt{v_{t_{k-1}}}\Delta W_{t_{k-1}}$$
$$v_{k_t} = v_{t_{k-1}} + \kappa(\theta - v_{t_{k-1}})\Delta t + \xi\sqrt{v_{t_{k-1}}}\Delta Z_{t_{k-1}}$$

- Схема Эйлера может приводить к отрицательным значениям v_{t_k} .
- Модифицированная схема Эйлера:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + (r - 0.5v_{t_{k-1}}^+) \Delta t + \sqrt{v_{t_{k-1}}^+} \Delta W_{t_{k-1}}$$
$$v_{t_k} = v_{t_{k-1}} + \kappa(\theta - v_{t_{k-1}}) \Delta t + \xi \sqrt{v_{t_{k-1}}^+} \Delta Z_{t_{k-1}}$$

Семплирование процесса variance

- Переходная плотность CIR процесса:

$$v_{t_k} | v_{t_{k-1}} \sim \frac{1}{2c} \cdot \chi^2(d, \lambda)$$

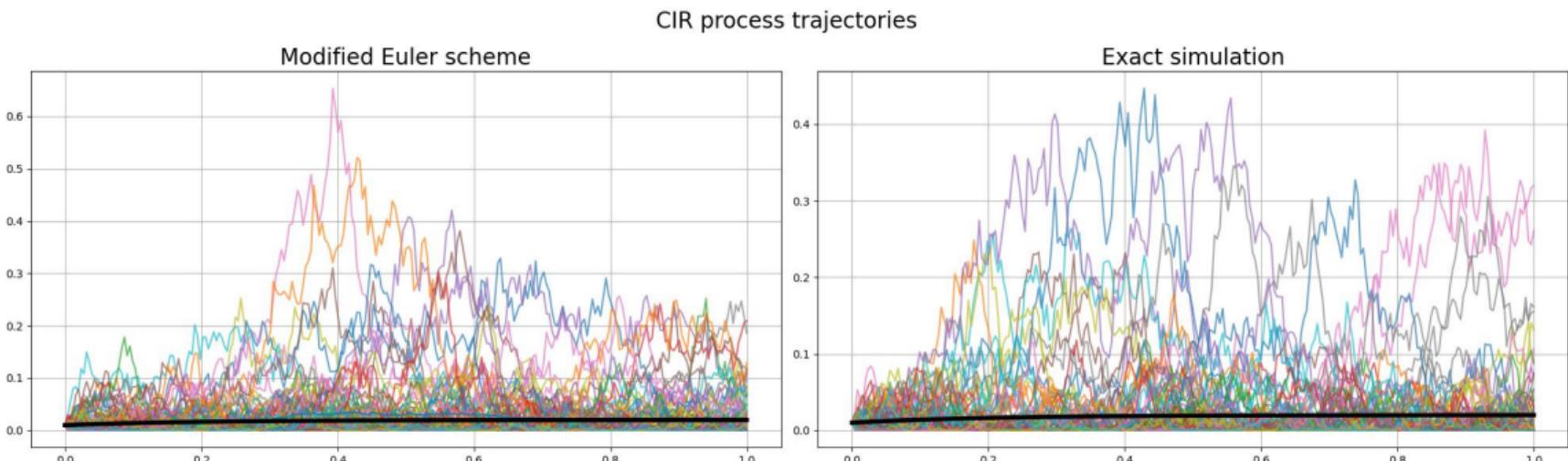
где $\chi^2(d, \lambda)$ – нецентральное распределение хи-квадрат с d степенями свободы и параметром нецентрированности λ и

$$c = \frac{2\kappa}{(1 - e^{-\kappa\Delta t})\xi^2}$$

$$d = \frac{4\kappa\theta}{\xi^2}$$

$$\lambda = 2cv_{t_{k-1}}e^{-\kappa\Delta t}$$

Семплирование процесса variance



Семплирование процесса variance

Выборочное среднее для разных типов семплирования CIR

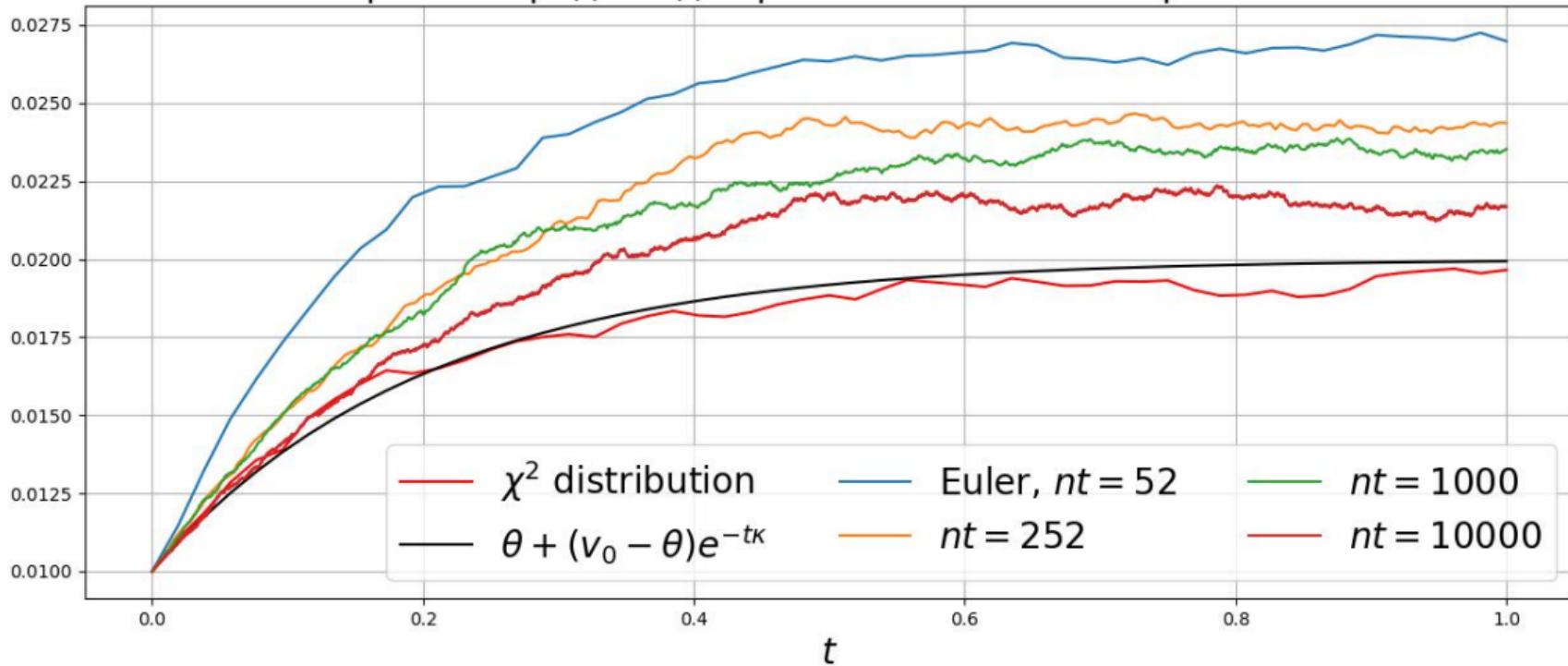


Схема Андерсена

- Пусть W_t^1, W_t^2 – независимые броуновские движения, положим:

$$Z_t = W_t^1, \quad W_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2$$

- СДУ в модели Хестора:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + r\Delta t - \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s ds + \rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v_s} dW_s^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v_s} dW_s^2,$$

$$v_{t_i} = v_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa(\theta - v_s) ds + \xi \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v_s} dW_s^1.$$

- Отсюда следует:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + r\Delta t + \frac{\rho}{\xi} (v_{t_i} - v_{t_{k-1}} - \kappa\theta\Delta t) + \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^2$$

Схема Андерсена

- Апроксимируем:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds \approx v_{t_{k-1}} \Delta t, \quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{V_s} dW_s^2 \approx \sqrt{v_{t_{k-1}} \Delta t} \eta_k,$$

где $\eta_k \sim N(0, 1)$ – независимо от v_{t_k} .

- Итоговая схема:

$$\hat{v}_{t_k} \sim \frac{1}{2c} \chi^2(d, \lambda(\hat{v}_{t_{k-1}}))$$

$$\hat{X}_{t_k} = \hat{X}_{t_{k-1}} + K_0 + K_1 \hat{v}_{t_{k-1}} + K_2 \hat{v}_{t_k} + \sqrt{K_3 \hat{v}_{t_{k-1}}} \eta_k,$$

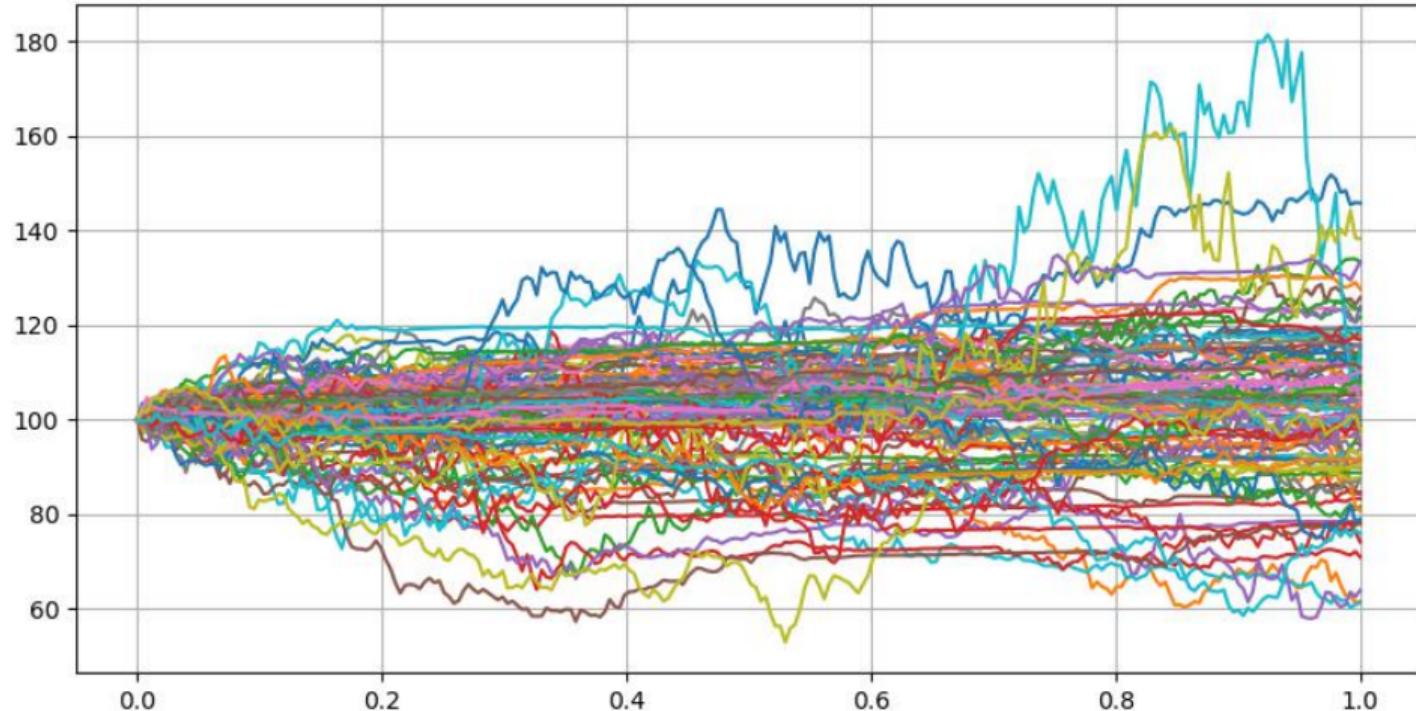
где

$$K_0 = (r - \frac{\rho \kappa \theta}{\xi}) \Delta t, \quad K_1 = \left(\frac{\kappa \rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \Delta t - \frac{\rho}{\xi},$$

$$K_2 = \frac{\rho}{\xi}, \quad K_3 = (1 - \rho^2) \Delta t.$$

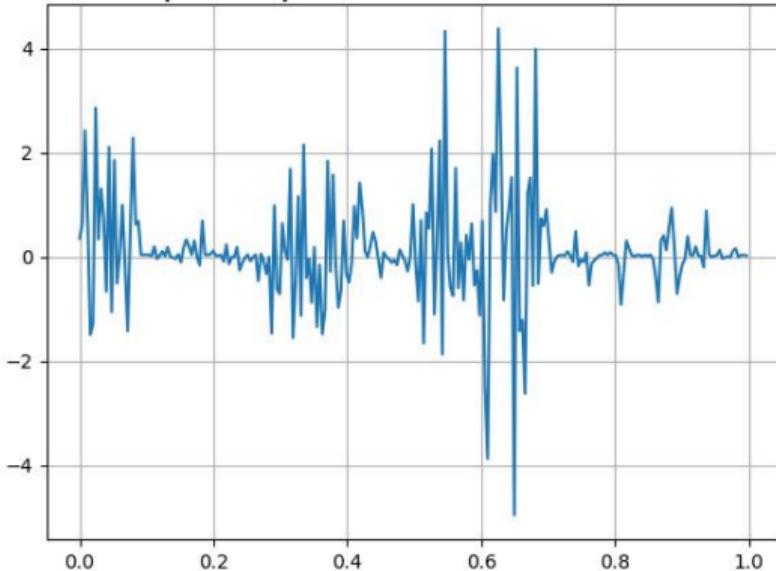
Примеры траекторий в модели Хестона

Траектории цены в модели Хестона

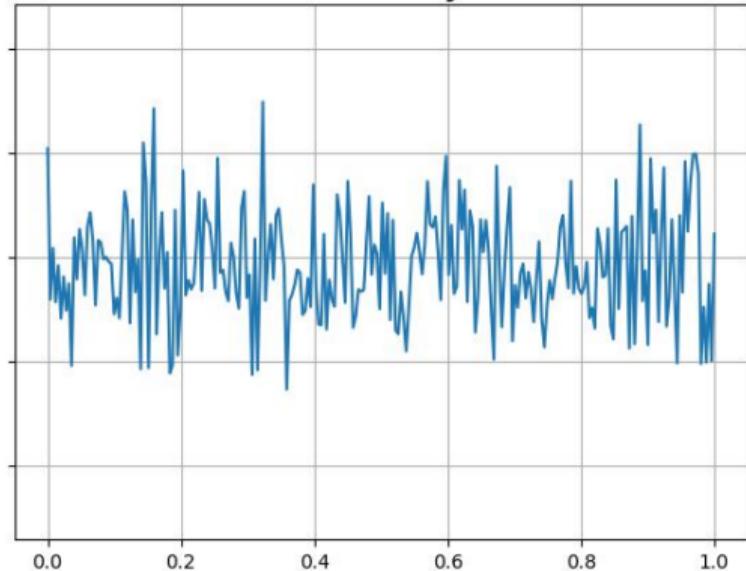


Лог-доходности в модели Хестона

Стандартизированные лог-доходности

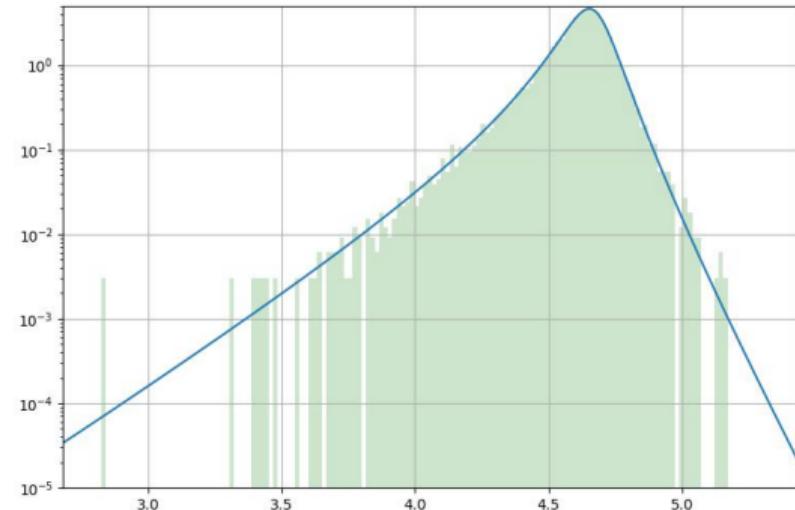
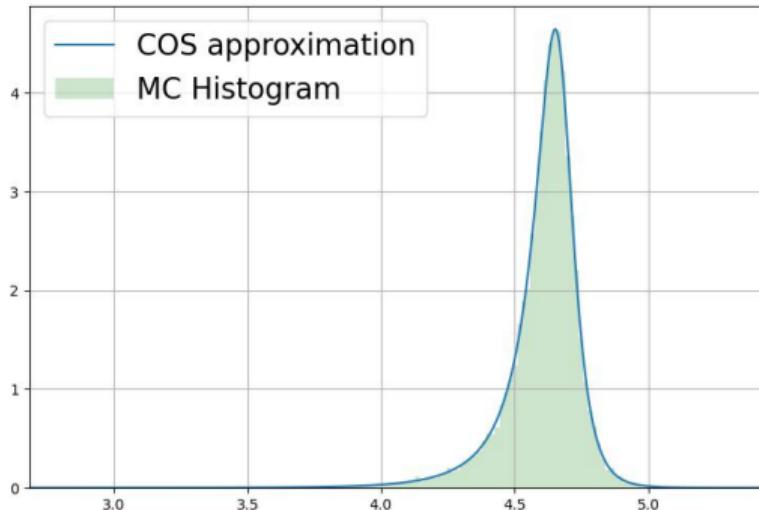


Белый шум



Терминальное распределение в модели Хестона

Гистограмма распределения $\ln S_T$



Список литературы

- [1] Steven L. Heston.
A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.
- [2] Leif B. G. Andersen.
Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model.
- [3] Fang F., Oosterlee C. W.
A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions.
- [4] Yiran Cui et al
Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model.