Семинар 7. Фьючерсные и форвардные контракты

November 7, 2025

Стохастическая процентная ставка

- Модели со стохастической ставкой:

$$dB_t = r_t B_t dt$$
$$dS_t / S_t = r_t dt + \sigma dW_t$$

- Стоимость опциона с пэйоффом $\Phi(S_T)$:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T}|\mathcal{F}_t\right] \Leftrightarrow V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

- Дисконт-фактор:

$$DF(t,T) = e^{-\int_t^T r_u du}$$

- Стоимость бескупонной облигации:

$$P(t,T) = \mathbb{E}^{Q}[DF(t,T)|\mathcal{F}_t]$$

Форвардный контракт

Определение

Форвардный контракт – соглашение о покупке актива в момент T по фиксированной цене K. Задаётся функцией выплаты $\Phi(S_T) = S_T - K$

Определение

Форвардная цена $\mathrm{Forw}(t, T)$– страйк форвардного контракта, при котором его стоимость равна нулю.

Теорема

$$\mathrm{Forw}(t, T) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} DF(t, T) S_T}{P(t, T)} = \frac{S_t}{P(t, T)}$$

Фьючерсный контракт

Определение

Фьючерсный контракт – соглашение о покупке актива в момент T, при котором платежи размазаны по всему сроку. Он обладает следующими свойствами

- На рынке котируется **фьючерсная цена** $\mathrm{Fut}_t(T)$.
- В момент исполнения держатель платит $\mathrm{Fut}_T(T)$ и получает S_T.
- $\forall t \leq T$ стоимость фьючерсного контракта равна нулю.
- В течении интервала времени $(s, t]$ держатель контракта получает платеж $\mathrm{Fut}_t(T) - \mathrm{Fut}_s(T)$

Теорема

- $\mathrm{Fut}_T(T) = S_T$
- $\mathrm{Fut}_t(T)$ – мартингал относительно риск-нейтральной меры.
- $\mathrm{Fut}_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T | \mathcal{F}_t\right]$

Фьючерсный контракт

Теорема

- $\mathrm{Fut}_T(T) = S_T$
- $\mathrm{Fut}_t(T)$ – мартингал относительно риск-нейтральной меры.
- $\mathrm{Fut}_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T | \mathcal{F}_t\right]$

Доказательство. Первый пункт очевиден. Докажем второй пункт. Пусть (x_t, y_t) – реплицирующий портфель (не обязательно самофинансируемый). Тогда:

$$x_t S_t + y_t B_t = 0$$

$$d\mathrm{Fut}_t(T) = x_t dS_t + y_t dB_t$$

Из первого уравнения $y_t = -x_t \dfrac{S_t}{B_t}$, откуда

$$d\mathrm{Fut}_t(T) = x_t \left(dS_t - r_t S_t dt\right) = x_t S_t \sigma dW_t$$

Форвардная мера

Определение

Форвардная мера $\mathbb{Q}^T$ – мартингальная мера для numeraire $P(t, T)$. Относительно $\mathbb{Q}^T$ процессы:

$$\overline{B}_t = \frac{B_t}{P(t, T)}, \quad \overline{S}_t = \frac{S_t}{P(t, T)}$$

являются мартингалами.

Форвардная мера

- Относительно $\mathbb{Q}^T$ $\mathrm{Forw}_t(T)$ является мартингалом:

$$\mathrm{Forw}_t(T) = \frac{S_t}{P(t,T)} = \overline{S}_t$$

- Формула ценообразования:

$$\frac{V_t}{P(t,T)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{\Phi(S_T)}{P(T,T)}|\mathcal{F}_t\right] \to \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\Phi(S_T)$$

- Формула замены меры:

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} DF(t,T)\Phi(S_T) = P(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\Phi(S_T)$$

Форвардные ставки

Определение

Пусть на рынке торгуются бескупонные облигации для всех T.
Определим форвардную ставку $f_t(T)$ как:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_t(U)dU\right)$$

или

$$f_t(T) = -\frac{1}{P(t,T)}\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}$$

Упражнение. Покажите, что

$$f_t(T) = \mathbb{E}^{Q_T}[r_T|\mathcal{F}_t]$$

Контракты с разными типами расчёта

- Контракты со спотовым типом расчёта – спот цены
- Контракты с форвардным типом расчёта – форвардные цены
- Контракты с фьючерсным типом расчёта – фьючерсные цены