Лекция 13. Численные методы для модели Хестона

December 14, 2025

Модель Хестона

Определение

Риск-нейтральная динамика в модели Хестона задаётся системой СДУ:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sqrt{v_t} dW_t$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t} dZ_t$$

где W_t, Z_t – два броуновских движения с корреляцией ρ.

Стоимость колл-опциона:

$$C_t(T,K) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t\right] =$$
$$= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T \mathbb{I}(S_T > K) | \mathcal{F}_t\right] - e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K \mathbb{I}(S_T > K) | \mathcal{F}_t\right] =$$
$$= S_t \mathbb{Q}_S(S_T > K | \mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)} K \mathbb{Q}(S_T > K | \mathcal{F}_t)$$

Прайсинг европейских опционов в модели Хестона

Утверждение

Пусть $\varphi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{iu\ln S_T}|\mathcal{F}_t\right]$ – условная хар. функция процесса $\ln S_T$. Тогда цены европейских колл-опционов выражаются по формуле:

$$C_t(T,K) = S_t\mathbb{Q}_S(S_T > K|\mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)}K\mathbb{Q}(S_T > K|\mathcal{F}_t)$$

где вероятности исполнения вычисляются как:

$$\mathbb{Q}(S_T > K|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln K}\varphi(u)}{iu}du\right]$$

$$\mathbb{Q}_S(S_T > K|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln K}\tilde{\varphi}(u)}{iu}du\right]$$

и $\tilde{\varphi}(u) = \dfrac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)}$ – условная хар. функция в мере $\mathbb{Q}_S$.

Характеристическая функция в модели Хестона

Пусть $\tau = T - t$ – время до погашения. Зафиксируем u. Пусть

$$d = \sqrt{(\rho\xi iu - \kappa)^2 + \xi^2(iu + u^2)}, \quad g = \frac{\rho\xi iu - \kappa + d}{\rho\xi iu - \kappa - d}$$

Лемма

Характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(T - \tau; u) + D(T - \tau; u)v + iux)$$

где функции $C(\tau; u), D(\tau; u)$ задаются как:

$$D(\tau; u) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d}{\xi^2}\left(\frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}}\right),$$

$$C(\tau; u) = iur\tau + \frac{\kappa\theta}{\xi^2}\left((\kappa - \rho\xi iu - d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g}\right)\right).$$

Вычисление несобственных интегралов

- Рассмотрим интеграл $I = \int_0^\infty f(x)dx$
- Если известна асимптотика $f(x)$ при $x \to \infty$, можем найти $M(\varepsilon)$ такое, что:

$$|\int_M^\infty f(x)dx| \leq \varepsilon$$

- Оценим

$$I \approx I_M = \int_0^M f(x)dx$$

- Ошибка $|I - I_M| \leq \varepsilon$
- Для $I_M = \int_0^M f(x)dx$ используем классические квадратурные формулы.

Вычисление несобственных интегралов

- Замена переменных: пусть $\phi : [0, 1) \to \mathbb{R}^+$
- Например,

$$\phi(y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right), \quad \phi(y) = -\ln(1 - y)$$

- Тогда:

$$I = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(\phi(y))\phi'(y)dy$$

- У подынтегральной функции $g(y) = f(\phi(y))\phi'(y)$ появляется особенность при $y \to 1$.
- Используем квадратурную формулу средних:

$$I \approx \hat{I} = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)h_k$$

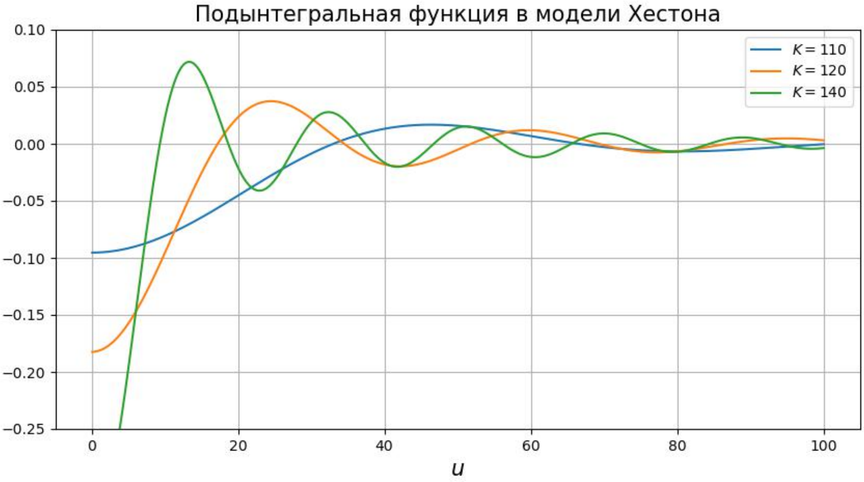
где

$$h = \frac{1}{N}, \quad y_k = (k + 0.5)h$$

$$x_k = \phi(y_k), \quad h_k = \phi'(y_k) \cdot h$$

Подынтегральная функция в интеграле Хестона

- Подынтегральная функция для $T = 1/52$



Метод COS

- Пусть X – с.в. с известной хар. функцией $\phi(u)$
- Рассмотрим задачу вычисления мат. ожидания:

$$I = \mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$$

где $f(x)$ – плотность с.в. X

Ряд Фурье для плотности

- Пусть функция $f(x)$ определена на $[0,\pi]$. Тогда её можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx), \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

- С помощью замены переменных можно определить ряд Фурье для интервала $[a,b]$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right), \quad A_n = \frac{2}{b-a}\int_a^{b} f(x)\cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)dx$$

- Из формулы Эйлера:

$$A_n = \frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\left\{\varphi\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)\exp\left(-i\frac{na\pi}{b-a}\right)\right\},$$

где

$$\tilde{\varphi}(u) = \int_a^b e^{iux} f(x)dx.$$

Ряд Фурье для плотности

- С помощью замены переменных можно определить ряд Фурье для интервала $[a, b]$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad A_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)dx$$

- Из формулы Эйлера:

$$A_n = \frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\left\{\varphi\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)\exp\left(-i\frac{na\pi}{b-a}\right)\right\},$$

где

$$\tilde{\varphi}(u) = \int_a^b e^{iux} f(x)dx.$$

- Если интервал $[a, b]$ достаточно велик, мы можем аппроксимировать

$$A_n \approx F_n := \frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\left\{\varphi\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)\exp\left(-i\frac{na\pi}{b-a}\right)\right\},$$

где $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)dx$ — характеристическая функция $f(x)$.

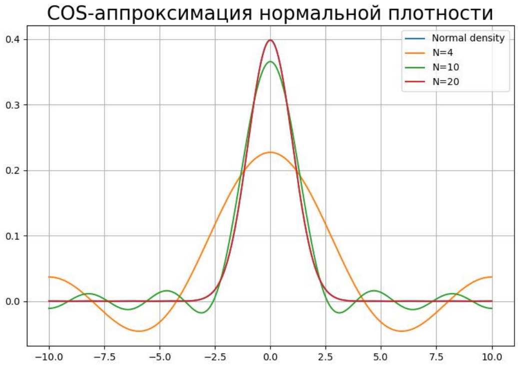
- Если интервал $[a, b]$ достаточно велик, мы можем аппроксимировать

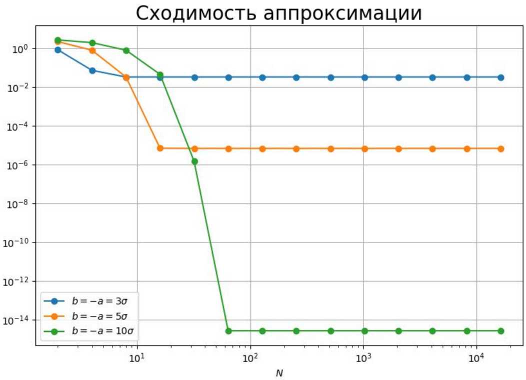
$$A_n \approx F_n := \frac{2}{b-a}\text{Re}\left\{\varphi\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)\exp\left(-i\frac{na\pi}{b-a}\right)\right\},$$

  где $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)dx$ — характеристическая функция $f(x)$.
- Коэффициенты F_n могут быть вычисленны через хар. фунцкию.
- Конечное число слагаемых дают хорошее приближение:

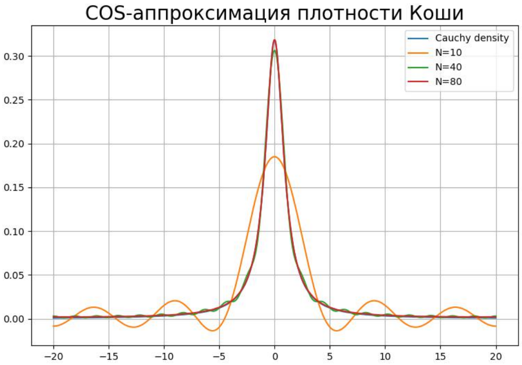
$$f(x) \approx \hat{f}_N(x) = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} F_n \cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$$

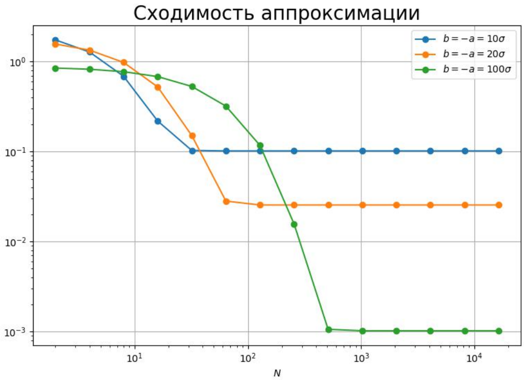
Пример: аппроксимация нормальной плотности





Пример: аппроксимация плотности Коши





Аппроксимация мат. ожидания

- Приблизим
$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx \approx \int_a^b g(x)f(x)dx$$
- Подставим приближение $\hat{f}_N(x)$ для $f(x)$:
$$\mathbb{E}g(X) \approx \int_a^b g(x)\left(\frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} F_n \cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\right) dx$$
$$= \frac{b-a}{2}\left(\frac{F_0 G_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} F_n G_n\right),$$

  где
$$G_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right) dx.$$

Применение для колл-опционов

- Пусть $X_T = \log(S_T/K)$
- Цена колл-опциона:

$$V = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

  где $g(x) = K(e^x - 1)^+$

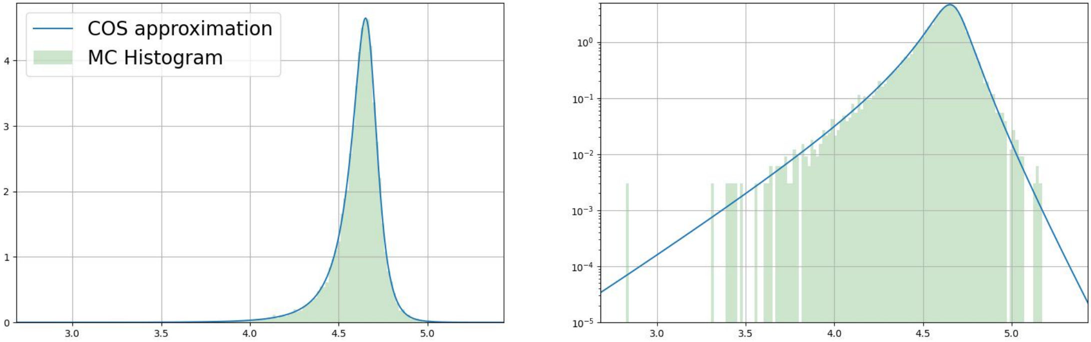
- Коэффициенты G_n могут быть вычисленны аналитически:

$$G_n = K \cdot \frac{2}{b-a} \int_0^b (e^x - 1) \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx = \dots$$

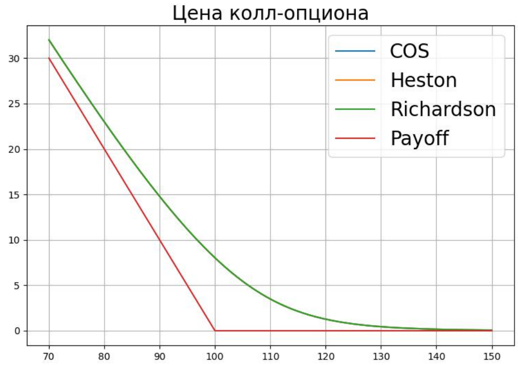
- Оценка цены опциона:

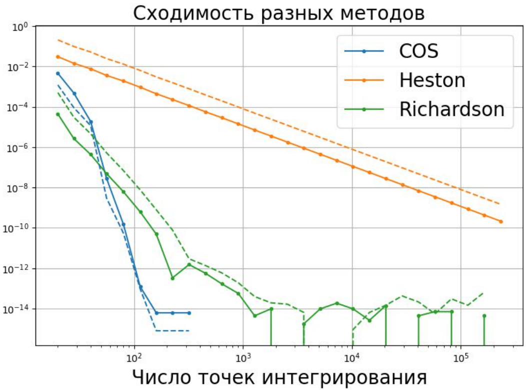
$$\hat{V} = e^{-rT} \frac{b-a}{2} \left(\frac{F_0 G_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} F_n G_n \right)$$

Гистограмма распределения $\ln S_T$



Применение для колл-опционов





Методы Монте-Карло для модели Хестона

Семплирование в модели Хестона

- СДУ в терминах лог-цены $X_t = \log S_t$:

$$dX_t = (r - 0.5v_t)dt + \sqrt{v_t}dW_t$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dZ_t$$

- В интегральном виде:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + r\Delta t - \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s}dW_s$$
$$v_{t_k} = v_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \kappa(\theta - v_s)ds + \xi\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s}dZ_s.$$

Семплирование в модели Хестона: схема Эйлера

- Схема Эйлера:

$$\hat{X}_{t_k} = \hat{X}_{t_{k-1}} + (r - 0.5\hat{v}_{t_{k-1}})\Delta t + \sqrt{\hat{v}_{t_{k-1}}\Delta t}\epsilon_k^1$$
$$\hat{v}_{t_k} = \hat{v}_{t_{k-1}} + \kappa(\theta - \hat{v}_{t_{k-1}})\Delta t + \xi\sqrt{\hat{v}_{t_{k-1}}\Delta t}\epsilon_k^2$$

  где $\epsilon_k^j \sim N(0,1), \mathrm{cov}(\epsilon_k^1, \epsilon_k^2) = \rho$.
- В схеме Эйлера $\hat{v}_{t_k}|\hat{v}_{t_{k-1}} \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$, поэтому:

$$\mathbb{P}\left(\hat{v}_{t_k} < 0|\hat{v}_{t_{k-1}}\right) > 0$$

- В схеме Эйлера могут возникать отрицательные значения $\hat{v}_{t_k}$.

Семплирование в модели Хестона: модифицированная схема Эйлера

- В схеме Эйлера могут возникать отрицательные значения $\hat{v}_{t_k}$.
- Модифицированная схема Эйлера:

$$\hat{X}_{t_k} = \hat{X}_{t_{k-1}} + (r - 0.5\hat{v}^{+}_{t_{k-1}})\Delta t + \sqrt{\hat{v}_{t^{+}_{k-1}} \Delta t}\epsilon^1_k$$
$$\hat{v}_{t_k} = \hat{v}_{t_{k-1}} + \kappa(\theta - \hat{v}_{t_{k-1}})\Delta t + \xi\sqrt{\hat{v}^{+}_{t_{k-1}} \Delta t}\epsilon^2_k$$

где $\epsilon^j_k \sim N(0,1), \mathrm{cov}(\epsilon^1_k, \epsilon^2_k) = \rho$.

- Модифицированная схема Эйлера приводит к смещенной оценке срадней дисперсии:

$$\mathbb{E}\hat{v}_{t_k} > \mathbb{E}v_{t_k} = v_0 e^{-rt_k} + \theta(1 - e^{-rt_k})$$

Семплирование процесса дисперсии

- Динамика дисперсии задаётся CIR-процессом.
- Для него переходная плотность известна аналитически:

$$v_{t_k}|v_{t_{k-1}} \sim \frac{1}{2c}\chi^2(d,\lambda)$$

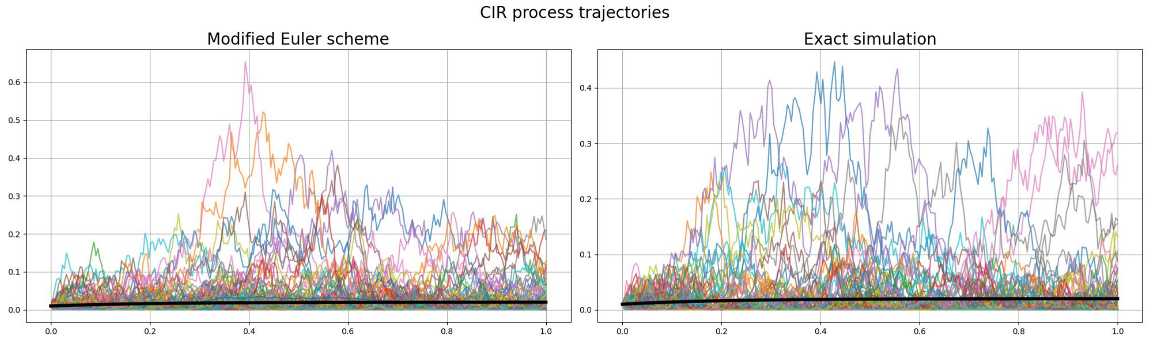
где $\chi^2(d,\lambda)$ – нецентральное распределение хи-квадрат с d степенями свободы и параметром нецентрированности λ и

$$c = \frac{2\kappa}{(1-e^{-\kappa\Delta t})\xi^2}$$

$$d = \frac{4\kappa\theta}{\xi^2}$$

$$\lambda = 2cv_{t_{k-1}}e^{-\kappa\Delta t}$$

Семплирование процесса variance



Семплирование процесса variance

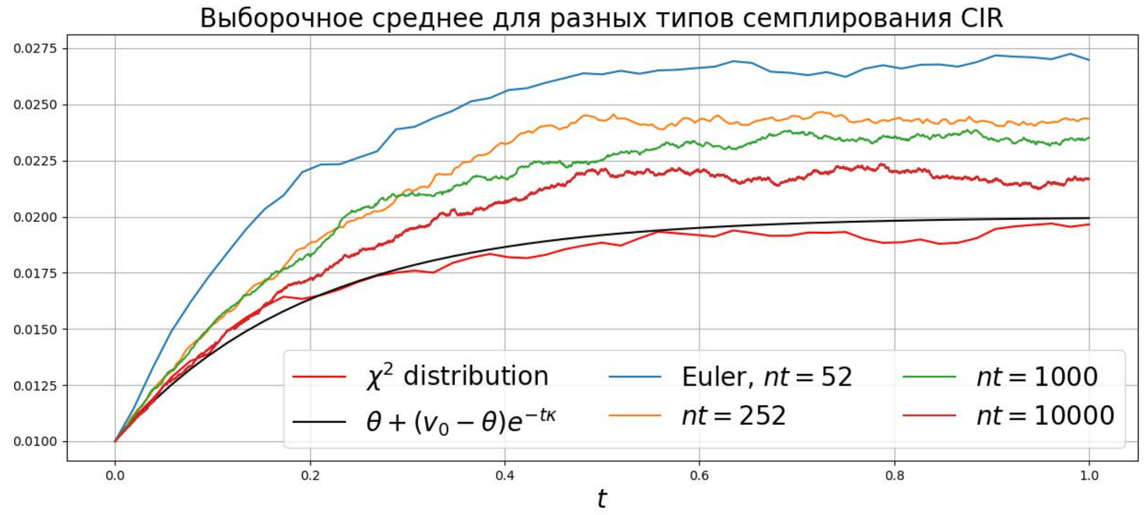


Схема Андерсена

- Пусть W_t^1, W_t^2 – независимые броуновские движения, положим:

$$Z_t = W_t^1, \quad W_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^2$$

- Тогда Z_t, W_t – б.д. с корреляцией ρ
- СДУ в модели Хестона записывается как:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + r\Delta t - \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds + \rho \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^1 + \sqrt{1-\rho^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^2,$$

$$v_{t_k} = v_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \kappa(\theta - v_s) ds + \xi \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^1.$$

- Выразим стохастический интеграл из второго уравнения:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^1 = \frac{1}{\xi}\left(v_{t_k} - v_{t_{k-1}} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \kappa(\theta - v_s) ds \right)$$

Схема Андерсена

- СДУ в модели Хестона записывается как:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + r\Delta t - \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds + \rho \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^1 + \sqrt{1-\rho^2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^2,$$

$$v_{t_k} = v_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \kappa(\theta - v_s) ds + \xi \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^1.$$

- Выразим стохастический интеграл из второго уравнения:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^1 = \frac{1}{\xi}\left(v_{t_k} - v_{t_{k-1}} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \kappa(\theta - v_s) ds\right)$$

- Подставим в СДУ для лог-цены:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + r\Delta t + \frac{\rho}{\xi}(v_{t_k} - v_{t_{k-1}} - \kappa\theta\Delta t) + \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2}\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds + \sqrt{1-\rho^2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^2$$

Схема Андерсена

- Обозначим $V_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_s ds$
- Рассмотрим стохастический интеграл $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^2$
- Так как $W_t^2 \perp W_t^1$, то процессы v_t, W_t^2 независимы.
- Тогда по форимуле изометрии Ито:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v_s} dW_s^2 | \{v_s\}_{s \in [t_{k-1}, t_k]} \sim N(0, V_k)$$

- Отсюда для X_{t_k}:

$$X_{t_k} | (X_{t_{k-1}}, v_{t_{k-1}}, v_{t_k}, V_k) \sim N(\mu_k, (1 - \rho^2) V_k),$$

где

$$\mu_k = r\Delta t + \frac{\rho}{\xi}(v_{t_k} - v_{t_{k-1}} - \kappa\theta\Delta t) + \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2}\right) \cdot V_k$$

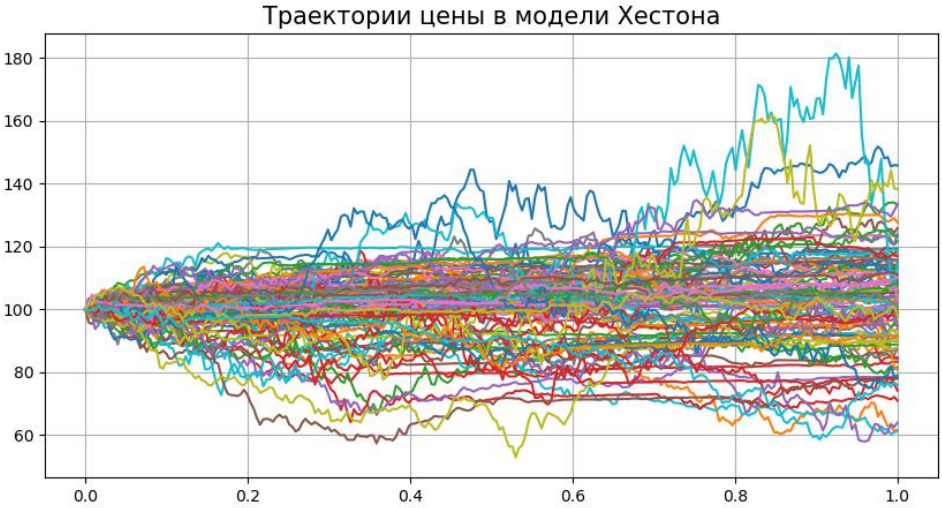
Схема Андерсена

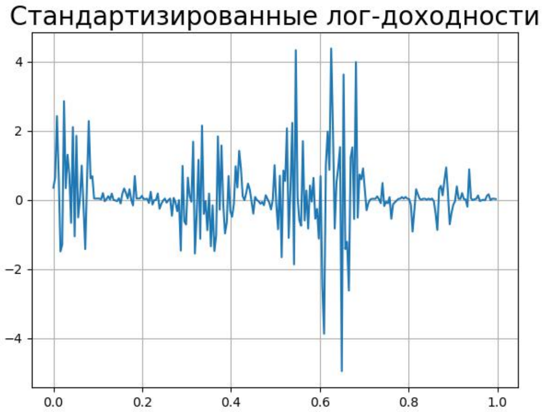
- $\hat{v}_{t_k} | \hat{v}_{t_{k-1}} \sim \dfrac{1}{2c}\chi^2(d, \lambda)$
- $\hat{V}_k = \hat{v}_{t_{k-1}} \Delta t$
- $\hat{X}_{t_k} = \mu_k + \epsilon_k \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\hat{V}_k \Delta t}$, где

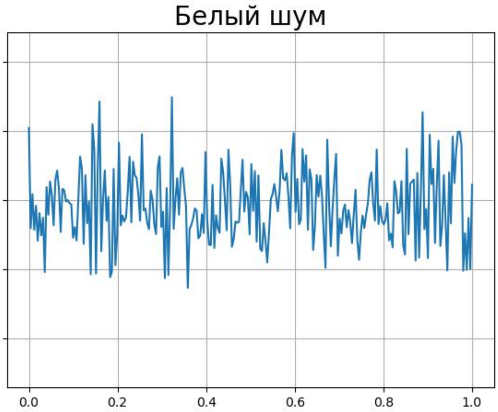
$$\epsilon_k \sim N(0,1),$$

$$\mu_k = r\Delta t + \frac{\rho}{\xi}(\hat{v}_{t_k} - \hat{v}_{t_{k-1}} - \kappa\theta\Delta t) + \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2}\right)\hat{V}_k.$$

Примеры траекторий в модели Хестона

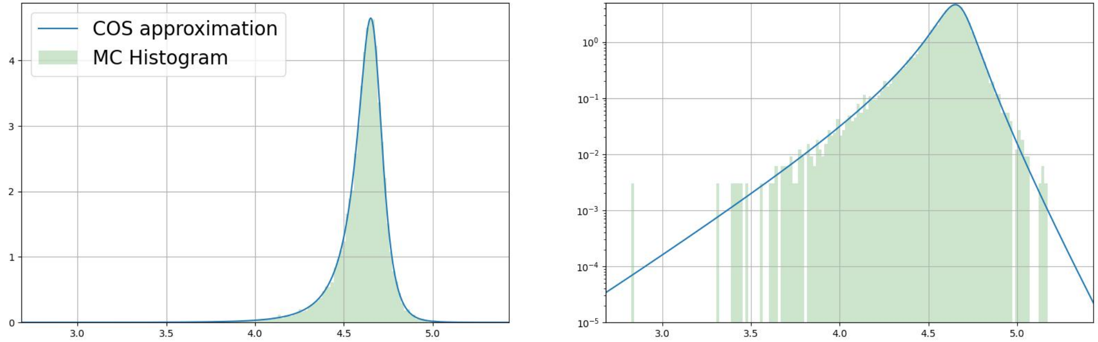



Стандартизированные лог-доходности
4
2
0
−2
−4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Белый шум
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Терминальное распределение в модели Хестона

Гистограмма распределения $\ln S_T$



Список литературы

[1] Steven L. Heston.
A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.

[2] Leif B. G. Andersen.
Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model.

[3] Fang F., Oosterlee C. W.
A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions.

[4] Yiran Cui et al
Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model.