Лекция 9. Численные методы

November 23, 2025

Численное интегрирование

- Хотим оценить интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Замена переменных $x = a + (b - a) \cdot u$

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot \int_0^1 f(a + (b - a) \cdot u)du = (b - a) \cdot \int_0^1 g(u)du$$

- Без ограничения общности считаем $a = 0, b = 1$.
- Апроксимация функции:

$$g(u) \approx \hat{g}(u), \quad u \in [0, 1]$$

- Оценка интеграла:

$$\hat{I} = \int_0^1 \hat{g}(u)du$$

Численное интегрирование: примеры

- Схема правых прямоугольников:

$$\hat{g}(u) = g(0) \to \hat{I} = g(0)$$

- Схема левых прямоугольников:

$$\hat{g}(u) = g(1) \to \hat{I} = g(1)$$

- Схема средних:

$$\hat{g}(u) = g(0.5) \to \hat{I} = g(0.5)$$

- Схема трапеций:

$$\hat{g}(u) = g(0) + (g(1) - g(0)) \cdot u \to \hat{I} = 0.5(g(a) + g(b))$$

Квадратичная аппроксимация

- Рассмотрим функцию $g(u), u \in [0, 1]$
- Квадратичная аппроксимация $\hat{g}(u)$:
  - $\hat{g}(u)$ – квадратичная функция
  - $\hat{g}(u_j) = g(u_j)$, при $u_j \in \{0, 0.5, 1\}$
- Базисные функции

$$h_1(u) = 2(u-1)(u-0.5)$$
$$h_2(u) = 4u(u-1)$$
$$h_3(u) = 2u(u-0.5)$$

- Свойства:

$$h_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

- Квадратичная аппроксимация:

$$\hat{g}(u) = g(0)h_1(u) + g(1)h_2(u) + g(0.5)h_3(u)$$

Схема Симпсона

- Квадратичная аппроксимация:

$$\hat{g}(u) = g(0)h_1(u) + g(0.5)h_2(u) + g(1)h_3(u)$$

- Схема Симпсона:

$$\hat{I} = \int_0^1 \hat{g}(u)du = g(0)I_1 + g(0.5)I_2 + g(1)I_3$$

где $I_1 = I_2 = \frac{1}{6},\ I_2 = \frac{4}{6}$

$$\hat{I} = \frac{1}{6}\left(u(0) + 4u(0.5) + u(1)\right)$$

Составные формулы Котеса

- Пусть $N \in \mathbb{N}$. Разобъём отрезок $[0, 1]$ на малые отрезки длинной $h = \dfrac{1}{N}$
- Узлы сетки $u_i = i \cdot h, i = 0, \ldots, N$
- Линейность интеграла по интервалу интегрирования:

$$I = \int_0^1 g(u)du = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} g(u)du$$

- На каждом интервале $[u_i, u_{i+1})$ воспользуемся одной из квадратурных формул $I_i \approx \hat{I}_i$
- Состовная формула для $\hat{I}$:

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{I}_i$$

Составные формулы Котеса

- Составная формула левых/правых/средних прямоугольников:

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{N-1} g(c_i) \cdot h$$

где

$$c_i = \begin{cases} u_i, & \text{для левых прямоугольников} \\ u_{i+1}, & \text{для правых прямоугольников} \\ u_i + h/2, & \text{для средних} \end{cases}$$

- Состовная формула трапеций

$$\hat{I} = h \cdot \left(0.5g(u_0) + \sum_{i=1}^{N-1} g(u_i) + 0.5g(u_N) \right)$$

Погрешность метода средних

- Рассмотрим составной метод средних:

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{N-1} g(u_i + 0.5h) \cdot h$$

- Ошибка на i-ом интервале:

$$E_i = |I_i - \hat{I}_i| = \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} (g(u) - g(c_i))du \right|$$

где $c_i = u_i + 0.5h$

- Разложим $g(u)$ в ряд тейлора в окрестности c_i:

$$g(u) - g(c_i) = g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2} g''(\xi)(u - c_i)^2$$

где $\xi \in [u_i, u_{i+1}]$

Погрешность метода средних

- Разложим $g(u)$ в ряд тейлора в окрестности c_i:

$$g(u) - g(c_i) = g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2}g''(\xi)(u - c_i)^2$$

где $\xi \in [u_i, u_{i+1}]$

- Рассмотрим интеграл по интервалу $[u_i, u_{i+1})$

$$E_i = \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left[g'(c_i)(u - c_i) + \frac{1}{2}g''(\xi)(u - c_i)^2 \right] du \right| \le \frac{1}{2} M_i \int_{u_i}^{u_{i+1}} (u - c_i)^2 du = \frac{1}{24} M_i h^3$$

где

$$M_i = \max_{u \in [u_i, u_{i+1}]} |g''(u)|$$

Погрешность метода средних

- Рассмотрим интеграл по интервалу $[u_i, u_{i+1})$

$$E_i = \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left[g'(c_i)(u-c_i) + \frac{1}{2} g''(\xi)(u-c_i)^2 \right] du \right| \leq \frac{1}{2} M_i \int_{u_i}^{u_{i+1}} (u-c_i)^2 du = \frac{1}{24} M_i h^3$$

где

$$M_i = \max_{u \in [u_i, u_{i+1}]} |g''(u)|$$

- Суммарная погрешность:

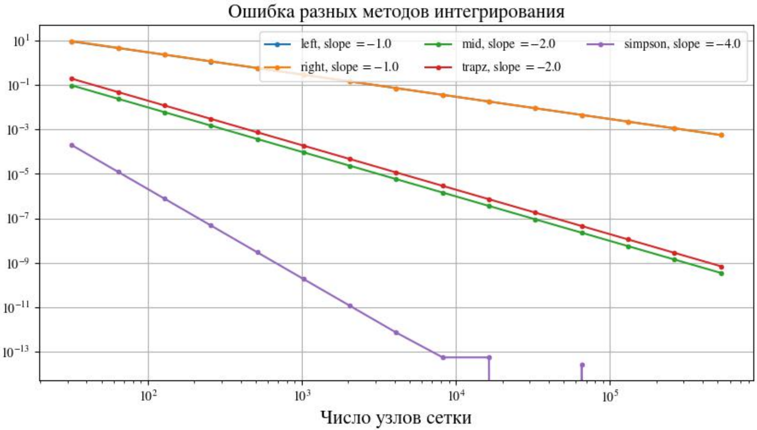
$$E_N = \sum_{i=0}^{N-1} E_i = \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \leq \frac{h^2}{24} M$$

где $M = \max_i M_i = \max_{u \in [0,1]} ||g''(u)||$

Сравнение квадратурных формул

Метод	**Формула**	**Главный член ошибки**
Левые прямоугольники	$h\sum_{i=0}^{N-1} g(u_i)$	$\frac{1}{2}h \cdot g'(\xi)$
Правые прямоугольники	$h\sum_{i=0}^{N-1} g(u_{i+1})$	$-\frac{1}{2}h \cdot g'(\xi)$
Средние прямоугольники	$h\sum_{i=0}^{N-1} g(u_i + \frac{h}{2})$	$\frac{1}{24}h^2 \cdot g''(\xi)$
Формула трапеций	$h\sum_{i=0}^{N-1} \frac{g(u_i) + g(u_{i+1})}{2}$	$-\frac{1}{12}h^2 \cdot g''(\xi)$
Формула Симпсона	$\frac{h}{3}\left[g(u_0) + g(u_N) + 4\sum_{\text{неч.}} g(u_i) + 2\sum_{\text{чет.}} g(u_i)\right]$	$-\frac{1}{180}h^4 \cdot g^{(4)}(\xi)$

Ошибка методов интегрирования



Апостериорная оценка погрешности

- Хотим оценить ошибку, не зная точного решения
- Ошибка имеет степенную зависимость от шага сетки $h = \dfrac{b-a}{N}$

$$I_N = I + R_N = I + c \cdot h^p$$

где R_N – ошибка на N узлах, $c \in \mathbb{R}$ – константа, p – порядок метода.
- Оценка на сгущённой сетке:

$$I_{2N} = I + R_{2N} = I + \frac{c}{2^p} \cdot h^p$$

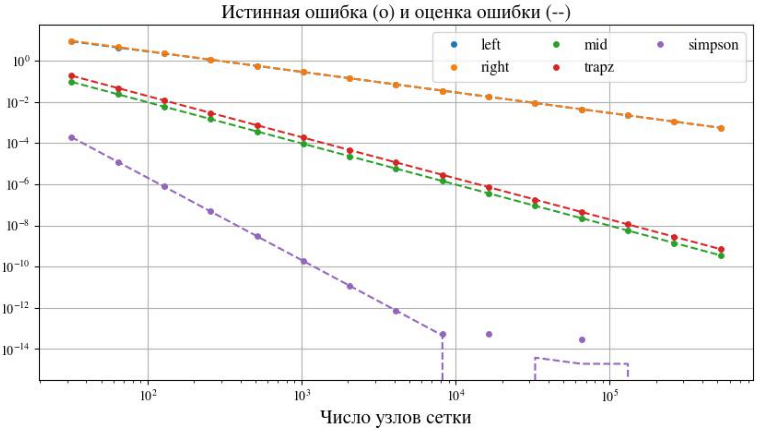
- Вычтем второе уравнение из первого, получим:

$$I_{2N} - I_N = \frac{c}{2^p} \cdot h^p - c \cdot h^p = R_{2N}(1 - 2^p)$$

откуда оценка ошибки:

$$R_{2N} = \frac{I_N - I_{2N}}{2^p - 1}$$

Апостериорная оценка погрешности



Улучшение точности

- Зная оценку ошибки $\hat{R}_N$ можем получить более точную оценку для интеграла:

$$\hat{I}_N = I_N - \hat{R}_N$$

- Ошибка $\hat{I}_N$ имеет более высокий порядок чем p. Для несимметричных схем:

$$\hat{I}_N = I_N - \hat{R}_N = I + c' h^{p+1}$$

- Для симметричных схем ошибка раскладывается по чётным степеням h:

$$\hat{I}_N = I_N - \hat{R}_N = I + c'' h^{p+2}$$

- Улучшение точности можно проделывать много раз