

Ценообразование активов в непрерывном времени

Преподаватели: Пифтанкин Г.Н, Долматов А.С.

Рекомендуемый уровень обучения: 3-4 бакалавриат.

Академическая нагрузка: ...

Язык обучения: русский

Формат обучения: гибридный

Аннотация курса

Данный курс является продолжением прочитанного весной 2025 года курса по введению в ценообразование активов. В первой части курса будут рассмотрены основные модели ценообразования деривативов в непрерывном времени. В краткой форме будут даны основные необходимые понятия из теории вероятностей, случайных процессов, стохастического исчисления и стохастических дифференциальных уравнений. 2 лекции посвящены классическим результатам ценообразования в модели Блэка-Шоулза. В завершающей части первой половины курса планируется рассказать о том, как можно отказаться от некоторых предположений модели Блэка-Шоулза: будут рассмотрены модели Хестона стохастической волатильности, а также модели локальной волатильности и формулы Дюпира.

Во второй половине курса студенты познакомятся с основными численными методами в количественных финансах. На примере усложнения моделей и деривативов, будут рассмотрена эволюция методов прайсинга: от классических подходов на основе деревьев и УРЧП, к методом American Monte Carlo и обучения с подкреплением. Теоретические лекции будут дополняться практическими семинарами с кодом на Python и вычислительными домашними заданиями.

Пререквизиты

Математический анализ, теория вероятностей, случайные процессы, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате обучения слушатель сможет применить классические и продвинутые модели ценообразования опционов.

Программа курса

Темы	Литература
Тема 1. Дискретные случайные процессы 1. Теория вероятности. Основные понятия и определения. 2. Условное мат. ожидание 3. Случайные процессы в дискретном времени, понятие фильтрации 4. Мартингалы, моменты остановки, теорема Дуба 5. Дискретный стохастический интеграл	Бьорк, приложения A-B Shreve, Ch. 1-2
Тема 2. Случайные процессы в непрерывном времени 1. Броуновское движение: определения и свойства 2. Стохастический интеграл Ито: определения и свойства	Бьорк, Гл. 4 Shreve, Ch 3-4

3. Квадратическая вариация 4. Формула Ито	
Тема 3. Стохастические дифференциальные уравнения 1. СДУ: определения и примеры (BM, GBM, OU-process) 2. Сильное и слабое решение, теорема существования 3. Связь с уравнениями в частных производных 4. Прямое и обратное уравнение Колмогорова 5. Формула Феймана-Каца	Бьорк, Гл. 5
Тема 4. Модель Блэка-Шоулза 1. Основные предположения модели 2. Динамика портфеля, условие самофинансируемости 3. Уравнение Блэка-Шоулза 4. Формула Блэка-Шоулза	Бьорк, Гл. 6-7 Shreve, Ch 5-6, 8
Тема 5. Фундаментальные теоремы финансов 1. Понятие полноты и безарбитражности 2. Риск-нейтральная мера 3. Существование риск-нейтральной меры в модели БШ: теорема Гирсанова	Бьорк, Гл. 8
Тема 6. Модели стохастической волатильности: локальная волатильность 1. Ограничения модели БШ 2. Стилизованные факты: вменённая волатильность, улыбка волатильности, класстеризация волатильности, тяжелые хвосты 3. Связь цен опционов и маргинальных распределений: формула Дюпира 4. Статистический и динамический арбитраж	Dupire, Bergomi
Тема 7. Модели стохастической волатильности 1. Модель Хестона стохастической волатильности 2. Характеристическая функция в модели Хестона, квазианалитическая формула ценообразования 3. Теорема Gyöngy. Связь SV и LV моделей. 4. Другие модели стохастической волатильности: SABR, SVI	Heston, Yiran Cui et al
Тема 8. Модели на основе деревьев 1. Прайсинг европейских и американских опционов в модели БШ. 2. Связь с УРЧП. Явные и неявные схемы. Анализ устойчивости и сходимости. 3. Прайсинг азиатских и барьерных опционов	
Тема 9. Методы Монте-Карло 1. Обоснование метода MC – закон больших чисел 2. Численные методы решения СДУ. Слабая и сильная сходимость. 3. Схемы семплирования в модели Хестона. 4. Методы снижения дисперсии: moment matching, control variate	
Тема 10. American MC/Regression based MC 1. Использование MC для прайсинга американских опционов	Longstaff, Schwartz

2. Regression based MC для вычисления xVA поправок	
Тема 11. Численные методы для модели Хестона 1. Вычисление интеграла в формуле Хестона. 2. Метод COS. 3. Методы на основе FFT. 4. Другие модели с известной хар. функцией. 5. Калибровка параметров модели Хестона.	
Тема 12. Модели локальной волатильности 1. Численные методы вычисления вменённой волатильности 2. Формула Дюпира: сложности практической реализации 3. Вычисление локальной волатильности в модели Хестона	
Тема 13* Обучение с подкреплением в финансах 1. Deep-hedging 2. RL for American options	Bühler

Примеры задач

1. Пусть W_t – броуновское движение. При каком α процесс $X_t = e^{\alpha t + W_t}$ является мартингалом?
2. Пусть W_t – броуновское движение, $dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t)$. Выписать СДУ для процесса $Y_t = \ln X_t$.
3. В модели БШ найти стоимость опциона с пэйоффом $\Phi = (G_T - K)^+$ где $G_T = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_u du\right)$ – геометрическое среднее цены.
4. Пусть W_t^1, W_t^2 – два броуновских движения, $dW_t^1 dW_t^2 = \rho \cdot dt$. Пусть

$$dS_t^1 = S_t^1 \sigma_1 dW_t^1,$$

$$dS_t^2 = S_t^2 \sigma_2 dW_t^2,$$

процентная ставка нулевая. Найти стоимость обменного опциона:

$$\Phi(S_T^1, S_T^2) = (S_T^2 - S_T^1)^+$$

5. Найти стоимость европейского/американского опциона с пэйоффом $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$ в модели Хестона.
6. Откалибровать параметры модели Хестона на рыночной поверхности волатильности.

Итоговая оценка

Оценка складывается из теоретических и практических ДЗ, а также коллоквиума по первой части курса:

$$\text{Итоговая Оценка} = 20\% \text{ Теор. ДЗ} + 40\% \text{ Коллоквиум} + 40\% \text{ Практическое ДЗ}$$

В качестве части практических заданий можно зачесть участие в одном из проектов. Подробнее с темами проектов можно ознакомиться на [гитхабе](#) курса.

Список литературы

1. Steven E. Shreve – Stochastic Calculus for Finance II
2. Tomas Bjork – Arbitrage Theory in Continuous time (доступна на русском в переводе Белополюской)
3. S. L. Heston – A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”
4. Yiran Cui et al – Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model
5. Bergomi – Stochastic Volatility Modeling
6. Dupire – B. Pricing with a Smile
7. I. Gyöngy – Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an Ito differential
8. Longstaff, Schwartz – Valuing American Options by Simulation
9. Hans Bühler – Deep Hedging