

Лекция 11. Методы Монте-Карло

November 30, 2025

Численные методы для СДУ

Стохастические дифференциальные уравнения

- Пусть X_t удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

- Хотим генерировать траектории $X_{t_k}^{(j)}$ в дискретные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$.
- Положим $X_0^{(j)} = X_0$
- Семплируем следующее значение из переходной плотности:

$$X_{t_{k+1}}^{(j)} \sim p(x, t_{k+1} | X_{t_k}^{(j)}, t_k)$$

- Выборочные траектории $X_{t_k}^{(j)}$ аппроксимируют совместное распределение $p(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_K})$.

Решение СДУ: примеры

- Броуновское движение:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

- Переходная плотность:

$$X_{t_{k+1}} | X_{t_k} \sim N(X_{t_k} + \mu \Delta t_k, \sigma^2 \Delta t_k)$$

- Геометрическое броуновское движение:

$$dX_t = X_t \mu dt + X_t \sigma dW_t$$

- Переходная плотность:

$$\ln(X_{t_{k+1}}) | X_{t_k} \sim N\left(X_{t_k} + (\mu - 0.5\sigma^2)\Delta t_k, \sigma^2 \Delta t_k\right)$$

Решение СДУ: примеры

- Процесс Орнштейна-Уленбека:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

- Переходная плотность:

$$X_{t_{k+1}}|X_{t_k} \sim N\left(X_{t_k}e^{-\alpha\Delta t_k} + \theta(1 - e^{-\alpha\Delta t_k}), \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha\Delta t_k}}{2\alpha}\right)$$

Решение СДУ: примеры

- Процесс CIR:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

- Переходная плотность:

$$X_{t_{k+1}}|X_{t_k} = \frac{Y}{2c}$$

где Y имеет нецентральное распределение хи-квадрат с d степенями свободы и параметром нецентрированности λ и

$$c = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-\alpha(t_{k+1}-t_k)})\sigma^2}$$

$$d = \frac{4\alpha\theta}{\sigma^2}$$

$$\lambda = 2cX_{t_k}e^{-\alpha(t_{k+1}-t_k)}$$

Численные методы решения СДУ: схема Эйлера-Маруяма

- Схема Эйлера-Маруяма: аппроксимируем переходную плотность нормальной:

$$X_{t_{k+1}} | X_{t_k} = N \left(X_{t_k} + \mu(t_k, X_{t_k}) \Delta t_k, \sigma^2(t_k, X_{t_k}) \Delta t_k \right)$$

- Эквивалентная запись:

$$X_{t_{k+1}}^j = X_{t_k}^j + \mu(t_k, X_{t_k}^j) \Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k}^j) \xi_k^j \sqrt{\Delta t_k},$$

где $\xi_k^j \sim N(0, 1)$ – независимые.

Численные методы решения СДУ: метод Мильштейна

- Рассмотрим автономное уравнение:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

- Замена переменных $Y_t = f(X_t)$:

$$dY_t = (f'(X_t)\mu(X_t) + 0.5f''(X_t)\sigma^2(X_t))dt + f'(X_t)\sigma(X_t)dW_t$$

- Выберем $f(x)$ так, чтобы у Y_t была постоянная волатильность:

$$f'(x)\sigma(x) = 1 \rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{\sigma(x)}$$

- Производные:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma(x)}, f''(x) = -\frac{\sigma'(x)}{\sigma^2(x)}$$

- СДУ на Y_t :

$$dY_t = \left(\frac{\mu(X_t)}{\sigma(X_t)} - 0.5\sigma'(X_t) \right) dt + dW_t$$

Численные методы решения СДУ: метод Мильштейна

- Схема Эйлера-Маруямы на Y_t :

$$Y_{t_{k+1}} = Y_{t_k} + \left(\frac{\mu(X_{t_k})}{\sigma(X_{t_k})} - 0.5\sigma'(X_{t_k}) \right) + \xi_k \sqrt{\Delta t} = Y_{t_k} + \Delta Y_{t_k}$$

- Обратная замена:

$$X_{t_{k+1}} = f^{-1}(Y_{t_{k+1}}) = f^{-1}(Y_{t_k} + \Delta Y_{t_k}) \approx X_{t_k} + (f^{-1})' \Delta Y_{t_k} + 0.5(f^{-1})'' (\Delta Y_{t_k})^2$$

- Подставляя производные обратной функции окончательно получим:

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + \mu(X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(X_{t_k})\xi_k \sqrt{\Delta t_k} + 0.5\sigma(X_{t_k})\sigma'(X_{t_k})\Delta t_k (\xi_k^2 - 1)$$

- При $\sigma(x) = \text{const}$ метод Мильштейна сходится к методу Эйлера-Маруямы.

Методы Монте-Карло

Многомерные интегралы: проклятие размерности

- Рассмотрим многомерный интеграл

$$I = \int_{[0,1]^d} g(x) dx$$

- При $d = 1$:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) h + O(n^{-2})$$

- При $d = 2$:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} g(x_i, y_j) h^2 + O(n^{-2})$$

- Общее число узлов $N = n^2$, отсюда ошибка:

$$E_N = O(N^{-1})$$

Многомерные интегралы: проклятие размерности

- Рассмотрим многомерный интеграл

$$I = \int_{[0,1]^d} g(x) dx$$

- При $d = 1$:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) h + O(n^{-2})$$

- При $d = 2$:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} g(x_i, y_j) h^2 + O(n^{-2})$$

- В d -мерном случае $N = n^d \rightarrow$ ошибка ведёт себя как $E_N = O(N^{-2/d})$

Методы Монте-Карло

- Вероятностная постановка. Пусть $X \sim U([0, 1]^d)$. Тогда:

$$I = \int_{[0,1]^d} g(x) dx = \mathbb{E}g(X)$$

- Пусть $\{X^j\}_{j=1}^N$ i.i.d из $U([0, 1]^d)$. Оценка интерала:

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(X^j)$$

- \hat{I}_N – случайная величина. Свойства:

$$\mathbb{E}\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}g(X^j) = \mathbb{E}g(X^1) = I$$

$$\text{Var}\hat{I}_N = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \text{Var}g(X^j) = \frac{\text{Var}g(X^1)}{N} = \frac{\sigma^2}{N}$$

Методы Монте-Карло

- \hat{I}_N – случайная величина. Свойства:

$$\mathbb{E}\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}g(X^j) = \mathbb{E}g(X^1) = I$$

$$\text{Var}\hat{I}_N = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \text{Varg}(X^j) = \frac{\text{Varg}(X^1)}{N} = \frac{\sigma^2}{N}$$

- По ЗБЧ оценка состоятельная $\hat{I}_N \rightarrow I$ при $N \rightarrow \infty$ по вероятности.
- По ЦПТ при больших N : $\hat{I}_N = I + \xi \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, $\xi \sim N(0, 1)$
- Ошибка:

$$E_N = \hat{I}_N - I = \frac{\xi \sigma}{\sqrt{N}} = O^*(N^{-0.5})$$

Методы Монте-Карло в финансах

- Стоимость европейского опциона:

$$V = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-rT} \Phi(S_T) = e^{-rT} \int_0^{\infty} \Phi(s) p(s) ds$$

где $p(s)$ – плотность с.в. S_T

- Оценка по квадратурной формуле:

$$\hat{V} = e^{-rT} \sum_{j=1}^n \Phi(s_j) p(s_j) \Delta s_j$$

- Оценка методом Монте-Карло:

$$\hat{V} = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(S_T^{(j)})$$

где $\{S_T^{(j)}\}$ – i.i.d. из распределения $p(s)$

Методы Монте-Карло в финансах

- Стоимость path-dependency опциона:

$$V = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-rT} \Phi(S_0, S_{t_1}, \dots, S_{t_K})$$

- Оценка по квадратурной формуле:

$$\hat{V} = e^{-rT} \sum_{j_0=1}^n \dots \sum_{j_K=1}^n \Phi(s_0^{j_0}, \dots, s_K^{j_K}) p(s_0^{j_0}, \dots, s_K^{j_K}) \Delta s_0^{j_0} \dots \Delta s_K^{j_K}$$

- Оценка методом Монте-Карло:

$$\hat{V} = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(S_{t_0}^{(j)}, \dots, S_{t_K}^{(j)})$$

где $\{S_{t_k}^{(j)}\}$ – выборочные траектории процесса $\{S_t\}_{t \geq 0}$.

Пример

- Модель БШ:

$$S_T = S_0 e^{(r - 0.5\sigma^2)T + \sigma\xi\sqrt{T}}, \xi \sim N(0, 1)$$

- Европейский колл-опцион:

$$V = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_T - K)^+ = S_0 N(d_1) - e^{-rT} K N(d_2)$$

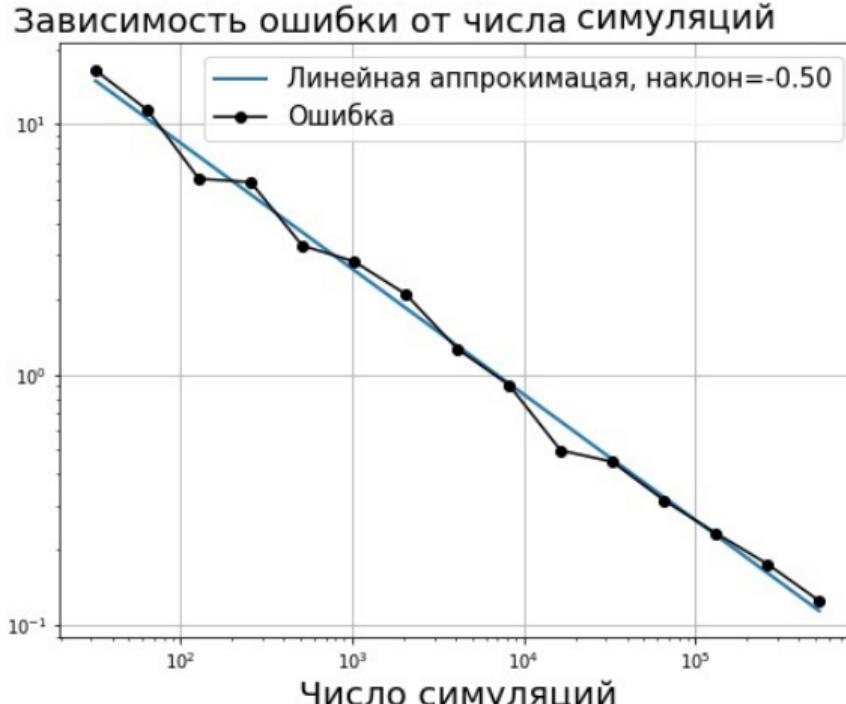
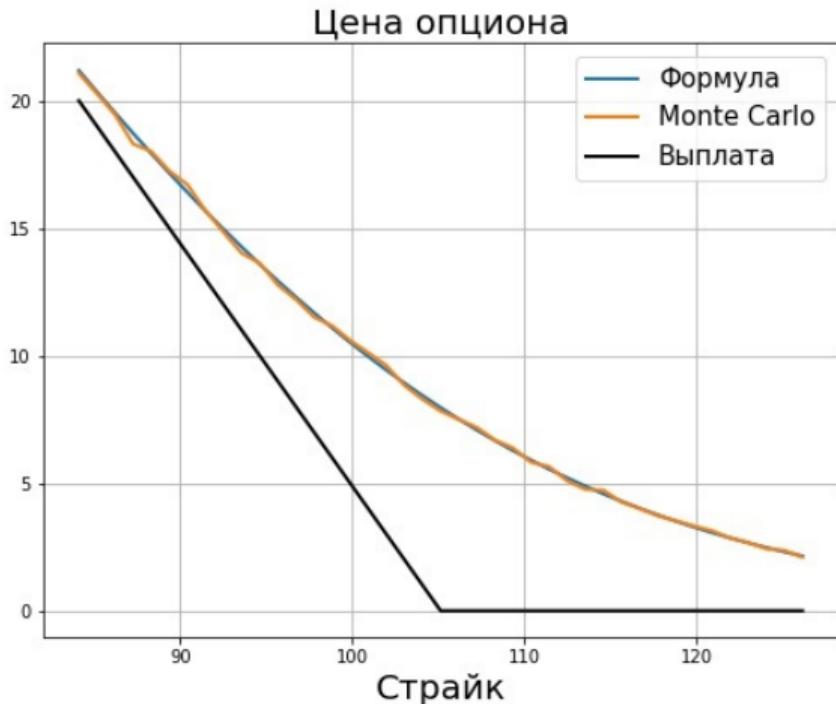
- Оценка Монте-Карло:

$$\hat{V} = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{j=1}^N (S_T^j - K)^+$$

где $\{S_T^j\}_{j=1}^N$ – выборка из лог-нормального распределения.

Пример

- Европейский колл-опцион:



Пример

- Модель БШ:

$$S_T = S_0 e^{(r - 0.5\sigma^2)T + \sigma\xi\sqrt{T}}, \xi \sim N(0, 1)$$

- Опцион на геометрическое среднее:

$$V = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_T - K)^+$$

где $G_T = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_u du\right)$

- Оценка Монте-Карло:

$$\hat{V} = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{j=1}^N (G_T^j - K)^+$$

где

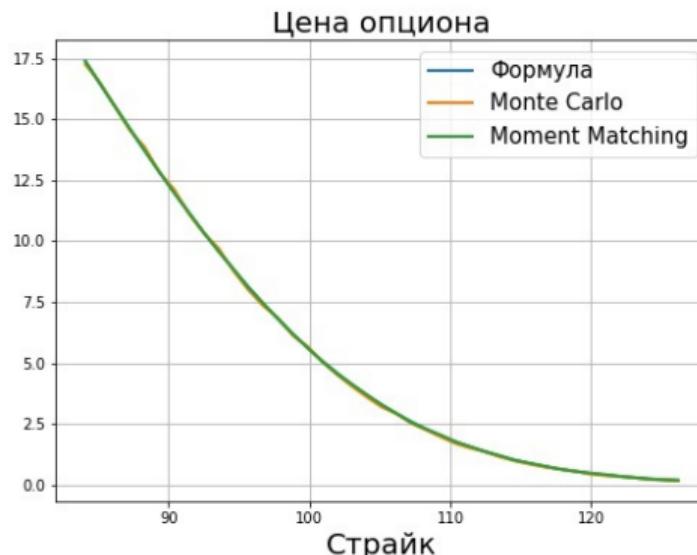
$$G_T^j = \exp\left(\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{K-1} \log S_{t_k}^j \Delta t_k\right)$$

Moment Matching: азиатский опцион

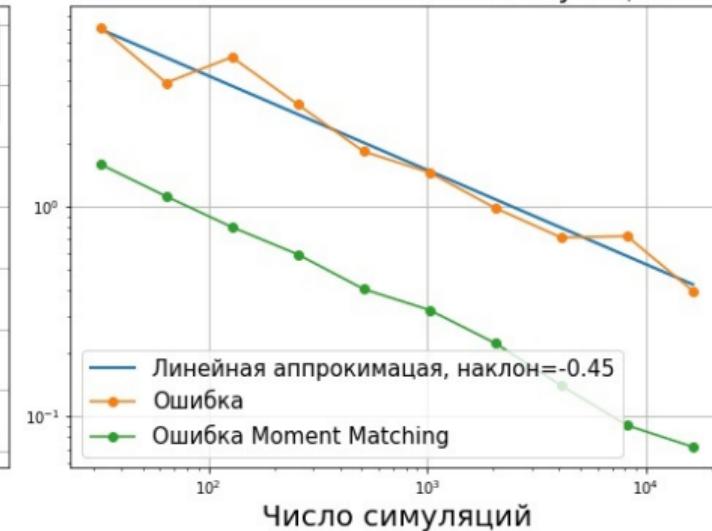
- Опцион на геометрическое среднее:

$$\Phi((S_t)_{t \leq T}) = \left[\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_t dt\right) - K \right]^+$$

Опцион на геометрическое среднее



Зависимость ошибки от числа симуляций



Методы снижения дисперсии: moment matching

- Пусть $\{X_j\}_{j=1}^N$ i.i.d, $X_j \sim \mathcal{P}$. Пусть

$$\mathbb{E}X = \mu, \text{Var}X = \sigma^2$$

- Пусть

$$\frac{1}{N} \sum_j^N X_j = \hat{\mu}, \quad \frac{1}{N-1} \sum_j^N (X_j - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2$$

- Положим

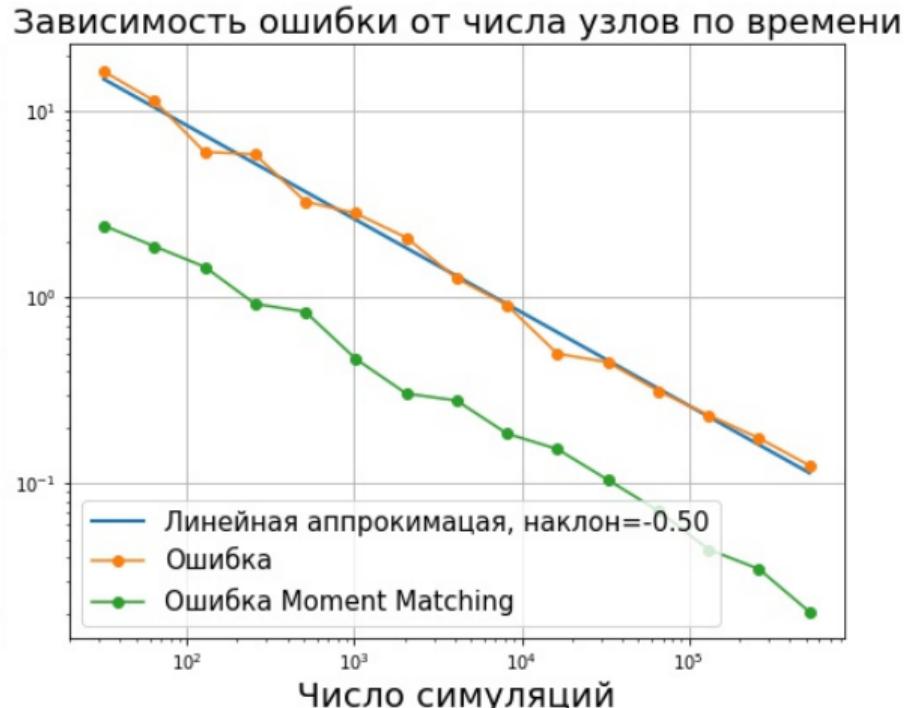
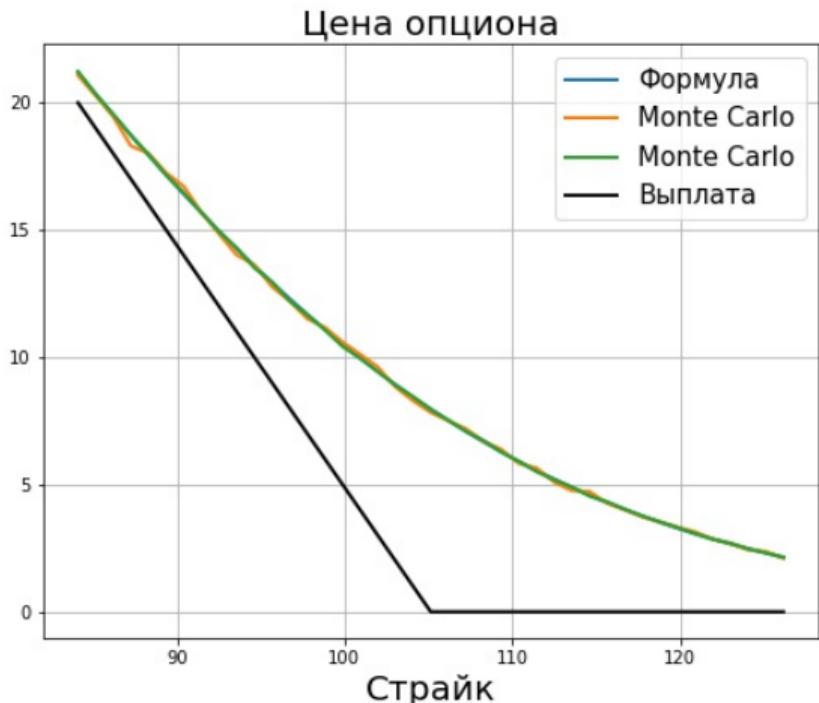
$$Y^j = (X^j - \hat{\mu}) \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} + \mu$$

- Тогда не трудно видеть, что

$$\frac{1}{N} \sum_j^N Y^j = \mu, \quad \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (Y^j - \mu)^2 = \sigma^2$$

Moment Matching: европейский опцион

- Европейский колл-опцион:

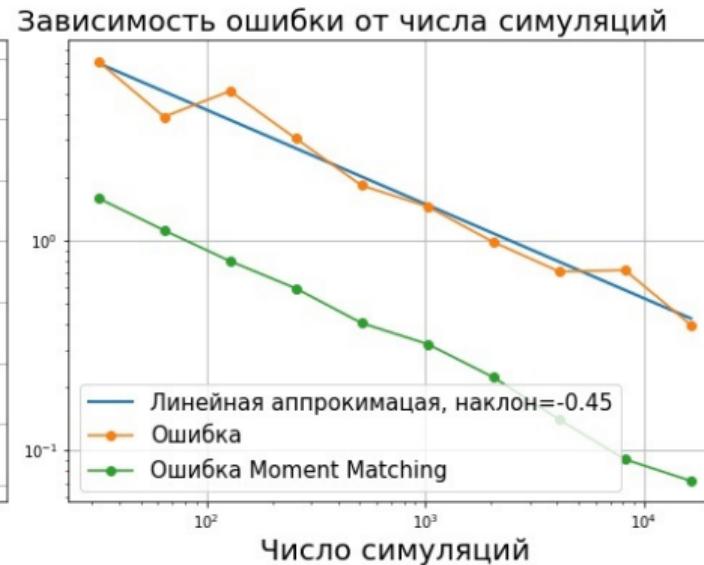
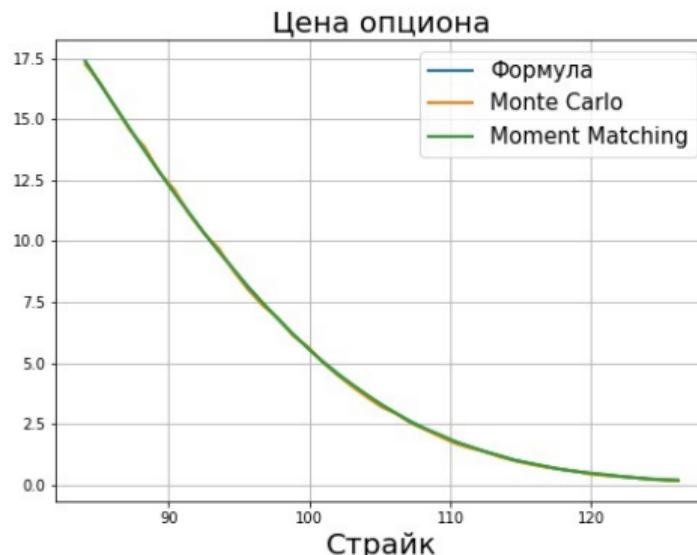


Moment Matching: азиатский опцион

- Опцион на геометрическое среднее:

$$\Phi((S_t)_{t \leq T}) = \left[\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_t dt\right) - K \right]^+$$

Опцион на геометрическое среднее



Снижение дисперсии: метод контрольных переменных

- Хотим оценить

$$I = \mathbb{E}\xi$$

- Пусть есть с.в. η такая, что:

$$\mathbb{E}\eta = 0, \text{corr}(\xi, \eta) = \rho \neq 0$$

- Отсюда $\forall \beta \in \mathbb{R}$:

$$I = \mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\xi + \beta\eta)$$

- Пусть $\{\xi^j, \eta^j\}_{j=1}^N$ – двумерная выборка с.в. (ξ, η) .
- Оценка I методом Монте-Карло:

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_j (\xi^j + \beta\eta^j)$$

- Ошибка оценки:

$$N \cdot \text{Var}(\hat{I}) = \text{Var}(\xi^j + \beta\eta^j) = \sigma_\xi^2 + 2\rho\beta\sigma_\xi\sigma_\eta + \beta^2\sigma_\eta^2$$

Снижение дисперсии: метод контрольных переменных

- Пусть $\{\xi^j, \eta^j\}_{j=1}^N$ – двумерная выборка с.в. (ξ, η) .
- Оценка I методом Монте-Карло:

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_j (\xi^j + \beta \eta^j)$$

- Ошибка оценки:

$$N \cdot \text{Var}(\hat{I}) = \text{Var}(\xi^j + \beta \eta^j) = \sigma_\xi^2 + 2\rho\beta\sigma_\xi\sigma_\eta + \beta^2\sigma_\eta^2$$

- Оптимизируем по β , получим минимум дисперсии при

$$\beta^* = -\frac{\rho\sigma_\xi}{\sigma_\eta}$$

$$\text{Var}(\hat{I}) = \frac{\sigma_\xi^2(1 - \rho^2)}{N}$$

- Для реальных расчётов оцениваем β^* на выборке