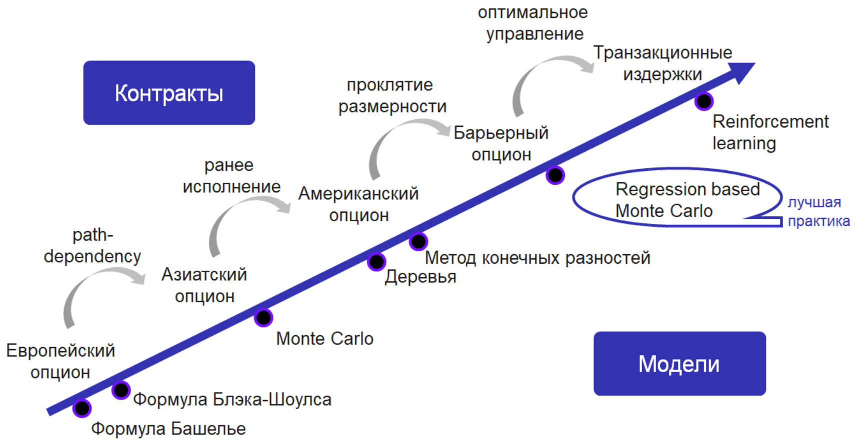
Лекция 12. American Monte Carlo

December 6, 2025

Эволюция методов прайсинга



Условное мат. ожидание

- X, Y – случайные величины
- Условное мат. ожидание: $Z = \mathbb{E}[Y|X] = g(X)$ для некоторой $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- УМО как проекция:

$$Z = \arg\min_{\xi \in \sigma(X)} \mathbb{E}(\xi - Y)^2$$

  где минимум берётся по всем с.в. ξ, измеримым относительно σ-алгебры $\sigma(X)$.
- Проекция в терминах функции $g(x)$:

$$g(x) = \arg\min_{f \in \mathcal{L}} \mathbb{E}(f(X) - Y)^2$$

  где $\mathcal{L}$ – множество всех измеримых функций.

Аппроксимация условного мат. ожидания

- $\phi_1, \dots, \phi_M$ – набор базисных функций (например, полиномы, $\phi_i(x) = x^{i-1}$)
- Конечное пространство функций:

$$\mathcal{L}_M = \mathrm{span}(\phi_1, \dots, \phi_M) = \{(\beta, \phi(x)) = \sum_{m=1}^{M} \beta_m \phi_m(x), \beta \in \mathbb{R}^M\}$$

- Совместная выборка $\{X^j, Y^j\}_{j=1}^N$
- Аппроксимация условного мат. ожидания:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^M} \sum_{j=1}^{N} ((\beta, \phi(X^j)) - Y^j)^2$$

$$\mathbb{E}[Y|X] \approx (\hat{\beta}, \phi(X)) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_m \phi_m(X)$$

Compound option

- Рассмотрим опцион со сложным пэйоффом в момент T_1

$$\Phi(S_{T_1}) = (C(T_1, S_{T_1}; T_2, K) - \kappa)^+$$

- $C(T_1, S_{T_1}; T_2, K)$ – стоимость опциона с датой погашения T_2 и страйком K:

$$C(T_1, S_{T_1}; T_2, K) = e^{-r(T_2 - T_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_{T_2} - K)^+ | \mathcal{F}_{T_1} \right]$$

$$V = e^{-rT_1} \mathbb{E} \Phi(S_{T_1}) = e^{-rT_1} \mathbb{E} (C(T_1, S_{T_1}; T_2, K) - \kappa)^+$$

Double Monte-Carlo

- Первичные траектории до момента T_1:

$$S_t^j, j = \overline{1, N_1}, t = \overline{0, T_1}$$

- Вторичные траектории от T_1 до T_2:

$$S_t^{j,k} | S_{T_1}^j, k = \overline{1, N_2}, t = \overline{T_1, T_2}$$

- Внутреннее мат. ожидание:

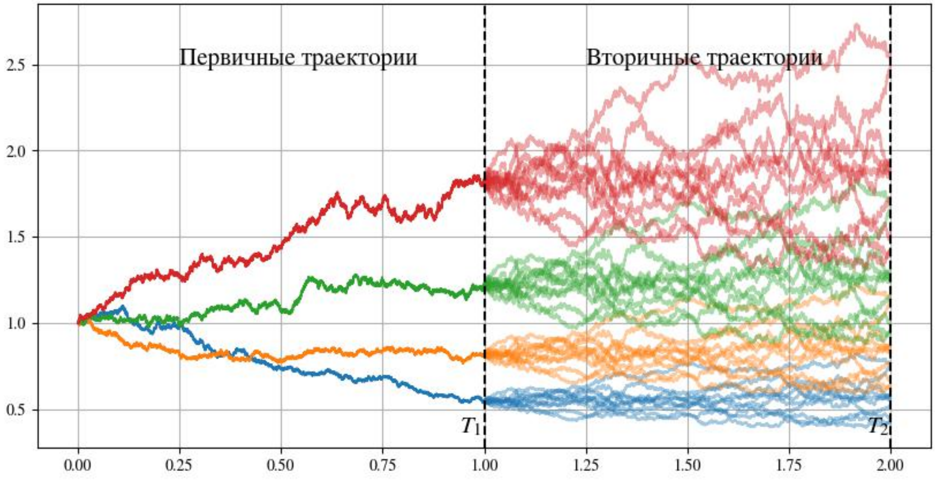
$$\hat{C}^j = \frac{e^{-r(T_2 - T_1)}}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} (S_{T_2}^{j,k} - K)^+$$

- Внешнее мат. ожидание:

$$\hat{V} = \frac{e^{-rT_1}}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} (\hat{C}^j - \kappa)^+$$

- Всего $O(N_1 N_2)$ симуляций

Double Monte-Carlo



Regression based Monte-Carlo

- Сгенерируем один набор траекторий до момента T_2:

$$S_t^j,\ j=\overline{1,N},\ t=\overline{0,T_2}$$

$$X^j = S_{T_1}^j, Y^j = e^{-r(T_2-T_1)}(S_{T_2}^j - K)^+$$

- Оценка условного мат. ожидания:

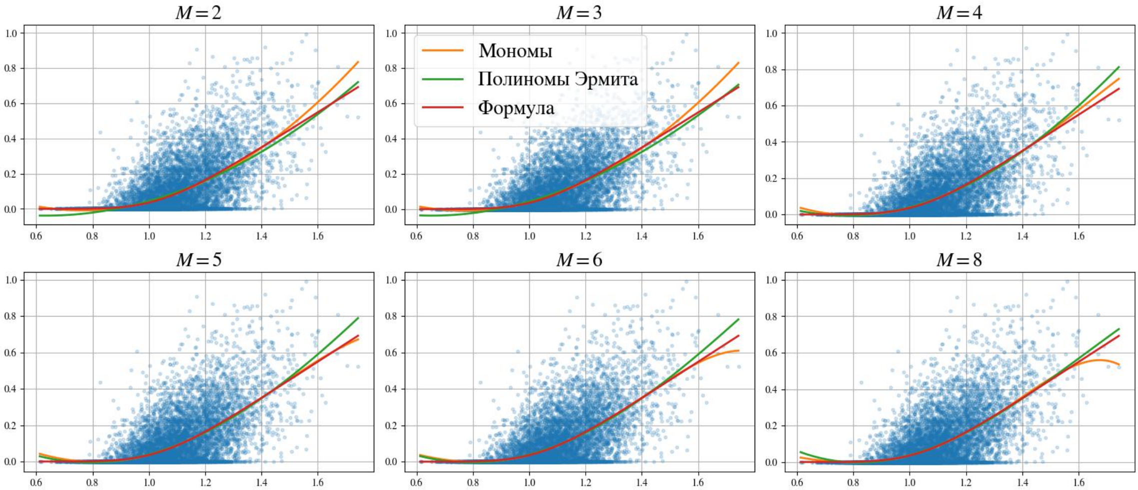
$$\hat{C}^j = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_m \phi_m(X^j), \quad \sum_{j=1}^{N}(\hat{C}^j - Y^j)^2 \to \min$$

  где коэффициенты $\hat{\beta}$ находятся из задачи линейной регрессии
- Оценка внешнего мат. ожидания:

$$\hat{V} = \frac{e^{-rT_1}}{N} \sum_{j=1}^{N}(\hat{C}^j - \kappa)^+$$

- Вычислительная сложность $O(NM^2 + M^3) \approx O(N)$

Regression based Monte-Carlo



Double regression based Monte-Carlo

- Первичные траектории до момента T_1:

$$S_t^j, j = \overline{1, N_1}, t = \overline{0, T_1}$$

- Вторичные траектории от T_1 до T_2:

$$S_t^{j,k} | S_{T_1}^j, k = \overline{1, N_2}, t = \overline{T_1, T_2}$$

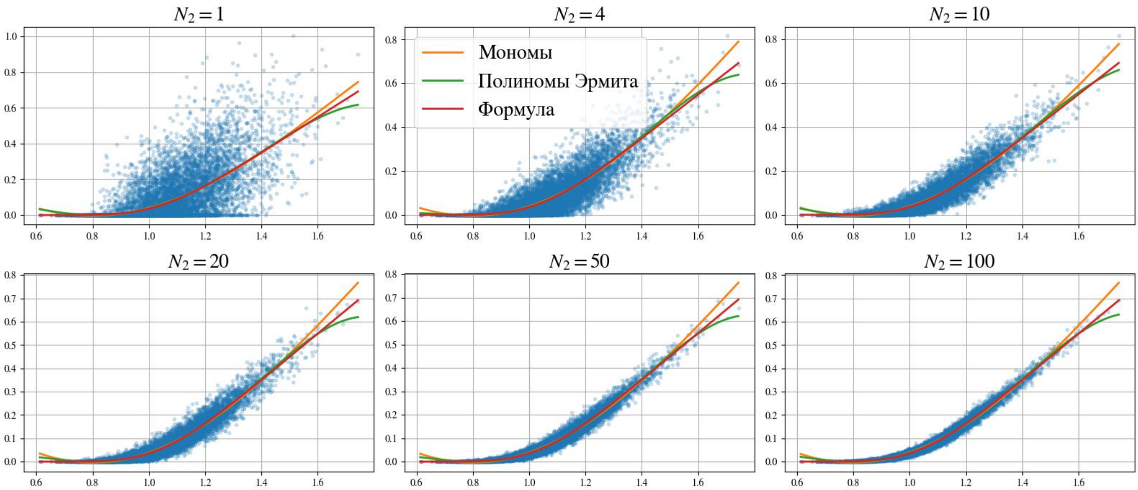
- Первичная оценка мат. ожидания:

$$Y^j = \frac{e^{-r(T_2 - T_1)}}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} (S_{T_2}^{j,k} - K)^+$$

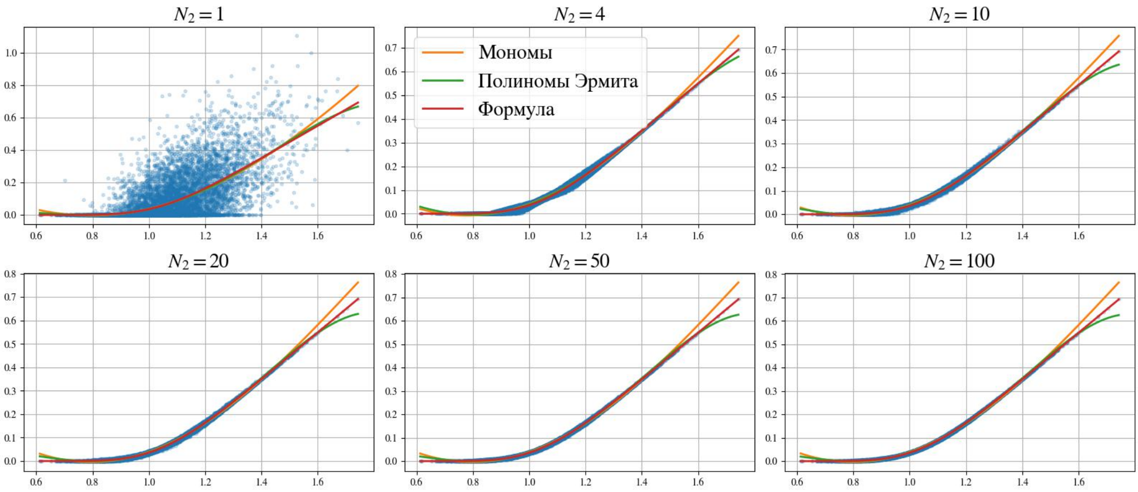
- Регрессия Y^j на X^j:

$$\hat{C}^j = \sum_{m=1}^{M} \hat{\beta}_m \phi_m(X^j), \quad \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - Y^j)^2 \to \min$$

Double regression based Monte-Carlo



Double regression based Monte-Carlo: moment matching



Методы Монте-Карло для оценки бермудских опционов

Бермудский опцион

- Пусть X_t – многомерный марковский процесс, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t)$
- Терминальное условие: $V_T = \Phi(X_T)$
- Динамическое программирование:

$$C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t]$$
$$V_t = \max(C_t, \Phi(X_t))$$

- Из марковости:

$$\mathbb{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[V_{t+1}|X_t]$$

- По свойствам УМО:

$$C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}[V_{t+1}|X_t] = C_t(X_t)$$

- УМО как проекция:

$$C_t = \arg\min_f (f(X_t) - e^{-r\delta t}V_{t+1})$$

где минимум берётся по всем измеримым функциям.

American Monte Carlo

- X_t^j – траектории процесса X_t, $j = \overline{1, N}$
- Стоимость опциона в терминальный момент

$$\hat{V}_T^j = \Phi(X_T^j)$$

- Для $t < T$, оценка continuation value:

$$\hat{C}_t^j = \left(\hat{\beta}_t, \phi(X_t^j)\right), \quad \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - e^{-r\delta t}\hat{V}_{t+1}^j)^2 \to \min$$

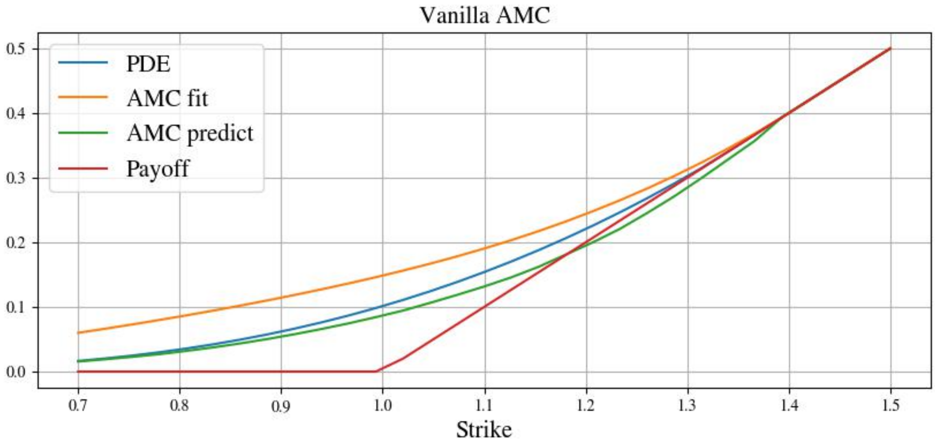
- Оценка стоимости на шаге t:

$$\hat{V}_t^j = \max(\hat{C}_t^j, \Phi(X_t^j))$$

- Оценка стоимости в $t = 0$

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \hat{V}_0^j$$

American Monte Carlo



American Monte Carlo: проблемы

- Переобучение: оптимальная граница экспирации ищется на тех же траекториях, на которых оценивается стоимость.
- Накопление ошибки регрессии.
- Оценки $\hat{V}_t^j$ перестают быть независимыми.

American Monte Carlo: тестовые траектории

- $\hat{\beta}_t$ – коэффициенты регрессии, оцененные AMC
- Сгенерируем независимый набор траекторий $\tilde{X}_t^j$
- Для каждой траектории найдём момент экспирации:

$$\tau^j = \inf_t \{\Phi(\tilde{X}_t^j) \geq \left(\hat{\beta}_t, \phi(\tilde{X}_t^j)\right)\}$$

- Оценка цены опциона на независимых траекториях:

$$\tilde{V}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{-r\tau^j \delta t} \Phi(\tilde{X}_{\tau^j}^j)$$

American Monte Carlo: POI

- POI: Proxi only in indicator
- На шаге t, оценка continuation value:

$$\hat{C}_t^j = \left(\hat{\beta}_t, \phi(X_t^j)\right), \quad \sum_{j=1}^{N} (\hat{C}^j - e^{-r\delta t}\hat{V}_{t+1}^j)^2 \to \min$$

- Оценка стоимости опциона на шаге t:

$$\hat{V}_t^j = \begin{cases} e^{-r\delta t}\hat{V}_{t+1}^j, \ \hat{C}_t^j > \Phi(X_t^j) \\ \Phi(X_t^j), \ \hat{C}_t^j \leq \Phi(X_t^j) \end{cases}$$

- Прокси $\hat{C}_t^j$ используется только в индикаторе для принятия решения об экспирации.

POI: интуиция

- Пусть $r = 0$. Compound option:

$$V(K) = \mathbb{E}(C - K)^+, \quad C = \mathbb{E}[X|F_T]$$

$$V(K) = \mathbb{E}\left[(C - K)\mathbb{I}_{C-K\geq 0}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X - K|\mathcal{F}_T]\mathbb{I}_{C-K\geq 0}\right] = \mathbb{E}\left[(X - K)\mathbb{I}_{C-K\geq 0}\right]$$

- Пусть есть смещённое прокси для C:

$$\hat{C} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_T] + \varepsilon$$

- Прямая оценка:

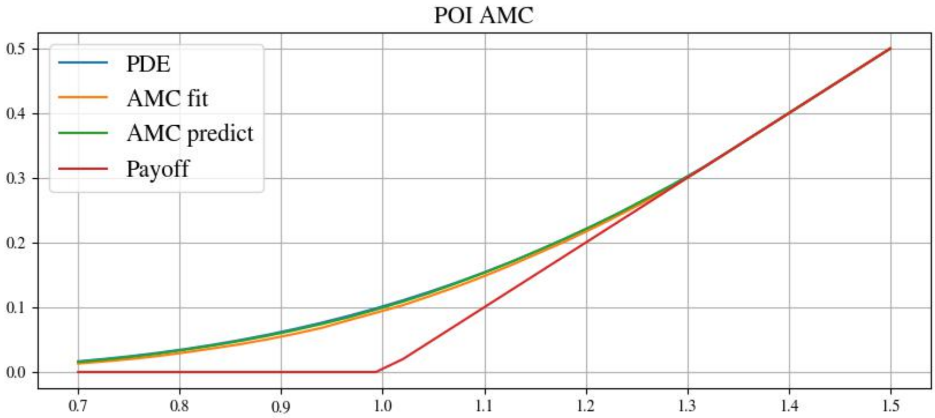
$$\hat{V} = \mathbb{E}(\hat{C} - K)^+ = \mathbb{E}(C - (K - \varepsilon))^+ \approx V(K) - \frac{\partial V}{\partial K}\varepsilon$$

- POI оценка:

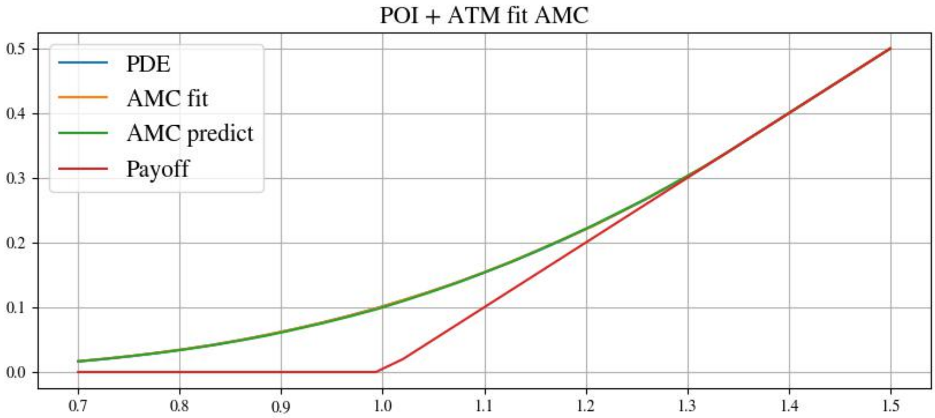
$$\tilde{V} = \mathbb{E}\left[(X - K)\mathbb{I}_{\hat{C}-K\geq 0}\right] = \mathbb{E}\left[(C - K)\mathbb{I}_{C-(K-\varepsilon)\geq 0}\right] = V(K) + O(\varepsilon^2)$$

- Ошибка порядка ε в регрессии транслируется в ошибку ε^2 в оценке цены.

American Monte Carlo: POI



American Monte Carlo: POI



American Monte Carlo: сходимость