---

*Задача* 1. Рассмотрим рынок с тремя активами:

$$dB_t = 0$$
$$dS_t^1 = S_t^1 \sigma_1 dW_t^1$$
$$dS_t^2 = S_t^2 \sigma_2 dW_t^2$$

где $W_t^1, W_t^2$ – два броуновских движения с корреляцией $\rho$. Найти стоимость обменного опциона с пэйоффом:

$$\Phi(S_T^1, S_T^2) = (S_T^1 - S_T^2)^+$$

*Задача* 2 (Формула Дюпира). На пятой лекции мы показали, что если определить функцию локальной волатильности по формуле ниже, то цены опционов в модели локальной волатильности будут совпадать с рыночными ценами.

$$\sigma_{Dup}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C^M}{\partial T} + rK\frac{\partial C^M}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C^M}{\partial K^2}}$$

Докажите, что для безабритражных рыночных цен колл-опционов $C^M(T, K)$ данное определение корректно, т.е. что величина справа неотрицательная.

*Задача* 3 (Американский опцион). Пусть динамика активов в риск-нейтральной мере задаётся уравнениями (модель Блэка-Шоулза)

$$dB_t = rB_t dt$$
$$dS_t / S_t = rdt + \sigma dW_t$$

где $W_t$ – броуновское движение. Рассмотрим вечный американский колл-опцион $T = \infty$:

$$V(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} e^{-r\tau} (S_\tau - K)^+$$

где супремум берётся по всем марковским моментам $\mathcal{T}$, $S_0 = s$. Рассмотрим стратегию, при которой мы исполняем опцион при достижении цены уровня $L \geq K$:

$$\tau_L = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq L\}$$

Найти стоимость опциона для такой стратегии:

$$V_L(s) = \mathbb{E} e^{-r\tau_L} (S_{\tau_L} - K)^+$$

При каком $L$ достигается максимум цены?