

Семинар 7. Фьючерсные и форвардные контракты

November 7, 2025

Стохастическая процентная ставка

- Модели со стохастической ставкой:

$$dB_t = r_t B_t dt$$

$$dS_t/S_t = r_t dt + \sigma dW_t$$

- Стоимость опциона с пэйофом $\Phi(S_T)$:

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} | \mathcal{F}_t \right] \Leftrightarrow V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} \Phi(S_T) | \mathcal{F}_t \right]$$

- Дисконт-фактор:

$$DF(t, T) = e^{-\int_t^T r_u du}$$

- Стоимость бескупонной облигации:

$$P(t, T) = \mathbb{E}^Q [DF(t, T) | \mathcal{F}_t]$$

Форвардный контракт

Определение

Форвардный контракт – соглашение о покупке актива в момент T по фиксированной цене K . Задаётся функцией выплаты $\Phi(S_T) = S_T - K$

Определение

Форвардная цена $\text{Forw}(t, T)$ – страйк форвардного контракта, при котором его стоимость равна нулю.

Теорема

$$\text{Forw}(t, T) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} DF(t, T) S_T}{P(t, T)} = \frac{S_t}{P(t, T)}$$

Фьючерсный контракт

Определение

Фьючерсный контракт – соглашение о покупке актива в момент T , при котором платежи размазаны по всему сроку. Он обладает следующими свойствами

- На рынке котируется **фьючерсная цена** $\text{Fut}_t(T)$.
- В момент исполнения держатель платит $\text{Fut}_T(T)$ и получает S_T .
- $\forall t \leq T$ стоимость фьючерсного контракта равна нулю.
- В течении интервала времени $(s, t]$ держатель контракта получает платеж $\text{Fut}_t(T) - \text{Fut}_s(T)$

Теорема

- $\text{Fut}_T(T) = S_T$
- $\text{Fut}_t(T)$ – мартингал относительно риск-нейтральной меры.
- $\text{Fut}_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t]$

Фьючерсный контракт

Теорема

- $\text{Fut}_T(T) = S_T$
- $\text{Fut}_t(T)$ – мартингал относительно риск-нейтральной меры.
- $\text{Fut}_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t]$

Доказательство. Первый пункт очевиден. Докажем второй пункт. Пусть (x_t, y_t) – реплицирующий портфель (не обязательно самофинансируемый). Тогда:

$$x_t S_t + y_t B_t = 0$$

$$d\text{Fut}_t(T) = x_t dS_t + y_t dB_t$$

Из первого уравнения $y_t = -x_t \frac{S_t}{B_t}$, откуда

$$d\text{Fut}_t(T) = x_t (dS_t - r_t S_t dt) = x_t S_t \sigma dW_t$$



Определение

Форвардная мера \mathbb{Q}^T – мартингальная мера для numeraire $P(t, T)$. Относительно \mathbb{Q}^T процессы:

$$\bar{B}_t = \frac{B_t}{P(t, T)}, \quad \bar{S}_t = \frac{S_t}{P(t, T)}$$

являются мартингалами.

Форвардная мера

- Относительно \mathbb{Q}^T $\text{Forw}_t(T)$ является мартингалом:

$$\text{Forw}_t(T) = \frac{S_t}{P(t, T)} = \bar{S}_t$$

- Формула ценообразования:

$$\frac{V_t}{P(t, T)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{\Phi(S_T)}{P(T, T)} | \mathcal{F}_t \right] \rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \Phi(S_T)$$

- Формула замены меры:

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} D F(t, T) \Phi(S_T) = P(t, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \Phi(S_T)$$

Определение

Пусть на рынке торгуются бескупонные облигации для всех T .
Определим форвардную ставку $f_t(T)$ как:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_t(U)dU\right)$$

или

$$f_t(T) = -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T}$$

Упражнение. Покажите, что

$$f_t(T) = \mathbb{E}^{Q_T}[r_T | \mathcal{F}_t]$$

Контракты с разными типами расчёта

- Контракты со спотовым типом расчёта – спот цены
- Контракты с форвардным типом расчёта – форвардные цены
- Контракты с фьючерсным типом расчёта – фьючерсные цены