Лекция 7. Модель Хестона

November 7, 2025

Рекап прошлой лекции

- Анализ предположений модели Блэка-Шоулза
- Вменяемая (implied) волатильность
- Формула Бриденa-Литценбергера
- Модели локальной волатильности
- Формула Дюпира

План лекции

- Модель Хестона: определение
- Формула для цены колл-опциона через вероятности исполнения
- Прайсинг в моделях и известной хар. функцией
- Вычисление хар. функции в модели Хестона
- Связь с моделями локальной волатильности. Теорема Дьёнди.

Модель Хестона

Определение

Риск-нейтральная динамика в модели Хестона задаётся системой СДУ:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sqrt{v_t} dW_t$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t} dZ_t$$

где W_t, Z_t – два броуновских движения с корреляцией ρ.

Процесс для v_t – процесс с возвратом к среднему:

$$\mathbb{E}v_t = v_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})$$

Формула замены меры в условном мат. ожидании

- Замена меры:
$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\frac{B_t}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_S}\left[X\frac{S_t}{S_T}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$
где $\mathbb{Q}_S$ – мартингальная мера для numeraire S_t.
- Введём $Y = X\dfrac{S_t}{S_T}$, откуда:
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_S}\left[Y\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y\frac{S_T}{S_t}\frac{B_t}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[YS_T\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Прайсинг через вероятности исполнения

- Общая формула для прайсинга:

$$
\begin{aligned}
&C_t(T,K) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t\right] = \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T\mathbb{I}_{S_T>K}|\mathcal{F}_t\right] - e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K\mathbb{I}_{S_T>K}|\mathcal{F}_t\right] = \\
&= S_t\mathbb{Q}_S(S_T > K|\mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)}K\mathbb{Q}(S_T > K|\mathcal{F}_t)
\end{aligned}
$$

где $\mathbb{Q}_S$ – мартингальная мера для numeraire S_t.

Характеристическая функция

- Хар. функция как преобразования Фурье:

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} p(x) dx$$

- Обратное преобразование Фурье:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \varphi(u) du$$

- Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} dy \int_{\mathbb{R}} e^{-iuy} \varphi(u) du$$

- Формула обращения:

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iux}\varphi(u)}{iu} du \right]$$

Прайсинг в моделях с известной хар. функцией

- Пусть $X_t = \log S_t$. Условная хар. функция:

$$\varphi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{iuX_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\tilde{\varphi}(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_S}\left[e^{iuX_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

- Связь:

$$\tilde{\varphi}(u) = \frac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)}$$

- *Доказательство*

$$\tilde{\varphi}(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_S}\left[e^{iuX_T}|F_t\right] = e^{-r(T-t)}S_t^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T e^{iuX_T}|F_t\right] =$$
$$= e^{-r(T-t)}S_t^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(iu+1)X_T}|F_t\right] = e^{-r(T-t)}S_t^{-1}\varphi(u-i)$$

$$\varphi(-i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T|\mathcal{F}_t\right] = e^{r(T-t)}S_t$$

Прайсинг в моделях с известной хар. функцией

Утверждение

Пусть $\varphi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{iu\ln S_T}|\mathcal{F}_t\right]$ – условная хар. функция процесса $\ln S_T$. Тогда цены европейских колл-опционов выражаются по формуле:

$$C_t(T,K) = S_t\mathbb{Q}_S(S_T > K|\mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)}K\mathbb{Q}(S_T > K|\mathcal{F}_t)$$

где вероятности исполнения вычисляются как:

$$\mathbb{Q}(S_T > K|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln K}\varphi(u)}{iu}du\right]$$

$$\mathbb{Q}_S(S_T > K|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln K}\tilde{\varphi}(u)}{iu}du\right]$$

и $\tilde{\varphi}(u) = \dfrac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)}$ – условная хар. функция в мере $\mathbb{Q}_S$.

Характеристическая функция в модели Хестона

- Введём $X_t = \ln S_t$
- Условная хар. функция

$$\varphi(t, x, v; u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{iuX_T} | X_t = x, v_t = v\right]$$

- Формула Феймана-Каца:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + v\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho\xi v\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial v} + \xi^2 v\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$$
$$\varphi(T, x, v; u) = e^{iux}$$

Характеристическая функция в модели Хестона

Пусть $\tau = T - t$ – время до погашения.

Лемма

Характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(T - \tau; u) + D(T - \tau; u)v + iux)$$

где функции $C(\tau; u), D(\tau; u)$ удовлетворяют ОДУ:

$$\begin{aligned} C' &= iur + \kappa\theta D \\ D' &= -\frac{1}{2}(iu + u^2) + (\rho\xi ui - \kappa)D + \frac{1}{2}\xi^2 D^2 \\ C(0) &= D(0) = 0 \end{aligned}$$

Характеристическая функция в модели Хестона

Доказательство. Подставим выражение для φ выше в исходное уравнение, получим:

- $\varphi_x = iu\varphi$, $\varphi_{xx} = -u^2\varphi$
- $\varphi_v = D\varphi$, $\varphi_{vv} = D^2\varphi$
- $\varphi_{vx} = iuD\varphi$, $\varphi_t = -\varphi\left(C' + D'v\right)$

$$\varphi\left[-C' - D'v + \left(r - \frac{1}{2}v\right)iu + \kappa(\theta - v)D - v\frac{1}{2}u^2 + \rho\xi viuD + \xi^2 v\frac{1}{2}D^2\right] = 0$$

Зануляя слагаемые при v^0 и v^1 получим требуемые уравнения.

Характеристическая функция в модели Хестона

- Для фиксированного u $D(\tau, u)$ удовлетворяет уравнению Риккати:

$$D' = \alpha + \beta D + \gamma D^2, \quad D(0, u) = 0,$$

где

$$\alpha = -\frac{iu + u^2}{2}, \quad \beta = \rho\xi iu - \kappa, \quad \gamma = \frac{\xi^2}{2}.$$

- Корни характеристического уравнения

$$r_{\pm} = \frac{\beta \pm d}{2}, \quad d = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{(\rho\xi iu - \kappa)^2 + \xi^2(iu + u^2)}.$$

- Решение

$$D(\tau) = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{K_1 r_+ e^{r_+\tau} + K_2 r_- e^{r_-\tau}}{K_1 e^{r_+\tau} + K_2 e^{r_-\tau}}\right).$$

- Из граничных условий:

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -\frac{r_+}{r_-}.$$

Характеристическая функция в модели Хестона

- Решение

$$D(\tau, u) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d}{\xi^2}\left(\frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}}\right), \quad \text{где } g = \frac{r_+}{r_-},$$

$$C(\tau, u) = iur\tau + \frac{\kappa\theta}{\xi^2}\left((\kappa - \rho\xi iu - d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g}\right)\right).$$

Решение уравнения Риккати

Уравнение Риккати:

$$y' = \alpha + \beta y + \gamma y^2$$

Замена $y = -\frac{z'}{\gamma z}$ приводит к уравнению:

$$z'' - \beta z' + \alpha\gamma z = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - \beta r + \alpha\gamma = 0 \to r_{\pm} = \frac{\beta \pm d}{2}$$

где $d = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$. Решение:

$$z = K_1 e^{r_+ x} + K_2 e^{r_- x}$$

Обратная замена:

$$y = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{K_1 r_+ e^{r_+ x} + K_2 r_- e^{r_-}}{K_1 e^{r_+ x} + K_2 e^{r_- x}}\right)$$

Характеристическая функция в модели Хестона

Пусть $\tau = T - t$ – время до погашения. Зафиксируем u. Пусть

$$d = \sqrt{(\rho\xi iu - \kappa)^2 + \xi^2(iu + u^2)}, \quad g = \frac{\rho\xi iu - \kappa + d}{\rho\xi iu - \kappa - d}$$

Лемма

Характеристическая функция имеет вид:

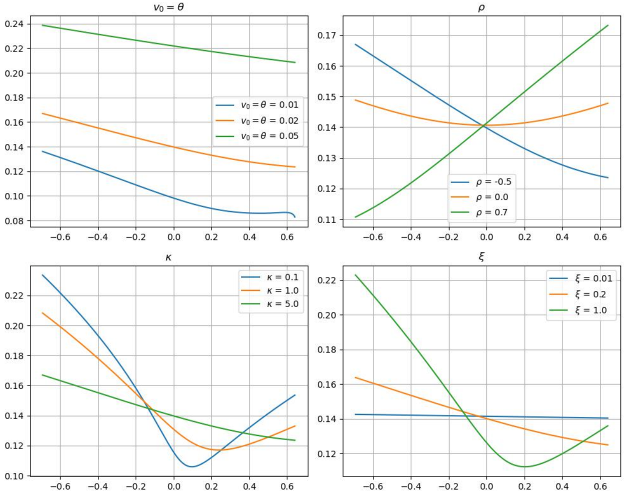
$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(T - \tau; u) + D(T - \tau; u)v + iux)$$

где функции $C(\tau; u), D(\tau; u)$ задаются как:

$$D(\tau, u) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d}{\xi^2}\left(\frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}}\right),$$

$$C(\tau, u) = iur\tau + \frac{\kappa\theta}{\xi^2}\left((\kappa - \rho\xi iu - d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g}\right)\right).$$

Результаты



$v_0 = \theta$
$v_0 = \theta$ = 0.01
$v_0 = \theta$ = 0.02
$v_0 = \theta$ = 0.05
ρ
ρ = -0.5
ρ = 0.0
ρ = 0.7
κ
κ = 0.1
κ = 1.0
κ = 5.0
ξ
ξ = 0.01
ξ = 0.2
ξ = 1.0

Связь с моделью локальной волатильности

Модель Хестона:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{v_t}dW_t$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dZ_t$$

Теорема

Рассмотрим одномерный процесс

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = rdt + \sigma_{loc}(t, \tilde{S})dB_t$$

где B_t – броуновское движение, функция локальной волатильности задаётся как:

$$\sigma^2_{loc}(t, s) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[v_t | S_t = s\right]$$

Тогда $\tilde{S}_t \overset{d}{=} S_t$

Связь с моделью локальной волатильности

Доказательство для $r = 0$

- Пусть $p(t, S, v)$ – двумерная плотность процесса (S_t, v_t).
- Уравнение Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}[\kappa(\theta - v)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}[S^2 vp] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}[\xi^2 vp] + \rho\xi\frac{\partial^2}{\partial S \partial v}[Svp]$$

- Одномерная плотность:

$$q(t, S) = \int_0^\infty p(t, S, v)dv$$

Связь с моделью локальной волатильности

- Интегрируем по v от 0 до $+\infty$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial t} dv = &- \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}[\kappa(\theta - v)p] dv \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S^2}[S^2 vp] dv \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2}[\xi^2 vp] dv \\ &+ \rho\xi \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S \partial v}[Svp] dv\end{aligned}$$

Связь с моделью локальной волатильности

- $\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial t} dv = \frac{\partial q}{\partial t}$
- $-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}[\kappa(\theta - v)p] dv = 0$ (граничные условия)
- $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S^2}[S^2 vp] dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left[S^2 \int_0^\infty vpdv\right]$
- $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2}[\xi^2 vp] dv = 0$ (граничные условия)
- $\rho\xi \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial S \partial v}[Svp] dv = 0$ (граничные условия)

Связь с моделью локальной волатильности

- Заметим, что:

$$\int_0^\infty vp(t,S,v)dv = \mathbb{E}[v_t|S_t = S]q(t,S)$$

- Итоговое уравнение на маргинальную плотность:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(S^2\mathbb{E}[v_t|S_t = S]q(t,S)\right)$$

- Формула для локальной волатильности:

$$\sigma^2_{\text{loc}}(t,S) = \mathbb{E}[v_t|S_t = S]$$