

## Лекция 9. Методы на основе деревьев

November 30, 2025

# Модель Блэка-Шоулза

- Динамика:

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma dW_t$$

$$dB_t/B_t = rdt$$

- Решение:

$$S_{t+\tau} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\xi}$$

где  $\xi \sim N(0, 1)$

- Моменты:

$$\mathbb{E}[S_{t+\tau} | \mathcal{F}_t] = e^{r\tau} S_t$$

$$\mathbb{E}[S_{t+\tau}^2 | \mathcal{F}_t] = e^{2r\tau + \sigma^2\tau} S_t$$

- Цены европейских опционов:

$$V(t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}[V(t + \tau) | \mathcal{F}_t]$$

## Биномиальное дерево: конструкция

- $t = 0, 1, \dots, N$  – дискретные моменты времени
- $\tau = \frac{T}{N}$  – шаг по времени.
- Динамика

$$S_{t+1} = S_t \cdot \begin{cases} u, & \text{с вер. } q \\ d, & \text{с вер. } 1 - q \end{cases}$$

где  $u = e^{r\tau + \sigma\sqrt{\tau}}$ ,  $d = e^{r\tau - \sigma\sqrt{\tau}}$ .

- Moment-matching:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{t+1}|S_t] &= e^{r\tau} S_t \rightarrow \\ u \cdot q + d \cdot (1 - q) &= e^{r\tau} \rightarrow \\ q &= \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}\end{aligned}$$

# Биномиальное дерево: конструкция

## Биноминальное дерево

### Динамика

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t \cdot u, & \text{с вер. } q \\ S_t \cdot d, & \text{с вер. } 1 - q \end{cases}$$

где

$$u = e^{r\tau + \sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d = e^{r\tau - \sigma\sqrt{\tau}}$$

$$q = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}$$

# Европейский опцион

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)$$

- Динамика

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1}) | \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{-r\tau} (qV_{t+1}(S_t \cdot u) + (1 - q)V_{t+1}(S_t \cdot d)) \end{aligned}$$

# Американский опцион

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)^+$$

- Continuation value

$$\begin{aligned} C_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1}) | \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{-r\tau} (qV_{t+1}(S_t \cdot u) + (1 - q)V_{t+1}(S_t \cdot d)) \end{aligned}$$

- Принимаем решение об экспирации

$$V_t(S_t) = \max(C_t(S_t), \Phi(S_t))$$

# Триноминальное дерево

- Динамика

$$S_{t+1} = S_t e^{r\tau} \begin{cases} u, & \text{с вер. } q_1 \\ 1, & \text{с вер. } q_2 \\ d, & \text{с вер. } q_3 \end{cases}$$

где  $u = e^{\sigma\sqrt{3\tau}}$ ,  $d = r^{-\sigma\sqrt{3\tau}}$ .

- Moment-matching:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$uq_1 + q_2 + dq_3 = 1$$

$$u^2q_1 + q_2 + d^2q_3 = e^{\sigma^2\tau}$$

# Триноминальное дерево

- Moment-matching:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$uq_1 + q_2 + dq_3 = 1$$

$$u^2q_1 + q_2 + d^2q_3 = e^{\sigma^2\tau}$$

- Решение:

$$q_1 = \frac{e^{\sigma^2\tau} - 1}{(u - 1)(u - d)}$$

$$q_3 = \frac{e^{\sigma^2\tau} - 1}{(1 - d)(u - d)}$$

$$q_2 = 1 - q_1 - q_3$$

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)$$

- Динамика

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1})|S_t] = \\ &= e^{-r\tau} (q_1 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot u) + q_2 V_{t+1}(S_t e^{r\tau}) + q_3 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot d)) \end{aligned}$$

# Американский опцион

- Терминальное значение

$$V_T = \Phi(S_T)$$

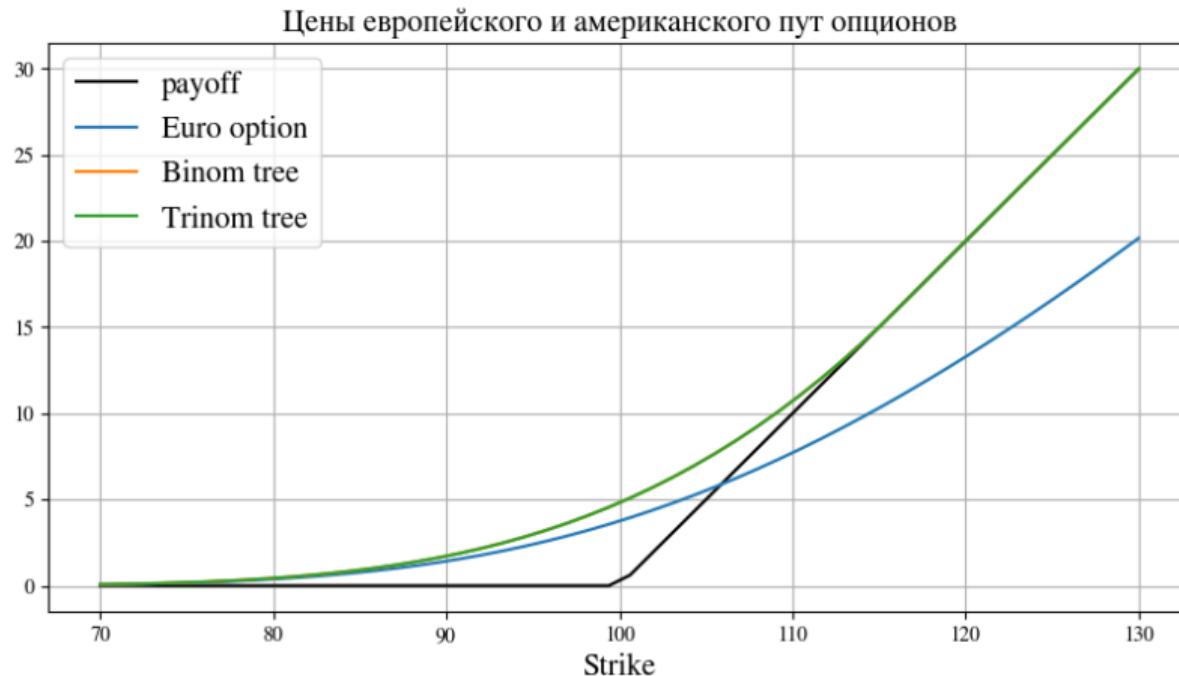
- Continuation value

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}(S_{t+1})|S_t] = \\ &= e^{-r\tau} (q_1 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot u) + q_2 V_{t+1}(S_t e^{r\tau}) + q_3 V_{t+1}(S_t e^{r\tau} \cdot d)) \end{aligned}$$

- Принимаем решение об экспирации

$$V_t(S_t) = \max(C_t(S_t), \Phi(S_t))$$

# Цены американских и европейских опционов



# Анализ сходимости

Ошибка вычисления цены европейского опциона

