

Лекция 10. Численные методы

November 30, 2025

Численные методы для ОДУ

- Задача Коши:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \lambda y(t) \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

где $\lambda \ll -1$.

- Точное решение:

$$y(t + \tau) = e^{\lambda\tau} y(t)$$

- Свойства: $y(t) > 0$, $y(t)$ – монотонно убывает.
- Оператор перехода:

$$\begin{aligned}T = e^{\lambda\tau} \rightarrow y(t + \tau) &= (Ty)(t) \\ \|T\| &< 1\end{aligned}$$

Линейное ОДУ: интегральное уравнение

- Эквивалентное интегральное уравнение:

$$y(t + \tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} \lambda y(s) ds$$

- Формула левых прямоугольников:

$$\int_t^{t+\tau} \lambda y(s) ds \approx y(t)\tau \rightarrow y(t + \tau) \approx (1 + \tau\lambda)y(t)$$

- Формула правых прямоугольников:

$$\int_t^{t+\tau} \lambda y(s) ds \approx y(t + \tau)\tau \rightarrow y(t + \tau) \approx (1 - \tau\lambda)^{-1}y(t)$$

- Формула трапеций:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\tau} \lambda y(s) ds &\approx 0.5(y(t) + y(t + \tau))\tau \rightarrow \\ y(t + \tau) &\approx (1 - 0.5\tau\lambda)^{-1}(1 + 0.5\tau\lambda)y(t) \end{aligned}$$

- Введём сетку по времени

$$t_k = \tau \cdot k, k = \overline{0, N}, \tau = \frac{T}{N}$$

и сеточные функции

$$\hat{y}_k \approx y(t_k)$$

- Явная схема Эйлера:

$$\hat{y}_{k+1} = (1 + \lambda\tau)\hat{y}_k$$

- Неявная схема Эйлера:

$$\hat{y}_{k+1} = (1 - \lambda\tau)^{-1}\hat{y}_k$$

- Схема с полусуммой:

$$\hat{y}_{k+1} = (1 - 0.5\lambda\tau)^{-1}(1 + 0.5\lambda\tau)\hat{y}_k$$

Теорема об аппроксимации и сходимости

- Рассмотрим разностную схему:

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{T} \hat{y}_k$$

Определение

- Разностная схема называется устойчивой, если $\|\hat{T}\| < 1$
- Разностная схема имеет порядок аппроксимации p , если $\|T(\tau) - \hat{T}(\tau)\| \leq c\tau^p$

Теорема

Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость:

$$|y(T) - \hat{y}_N| \leq C\tau^{p-1}$$

при $\tau \rightarrow 0$.

Теорема об аппроксимации и сходимости

- Пусть $e_k = y(t_k) - \hat{y}_k$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y(t_{k+1}) - \hat{y}_{k+1} = Ty(t_k) - \hat{T}\hat{y}_k = \\ &= Ty(t_k) - T\hat{y}(t_k) + T\hat{y}_k - \hat{T}\hat{y}_k = \\ &= T(y(t_k) - \hat{y}_k) + (T - \hat{T})\hat{y}_k + \end{aligned}$$

- Отсюда:

$$|e_{k+1}| \leq \|T\||e_k| + \|T - \hat{T}\||\hat{y}_k| \leq q|e_k| + C\tau^p$$

где $q = e^{\lambda\tau} = \|T\|$.

- Подставляя в правую часть аналогичное неравенство для $|e_k|$, получим, что:

$$|e_N| \leq C\tau^p (1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1}) = C\tau^p \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

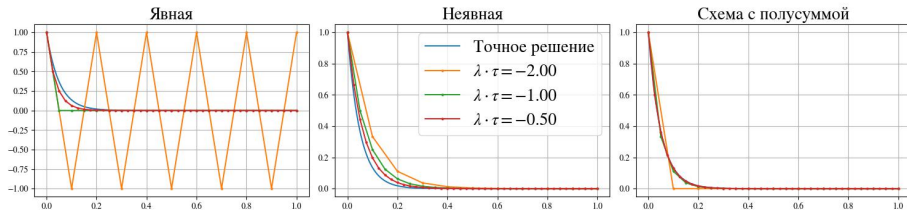
При малых τ : $1 - q \approx -\lambda\tau$, откуда:

$$|y(T) - \hat{y}_N| = |e_N| \leq C'\tau^{p-1}$$

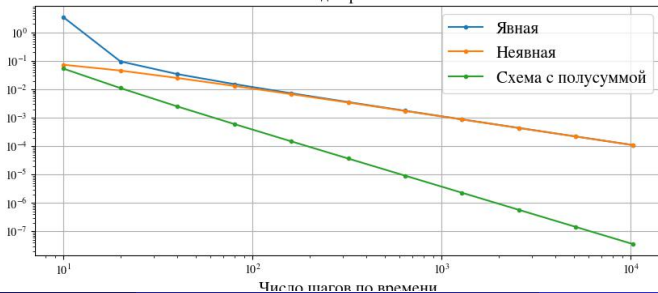
	Явная	Неявная	Полусумма
Оператор перехода \hat{T}	$(1 + \lambda\tau)$	$(1 - \lambda\tau)^{-1}$	$(1 - \lambda\tau/2)^{-1}(1 - \lambda\tau/2)$
Положительность	$\tau \leq \frac{1}{ \lambda }$	Всегда	$\tau \leq \frac{2}{ \lambda }$
Устойчивость $\ T\ < 1$	Условная $\tau \leq \frac{2}{ \lambda }$	Безусловная \checkmark	Безусловная \checkmark
Локальная точность $\ T - \hat{T}\ $	$O(\tau^2)$	$O(\tau^2)$	$O(\tau^3)$
Глобальная точность	$O(\tau)$	$O(\tau)$	$O(\tau^2)$

Сравнение схем

Сравнение разных схем



Ошибка для разных схем



- Линейное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t),$$

- Точное решение:

$$y(t + \tau) = e^{A\tau}y(t)$$

где матричная экспонента задаётся как

$$e^{A\tau} = I + A\tau + \frac{(A\tau)^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\tau)^n}{n!}$$

- Явная схема Эйлера:

$$\hat{y}_{k+1} = (I + \tau A)\hat{y}_k$$

- Неявная схема:

$$\hat{y}_{k+1} = (I - \tau A)^{-1}\hat{y}_k$$

- Схема с полусуммой:

$$\hat{y}_{k+1} = (I - \tau A/2)^{-1}(I + \tau A/2)\hat{y}_k$$

	Явная	Неявная	Полусумма
Оператор перехода \hat{T}	$(I + \tau A)$	$(I - \tau A)^{-1}$	$(I - \tau A/2)^{-1}(I + \tau A/2)$
Устойчивость	Условная $\tau \leq \frac{2}{ \max \lambda(A) }$	Безусловная ✓	Безусловная ✓
Локальная точность	$O(\tau^2)$	$O(\tau^2)$	$O(\tau^3)$
Глобальная точность	$O(\tau)$	$O(\tau)$	$O(\tau^2)$

Численные методы для решения УРЧП

Численные методы для решения УРЧП

- Пусть $V(t, S)$ – цена европейского опциона с функцией выплаты $\Phi(S_T)$.
- Уравнение Блэка-Шоулза:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, 0 \leq t \leq T, 0 \leq S < \infty \\ V(T, S) = \Phi(S_T) \\ V(t, S) = \psi_L(t, S), S \rightarrow 0, \quad V(t, S) = \psi_R(t, S), S \rightarrow \infty \end{cases}$$

для некоторых граничных условий ψ_R, ψ_L

- Например, для европейского колл-опциона

$$\psi_L(t, S) = 0, \quad \psi_R(t, S) = S - Ke^{-r(T-t)}$$

- Для европейского пут-опциона:

$$\psi_L(t, S) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \psi_R(t, S) = 0$$

Численные методы для решения УРЧП

- Замена переменных

$$x = \log S, \tilde{t} = T - t$$

$$u(\tilde{t}, x) = V(T - \tilde{t}, e^x)$$

- Заменим бесконечную прямую на конечный отрезок по x : $-B \leq x \leq B$ при $|B| \gg 1$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru, 0 \leq \tilde{t} \leq T, x \in [-B, B] \\ u(0, x) = \Phi(e^x) \\ u(\tilde{t}, -B) = \phi_L(\tilde{t}), \quad u(\tilde{t}, B) = \phi_R(\tilde{t}, B) \end{cases}$$

- Уравнение можно записать в операторной записи:

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = Au - ru$$

где A – инфинитизимальный оператор процесса $X_t = \log S_t$.

Численное вычисление производных

- Пусть $v = v(x)$ – гладкая функция. Хотим оценить производные $v'(x)$, $v''(x)$.
- Левые разности:

$$\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + O(h)$$

- Правые разности:

$$\frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v'(x) + O(h)$$

- Центральные разности:

$$\frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} = v'(x) + O(h^2)$$

- Аппроксимация второй производной:

$$\frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = v''(x) + O(h^2)$$

Дискретизация по пространству

- Введём сетку по пространству

$$x_i = -B + i \cdot h, i = \overline{0, N}, h = \frac{2B}{N}$$

- Введём сеточные функции:

$$u_i(\tilde{t}) = u(\tilde{t}, x_i)$$

- Аппроксимация инфинитизимального оператора:

$$\begin{aligned} (\hat{A}u)_i &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \\ &= \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}, i = \overline{1, N-1} \end{aligned}$$

для некоторых α, β, γ

- Для произвольного $v(x) \in C^4(\mathbb{R})$:

$$(Av - \hat{A}v)(x_i) = O(h^2)$$

- Система ОДУ на вектор сеточных функций u_1, \dots, u_{N-1} :

$$u_0(\tilde{t}) = \phi_L(\tilde{t})$$

$$\frac{du_i}{d\tilde{t}} = (\hat{A}u)_i - ru_i$$

$$u_N(\tilde{t}) = \phi_R(\tilde{t})$$

- Система ОДУ на вектор сеточных функций u_1, \dots, u_{N-1} :

$$u_0(\tilde{t}) = \phi_L(\tilde{t})$$

$$\frac{du_i}{d\tilde{t}} = (\hat{A}u)_i - ru_i$$

$$u_N(\tilde{t}) = \phi_R(\tilde{t})$$

- Явная схема:

$$u(\tilde{t} + \tau) = e^{-r\tau}(I + \tau\hat{A})u(\tilde{t})$$

- Неявная схема:

$$u(\tilde{t} + \tau) = e^{-r\tau}(I - \tau\hat{A})^{-1}u(\tilde{t})$$

- Схема с полусуммой (Кранка — Николсона):

$$u(\tilde{t} + \tau) = e^{-r\tau}(I - 0.5\tau\hat{A})^{-1}(I + 0.5\tau\hat{A})u(\tilde{t})$$

- Введём сетку по времени $\tilde{t}_n = n \cdot \tau$ и сеточные функции $u_i^n = u(\tilde{t}_n, x_i)$
- Начальные условия $u_i^0 = \Phi(e^{x_i})$
- Оператор перехода:

$$u_i^{n+1} = e^{-r\tau} (\tau\alpha u_{i-1}^n + (1 + \tau\beta)u_i^n + \tau\gamma u_{i+1}^n)$$

при $i = \overline{1, N-1}$ + граничные условия:

$$u_0^{n+1} = \phi_L(\tilde{t}_{n+1}), \quad u_R^{n+1} = \phi_R(\tilde{t}_{n+1})$$

- Начальные условия $u_i^0 = \Phi(e^{x_i})$
- Оператор перехода:

$$(-\tau\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1 - \tau\beta)u_i^{n+1} - \tau\gamma u_{i+1}^{n+1}) = e^{-r\tau}u_i^n$$

при $i = \overline{1, N-1}$ + граничные условия:

$$u_0^{n+1} = \phi_L(\tilde{t}_{n+1}), \quad u_R^{n+1} = \phi_R(\tilde{t}_{n+1})$$

- Начальные условия $u_i^0 = \Phi(e^{x_i})$
- Оператор перехода:

$$w_i = e^{-r\tau} (0.5\tau\alpha u_{i-1}^n + (1 + 0.5\tau\beta)u_i^n + 0.5\tau\gamma u_{i+1}^n)$$

$$(-0.5\tau\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1 - 0.5\tau\beta)u_i^{n+1} - 0.5\tau\gamma u_{i+1}^{n+1}) = w_i$$

при $i = \overline{1, N-1}$ + граничные условия:

$$u_0^{n+1} = \phi_L(\tilde{t}_{n+1}), \quad u_R^{n+1} = \phi_R(\tilde{t}_{n+1})$$

- Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \end{cases}$$

- Метод прямых:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\sigma^2}{2h^2} M u$$

где

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

- Уравнение на собственные значения матрицы M :

$$\begin{cases} v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1} = \lambda v_n, 1 \leq n \leq N-1 \\ v_0 = v_N = 0 \end{cases}$$

- Ищем решение в виде $v_n = e^{j\alpha n}$, где $j^2 = -1$:

$$(e^{-j\alpha} - 2 + e^{j\alpha}) = \lambda$$

$$2 \cos(\alpha) - 2 = \lambda$$

$$\lambda = -4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Общее решение

$$v_n = C_1 e^{j\alpha n} + C_2 e^{-j\alpha n} = A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$$

- Условие на левой границе:

$$0 = v_0 = A \sin(0) + B \cos(0) = B \rightarrow B = 0$$

- Без ограничения общности $A = 1$. Условие на правой границе::

$$\sin(\alpha N) = 0 \rightarrow \alpha_k = \frac{\pi k}{N}$$

$$\lambda_k = -4 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2N} \right)$$

- Явная схема:

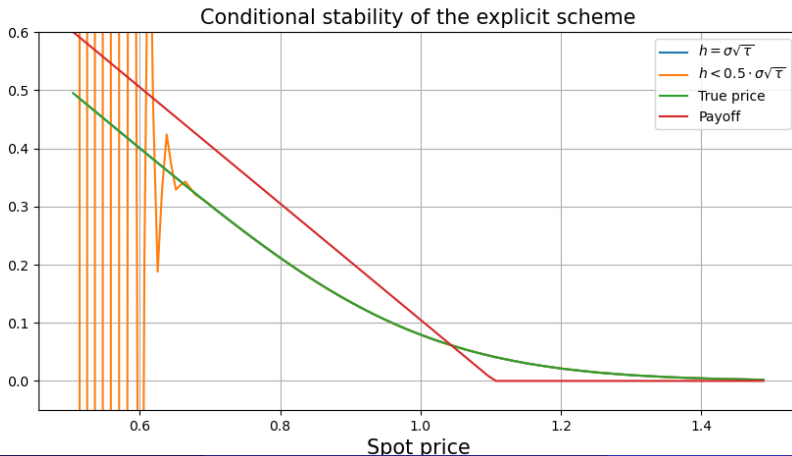
$$\vec{u}^{n+1} = e^{-r\tau} \left(I + \tau \frac{\sigma^2}{2h^2} M \right) \vec{u}^n$$

- Условие устойчивости явной схемы:

$$\boxed{\tau \leq \frac{h^2}{\sigma^2}} \quad \boxed{h \geq \sigma \sqrt{\tau}}$$

Условная устойчивость явной схемы

- Достаточные условия стабильности $h \geq \sigma\sqrt{\tau}$
- На практике неустойчивость проявляется при $h \lesssim 0.5\sigma\sqrt{\tau}$



Численные методы для американских опционов

Американские опционы: граница экспирации

- Американский пут-опцион $\Phi(S) = (K - S)^+$
- $V(t, S)$ – цена опциона в момент t при условии, что ещё не погасились.
- Область погашения опциона:

$$\text{Expire} = \{(t, S) : V(t, S) = (K - S)\}$$

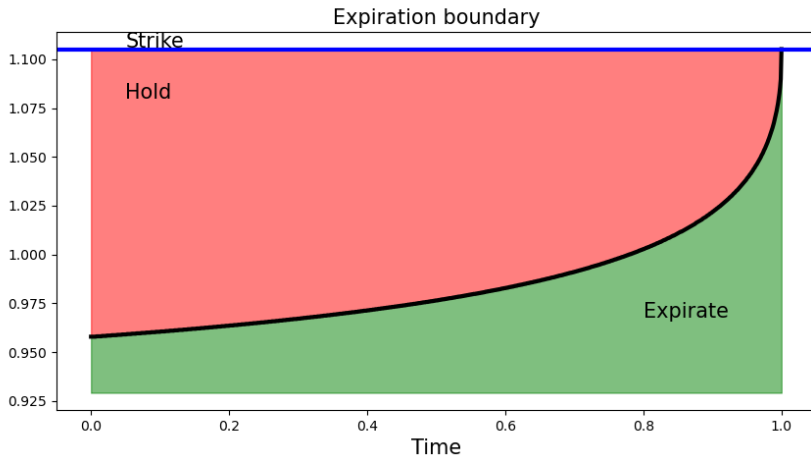
- Область, в которой держим опцион:

$$\text{Hold} = \{(t, S) : V(t, S) > (K - S)\}$$

- Граница между областями – граница экспирации $B(t)$
- Для пут-опциона в силу монотонности:

$$B(t) = \sup_S \{V(t, S) = (K - S)\}$$

Американские опционы: граница экспирации



Уравнение Блэка-Шоулза для американского опциона

- При $(t, S) \in \text{Hold} \rightarrow S \geq B(t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Sr \frac{\partial V}{\partial S} + 0.5\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

- При $(t, S) \in \text{Expire} \rightarrow S < B(t)$:

$$V(t, S) = (K - S)$$

- Условие на границе:

$$\lim_{S \rightarrow B(t)+0} V(t, S) = \lim_{S \rightarrow B(t)-0} V(t, S) = K - B(t)$$

- Smooth-pasting condition

$$\lim_{S \rightarrow B(t)+0} \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow B(t)-0} \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} = -1$$

Уравнение Блэка-Шоулза для американского опциона

- Замена переменных

$$x = \log S, \quad \tilde{t} = T - t$$

$$b(t) = \log B(t)$$

$$u(x, \tilde{t}) = V(T - \tilde{t}, e^x)$$

- Уравнение:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru, 0 \leq \tilde{t} \leq T, x \geq b(t) \\ u(\tilde{t}, x) = K - e^x, x < b(t) \\ u_x(\tilde{t}, b(t)) = -e^x \\ u(0, x) = K - e^x \end{cases}$$

Численная схема для американского опциона

- Американский опцион с пэйоффом $\Phi(S)$
- Начальные условия $u_i^0 = \Phi(e^{x_i})$
- Continuation value:

$$cv = \hat{T}u^n$$

где \hat{T} – оператор перехода для одной из схем (явная, неявная, ...)

- Выбор оптимальной стратегии:

$$u_i^{n+1} = \max(cv_i, \Phi(e^{x_i}))$$

Приложения: решение систем с трёхдиагональной матрицей

- Система с трёх-диагональной матрицей

$$\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = F_1 \\ A_ix_{i-1} + B_ix_i + C_ix_{i+1} = F_i, i = 2 \dots N-1 \\ A_Nx_{N-1} + B_Nx_N = F_N \end{cases}$$

- Ищем решение в виде:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$$

- Начальные условия:

$$\alpha_1 = -C_1/B_1, \beta_1 = F_1/B_1$$

- Подставим в уравнение с индексом $i+1$:

$$A_{i+1}x_i + B_{i+1}x_{i+1} + C_{i+1}x_{i+2} = F_{i+1}$$

$$A_{i+1}\alpha_i x_{i+1} + A_{i+1}\beta_i + B_{i+1}x_{i+1} + C_{i+1}x_{i+2} = F_{i+1}$$

$$(A_{i+1}\alpha_i + B_{i+1})x_{i+1} = F_{i+1} - A_{i+1}\beta_i - C_{i+1}x_{i+2}$$

- Подставим в уравнение с индексом $i + 1$:

$$A_{i+1}x_i + B_{i+1}x_{i+1} + C_{i+1}x_{i+2} = F_{i+1}$$

$$A_{i+1}\alpha_i x_{i+1} + A_{i+1}\beta_i + B_{i+1}x_{i+1} + C_{i+1}x_{i+2} = F_{i+1}$$

$$(A_{i+1}\alpha_i + B_{i+1})x_{i+1} = F_{i+1} - A_{i+1}\beta_i - C_{i+1}x_{i+2}$$

Отсюда:

$$\alpha_{i+1} = \frac{-C_{i+1}}{A_{i+1}\alpha_i + B_{i+1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_{i+1} - A_{i+1}\beta_i}{A_{i+1}\alpha_i + B_{i+1}}$$

- Обратный проход:

$$x_N = \beta_N$$

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, i = N - 1 \dots 1$$

- Система с трёх-диагональной матрицей

$$\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = F_1 \\ A_ix_{i-1} + B_ix_i + C_ix_{i+1} = F_i, i = 2 \dots N-1 \\ A_Nx_{N-1} + B_Nx_N = F_N \end{cases}$$

- Прямой проход:

$$\alpha_1 = -C_1/B_1, \beta_1 = F_1/B_1$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{-C_{i+1}}{A_{i+1}\alpha_i + B_{i+1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_{i+1} - A_{i+1}\beta_i}{A_{i+1}\alpha_i + B_{i+1}}$$

- Обратный проход:

$$x_N = \beta_N$$

$$x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_i, i = N-1 \dots 1$$