

Matematika pro dementy

Fantomas

Únor 2025

Abstrakt

Vypracované otázky z matematiky, tipy a triky a tak

1 Výroková logika a množiny

Množiny

Množinou rozumíme souhrn nějakých objektů (prvků). Zápis $x \in M$ znamená že prvek x náleží množině M . Množinu můžeme určit výčtem prvků, charakteristickou vlastností nebo množinovými operacemi. Rovnost množin znamená, že každý prvek množiny M je prvkem množiny N a současně každý prvek množiny N je prvkem množiny M .

Podmnožina

Množinu M nazýváme podmnožinou množiny N , právě když je každý prvek množiny M prvkem množiny N . Zápis symbolem \subseteq nebo \subset ; $M \subset N$ značí, že M je vlastní podmnožinou množiny N , tedy $M \neq N$; $M \subseteq N$ značí nevlastní podmnožinu, tedy $M \subset N$ nebo $M = N$.

Charakteristická vlastnost

Zápis $A = \{x \in M; vlastnost\}$, kde každý prvek z množiny M , mající danou vlastnost, patří do množiny A .

Množinové operace

Sjednocení $A \cup B$, je množina všech prvků, patřících alespoň do jedné z množin A, B .

Průnik $A \cap B$, je množina všech prvků, patřících zároveň do obou množin A, B .

Rozdíl $A \setminus B$, je množina všech prvků, patřících do množiny A a **nepatřících** do množiny B .

! Sjednocení i průnik jsou komutativní a asociativní operace.

Doplňěk A'_M množiny A v množině M je množina všech prvků množiny M , které nepatří do množiny $A \Rightarrow A'_M = M \setminus A$.

Intervaly

Nechť a, b jsou dvě reálná čísla, že $a < b$, pak

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ je otevřený interval

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ je polootevřený interval

$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ je polouzavřený interval

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ je uzavřený interval

Výroky

Výrokem rozumíme sdělení, o kterém má smysl uvažovat jeho pravdivost. Každý výrok má **pravdivostní hodnotu**, 0 (nepravda) nebo 1 (pravda).

Hypotéza je výrok jehož pravdivostní hodnotu neznáme.

Výroková formule je tvrzení s proměnou, po dosazení se stane výrokem.

Negace výroku

Negace výroku, "Není pravda, že A ", zapisujeme $\neg A$, vždy opačná pravdivostní hodnota.

Logické operátory

Pomocí těchto operátorů tvoříme **složené výroky** nebo **formule**.

Konjunkce, "A a současně (et) B", zapisujeme $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkce, "A nebo (vel) B", zapisujeme $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ostrá disjunkce, "Bud' A, nebo B", zapisujeme $A \veebar B$

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikace, "Z A plyne B", zapisujeme $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalence, "A je ekvivalentní s B.", "A právě tehdy, když B.", zapisujeme $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologie

Tautologie je výrok/formule, který je vždy pravdivý.

Kontradikce je výrok/formule, který je vždy nepravdivý.

Důležité tautologie:

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \nabla B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- $\neg(A \nabla B) \equiv A \Leftrightarrow B$

Kvantifikace výrokových formulí

Výroková formule $\varphi(x)$, obsahující proměnnou x , se stane výrokem po kvantifikaci x .

Obecný kvantifikátor \forall , "pro každé, pro všechna, ..."

Malý kvantifikátor \exists , "existuje alespoň jedno, nějaké, ..."

Př.: Formulí $\varphi(x) \sim x > 0$ lze kvantifikovat:

$(\forall x \in \mathbb{N})x > 0$... Všechna přirozená čísla jsou kladná.

$(\exists x \in \mathbb{N})x > 0$... Existuje alespoň jedno přirozené číslo větší než 0.

Negace kvantifikátorů

Negace výroku $(\forall x)\varphi(x)$ je výrok $(\exists x)\neg\varphi(x)$.

Negace výroku $(\exists x)\varphi(x)$ je výrok $(\forall x)\neg\varphi(x)$.

Věta, definice, důkaz, správné úsudky

Matematická věta je důležité, netriviální a dostatečně obecné tvrzení neboli výrok. Věta obsahuje předpoklad a závěr. **Axiom (postulát)** je tvrzení, které se předem předpokládá za platné. **Definice** slouží k zavedení nových pojmů; stanoví nový pojem a určí ho pomocí již stanovených.

Správný úsudek

Správný úsudek je takový, kdy je z pravdivých premis vyvozen pravdivý závěr.

Zákon vyloučení možnosti:

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q}$$

Zákon odloučení:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$

Zákon nepřímé úvahy:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

Zákon kontrapozice:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$$

2 Mnohočleny, mocniny a odmocniny

Zápis $1 + \sqrt{1,5625 - (\frac{3}{4})^2}$ je **číselný výraz** s hodnotou 2.

Zápis $x^2 + 2xy + 1$ je výraz s proměnnými x, y .

Definiční obor výrazu je množina všech přípustných hodnot proměnné, pro které má výraz smysl.

Výraz $V = x^2 + 1$ má definiční obor \mathbb{R}

Výraz $V = \frac{1}{y}$ má smysl pro nenulové hodnoty y

$\Rightarrow D_V : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nebo $D_V = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Mnohočleny

Mnohočlen (polynom) s jednou proměnnou je výraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$, kde n je stupeň mnohočlenu.

$a_1 x + a_0$, resp. $ax + b$ je lineární dvojčlen.

$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, resp. $ax^2 + bx + c$ je kvadratický trojčlen.

Dělení mnohočlenu mnohočlenem

$$(4x^3 + 3x^2 - 2x - 5) : (x - 1) = 4x^2 + 7x + 5$$

$$4x^3 - 4x^2$$

$$0x^3 + 7x^2 - 2x$$

$$0x^3 + 7x^2 - 7x$$

$$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$$

$$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$$

$$0x^3 + 0x^2 + 0x - 0$$

pozn. zbytek stejně jako u číselného dělení

Umocňování

- $(AB)^n = A^n B^n$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
- $(-A + B)^2 = (A - B)^2$
- $(-A - B)^2 = (A + B)^2$
- $(A + B)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

3 Lomené výrazy

Rozšiřování a krácení lomených výrazů

Rozšířit lomený výraz znamená vynásobit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

Krátit lomený výraz znamená vydělit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{a^2bc^3}{abc^2} = \frac{a^2bc^3:abc}{abc^2:abc} = \frac{ac^2}{c} = ac$$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

Nejdříve rozložíme všechny jmenovatele na součin, určíme společný jmenovatel jako NSN všech jmenovatelů, každý LV rozšíříme na společný jmenovatel, sečteme a odečteme čitatele, rozložíme čitatele na součin a zkrátíme (je-li to možné) a určíme podmínky.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{x^2-4} \\
V &= \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)} \\
V &= -\frac{(3+2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2-3x)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)} \\
V &= \frac{-7x-6-2x^2-8x+4+3x^2+16x-x^2}{(x-2)(x+2)} \\
V &= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\
V &= \frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

Vyjadřování neznámé ze vzorce

Při vyjadřování neznámé ze vzorce využíváme:

- záměna stran vzorce
- vynásobení/vydělení vzorce nenulovým číslem nebo výrazem
- přičtení/odečtení libovolného čísla nebo výrazu
- pokud jsou ve vzorci nezáporné veličiny, pak umocnění nebo odmocnění

Výrazy s mocninami a odmocninami

Pro každá reálná a , b a pro každá reálná r , s platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

4 Lineární rovnice a nerovnice

Lineární rovnice

Lineární rovnice má tvar $ax + b = 0, a \neq 0$. Má jediný kořen $x = -\frac{b}{a}$.

Pokud užitím ekvivalentních úprav získáme tvar $0x + b = 0$, pak má rovnice nekonečně mnoho řešení ($b = 0$), nebo nemá řešení ($b \neq 0$).

Definiční obor rovnice je množina všech přípustných hodnot jejích kořenů;
 $x_1 \notin D_r \Rightarrow x_1 \notin K$.

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice má tvar:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \leq 0$:

$$b \leq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b > 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \geq 0$:

$$b \geq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b < 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b < 0$:

$$b < 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \geq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

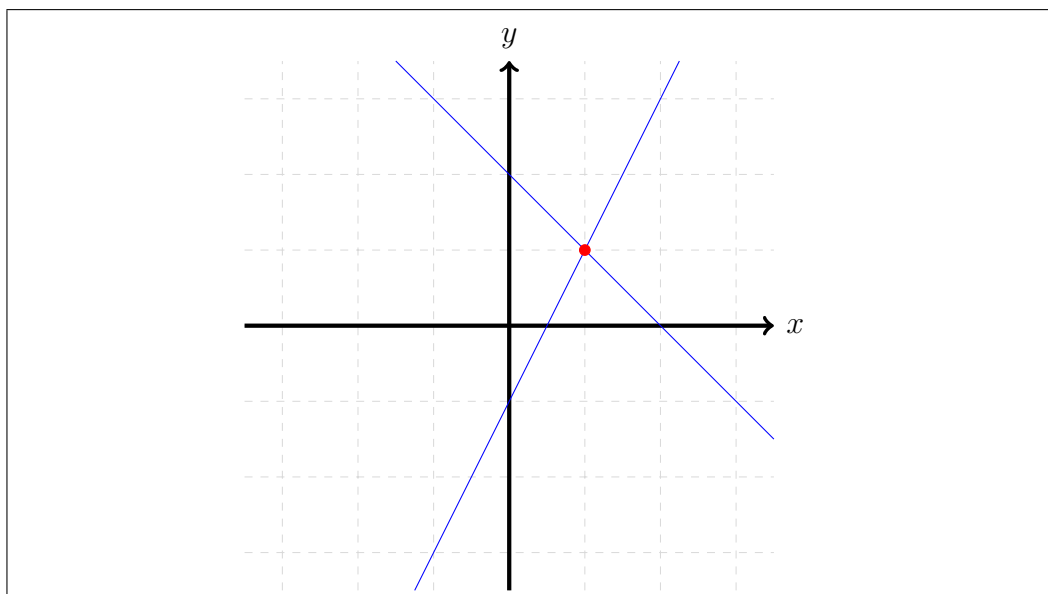
Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b > 0$:

$$b > 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \leq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Grafické řešení lineární rovnice a nerovnice

Lineární funkce je funkce s předpisem $y = ax + b$

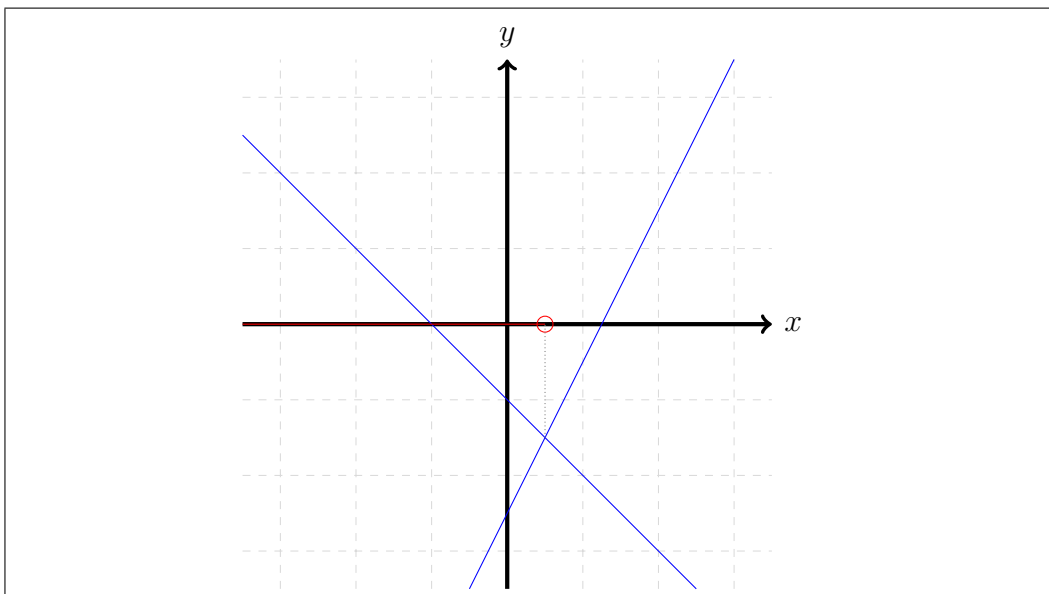
Rovnici převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kořen leží v $f(x) \cap g(x)$.



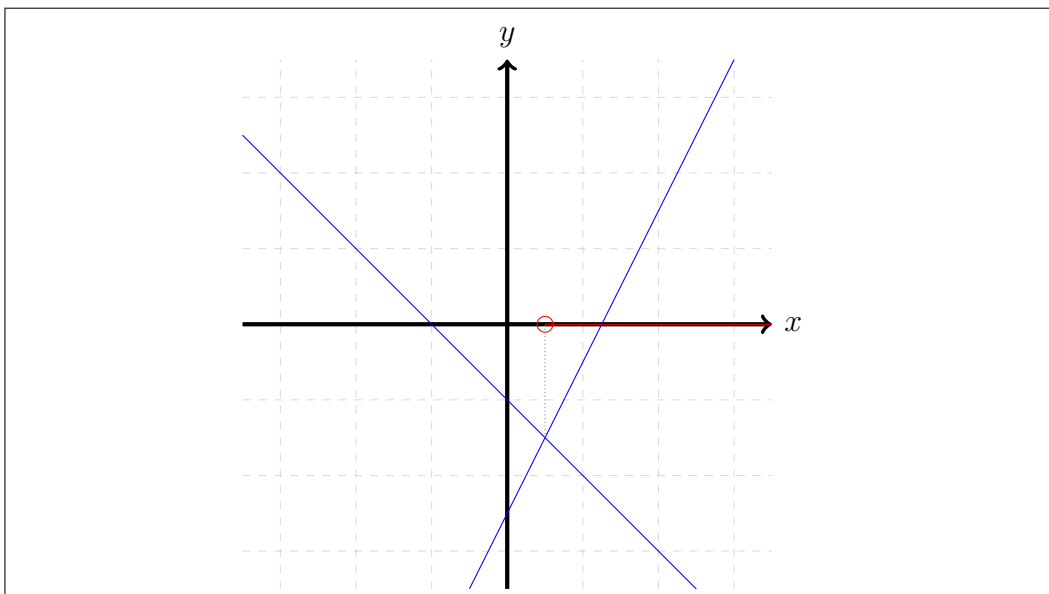
Obrázek 1: $2x - 1 = 2 - x$

Lineární nerovnici řešíme podobně jako rovnici: převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, nerovnice mohou mít jeden z tvarů:

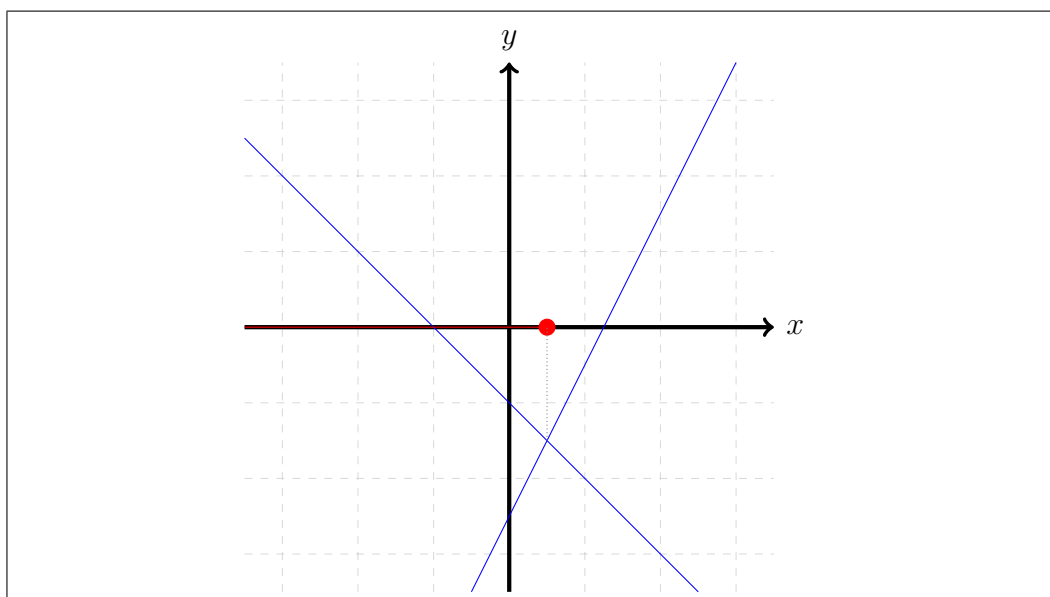
$-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$
$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
$K = (-\infty, \frac{1}{2})$	$K = (\frac{1}{2}, \infty)$	$K = (-\infty, \frac{1}{2}]$	$K = [\frac{1}{2}, \infty)$
ad 2	ad 3	ad 4	ad 5



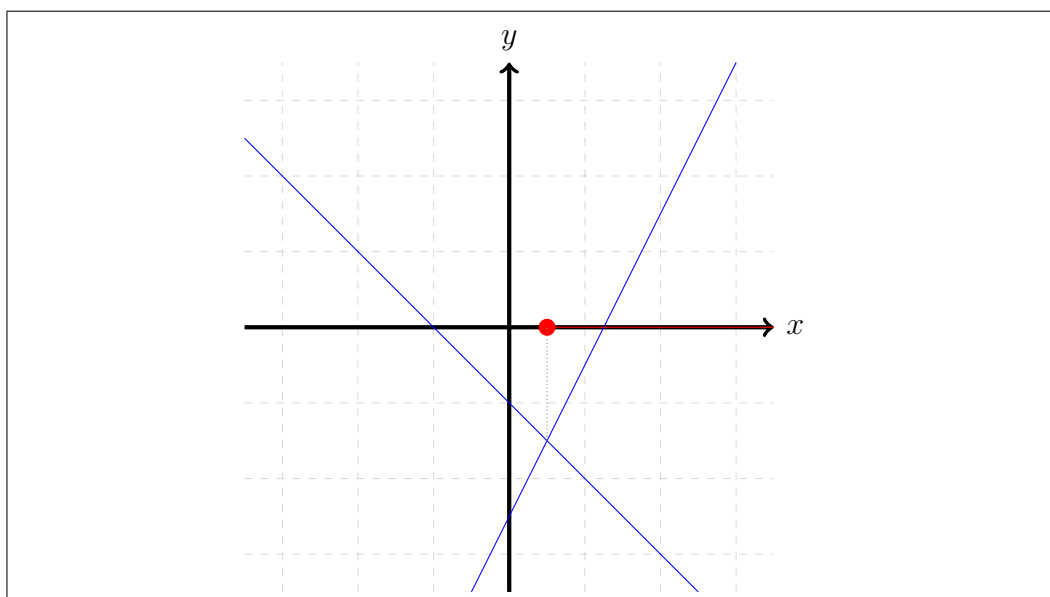
Obrázek 2: $-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 3: $-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 4: $-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 5: $-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$

Rovnice a nerovnice v součinném tvaru

Při řešení využíváme $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Př.:

$$\begin{aligned}x(x + 2) &= 0 \\x &= 0 \vee x = -2 \\K &= \{-2; 0\}\end{aligned}$$

Lze též použít **metodu nulových bodů**

Př.:

$$\begin{aligned}4x^2 - 6x &< 2x \\4x^2 - 8x &< 0 \\4x(x - 2) &< 0 \\NB &= \{0, 2\}\end{aligned}$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$4x$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
*	+	-	+

$$K = (0; 2)$$

Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Má-li rovnice neznámou ve jmenovateli, je nutné vždy stanovit její definiční obor.

Rovnice v podílovém tvaru

Rovnice v podílovém tvaru má na jedné straně jediný zlomek s neznámou ve jmenovateli a na druhé straně nulu. Po stanovení definičního oboru řešíme rovnici tak, že položíme čitatele rovno nule a řešíme jako lineární rovnici nebo převedením na součinný tvar.

Nerovnice v podílovém tvaru

Nerovnici v podílovém tvaru nesmíme vynásobit společným jmenovatelem, který obsahuje neznámou!

Nerovnici v podílovém tvaru převedeme na podílový tvar a řešíme metodou nulových bodů.

Př.:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} &\geq 1 \\ x &\neq -1 \\ \frac{2x-1}{x+1} - 1 &\geq 0 \\ \frac{2x-1-(x+1)}{x+1} &\geq 0 \\ \frac{x-2}{x+1} &\geq 0 \\ NB &= \{-1, 2\}\end{aligned}$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2)$	$\langle 2; +\infty)$
$x-2$	-	-	+
$x+1$	-	+	+
*	+	-	+

$$K = (-\infty; -1) \cup \langle 2; +\infty)$$

5 Soustavy rovnic a nerovnice

Soustava nerovnic

Soustavu nerovnic s jednou neznámou řešíme vyřešením každé nerovnice zvlášť. Řešením soustavy je $K_1 \cap K_2$.

Př.:

$$\begin{aligned}2x-5 &< 0 \\ 3x+2 &\geq 0 \\ 2x-5 &< 0 & 3x+2 &\geq 0 \\ 2x &< 5 & 2x &\geq -2 \\ x &< \frac{5}{2} & x &\geq -\frac{2}{3} \\ K_1 &= (-\infty, \frac{5}{2}) & K_2 &= \langle -\frac{2}{3}, \infty)\end{aligned}$$

$$K = K_1 \cap K_2 = \langle -\frac{2}{3}, \frac{5}{2} \rangle$$

Složenou nerovnici $ax + b < cx + d < ex + f$ převedeme na soustavu nerovnic:

$$ax + b < cx + d$$

$$cx + d < ex + f$$

- 6 Kvadratická rovnice a nerovnice
- 7 Lineární funkce a její vlastnosti
- 8 Kvadratická funkce a její vlastnosti
- 9 Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti
- 10 Exponenciální a logaritmická funkce
- 11 Goniometrické funkce
- 12 Množiny bodů dané vlastnosti
- 13 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků
- 14 Shodná zobrazení
- 15 Podobná zobrazení
- 16 Pythagorova a Eukleidovy věty
- 17 Trigonometrie obecného trojúhelníku
- 18 Stereometrie – polohové vlastnosti
- 19 Stereometrie – metrické vlastnosti
- 20 Stereometrie – objem a povrch těles
- 21 Analytická geometrie – body a vektory
- 22 Analytická geometrie – přímka a polovina v E^2
- 23 Analytická geometrie – přímka a rovina v E^3
- 24 Analytická geometrie – kuželoščky
- 25 Kombinatorika