

# Matematika pro sigmy

Fudži Mi Nagule

Únor 2025

## **Abstrakt**

Vypracované otázky z matematiky, tipy a triky a tak

# Obsah

1	Výroková logika a množiny	5
2	Mnohočleny, mocniny a odmocniny	10
3	Lomené výrazy	11
4	Lineární rovnice a nerovnice	13
5	Soustavy rovnic a nerovnice	21
6	Kvadratická rovnice a nerovnice	26
7	Lineární funkce a její vlastnosti	29
8	Kvadratická funkce a její vlastnosti	31
9	Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti	32
10	Exponenciální a logaritmická funkce	36
11	Goniometrické funkce	41
12	Množiny bodů dané vlastnosti	45
13	Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků	51
14	Shodná zobrazení	52
15	Podobná zobrazení	54
16	Pythagorova a Eukleidovy věty	54
17	Trigonometrie obecného trojúhelníku	59
18	Stereometrie – polohové vlastnosti	61
19	Stereometrie – metrické vlastnosti	61
20	Stereometrie – objem a povrch těles	61
21	Analytická geometrie – body a vektory	61
22	Analytická geometrie – přímka a polorovina v $E^2$	61

23 Analytická geometrie – přímka a rovina v $E^3$	61
24 Analytická geometrie – kuželosečky	61
25 Kombinatorika	61
26 Pravděpodobnost	61
27 Statistika	61
28 Posloupnosti	61
29 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada	61
30 Limita a derivace funkce	61

# 1 Výroková logika a množiny

## Množiny

Množinou rozumíme souhrn nějakých objektů (prvků). Zápis  $x \in M$  znamená že prvek  $x$  náleží množině  $M$ . Množinu můžeme určit výčtem prvků, charakteristickou vlastností nebo množinovými operacemi. Rovnost množin znamená, že každý prvek množiny  $M$  je prvkem množiny  $N$  a současně každý prvek množiny  $N$  je prvkem množiny  $M$ .

## Podmnožina

Množinu  $M$  nazýváme podmnožinou množiny  $N$ , právě když je každý prvek množiny  $M$  prvkem množiny  $N$ . Zápis symbolem  $\subseteq$  nebo  $\subset$ ;  $M \subset N$  značí, že  $M$  je vlastní podmnožinou množiny  $N$ , tedy  $M \neq N$ ;  $M \subseteq N$  značí nevlastní podmnožinu, tedy  $M \subset N$  nebo  $M = N$ .

## Charakteristická vlastnost

Zápis  $A = \{x \in M; vlastnost\}$ , kde každý prvek z množiny  $M$ , mající danou vlastnost, patří do množiny  $A$ .

## Množinové operace

**Sjednocení**  $A \cup B$ , je množina všech prvků, patřících alespoň do jedné z množin  $A, B$ .

**Průnik**  $A \cap B$ , je množina všech prvků, patřících zároveň do obou množin  $A, B$ .

**Rozdíl**  $A \setminus B$ , je množina všech prvků, patřících do množiny  $A$  a **nepatřících** do množiny  $B$ .

! Sjednocení i průnik jsou komutativní a asociativní operace.

**Doplňěk**  $A'_M$  množiny  $A$  v množině  $M$  je množina všech prvků množiny  $M$ , které nepatří do množiny  $A \Rightarrow A'_M = M \setminus A$ .

## Intervaly

Nechť  $a, b$  jsou dvě reálná čísla, že  $a < b$ , pak

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$  je otevřený interval

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$  je polootevřený interval

$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$  je polouzavřený interval

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$  je uzavřený interval

## Výroky

Výrokem rozumíme sdělení, o kterém má smysl uvažovat jeho pravdivost. Každý výrok má **pravdivostní hodnotu**, 0 (nepravda) nebo 1 (pravda).

**Hypotéza** je výrok jehož pravdivostní hodnotu neznáme.

**Výroková formule** je tvrzení s proměnou, po dosazení se stane výrokem.

### Negace výroku

**Negace výroku**, "Není pravda, že  $A$ ", zapisujeme  $\neg A$ , vždy opačná pravdivostní hodnota.

### Logické operátory

Pomocí těchto operátorů tvoříme **složené výroky** nebo **formule**.

**Konjunkce**, "A a současně (et) B", zapisujeme  $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Disjunkce**, "A nebo (vel) B", zapisujeme  $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**Ostrá disjunkce**, "Bud' A, nebo B", zapisujeme  $A \veebar B$

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Implikace**, "Z A plyne B", zapisujeme  $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**Ekvivalence**, "A je ekvivalentní s B.", "A právě tehdy, když B.", zapisujeme  $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### Tautologie

**Tautologie** je výrok/formule, který je vždy pravdivý.

**Kontradikce** je výrok/formule, který je vždy nepravdivý.

**Důležité tautologie:**

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \nabla B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- $\neg(A \nabla B) \equiv A \Leftrightarrow B$

## Kvantifikace výrokových formulí

Výroková formule  $\varphi(x)$ , obsahující proměnnou  $x$ , se stane výrokem po kvantifikaci  $x$ .

**Obecný kvantifikátor**  $\forall$ , "pro každé, pro všechna, ..."

**Malý kvantifikátor**  $\exists$ , "existuje alespoň jedno, nějaké, ..."

Př.: Formulí  $\varphi(x) \sim x > 0$  lze kvantifikovat:

$(\forall x \in \mathbb{N})x > 0$  ... Všechna přirozená čísla jsou kladná.

$(\exists x \in \mathbb{N})x > 0$  ... Existuje alespoň jedno přirozené číslo větší než 0.

## Negace kvantifikátorů

Negace výroku  $(\forall x)\varphi(x)$  je výrok  $(\exists x)\neg\varphi(x)$ .

Negace výroku  $(\exists x)\varphi(x)$  je výrok  $(\forall x)\neg\varphi(x)$ .

## Věta, definice, důkaz, správné úsudky

**Matematická věta** je důležité, netriviální a dostatečně obecné tvrzení neboli výrok. Věta obsahuje předpoklad a závěr. **Axiom (postulát)** je tvrzení, které se předem předpokládá za platné. **Definice** slouží k zavedení nových pojmů; stanoví nový pojem a určí ho pomocí již stanovených.

## Správný úsudek

**Správný úsudek** je takový, kdy je z pravdivých premis vyvozen pravdivý závěr.

**Zákon vyloučení možnosti:**

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q}$$

**Zákon odloučení:**

$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$



**Zákon nepřímé úvahy:**

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg q$$

---

$$\neg p$$

**Zákon kontrapozice:**

$$p \Rightarrow q$$

---

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

## 2 Mnohočleny, mocniny a odmocniny

Zápis  $1 + \sqrt{1,5625 - (\frac{3}{4})^2}$  je **číselný výraz** s hodnotou 2.

Zápis  $x^2 + 2xy + 1$  je výraz s proměnnými  $x, y$ .

**Definiční obor výrazu** je množina všech přípustných hodnot proměnné, pro které má výraz smysl.

Výraz  $V = x^2 + 1$  má definiční obor  $\mathbb{R}$

Výraz  $V = \frac{1}{y}$  má smysl pro nenulové hodnoty  $y$

$\Rightarrow D_V : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  nebo  $D_V = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

### Mnohočleny

**Mnohočlen** (polynom) s jednou proměnnou je výraz  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ , kde  $n$  je stupeň mnohočlenu.

$a_1 x + a_0$ , resp.  $ax + b$  je lineární dvojčlen.

$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , resp.  $ax^2 + bx + c$  je kvadratický trojčlen.

### Dělení mnohočlenu mnohočlenem

$$(4x^3 + 3x^2 - 2x - 5) : (x - 1) = 4x^2 + 7x + 5$$

$$4x^3 - 4x^2$$

---

$$0x^3 + 7x^2 - 2x$$

$$0x^3 + 7x^2 - 7x$$

---

$$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$$

$$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$$

---

$$0x^3 + 0x^2 + 0x - 0$$

pozn. zbytek stejně jako u číselného dělení

### Umocňování

- $(AB)^n = A^n B^n$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
- $(-A + B)^2 = (A - B)^2$
- $(-A - B)^2 = (A + B)^2$
- $(A + B)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

### 3 Lomené výrazy

#### Rozšiřování a krácení lomených výrazů

**Rozšířit lomený výraz** znamená vynásobit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

**Krátit lomený výraz** znamená vydělit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{a^2bc^3}{abc^2} = \frac{a^2bc^3:abc}{abc^2:abc} = \frac{ac^2}{c} = ac$$

#### Sčítání a odčítání lomených výrazů

Nejdříve rozložíme všechny jmenovatele na součin, určíme společný jmenovatel jako NSN všech jmenovatelů, každý LV rozšíříme na společný jmenovatel, sečteme a odečteme čitatele, rozložíme čitatele na součin a zkrátíme (je-li to možné) a určíme podmínky.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{x^2-4} \\
V &= \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)} \\
V &= -\frac{(3+2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2-3x)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)} \\
V &= \frac{-7x-6-2x^2-8x+4+3x^2+16x-x^2}{(x-2)(x+2)} \\
V &= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\
V &= \frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

## Vyjadřování neznámé ze vzorce

Při vyjadřování neznámé ze vzorce využíváme:

- záměna stran vzorce
- vynásobení/vydělení vzorce nenulovým číslem nebo výrazem
- přičtení/odečtení libovolného čísla nebo výrazu
- pokud jsou ve vzorci nezáporné veličiny, pak umocnění nebo odmocnění

## Výrazy s mocninami a odmocninami

Pro každá reálná  $a$ ,  $b$  a pro každá reálná  $r$ ,  $s$  platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

## 4 Lineární rovnice a nerovnice

### Lineární rovnice

**Lineární rovnice** má tvar  $ax + b = 0, a \neq 0$ . Má jediný kořen  $x = -\frac{b}{a}$ .

Pokud užitím ekvivalentních úprav získáme tvar  $0x + b = 0$ , pak má rovnice nekonečně mnoho řešení ( $b = 0$ ), nebo nemá řešení ( $b \neq 0$ ).

**Definiční obor rovnice** je množina všech přípustných hodnot jejích kořenů;  
 $x_1 \notin D_r \Rightarrow x_1 \notin K$ .

### Lineární nerovnice

**Lineární nerovnice** má tvar:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

Pokud lze nerovnici převést na tvar  $ax + b \leq 0$ :

$$b \leq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b > 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar  $ax + b \geq 0$ :

$$b \geq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b < 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar  $ax + b < 0$ :

$$b < 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \geq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

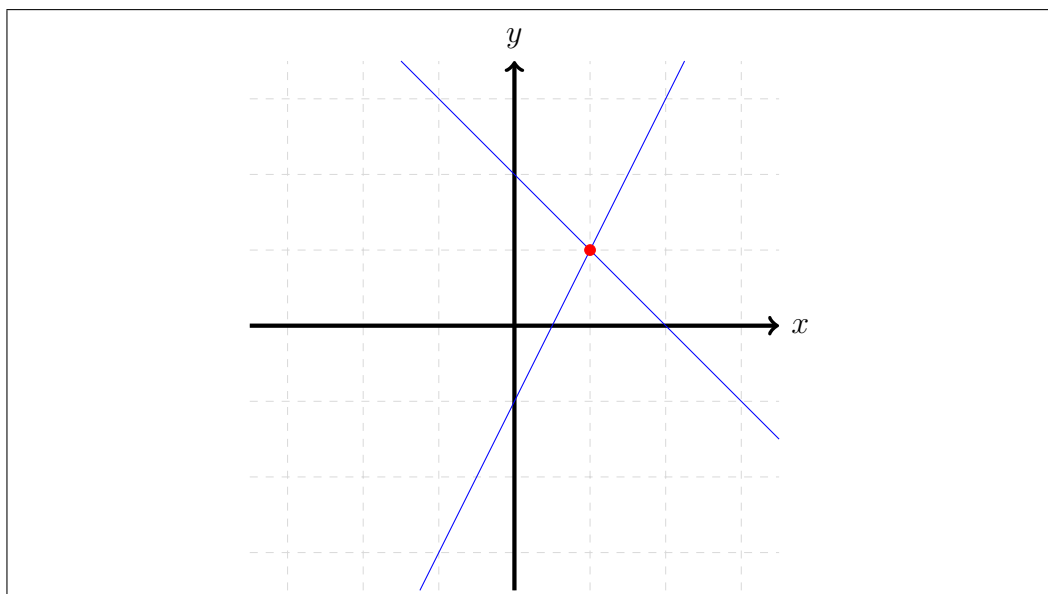
Pokud lze nerovnici převést na tvar  $ax + b > 0$ :

$$b > 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \leq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

## Grafické řešení lineární rovnice a nerovnice

**Lineární funkce** je funkce s předpisem  $y = ax + b$

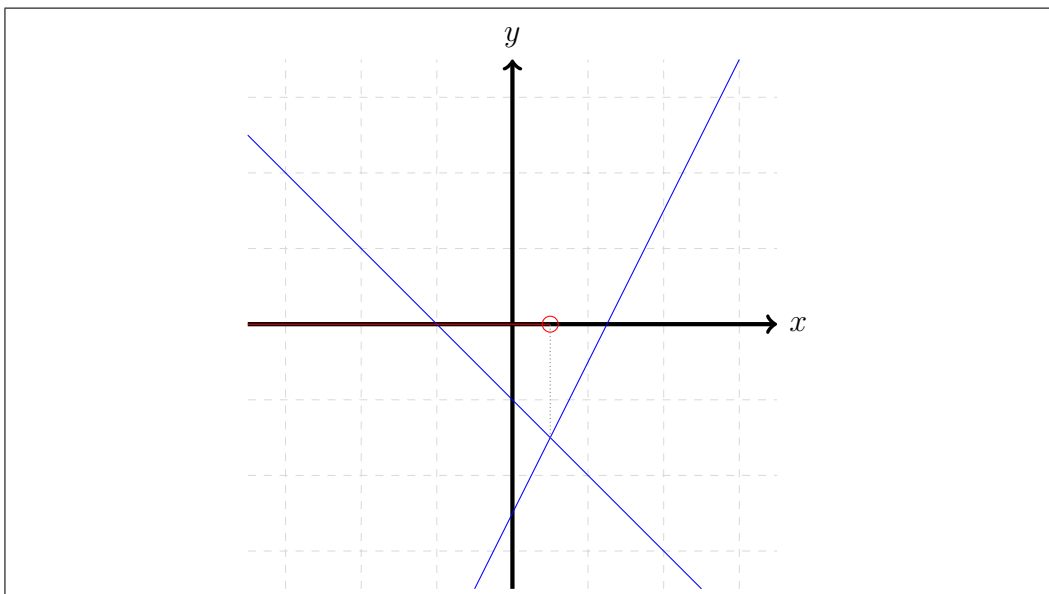
Rovnici převedeme na tvar  $ax + b = cx + d$  a budeme uvažovat  $f(x) = ax + b$  a  $g(x) = cx + d$ , kořen leží v  $f(x) \cap g(x)$ .



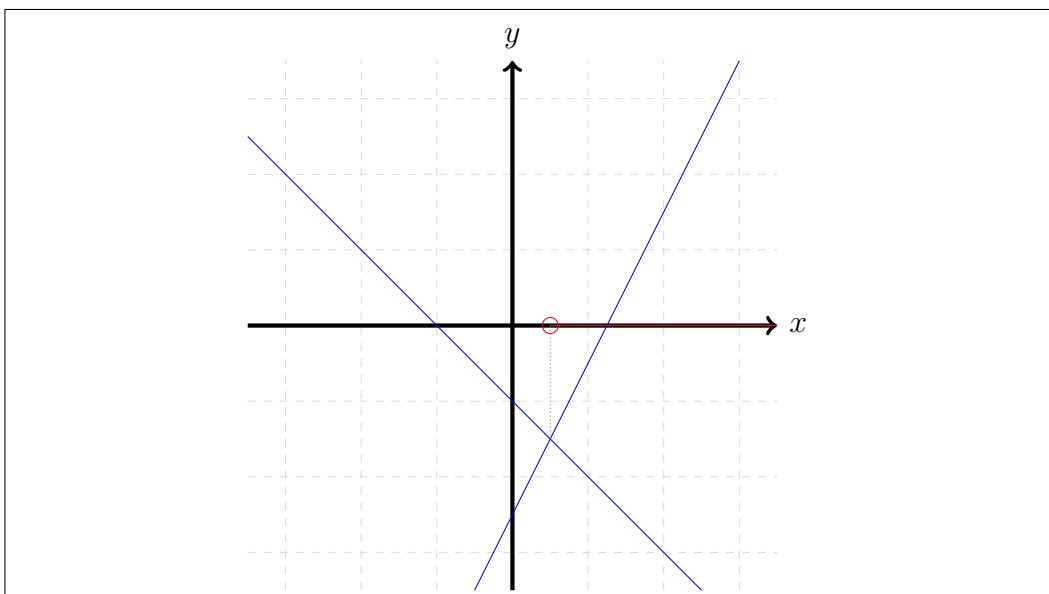
Obrázek 1:  $2x - 1 = -x + 2$

**Lineární nerovnici** řešíme podobně jako rovnici: převedeme na tvar  $ax + b = cx + d$  a budeme uvažovat  $f(x) = ax + b$  a  $g(x) = cx + d$ , nerovnice mohou mít jeden z tvarů:

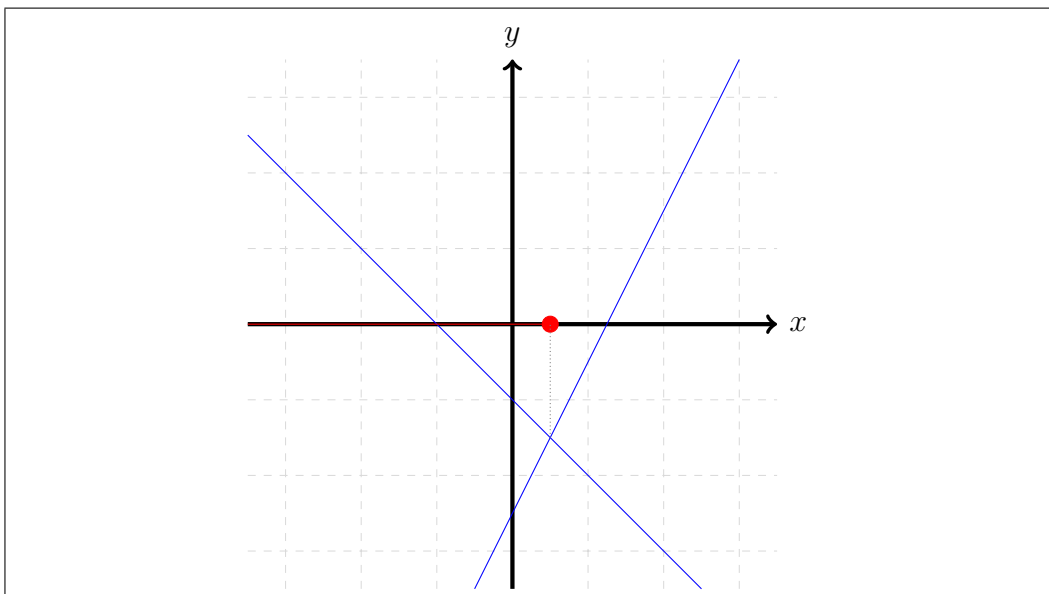
$-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$
$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
$K = (-\infty, \frac{1}{2})$	$K = (\frac{1}{2}, \infty)$	$K = (-\infty, \frac{1}{2}]$	$K = [\frac{1}{2}, \infty)$
ad 2	ad 3	ad 4	ad 5



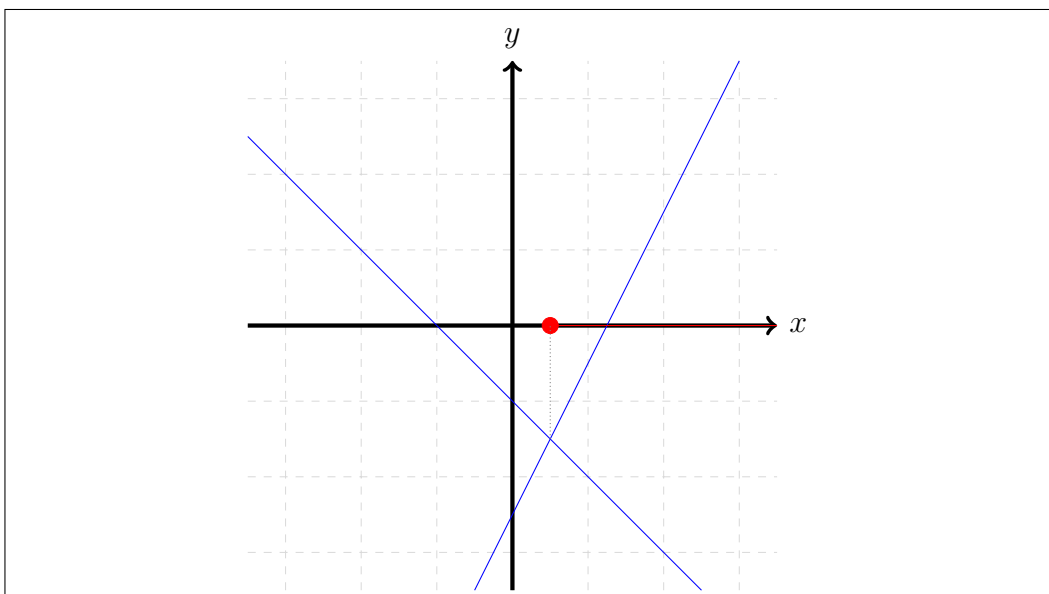
Obrázek 2:  $-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 3:  $-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 4:  $-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 5:  $-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$



## Rovnice a nerovnice v součinném tvaru

Při řešení využíváme  $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

Př.:

$$\begin{aligned}x(x + 2) &= 0 \\x &= 0 \vee x = -2 \\K &= \{-2; 0\}\end{aligned}$$

Lze též použít **metodu nulových bodů**

Př.:

$$\begin{aligned}4x^2 - 6x &< 2x \\4x^2 - 8x &< 0 \\4x(x - 2) &< 0 \\NB &= \{0, 2\}\end{aligned}$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$4x$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
*	+	-	+

$$K = (0; 2)$$

## Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Má-li rovnice neznámou ve jmenovateli, je nutné vždy stanovit její definiční obor.

## Rovnice v podílovém tvaru

Rovnice v podílovém tvaru má na jedné straně jediný zlomek s neznámou ve jmenovateli a na druhé straně nulu. Po stanovení definičního oboru řešíme rovnici tak, že položíme čitatele rovno nule a řešíme jako lineární rovnici nebo převedením na součinný tvar.

## Nerovnice v podílovém tvaru

Nerovnici v podílovém tvaru nesmíme vynásobit společným jmenovatelem, který obsahuje neznámou!

Nerovnici v podílovém tvaru převedeme na podílový tvar a řešíme metodou nulových bodů.

Př.:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} &\geq 1 \\ x &\neq -1 \\ \frac{2x-1}{x+1} - 1 &\geq 0 \\ \frac{2x-1-(x+1)}{x+1} &\geq 0 \\ \frac{x-2}{x+1} &\geq 0 \\ NB &= \{-1, 2\}\end{aligned}$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; +\infty)$
$x-2$	-	-	+
$x+1$	-	+	+
*	+	-	+

$$K = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

## Rovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota z reálného čísla je definována jako

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Také platí :

- $|a| = |-a|$
- $|a| \geq 0$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$

- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Nejprve určíme argumenty všech absolutních hodnot, ze kterých pak získáme nulové body a intervaly (u intervalu vždy ostrá závorka, kromě NB z jmenovatele). Poté vytvoříme tabulku jako v tabulkové metodě. Řešíme s upravenými tvary dle definice. **Ukaždého kořenu musíme ověřit zda leží v intervalu!**

Př.:

$$|x - 3| + 2x = 9$$

$x \in$	$(-\infty; 3)$	$\langle 3; +\infty)$
$x - 3$	$-$	$+$
$ x - 3 $	$(x - 3)$	$x - 3$

a)	b)
$x \in (-\infty; 3)$	$x \in \langle 3; +\infty)$
$-(x - 3) + 2x = 9$	$x - 3 + 2x = 9$
$-x + 3 + 2x = 9$	$3x - 3 = 9$
$x = 6$	$x = 4$
$6 \notin (-\infty; 3)$	$4 \in \langle 3; +\infty)$
$K_1 = \{\}$	$K_2 = \{4\}$

Rovnice má tedy jediný kořen  $x = 4$ , tedy  $K = \{4\}$ .

Rovnici ve tvaru  $|ax + b| = c$  lze řešit i **rychlejší metodou** bez stanovení intervalů, neboť platí  $ax + b = c \vee ax + b = -c$ .

I rovnici ve tvaru  $|ax + b| = |cx + d|$  lze řešit touto rychlou metodou:  $ax + b = cx + d \vee ax + b = -(cx + d)$ .

## Nerovnice s absolutní hodnotou

Řešíme obdobně jako rovnici s absolutní hodnotou. Z argumentů určíme NB a řešíme nerovnice nahrazené dle definice. Množina řešení je sjednocení množin každého z případů.

$$|x + 3| + 3x < 11$$

$x \in$	$(-\infty; 1)$	$\langle 1; +\infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$ x - 1 $	$-(x - 1)$	$x - 1$

a)	b)
$x \in (-\infty, 1)$	$x \in [1; +\infty)$
$-(x-1) + 3x < 11$	$x-1 + 3x < 11$
$-x+1 + 3x < 11$	$4x < 12$
$x < 5$	$x < 3$
$x \in (-\infty; 5)$	$x \in (-\infty; 3)$
$K_1 = (-\infty; 1) \cap (-\infty; 5)$	$K_2 = (-\infty; 3) \cap [1; +\infty)$
$K_1 = (-\infty; 1)$	$K_2 = [1; 3)$

Nerovnice má řešení  $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 3)$ .

## 5 Soustavy rovnic a nerovnice

### Soustava nerovnic

**Soustavu nerovnic** s jednou neznámou řešíme vyřešením každé nerovnice zvlášť. Řešením soustavy je  $K_1 \cap K_2$ .

Př.:

$$2x - 5 < 0$$

$$3x + 2 \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} 2x - 5 < 0 & 3x + 2 \geq 0 \\ 2x < 5 & 2x \geq -2 \\ x < \frac{5}{2} & x \geq -\frac{2}{3} \\ K_1 = (-\infty, \frac{5}{2}) & K_2 = [-\frac{2}{3}, \infty) \end{array}$$

$$K = K_1 \cap K_2 = [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$$

**Složenou nerovnici**  $ax + b < cx + d < ex + f$  převedeme na soustavu nerovnic:

$$ax + b < cx + d$$

$$cx + d < ex + f$$

### Soustavy rovnic o dvou neznámých

Soustavu dvou rovnic řešíme buď:

- **slučovací** (sčítací) - rovnice vhodně vynásobíme a sečteme
- **porovnávací** - z každé rovnice vyjádříme tutěž neznámou a porovnáme
- **dosazovací** - z jedné rovnice vyjádříme neznámou a dosadíme do druhé

### Řešení pomocí inverzních matic

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých ve tvaru

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

lze přepsat jako  $A \cdot X = B$ .

Je-li v soustavě rovnic  $A \cdot X = B$  matice  $B$  rovna nulové matici, mluvíme o homogenní soustavě rovnic. Matici  $X$  nazýváme maticí řešení.

Maticovou rovnici  $A \cdot X = B$  řešíme tak, že vynásobíme obě strany zleva vynásobíme maticí  $A^{-1}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$A^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = A^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\text{nezapomenout že } A^{-1} \cdot A = E$$

$$E \cdot \mathbf{X} = A^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\text{zde platí že } E \cdot X = X$$

$$\mathbf{X} = A^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Př.:

$$4x + y = -2$$

$$3x + y = 5$$

$$A \cdot X = B, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Určíme inverzní matici } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } X = A^{-1} \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -7 \wedge y = 26$$

Pokud rozšíříme matici soustavy na tvar  $(A|B)$ , pak platí, že (Frobeniova věta) soustava je řešitelná, když  $h(A) = h(A|B)$ . Pokud  $h(A)$  se rovná počtu neznámých, má soustava jediné řešení.

### Gaussova eliminační metoda

Soustavu převedeme na tvar např.  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ , kterou pak upravíme do tvaru

$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow K = \{[a_1, a_2]\}$ . Pozn. aut. jestli se někdo dostane k tomuhle, nechť je mu zem lehká.

### Cramerovo pravidlo

Nechť je dána soustava  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  s maticí soustavy  $\mathbf{A}$ .

Matice  $\mathbf{A}$  vznikne z matice  $A$  nahrazením  $i$ -tého sloupce sloupkem pravé strany. Vznikou tři případy:

- $\det(A) = 0$  a pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $\det(A_i) = 0 \Rightarrow$  NMŘ
- $\det(A) = 0$  a existuje alespoň jedno  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  kdy  $\det(A_i) \neq 0 \Rightarrow$  ŽŘ
- $\det(A) \neq 0$  a pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \Rightarrow$  právě jedno řešení

Př.:

$$x + y = 2$$

$$x - y = 4$$

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{D_x}{D_s} = 3 \wedge y = \frac{D_y}{D_s} = -1$$

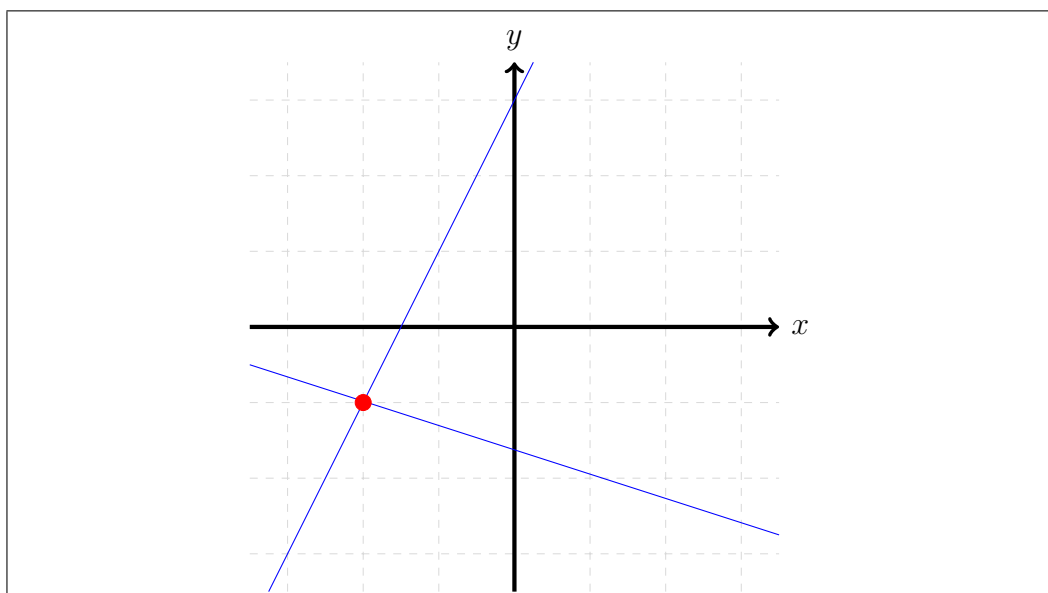
$$K = \{[3; -1]\}$$

## Grafické řešení soustavy (ne)rovníc o dvou neznámých

### Soustava rovnic

**Soustavu rovnic o dvou neznámých** řešíme graficky tak, že si vyjádříme  $y$  a sestrojíme grafy funkcí.

$$\begin{aligned}2x - y &= -3 \Rightarrow y = 2x + 3 \\ x + 3y &= -5 \Rightarrow y = -\frac{x+5}{3}\end{aligned}$$



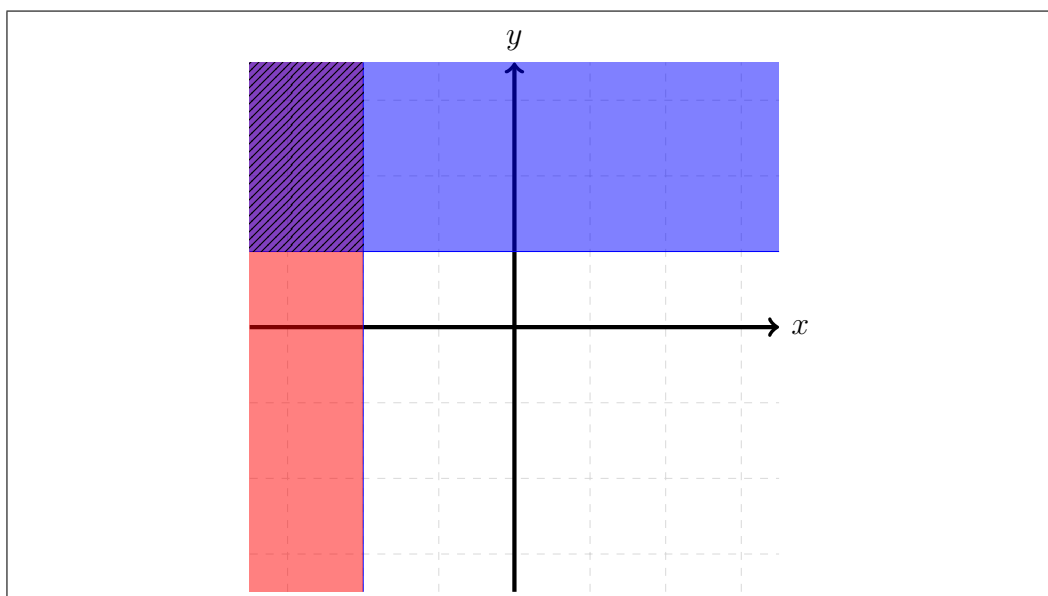


## Soustava nerovnic

**Soustavu nerovnic** řešíme graficky vyřešením každé zvlášť a určením průniku všech polorovin.

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

$$y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$$



## Soustavy tří rovnic o třech neznámých

Soustavu tří rovnic o třech neznámých řešíme nejčastěji metodou slučovací nebo dosazovací.

**Metoda dosazovací:** z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do zbylých dvou. Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých vyřešíme.

**Metoda slučovací:** Vhodně rovnice vynásobíme a sečteme tak, abychom získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Můžeme také použít inverzní matici, GEM nebo Cramerovy vzorce.

## 6 Kvadratická rovnice a nerovnice

Rovnici nazýváme kvadratickou, pokud lze převést na tvar  $ax^2 + bx + c = 0$ . Číslo  $a$  nazýváme kvadratický koeficient,  $b$  lineární koeficient a  $c$  absolutní člen.

- Ryze kvadratická -  $b = 0 \wedge c \neq 0$  -  $x^2 - 4 = 0$
- Kvadratická bez absolutního členu -  $b \neq 0 \wedge c = 0$  -  $x^2 + 2x = 0$
- Úplná kvadratická -  $b \neq 0 \wedge c \neq 0$  -  $2x^2 + 4x - 4 = 0$

### Ryze kvadratická rovnice

**Ryze kvadratická rovnice**  $ax^2 + c = 0$  je řešitelná právě když  $a \cdot c < 0$ . Řešíme ji převedním pomocí rozdílu čtverců. Př.:

$$\begin{aligned}4x^2 - 8 &= 0 \\4 \cdot (-8) < 0 &\Rightarrow \text{je řešitelná} \\4(x^2 - 2) &= 0 \\4(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0 \\K &= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}\end{aligned}$$

### Kvadratická rovnice bez absolutního členu

**Kvadratická rovnice bez absolutního členu**  $ax^2 + bx = 0$  je řešitelná vždy a jeden z kořenů je roven nule. Řešíme převedením na součinný tvar vytknutím  $x$ . Př.:

$$\begin{aligned}3x^2 + 18x &= 0 \\3x(x + 6) &= 0 \\K &= \{-6; 0\}\end{aligned}$$

### Úplná kvadratická

Řešíme pomocí **diskriminantu** a dosazením do vzorce.

$$D = b^2 - 4ac \wedge x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- $D > 0 \Rightarrow K = \{x_1, x_2\}, |K| = 2$
- $D = 0 \Rightarrow K = \{x_1/2\}, x_1 = x_2, |K| = 1$
- $D < 0 \Rightarrow K = \{\}, |K| = 0$

## Rovnice vyšších řádů řešené pomocí KR

**Bikvadratická rovnice** ve tvaru  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , kterou substitucí  $y = x^2$  převedeme na kvadratickou rovnici.

Př.:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 3x^2 + 2 &= 0 \\
 [y = x^2] \\
 y^2 - 3y + 2 &= 0 \\
 (y - 1)(y - 2) &= 0 \\
 y = 1 \vee y = 2 \\
 x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1 \\
 x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \\
 K &= \{\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

## Viètovy vzorce

Kvadratickou rovnici ve tvaru  $ax^2 + bx + c = 0$  s kořeny  $x_1, x_2$  lze rozložit na kořenové činitele:  $a(x - x_1)(x - x_2)$ .

Každou kvadratickou rovnici lze vydělením  $a$  normovat na tvar  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x = 0$ , nebo  $x + px + q = 0$ .

Pro normovanou rovnici platí  $x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q$ .

## Kvadratické nerovnice

**Kvadratickou nerovnici**  $ax^2 + bx + c \geq 0$  řešíme převedením na součinný tvar pomocí rozkladů na kořenové činitele a poté metodou nulových bodů.

Př.:

$$\begin{aligned}
-2x^2 - x + 3 &\geq 0 \\
2x^2 + x - 3 &\leq 0 \\
D = 25 \wedge x_1/2 &= \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \\
2(x-1)(x + \frac{3}{2}) &\leq 0
\end{aligned}$$

$x \in$	$(-\infty; -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}; 1)$	$(1; +\infty)$
$x - 1$	—	—	+
$x + \frac{3}{2}$	—	+	+
*	+	—	+

$$K = \langle -\frac{3}{2}; 1 \rangle$$

## Soustava lineární a kvadratické rovnice

Soustavu vždy řešíme dosazovací metodou a to tak, že z lineární rovnice vyjádříme neznámou a dosadíme to kvadratické.

## Iracionální rovnice

**Iracionální rovnice** je rovnice, ve které je neznámá v odmocnině. Takovou rovnici musíme řešit po stanovení  $D_f$ . Můžeme poté obě strany umocnit, což je úprava důsledková, takže musíme provést zkoušku a vyloučit některé kořeny.

Př.:

$$\begin{aligned}
\sqrt{9+x} - \sqrt{x-7} &= 2 \\
\sqrt{9+x} &= 2 + \sqrt{x-7} \quad |^2 \\
9+x &= 4 + 4\sqrt{x-7} + x-7 \\
4\sqrt{x-7} &= 12 \\
\sqrt{x-7} &= 3 \quad |^2 \\
x-7 &= 9 \\
x &= 16
\end{aligned}$$

Zk.:

$$L(16) = \sqrt{9+16} - \sqrt{16-7} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$$

$$P(16) = 2$$

$$L = P \Rightarrow K = \{16\}$$

## 7 Lineární funkce a její vlastnosti

Nechť jsou dány neprázdné podmnožiny  $A, B$  množiny  $\mathbb{R}$ . Funkce  $f$  na množině  $A$  je předpis, který každému číslu z množiny  $A$  přiřazuje právě jedno číslo z množiny  $B$ .

Množina  $A$  se nazývá **definiční obor funkce**, značí se  $D_f$  a množina  $B$  **obor hodnot funkce**, značí se  $H_f$ .

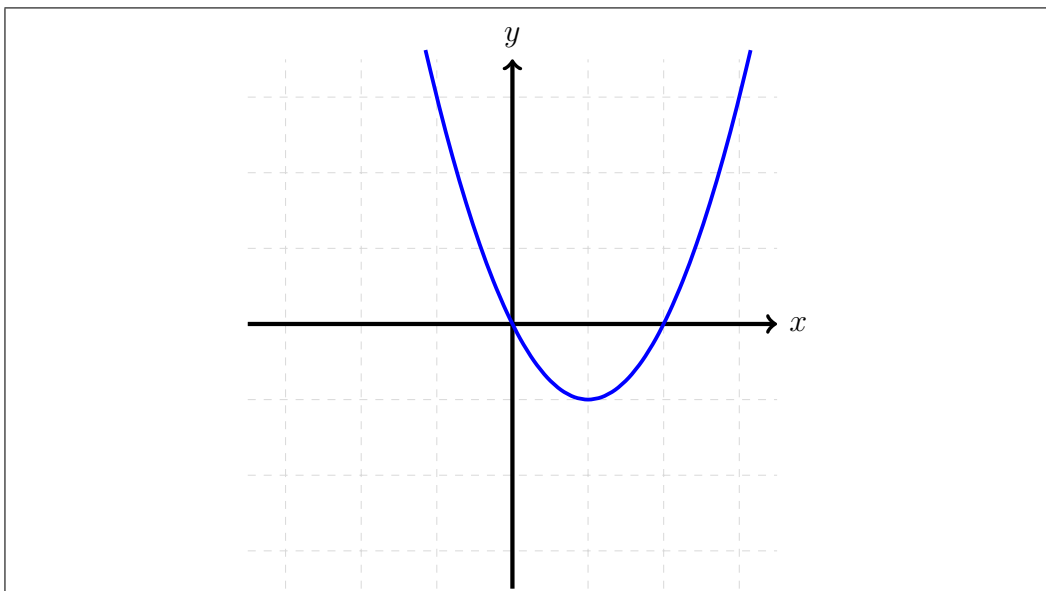
Funkce může být zadána:

- předpisem  $f : y = 4x - 1$
- tabulkou
- grafem

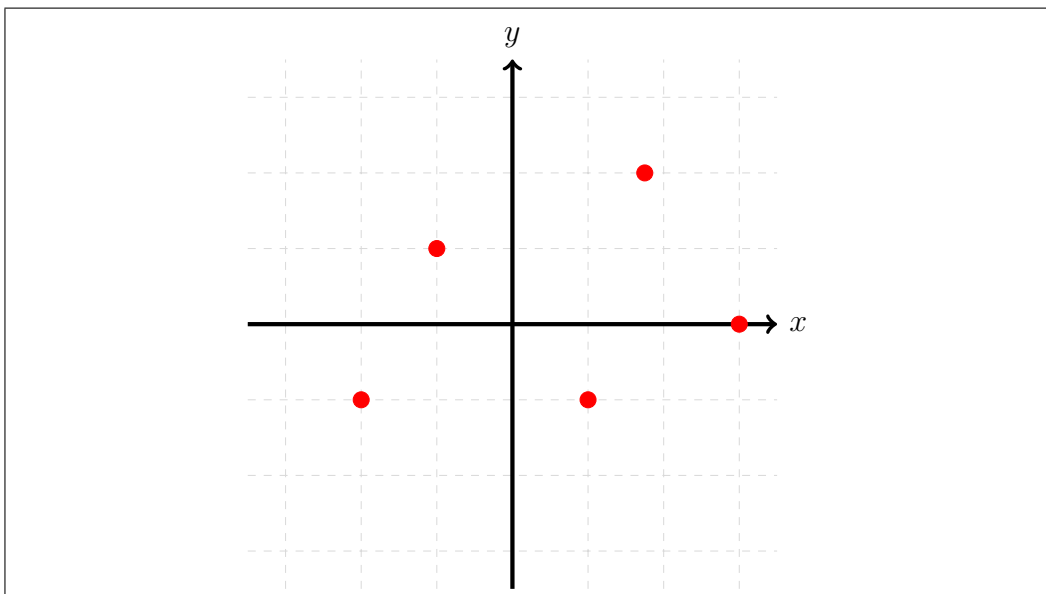
Že číslo  $x_0$  z  $D_f$  přiřadí číslo  $y_0$  z  $H_f$ , zapisujeme  $y_0 = f(x_0)$ .  $f(x_0)$  nazýváme **hodnotou funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

### Graf funkce

**Graf funkce** v soustavě souřadnic  $O_xy$  je množina všech bodů  $[x, f(x)]$  kde  $x \in D_f$ .



Obrázek 6: Spojitý graf  $y = x^2 - 2x$



Obrázek 7: Diskrétní graf

**Maximální definiční obor** je množina všech reálných čísel  $x_0$  pro které je možné z předpisu určit funkční hodnotu  $f(x_0)$ .

**Obor hodnot**  $H_f$  funkce  $f$  je množina všech hodnot  $y$  ke kterým existuje alespoň jedno  $x \in D_f$  tak, že  $y = f(x)$ .

**Průsečíky s osami:**

- s osou  $x$ :  $P_x[x_0, 0]$  - může jich být více
- s osou  $y$ :  $P_y[0, y_0]$  - maximálně jeden

## Lineární funkce

**Lineární funkce** je funkce s předpisem  $f : y = ax + b$ . Jejím grafem je přímka (pro  $D_f = \mathbb{R}$ ).

Je-li  $a = 0$ , je to **konstantní funkce**.

Je-li  $a \neq 0 \wedge b = 0$  je to **přímá úměra**.

Máme-li z grafu/tabulky určit předpis, musíme znát 2 její různé body, které dosadíme do předpisu  $y = ax + b$ .

Často se setkáváme s grafem **po částech lineární funkce**. Její předpis:

$$f : y = \begin{cases} 2x + 3, & x \in \langle -2; -1 \rangle \\ x + 2, & x \in \langle -1; 0 \rangle \\ -x + 2, & x \in \langle 0; \frac{3}{2} \rangle \end{cases} \quad (1)$$

## Vlastnosti funkcí

- **rostoucí** - pro  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: jestliže  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající** - pro  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: jestliže  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) > f(x_2)$
- **nerostoucí** - pro  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: jestliže  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **neklesající** - pro  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: jestliže  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) \leq f(x_2)$

Každá rostoucí nebo klesající funkce je **prostá**.

Funkce může též být (ne)rostoucí/klesající na určitém intervalu.

Funkce  $f$  je:

- **sudá**, právě když pro každé  $x \in D_f$  platí:  $f(-x) = f(x)$ ; souměrná podle osy  $y$
- **lichá**, právě když pro každé  $x \in D_f$  platí:  $f(-x) = -f(x)$ ; souměrná podle počátku soustavy

## Inverzní funkce

**Inverzní funkcí**  $f^{-1}$  k funkci  $f$  získáme tak, že v předpisu zaměníme navzájem proměnné.

## 8 Kvadratická funkce a její vlastnosti

**Kvadratická funkce** má obecný předpis  $y = ax^2 + bx + c$ ;  $a \neq 0$ . Jejím grafem je **parabola**.

Funkce se nazývá:

- **zdola omezená**, právě když existuje reálné číslo  $d$  takové, pro  $x \in D_f$  platí:  $f(x) \geq d$
- **shora omezená**, právě když existuje reálné číslo  $h$  takové, pro  $x \in D_f$  platí:  $f(x) \leq h$
- **omezená**, právě když je shora i zdola omezená

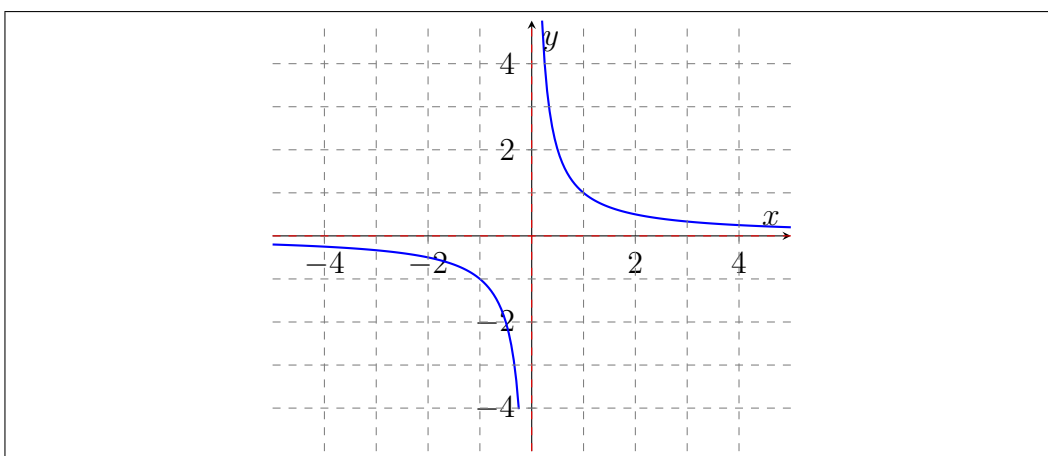
Předpis kvadratické funkce můžeme též vyjádřit ve **vrcholovém tvaru**  $y = a(x - m)^2 + n$ ;  $a \neq 0$  kde lze určit souřadnice vrcholu  $V[m, n]$ .

## 9 Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti

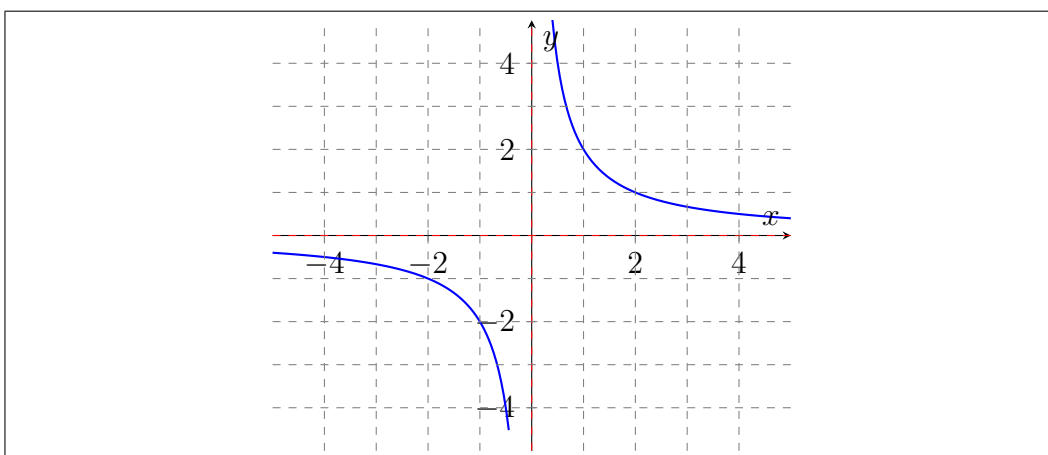
### Lineárně lomená funkce

**Lineárně lomená funkce** má obecný předpis  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Jejím grafem je **hyperbola**.

Nejjednodušší předpis LLF je  $f : y = \frac{1}{x}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (je to nepřímá úměrnost), střed hyperboly je v bodě  $[0; 0]$ , osy  $x, y$  jsou asymptoty hyperboly.

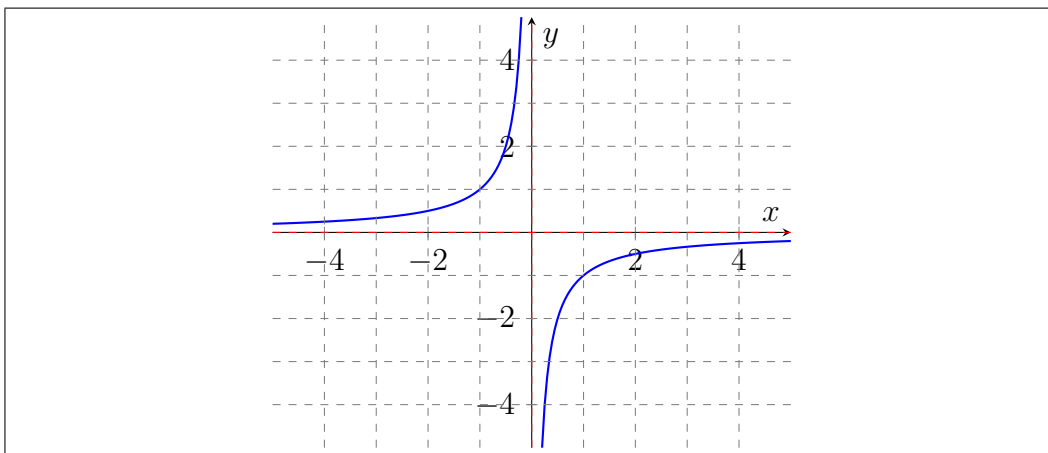


Obrázek 8:  $y = \frac{1}{x}$



Obrázek 9:  $y = \frac{2}{x}$



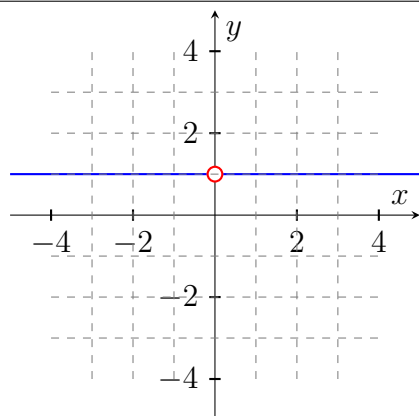


Obrázek 10:  $y = -\frac{1}{x}$

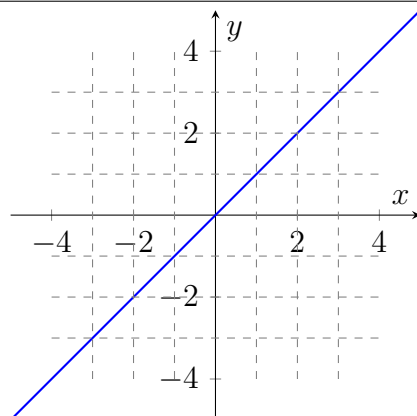
Předpis LLF může být i ve **středovém tvaru**  $y = \frac{a}{x-m} + n$ , kde  $[m; n]$  jsou souřadnice středu hyperboly (průsečík asymptot) a  $a$  je její koeficient. Obecný tvar na středový převedeme vydělením.

## Mocninná funkce

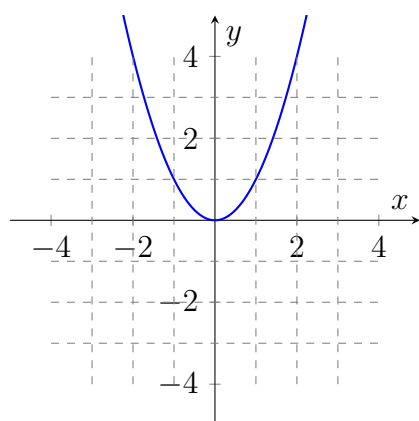
Mocninná funkce je funkce s předpisem  $y = x^n$ .



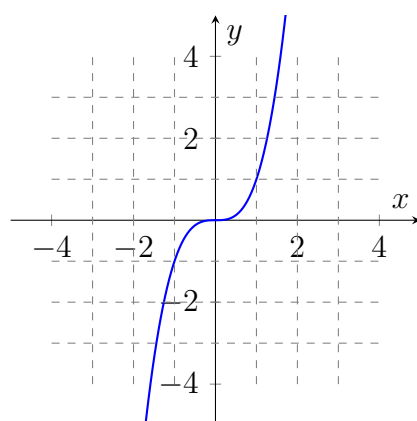
(a)  $y = 1$



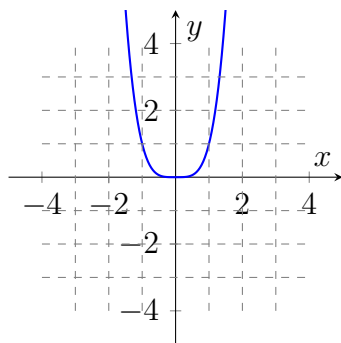
(b)  $y = x$



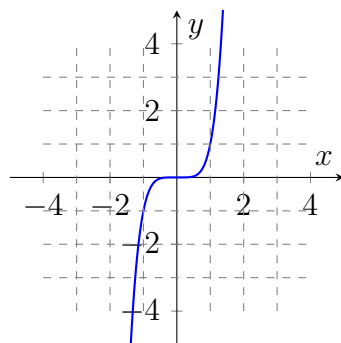
(c)  $y = x^2$



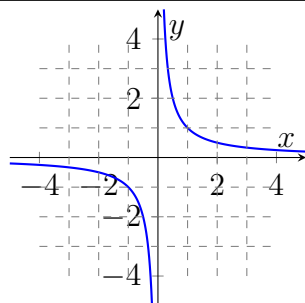
(d)  $y = x^3$



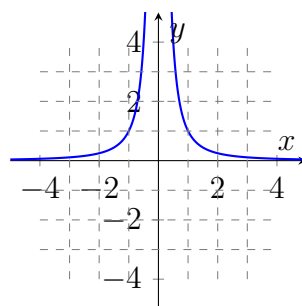
(a)  $y = x^4$



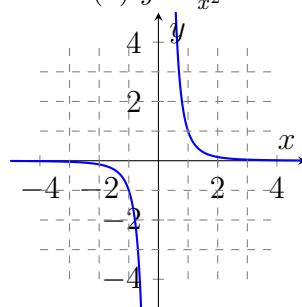
(b)  $y = x^5$



(a)  $y = \frac{1}{x}$

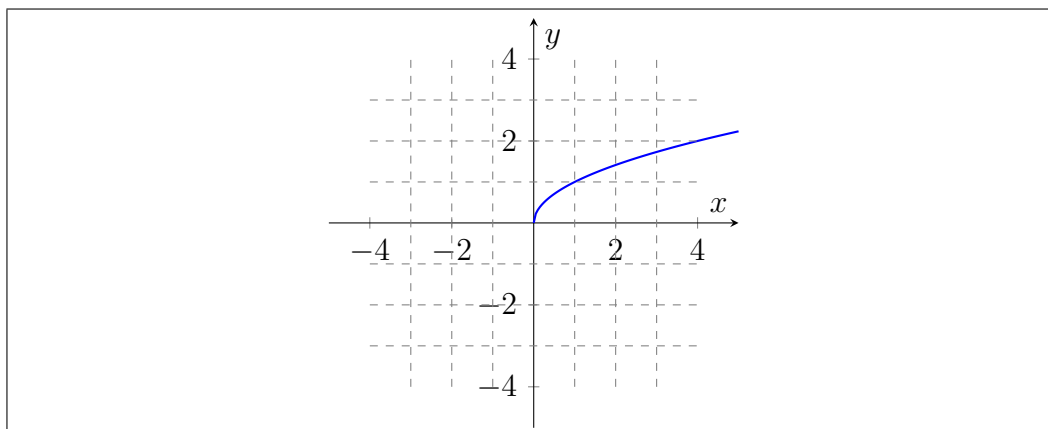


(b)  $y = \frac{1}{x^2}$



(c)  $y = \frac{1}{x^3}$

**Dovětek** Mocninnou funkci s předpisem  $y = x^n$  lze definovat i pro  $n \in \mathbb{Q}$ . Např.  $n = \frac{1}{2}$  bude mít předpis  $y = \sqrt{x}$  což je inverzní funkce k kvadratické funkci. Inverzní funkci lze stanovit pouze k prosté funkci, musíme tedy stanovit  $D_f$ , na kterém je původní funkce prostá, v tomto případě je  $D_f = \mathbb{R}_0^+$ .



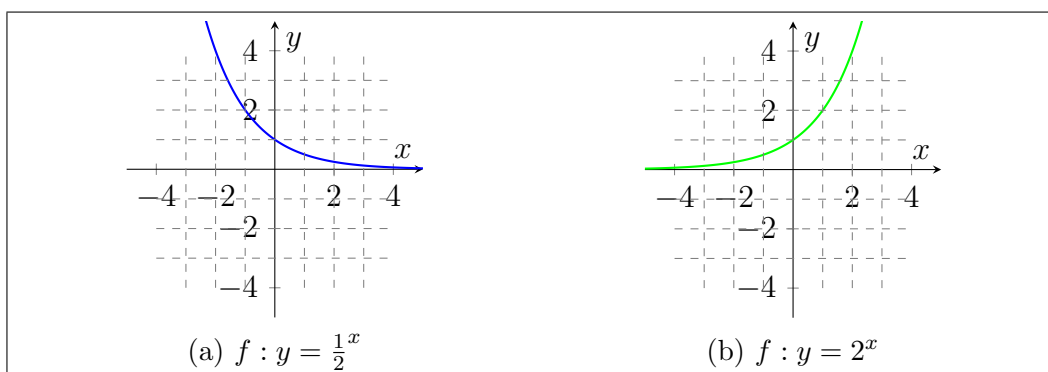
Obrázek 14:  $y = \sqrt{x}$

## 10 Exponenciální a logaritmická funkce

### Exponenciální funkce

**Exponenciální funkce** o základu  $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$  je funkce s předpisem  $y = a^x$  a křivkou exponenciálou.

Funkce je pro  $a \in (0; 1)$  klesající, pro  $a \in (1; +\infty)$  rostoucí. Maximální definiční obor je  $\mathbb{R}$  a obor hodnot  $H_f = (0; +\infty)$ . Osa  $x$  je asymptotou. Je to funkce prostá.



## Exponenciální rovnice

### Exponenciální rovnice prvního typu

ER je rovnice, kde se neznámá vyskytuje v exponentu. **První typ** ER jsou rovnice, které po užití vzorců (str. 12) a ekvivalentních úprav mají na obou stranách jednočlen. Řešíme převedením na mocninu se stejným základem a porovnáváme exponenty.

Př.:

$$\begin{aligned}3^{x+2} + 3^{x-1} &= 28 \\3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} &= 28 \\3^x(9 + \frac{1}{3}) &= 28 \\3^x \cdot \frac{28}{3} &= 28 \quad | : \frac{28}{3} \\3^x &= 3^1 \\x &= 1 \\K &= \{1\}\end{aligned}$$

### Exponenciální rovnice druhého typu

Druhým typem jsou rovnice, které nelze upravit tak, aby na obou stranách byl jednočlen. Musíme zavést substituci.

Př.:

$$\begin{aligned}4^x - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\[y = 2^x] \\(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\y^2 - 9y + 8 &= 0 \\(y - 1)(y - 8) &= 0 \\y = 1 \vee y = 8\end{aligned}$$

! Musíme dosadit zpět do substituce!

$$\begin{array}{ll}\text{i)} & \text{ii)} \\2^x = 1 & 2^x = 8 \\2^x = 2^0 & 2^x = 2^3 \\x = 0 & x = 3 \\K = \{0; 3\}\end{array}$$

## Exponenciální nerovnice

Jednoduché exponenciální nerovnice lze upravit tak, aby měly jeden z tvarů:  $a^r < a^s \vee a^r > a^s \vee a^r \geq a^s \vee a^r \leq a^s$ . Záleží jestli je funkce  $y = a^x$  klesající nebo rostoucí, je-li  $a > 1$  pak neměníme znaménko. Pokud je  $0 < a < 1$  pak se znaménko nerovnosti mění.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+2} &\leq 1 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+2} &\leq \left(\frac{1}{7}\right)^0 \\ 3x+2 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{2}{3} \\ K &= \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

## Logaritmická funkce

### Logaritmus

**Logaritmus** z kladného čísla  $a$  při základu  $z$  je roven číslu  $b$  zapisujeme  $\log_z a = b$  právě když platí  $z^b = a$ .

Základ je vždy z intervalu  $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ , je-li  $z = 10$  pak píšeme jen  $\log a$ , je-li  $z = e$  pak píšeme jen  $\ln a$ .

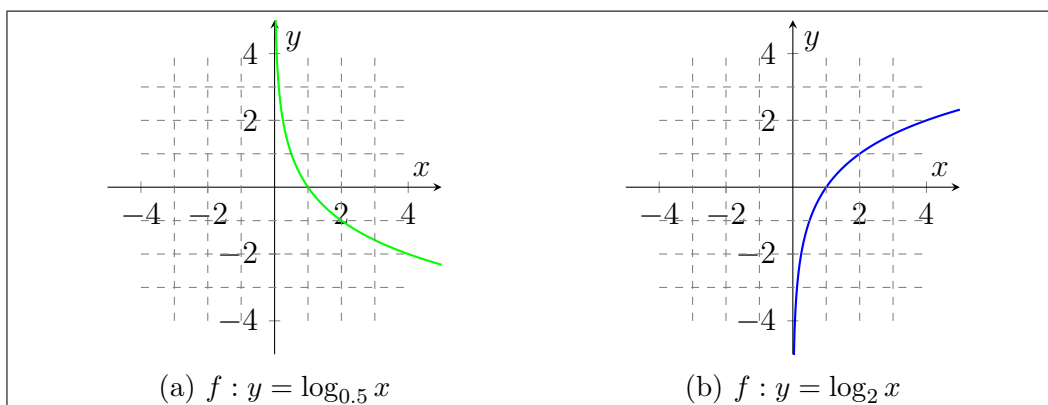
Pravidla pro počítání s logaritmy:

- $\log_z 1 = 0$
- $\log_z ab = \log_z a + \log_z b$
- $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b$
- $\log_z a^n = n \log_z a$

### Logaritmická funkce

**Logaritmická funkce**  $f : y = \log_z x, z \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$  s definičním oborem  $D_f = (0; +\infty)$  a oborem hodnot  $H_f = \mathbb{R}$  je inverzní funkce k exponenciální funkci  $y = z^x$ .

Logaritmická funkce je pro  $a \in (0; 1)$  klesající a pro  $a \in (1; +\infty)$  rostoucí.



## Logaritmické rovnice

V logaritmické rovnici se nachází neznámá v logaritmu. Musíme vždy stanovit definiční obor rovnice. Řešíme převedením na logaritmus o stejném základu a porovnáme argumenty. Není-li to možné, zavádíme substituci.

$$\log(x - 3) - \log x = -1$$

$$\text{Podmínky: } x > 3 \wedge x > 0 \Rightarrow D_R = (3; +\infty)$$

$$\log \frac{x - 3}{3} = \log 0.1$$

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{1}{10}$$

$$x - 3 = \frac{1}{10}x$$

$$\frac{9}{10}x = 3$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$K = \left\{ \frac{10}{3} \right\}$$

$$\log x + \frac{1}{\log x} = 2$$

$$\text{Podmínky: } x > 0 \wedge x \neq 1 \Rightarrow D_R = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$[y = \log x]$$

$$y + \frac{1}{y} = 2 \mid \cdot y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$y = 1$$

$$\log x = 1$$

$$x = 10 \in D_R$$

$$K = \{10\}$$

### Logaritmické nerovnice

Logaritmické nerovnice řešíme:

1. určíme  $D_R$
2. obě strany převedeme na logaritmus o stejném základu
3. porovnáváme argumenty, platí změna znaménka při základu z intervalu  $(0; 1)$

$$\log_{0.5}(x+3) \leq \log_{0.2} 2x$$

$$\text{Podmínky: } x > 3 \wedge x > 0 \Rightarrow D_N = \mathbb{R}^+$$

$$x+3 \geq 2x$$

$$-x \geq -3$$

$$x \leq 3$$

$$K = (-\infty; 3) \cap D_N$$

$$K = (0; 3)$$



## 11 Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$  se středem  $S$  a poloměrem  $r = 1j$ , délka takové kružnice je  $2\pi j$ .

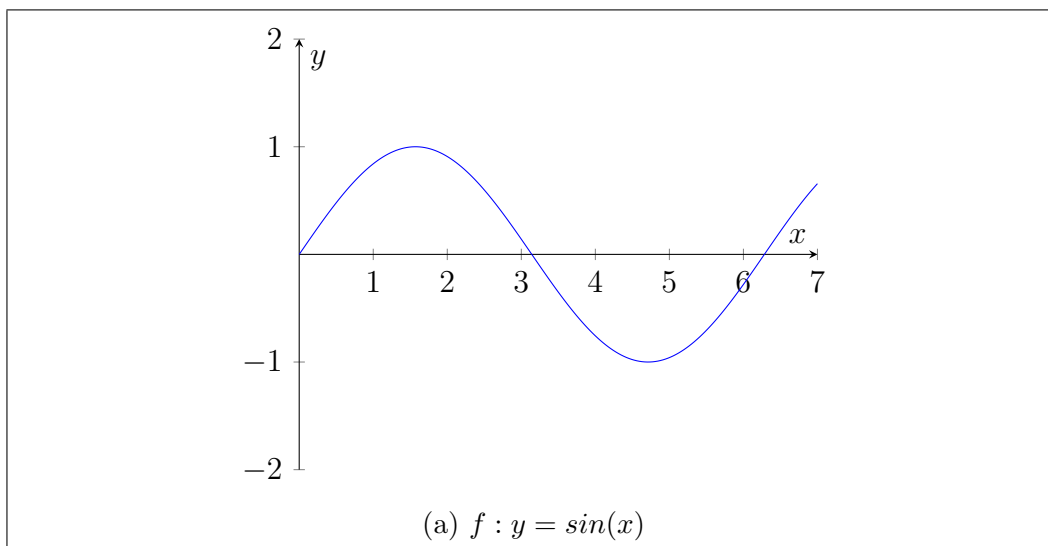
**Radián** je středový úhel, příslušící jednotkové kružnici oblouku o délce  $1j$ .

### Sinus

V pravoúhlém trojúhelníku definujeme funkci sinus jako poměr délek protilehlé odvěsny ku přeponě. Křivku funkce nazýváme sinusoida.

Funkce  $f : y = \sin(x)$  je v  $Q_1$  a  $Q_2$  nezáporná, v  $Q_3$  a  $Q_4$  je nekladná. Obor hodnot je interval  $\langle -1; 1 \rangle$ .

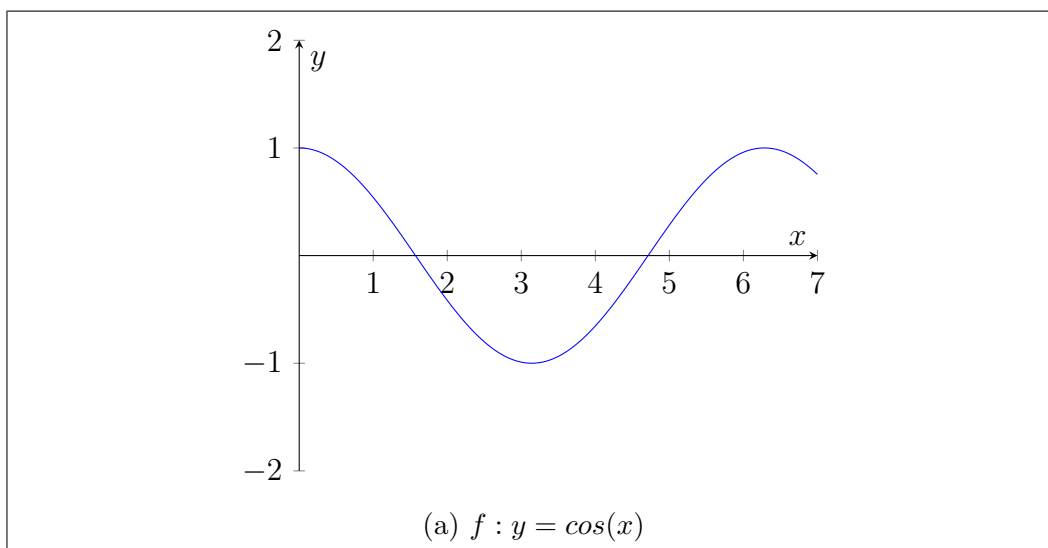
Funkce sinus je **periodická** s periodou  $2\pi \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}) \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ .



### Kosinus

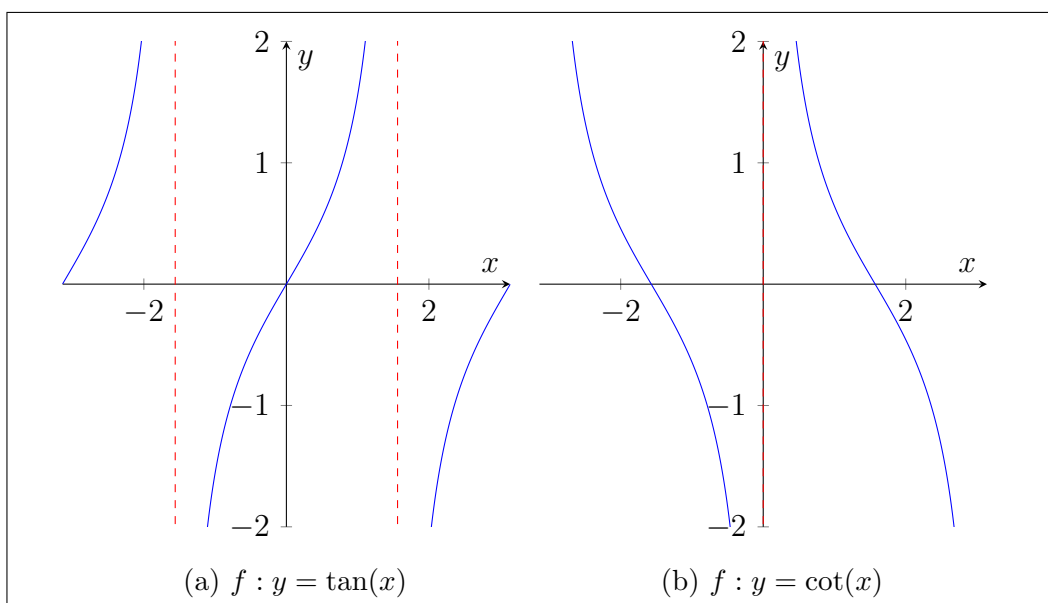
Funkce kosinus je v  $Q_1$  a  $Q_4$  nezáporná, a v  $Q_2$  a  $Q_3$  nekladná. Obor hodnot je interval  $\langle -1; 1 \rangle$ . Maximální definiční obor  $\mathbb{R}$ . Perioda je  $2\pi$ .

Kosinusoida je sinusoida posunutá o  $\frac{\pi}{2}$ .



## Tangens a kotangens

Obor hodnot obou funkcí je  $\mathbb{R}$ . Funkce jsou periodické s periodou  $\pi$ . Obě funkce jsou v  $Q_1$  nezáporné a v  $Q_2$  nekladné.



## Tangens

Funkce není definována v bodech  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . V grafu jsou to asymptoty.

## Kotangens

Funkce není definována v bodech  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . V grafu jsou to asymptoty.

## Goniometrické vzorce

Pozn. najdu je v **TABULKÁCH!**

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (první goniometrická jednotka)
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\tan x \cdot \cot x = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

## Goniometrické rovnice

Př.:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \text{ je kladný v } Q_1 \wedge Q_2; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

---

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

---

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi \right\}$$

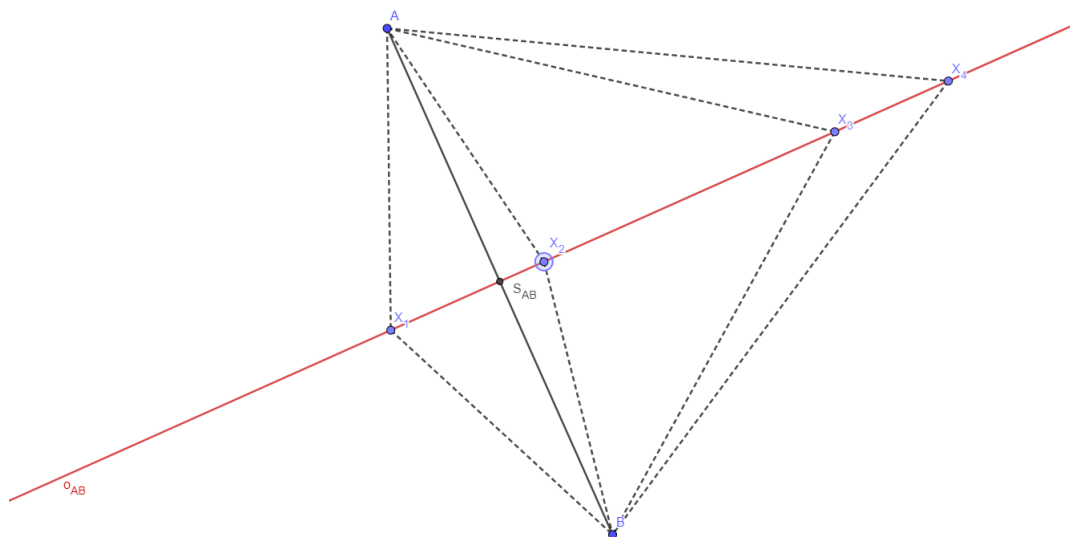
## 12 Množiny bodů dané vlastnosti

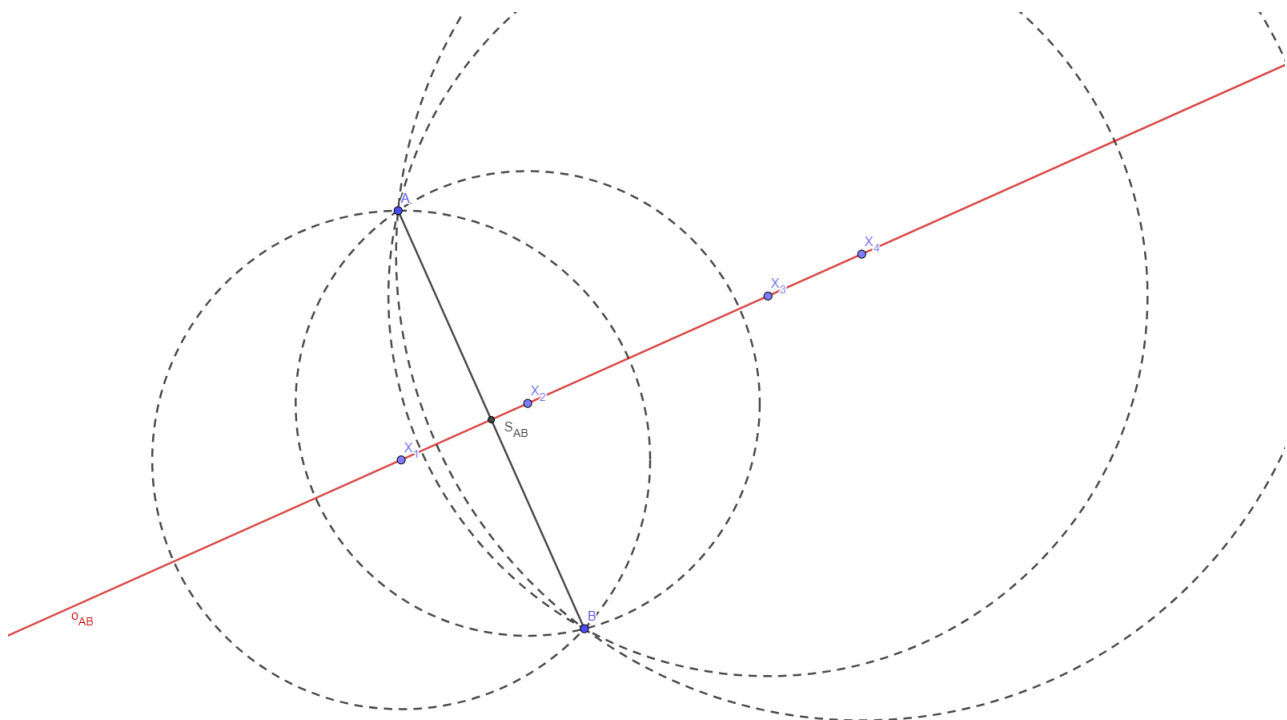
Množina  $M$  dané vlastnosti je množina všech bodů roviny, pro kterou platí:

- každý bod množiny  $M$  má danou vlastnost
- každý bod, který má danou vlastnost, patří do množiny  $M$

### Osa úsečky $AB$

- je množina všech bodů, které mají od dvou bodů  $A, B$  stejnou vzdálenost
- je množina všech středů kružnic, které procházejí danými body  $A, B$



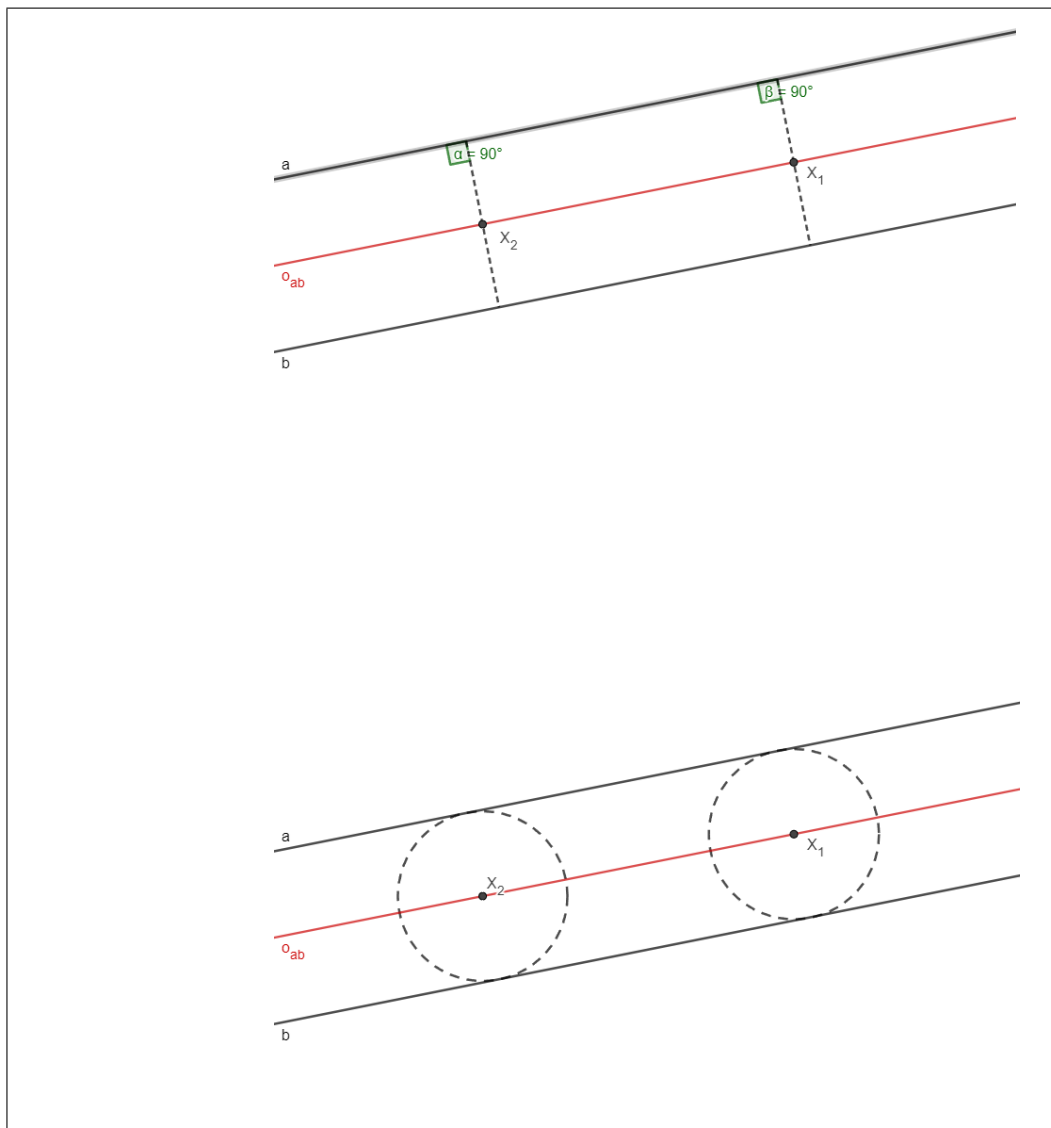


$$o_{AB} = \{X; |AX| = |BX|\}$$

## Osa rovnoběžek a, b

Resp. osa rovinného pásu

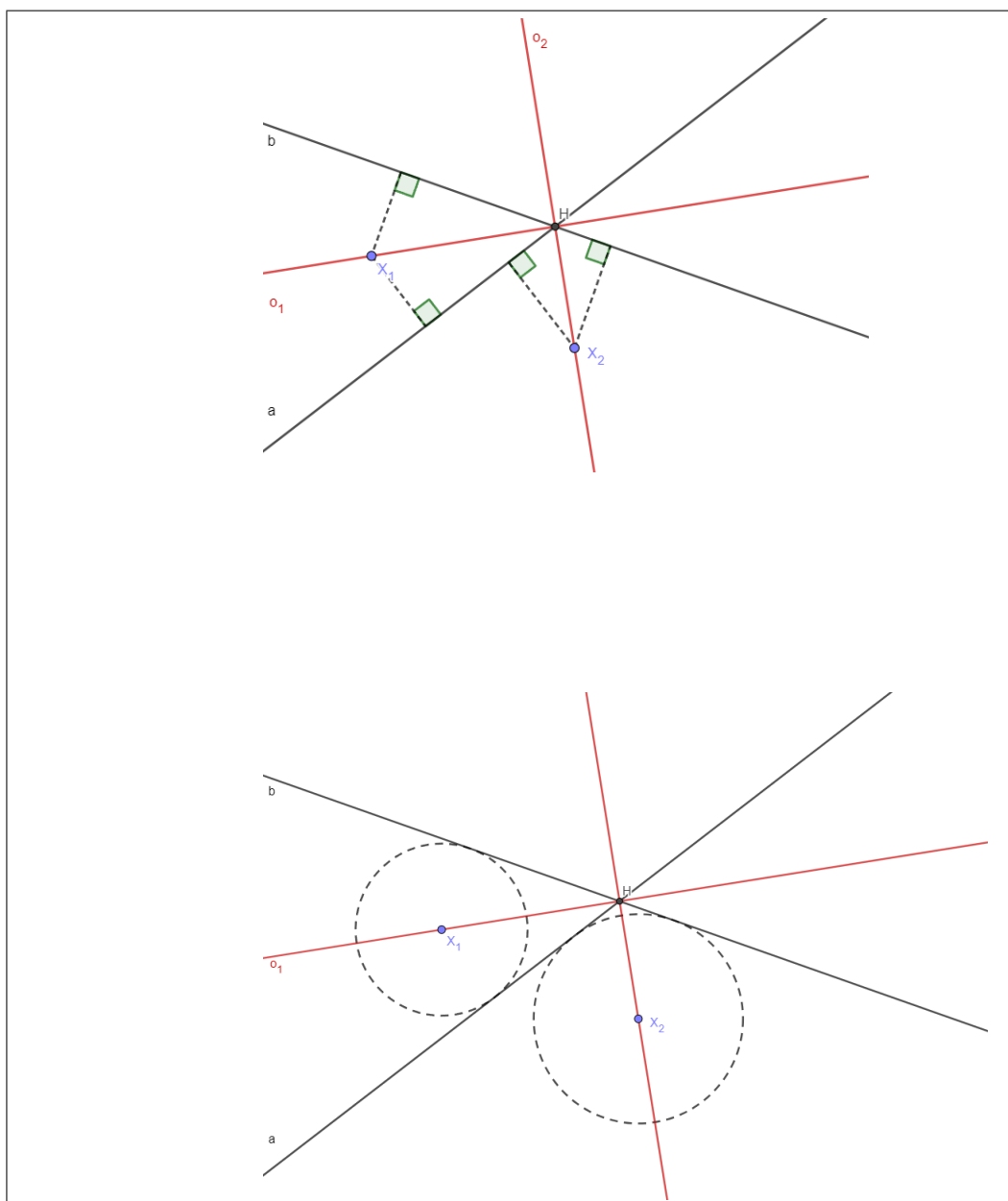
- je množina všech bodů, které mají od daných dvou rovnoběžek  $a, b$  stejnou vzdálenost
- je množina středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek  $a, b$



$$o_{ab} = \{X; |Xa| = |Xb| = \frac{1}{2}ab\}$$

## Osy různoběžek

- je množina všech bodů, které mají od daných různoběžek  $a, b$  stejnou vzdálenost
- (kromě jejich průsečíku) je množina všech středů kružnic, které se dotýkají daných dvou různoběžek  $a, b$



$$o_1 \cup o_2 = \{X; |Xa| = |Xb|\}$$
 Osy různoběžek jsou na sebe vždy kolmé.

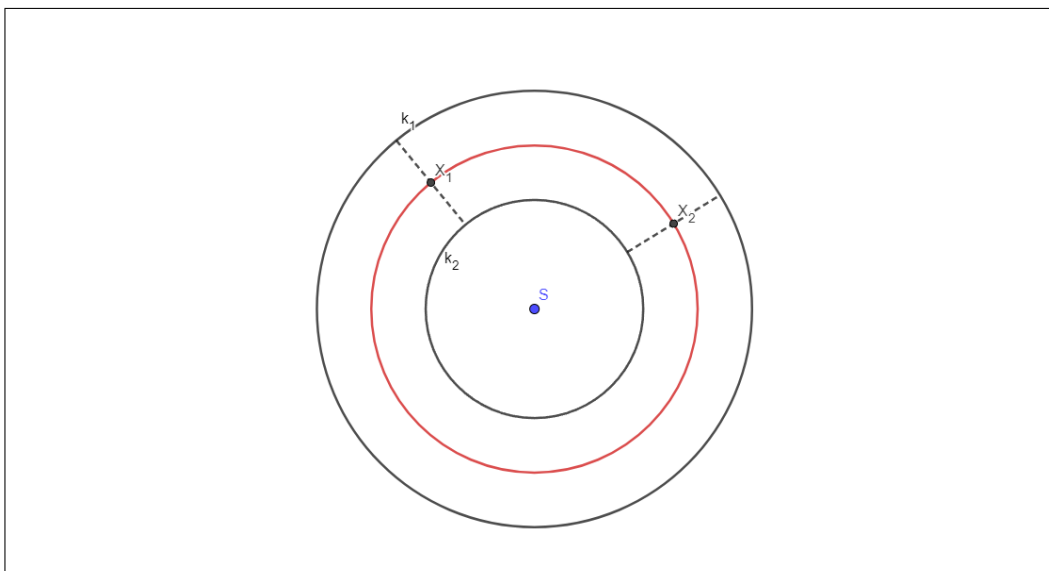
## Soustředné kružnice

Nechť jsou dány dvě soustředné kružnice  $k_1(S, r_1), k_2(S, r_2), r_1 > r_2$ .

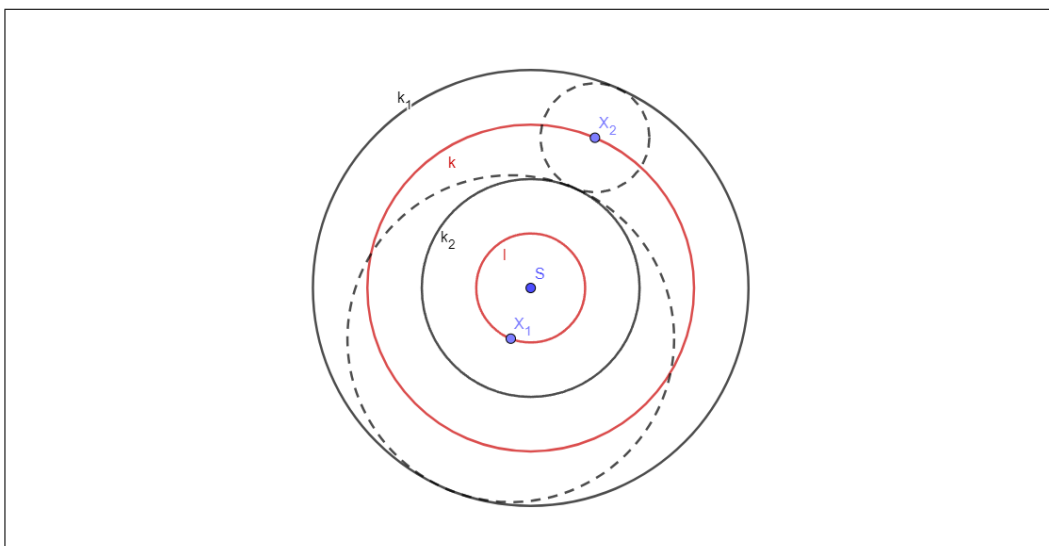
**Kružnice**  $k(S, r)$  kde  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ , je množina všech bodů, které mají od



daných kružnic stejnou vzdálenost.



**Dvě kružnice**  $k(S, r_1), l(S, r_2)$ , kde  $r_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), r_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$  je množina středů kružnic, které se dotýkají daných kružnic.

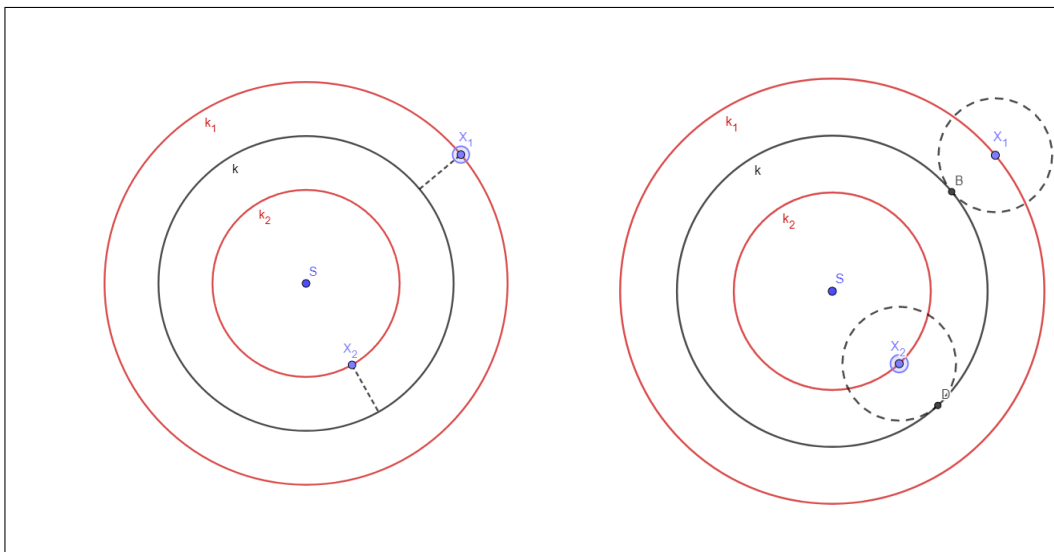


## Ekvidistanty kružnice

Nechť je dána kružnice  $k(S, r)$  a kladné reálné číslo  $d$ .

Pro  $d < r$  sjednocení kružnic  $k_1(S, r + d) \cup k_2(S, r - d)$ ; pro  $d \geq r$  kružnice  $k_1(S, r + d)$  je

- množina všech bodů, které mají od dané kružnice  $k$  vzdálenost  $d$
- množina středů všech kružnic s poloměrem  $d$ , které se dotýkají dané kružnice



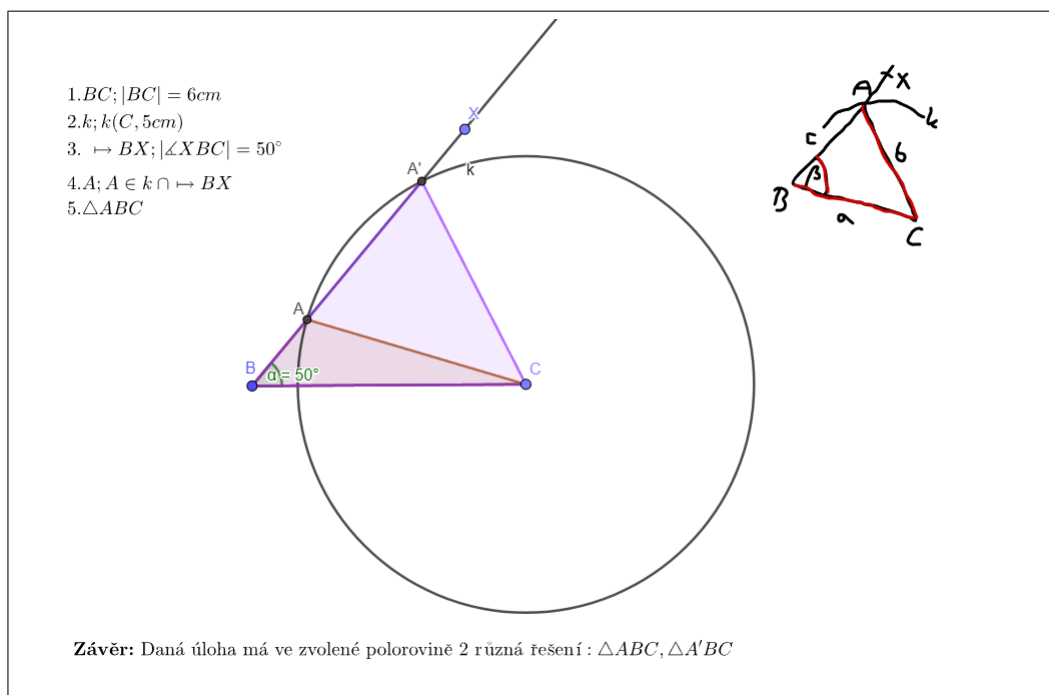
## 13 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Řešení konstrukční úlohy má tyto fáze:

- **rozbor úlohy** - předpokládáme že existuje alespoň jeden hledaný trojúhelník, ten načrtneme a vyznačíme hledané prvky; hledáme vztahy a množiny bodů
- **zápis konstrukce** - symbolický zápis všech kroků konstrukce (+ pomocný náčrtek)
- **konstrukce** - sestrojíme trojúhelník (všechna řešení nebo jen zvolenou polorovinu) podle zápisu
- **závěr** - uvedeme počet řešení, popř. zkouška

**Sestroj trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:  $a = 6\text{cm}$ ,  $b = 5\text{cm}$ ,  $\beta = 50^\circ$ .**

**Rozbor úlohy:** po sestrojení strany  $BC$  s délkou 6 cm, musíme najít vrchol  $A$ , který je od vrcholu  $C$  vzdálen 5 cm, leží tedy na kružnici  $k(C, 5\text{cm})$ ; dále víme, že vrchol  $A$  leží na polopřímce  $BX$  tak, že velikost úhlu  $XBC$  je  $50^\circ$ ; vrchol  $A$  leží v průsečíku množin bodů polopřímky  $BX$  a kružnice  $k$ .



Pokud nejsou zadány údaje konkrétně, ale pouze obecně, konstrukce se neprovádí a místo závěru se provede **diskuse řešitelnosti**.

U  $\triangle ABC$  by vypadala:  $a > 0, 0^\circ < \beta < 180^\circ$ ; jedno řešení:  $\beta < 90^\circ \wedge b = a \sin \beta$  nebo  $\beta \geq 90^\circ \wedge b > a$ ; dvě různá řešení:  $\beta < 90^\circ \wedge b > a \sin \beta$ .

## 14 Shodná zobrazení

Zobrazení  $Z$  v rovině je předpis, který každému bodu  $X$  roviny přiřazuje právě jeden bod  $X'$  roviny. Bod  $X$  nazýváme **vzor**, bod  $X'$  jeho **obraz**. Zápis:  $Z : X \rightarrow X'$ .

Bod  $X$ , pro něhož obraz  $X'$  platí, že  $X = X'$ , nazýváme **samodružný**. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný nazýváme **identita**.

Zobrazení nazýváme **shodné zobrazení** (nebo též **shodnost**), právě když obrazem každé úsečky  $AB$  je úsečka  $A'B'$  shodná s  $AB$ .

Pokud ověřujeme shodnost dvou útvarů, a pouze průsvitku otáčíme nebo posouváme, mluvíme o **přímé shodnosti**. Pokud průsvitku převrátíme na druhou stranu, mluvíme o **nepřímé shodnosti**.

V každém shodném zobrazení platí:

- obrazem přímky je přímka; obrazem rovnoběžek jsou rovnoběžky
- obrazem polopřímky je polopřímka; obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky
- obrazem úhlu  $AVB$  je úhel  $A'V'B'$ , který je shodný s úhlem  $AVB$

### Osová souměrnost

**Osová souměrnost s osou  $o$**  (zapisujeme  $O(o) : X \rightarrow X'$ ) je shodné zobrazení, které přiřazuje:

- každému bodu  $X \notin o$  obraz  $X'$  tak, že úsečka  $XX'$  je kolmá na osu  $o$  a střed úsečky  $XX'$  leží na ose  $o$
- každému bodu  $X \in o$  obraz  $X'$  tak, že  $X = X'$

## Středová souměrnost

**Středová souměrnost se středem  $S$**  (zapisujeme  $S(S) : X \rightarrow X'$ ) je shodné zobrazení, které přiřazuje:

- každému bodu  $X \neq S$  obraz  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$
- bodu  $S$  bod  $S' = S$

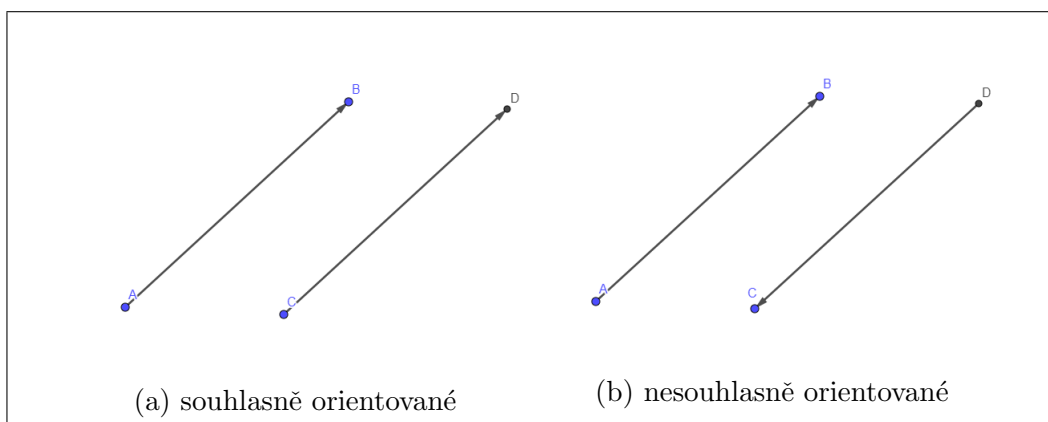
## Orientovaná úsečka

**Orientovaná úsečka**  $\overrightarrow{AB}$  je úsečka, u které rozlišujeme počáteční bod  $A$  a koncový bod  $B$  (vpodstatě vektor).

**Velikost** orientované úsečky je definována jako  $|AB|$ .

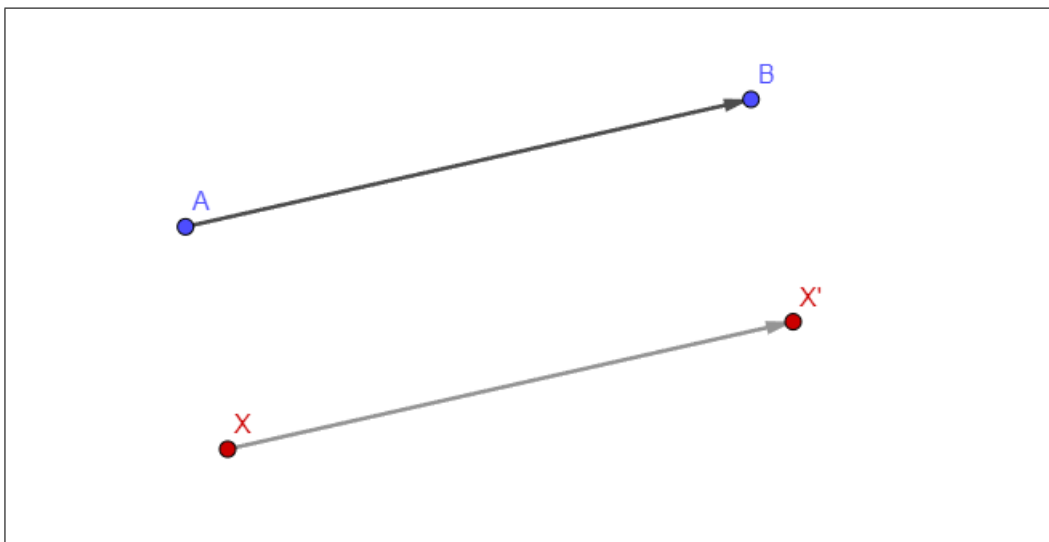
**Nulová orientovaná úsečka** má nulovou velikost a její počáteční i koncový bod splývají.

Jsou-li dvě orientované úsečky rovnoběžné, říkáme, že mají **stejný směr**. Navíc říkáme, že jsou:



## Translace

**Posunutí** (zapisujeme  $T(\overrightarrow{AB}) : X \rightarrow X'$ ) je shodné zobrazení, které přiřazuje každému bodu  $X$  obraz  $X'$  tak, že úsečky  $\overrightarrow{AB}$  a  $\overrightarrow{XX'}$  mají stejný směr, orientaci a velikost.



## 15 Podobná zobrazení

tady cekam na floru, protoze asi nemam ty archy? jako vim co to je, takovy to homotetie, rotace a tak ale idk zapis k tomu zejo

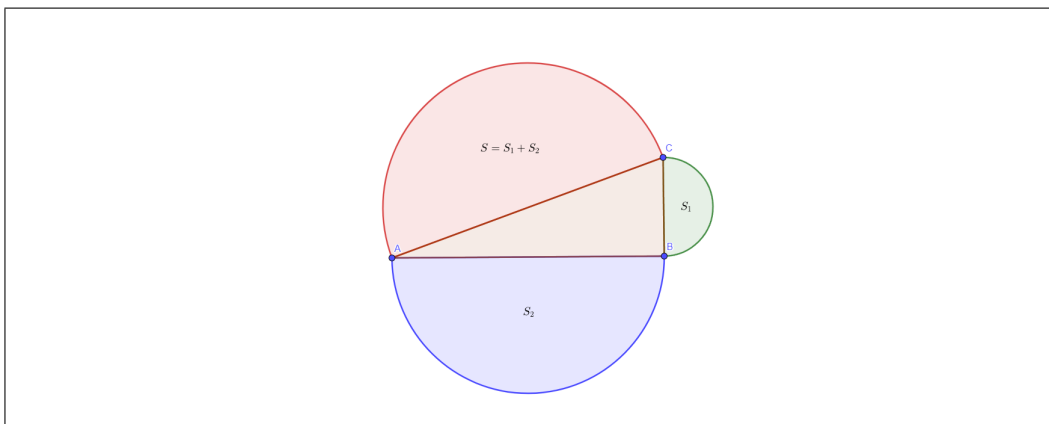
## 16 Pythagorova a Eukleidovy věty

### Pythagorova věta

*Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahu čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.*

Symbolicky zapisujeme:  $c^2 = a^2 + b^2$ , kde  $c$  je přepona.

Znění věty lze rozšířit i na např. půlkruhy.



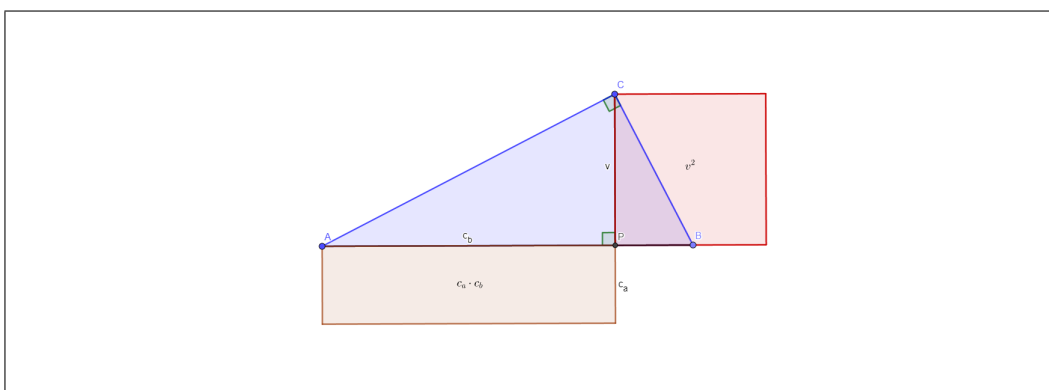
## Eukleidovy věty

Výška v pravoúhlém trojúhelníku je vzdálenost vrcholu při pravém úhlu od přímky, na níž leží přepona. Pata  $P$  výšky rozdělí přeponu na dva úseky  $c_a$  a  $c_b$ .

### Eukleidova věta o výšce

*Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku, jehož strany tvoří oba úseky přepony.*

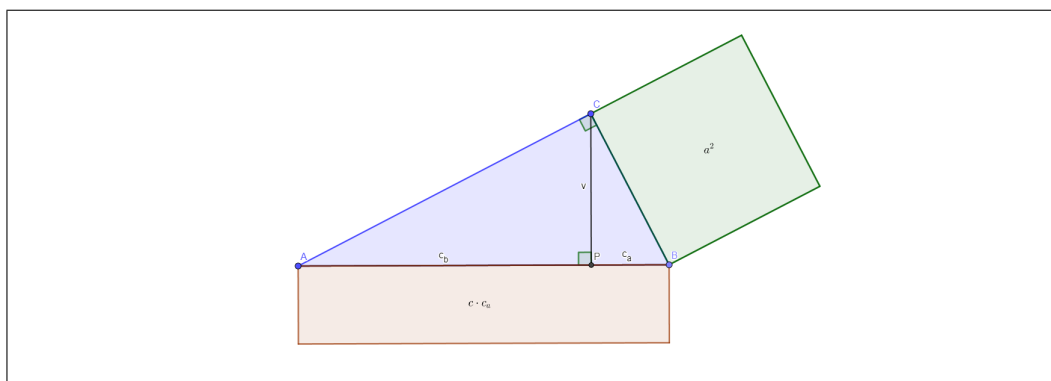
$$v^2 = c_a \cdot c_b$$



### Eukleidova věta o odvěsně

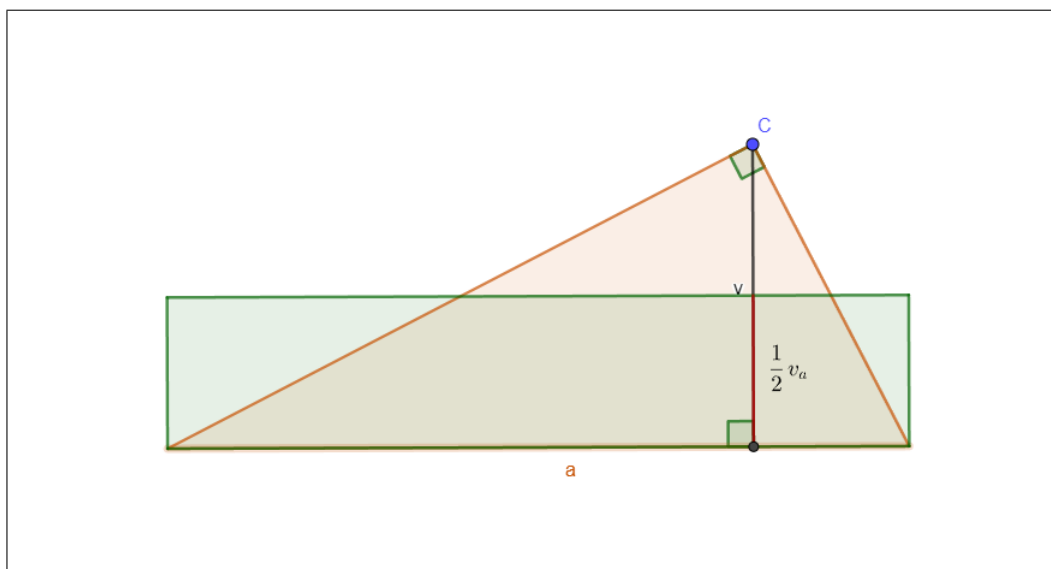
*Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku, jehož strany tvoří přepona a přilehlý úsek.*

$$a^2 = c \cdot c_a \vee b^2 = c \cdot c_b$$



## Převod trojúhelníku na obdélník

Máme-li bez výpočtu sestavit obdélník, který má stejný obsah jako daný trojúhelník, využijeme obsah trojúhelníku:  $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$  a upravíme jej na tvar  $S = a \cdot \frac{v_a}{2}$ . Sestrojit úsečku  $b = \frac{v_a}{2}$  lze pomocí kružítka a pravítka. Máme vzorec  $S = a \cdot b$ , což je obsah obdélníku se stranami  $a, b = \frac{1}{2}v_a$ .



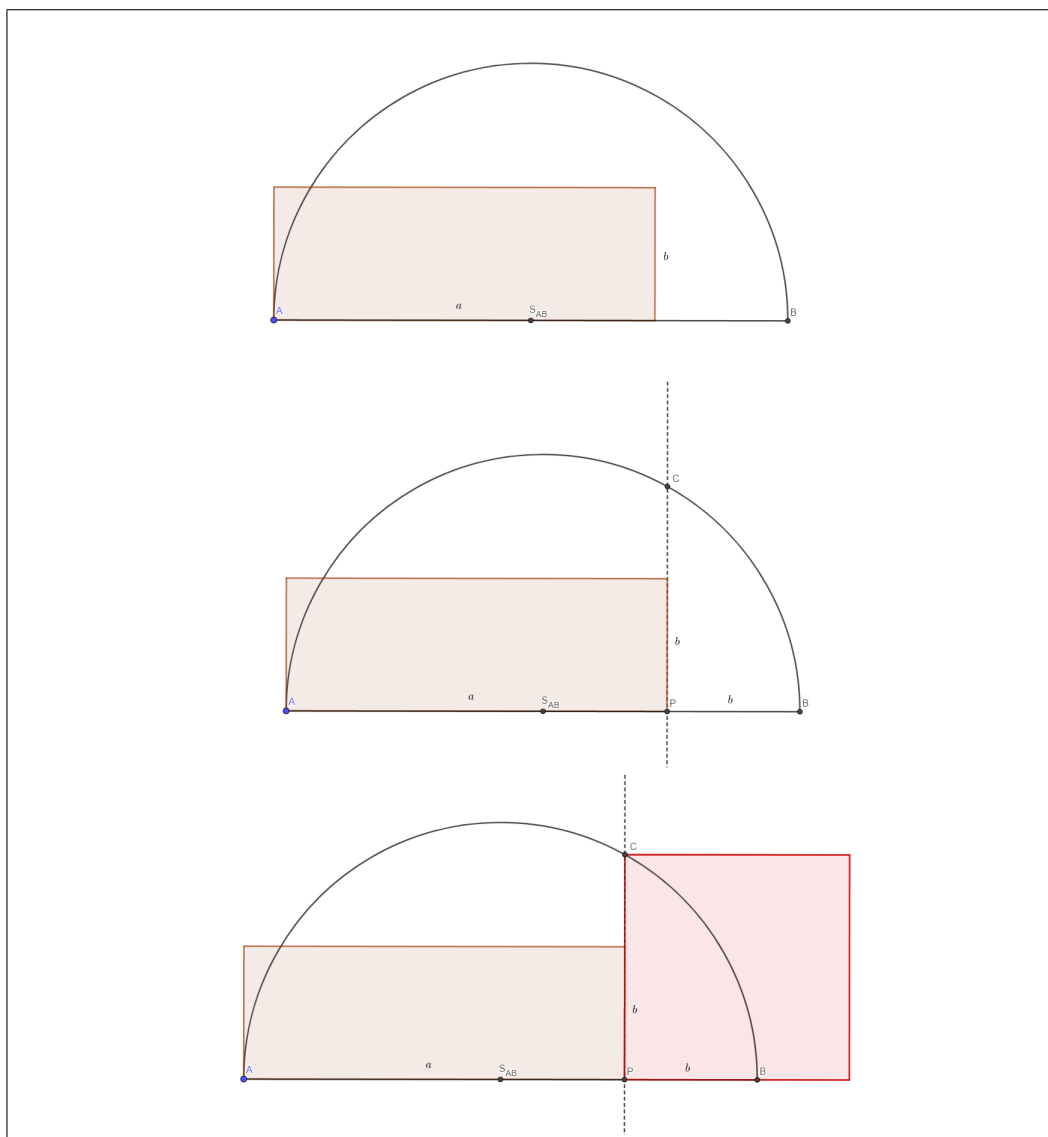


## Převod obdélníku na čtverec

Jsou dva způsoby převodu:

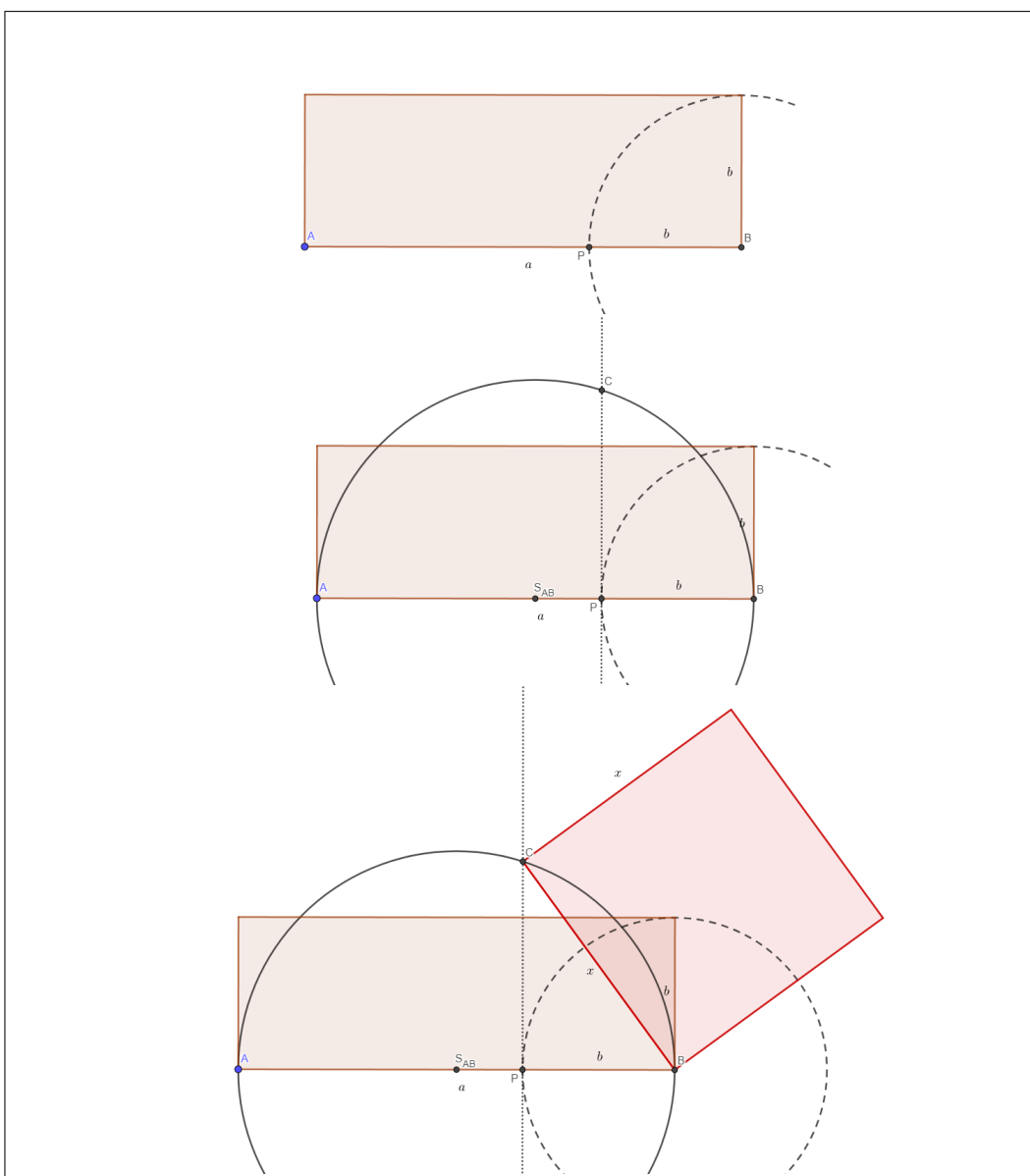
### První s využitím EVV

Sestrojíme úsečku  $AB$  délky  $a+b$  a nad ní Thaletovu kružnici. Bodem  $P$  (dělí  $AB$  na dva úseky) sestrojíme kolmici na  $AB$ . Průsečík s kružnicí označíme  $C$ .  $\triangle ABC$  je pravoúhlý,  $AB$  je přepona a úsečka  $CP$  výška. Z EVV plyne:  $|AP| \cdot |BP| = |CP|^2 \Rightarrow a \cdot b = v^2$  a výška má velikost  $v = \sqrt{ab}$



## Druhý s využitím EVO

Delší stranu obdélníku označíme  $AB$  a zvolíme na ní bod  $P$  tak, aby  $|PB| = b$ . Nad  $AB$  sestrojíme Thaletovu kružnici a bodem  $P$  kolmici k  $AB$ . Průsečík kolmice a kružnice označíme  $C$ .  $\triangle ABC$  je pravoúhlý s přeponou  $AB$ , odvěsnou  $BC$  a přilehlým úsekem  $PB$ . Z EVO plyne:  $|AP| \cdot |BP| = |BC|^2 \Rightarrow a \cdot b = x^2$ , úsečka  $x = \sqrt{ab}$ .



## 17 Trigonometrie obecného trojúhelníku

Nechť je dán libovolný trojúhelník  $ABC$  se stranami  $a, b, c$  a vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ . Pak platí:

### Sinová věta

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \vee \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \vee \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

souhrnně:  $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

### Kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \text{ resp.}$$

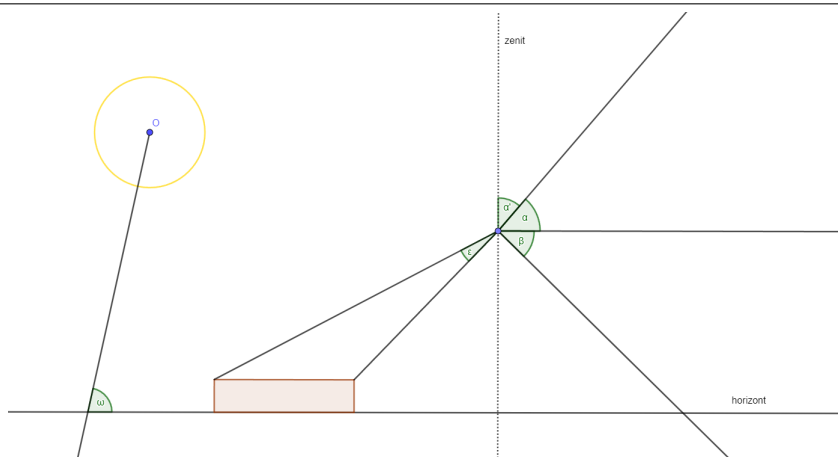
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \text{ resp.}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

### Obsah a poloměry

- obsah  $\triangle ABC$  je roven:  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ , resp.  $S = \frac{1}{2}ac \sin \beta$
- poloměr kružnice vepsané je roven:  $\rho = \frac{S}{s}$ , kde  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$
- poloměr kružnice opsané je roven:  $r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$

## Úhly při slovních úlohách



- $\omega$  ... výška nad obzorem
- $\alpha$  ... výškový úhel
- $\alpha'$  ... zenitový úhel
- $\beta$  ... hloubkový úhel
- $\epsilon$  ... zorný úhel

- 18 Stereometrie – polohové vlastnosti
- 19 Stereometrie – metrické vlastnosti
- 20 Stereometrie – objem a povrch těles
- 21 Analytická geometrie – body a vektory
- 22 Analytická geometrie – přímka a polovina v  $E^2$
- 23 Analytická geometrie – přímka a rovina v  $E^3$
- 24 Analytická geometrie – kuželosečky
- 25 Kombinatorika
- 26 Pravděpodobnost
- 27 Statistika
- 28 Posloupnosti
- 29 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada
- 30 Limita a derivace funkce