Matematika pro dementy

Fantomas

Únor 2025

Abstrakt

Vypracované otázky z matematiky, tipy a triky a tak

Obsah

1 Výroková logika a množiny 4

2 Mnohočleny, mocniny a odmocniny 9

3 Lomené výrazy 10

4 Lineární rovnice a nerovnice 12

5 Soustavy rovnic a nerovnice 17

6 Kvadratická rovnice a nerovnice 19

7 Lineární funkce a její vlastnosti 19

8 Kvadratická funkce a její vlastnosti 19

9 Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti 19

10 Exponenciální a logaritmická funkce 19

11 Goniometrické funkce 19

12 Množiny bodů dané vlastnosti 19

13 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků 19

14 Shodná zobrazení 19

15 Podobná zobrazení 19

16 Pythagorova a Eukleidovy věty 19

17 Trigonometrie obecného trojúhelníku 19

18 Stereometrie – polohové vlastnosti 19

19 Stereometrie – metrické vlastnosti 19

20 Stereometrie – objem a povrch těles 19

21 Analytická geometrie – body a vektory 19

22 Analytická geometrie – přímka a polorovina v E2 19

23 Analytická geometrie – přímka a rovina v E3 **19**

24 Analytická geometrie – kuželosečky **19**

25 Kombinatorika **19**

26 Pravděpodobnost **19**

27 Statistika **19**

28 Posloupnosti **19**

29 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada **19**

30 Limita a derivace funkce **19**

1 Výroková logika a množiny

Množiny

Množinou rozumíme souhrn nějakých objektů (prvků). Zápis $x \in M$ znamená že prvek x náleží množině M. Množinu můžeme určit výčtem prvků, charakteristickou vlastností nebo množinovými operacemi. Rovnost množin znamená, že každý prvek množiny M je prvkem množiny N a současně každý prvek množiny N je prvkem množiny M.

Podmnožina

Množinu M nazýváme podmnožinou množiny N, právě když je každý prvek množiny M prvkem množiny N. Zápis symbolem $\subseteq$ nebo $\subset$; $M \subset N$ značí, že M je vlastní podmnožinou množiny N, tedy $M \neq N$; $M \subseteq N$ značí nevlastní podmnožinu, tedy $M \subset N$ nebo $M = N$.

Charakteristická vlastnost

Zápis $A = \{x \in M; \mathit{vlastnost}\}$, kde každý prvek z množiny M, mající danou vlastnost, patří do množiny A.

Množinové operace

Sjednocení $A \cup B$, je množina všech prvků, patřících alespoň do jedné z množin A, B.
Průnik $A \cap B$, je množina všech prvků, patřících zároveň do obou množin A, B.
Rozdíl $A \backslash B$, je množina všech prvků, patřících do množiny A a **nepatřících** do množiny B.
! Sjednocení i průnik jsou komutativní a asociativní operace.
Doplněk A'_M množiny A v množině M je množina všech prvků množiny M, které nepatří do množiny A $\Rightarrow A'_M = M \setminus A$.

Intervaly

Nechť a, b jsou dvě reálná čísla, že $a < b$, pak
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ je otevřený interval
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ je polootevřený interval
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ je polouzavřený interval
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ je uzavřený interval

Výroky

Výrokem rozumíme sdělení, o kterém má smysl uvažovat jeho pravdivost.
Každý výrok má **pravdivostní hodnotu**, 0 (nepravda) nebo 1 (pravda).
Hypotéza je výrok jehož pravdivostní hodnotu neznáme.
Výroková formule je tvrzení s proměnou, po dosazení se stane výrokem.

Negace výroku

Negace výroku, *"Není pravda, že A"*, zapisujeme $\neg A$, vždy opačná pravdivostní hodnota.

Logické operátory

Pomocí těchto operátorů tvoříme **složené výroky** nebo **formule**.
Konjunkce, "A a současně (et) B", zapisujeme $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkce, "A nebo (vel) B", zapisujeme $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ostrá disjunkce, "Buď A, nebo B", zapisujeme $A \veebar B$

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikace, "Z A plyne B", zapisujeme $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalence, "A je ekvivalentní s B.", "A právě tehdy, když B.", zapisujeme $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologie

Tautologie je výrok/formule, který je vždy pravdivý.
Kontradikce je výrok/formule, který je vždy nepravdivý.
Důležité tautologie:

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \veebar B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- $\neg(A \veebar B) \equiv A \Leftrightarrow B$

Kvantifikace výrokových formulí

Výroková formule $\varphi(x)$, obsahující proměnnou x, se stane výrokem po kvantifikaci x.
Obecný kvantifikátor $\forall$, "pro každé, pro všechna, ..."
Malý kvantifikátor $\exists$, "existuje alespoň jedno, nějaké, ..."
Př.: Formuli $\varphi(x) \sim x > 0$ lze kvantifikovat:
$(\forall x \in \mathbb{N}) x > 0$ ... Všechna přirozená čísla jsou kladná.
$(\exists x \in \mathbb{N}) x > 0$ ... Existuje alespoň jedno přirozené číslo větší než 0.

Negace kvantifikátorů

Negace výroku $(\forall x)\varphi(x)$ je výrok $(\exists x)\neg\varphi(x)$.
Negace výroku $(\exists x)\varphi(x)$ je výrok $(\forall x)\neg\varphi(x)$.

Věta, definice, důkaz, správné úsudky

Matematická věta je důležité, netriviální a dostatečně obecné tvrzení neboli výrok. Věta obsahuje předpoklad a závěr. **Axiom (postulát)** je tvrzení, které se předem předpokládá za platné. **Definice** slouží k zavedení nových pojmů; stanoví nový pojem a určí ho pomocí již stanovených.

Správný úsudek

Správný úsudek je takový, kdy je z pravdivých premis vyvozen pravdivý závěr.
Zákon vyloučení možnosti:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

Zákon odloučení:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Zákon nepřímé úvahy:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Zákon kontrapozice:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \hline \neg q \Rightarrow \neg p \end{array}$$

2 Mnohočleny, mocniny a odmocniny

Zápis $1 + \sqrt{1,5625 - (\frac{3}{4})^2}$ je **číselný výraz** s hodnotou 2.
Zápis $x^2 + 2xy + 1$ je výraz s proměnnými x, y.
Definiční obor výrazu je množina všech přípustných hodnot proměnné, pro které má výraz smysl.
Výraz $V = x^2 + 1$ má definiční obor $\mathbb{R}$
Výraz $V = \frac{1}{y}$ má smysl pro nenulové hodnoty y
$\Rightarrow D_V : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nebo $D_V = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Mnohočleny

Mnohočlen (polynom) s jednou proměnnou je výraz $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$, kde n je stupeň mnohočlenu.
$a_1 x + a_0$, resp. $ax + b$ je linearní dvojčlen.
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, resp. $ax^2 + bx + c$ je kvadratický trojčlen.

Dělení mnohočlenu mnohočlenem

$(4x^3 + 3x^2 - 2x - 5) : (x - 1) = 4x^2 + 7x + 5$
$4x^3 - 4x^2$

$0x^3 + 7x^2 - 2x$
$0x^3 + 7x^2 - 7x$

$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$
$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$

$0x^3 + 0x^2 + 0x - 0$
pozn. zbytek stejně jako u číselného dělení

Umocňování

- $(AB)^n = A^n B^n$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
- $(-A+B)^2 = (A-B)^2$
- $(-A-B)^2 = (A+B)^2$
- $(A+B)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

3 Lomené výrazy

Rozšiřování a krácení lomených výrazů

Rozšířit lomený výraz znamená vynásobit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

Krátit lomený výraz znamená vydělit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{a^2bc^3}{abc^2} = \frac{a^2bc^3 : abc}{abc^2 : abc} = \frac{ac^2}{c} = ac$$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

Nejdříve rozložíme všechny jmenovatele na součin, určíme společný jmenovatel jako NSN všech jmenovatelů, každý LV rozšíříme na společný jmenovatel, sečteme a odečteme čitatele, rozložíme čitatele na součin a zkrátíme (je-li to možné) a určíme podmínky.

$$V = \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{x^2-4}$$
$$V = \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)}$$
$$V = -\frac{(3+2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2-3x)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)}$$
$$V = \frac{-7x-6-2x^2-8x+4+3x^2+16x-x^2}{(x-2)(x+2)}$$
$$V = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$
$$V = \frac{1}{x+2}$$

Vyjadřování neznámé ze vzorce

Při vyjadřování neznámé ze vzorce využíváme:

- záměna stran vzorce
- vynásobení/vydělení vzorce nenulovým číslem nebo výrazem
- přičtení/odečtení libovolného čísla nebo výrazu
- pokud jsou ve vzorci nezáporné veličiny, pak umocnění nebo odmocnění

Výrazy s mocninami a odmocninami

Pro každá reálná a, b a pro každá reálná r, s platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

4 Lineární rovnice a nerovnice

Lineární rovnice

Lineární rovnice má tvar $ax + b = 0, a \neq 0$. Má jediný kořen $x = -\frac{b}{a}$.
Pokud užitím ekvivalentních úprav získáme tvar $0x + b = 0$, pak má rovnice nekonečně mnoho řešení ($b = 0$), nebo nemá řešení ($b \neq 0$).
Definiční obor rovnice je množina všech přípustných hodnot jejích kořenů; $x_1 \notin D_r \Rightarrow x_1 \notin K$.

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice má tvar:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \leq 0$:

$$b \leq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b > 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \geq 0$:

$$b \geq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b < 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b < 0$:

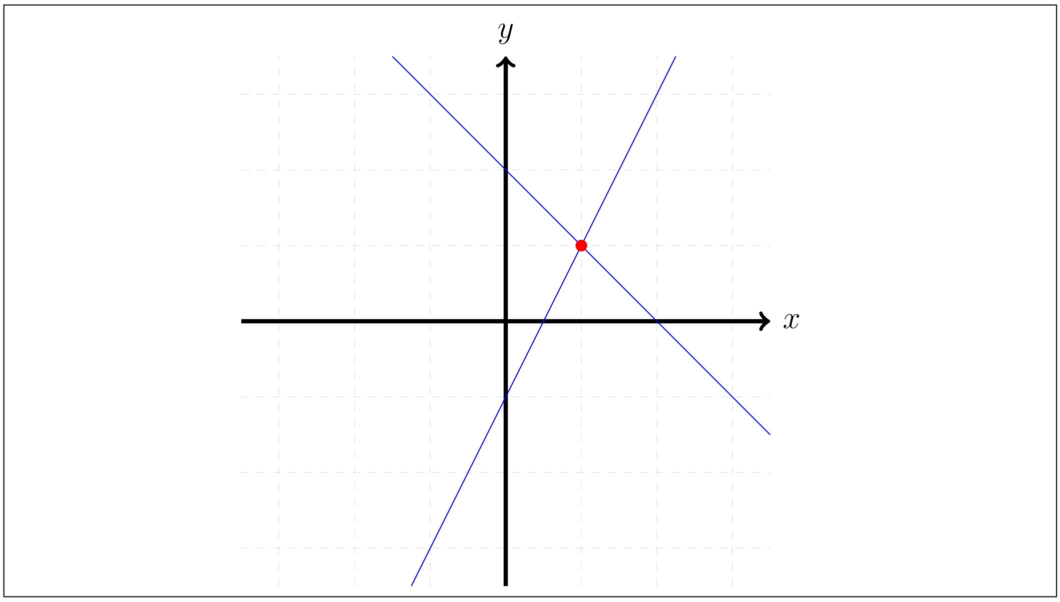
$$b < 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \geq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b > 0$:

$$b > 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \leq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Grafické řešení lineární rovnice a nerovnice

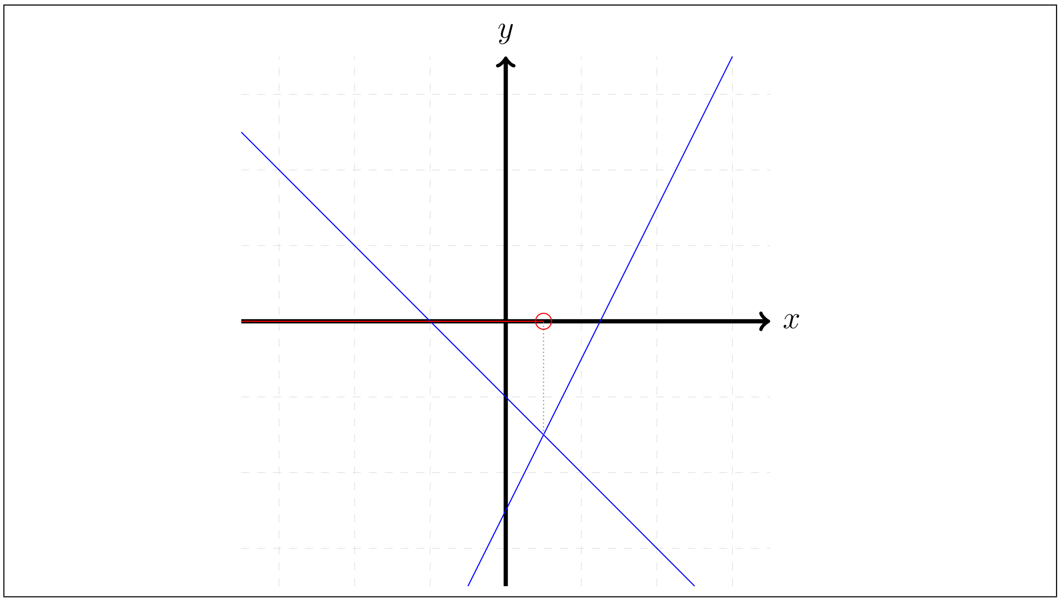
Lineární funkce je funkce s předpisem $y = ax + b$
Rovnici převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kořen leží v $f(x) \cap g(x)$.



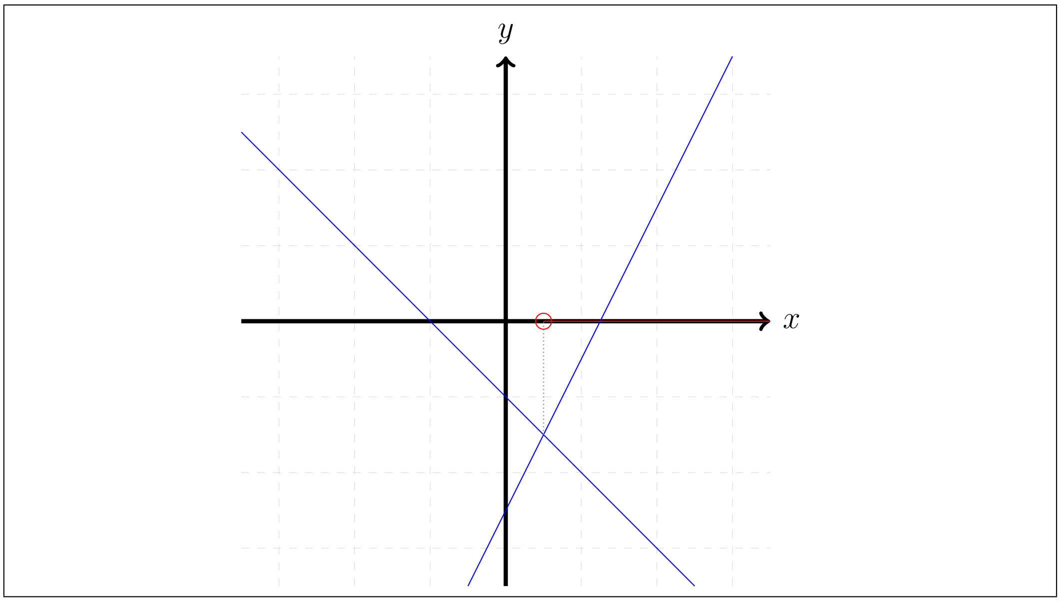
Obrázek 1: 2x-1=2-x

Lineární nerovnici řešíme podobně jako rovnici: převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, nerovnice mohou mít jeden z tvarů:

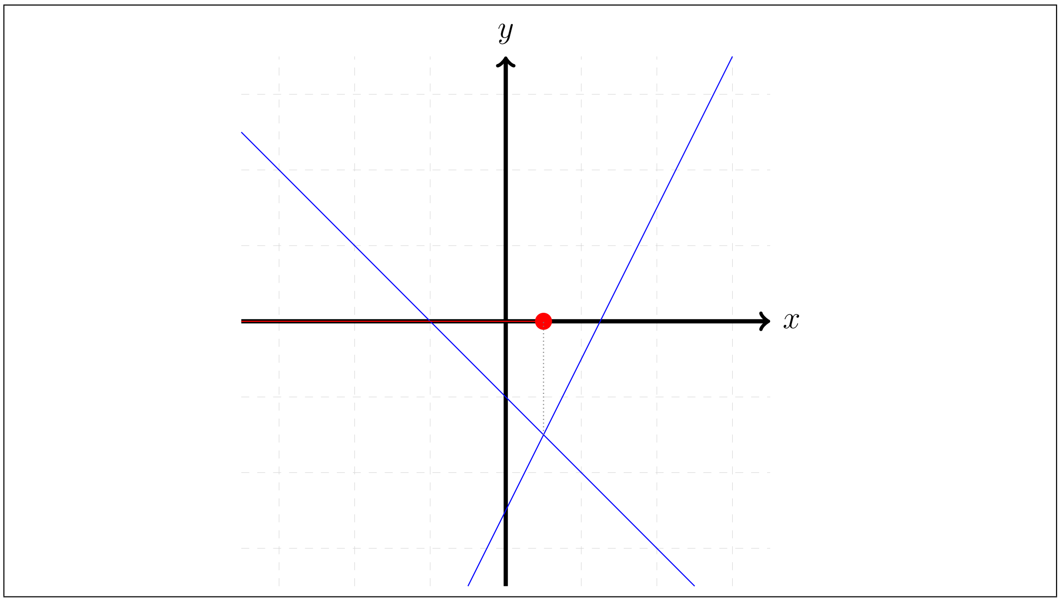
$-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$
$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
$K = (-\infty, \frac{1}{2})$	$K = (\frac{1}{2}, \infty)$	$K = (-\infty, \frac{1}{2}\rangle$	$K = \langle\frac{1}{2}, \infty)$
ad 2	ad 3	ad 4	ad 5



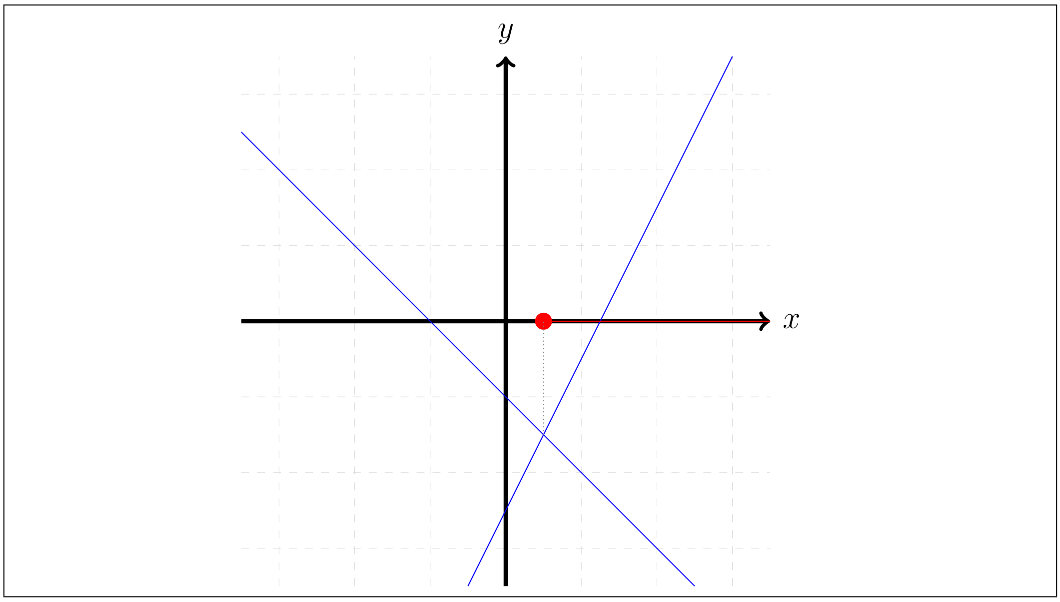
Obrázek 2: $-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 3: $-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 4: $-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 5: $-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$

Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

Při řešení využíváme $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.
Př.:

$$x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2$$
$$K = \{-2; 0\}$$

Lze též použít **metodu nulových bodů**
Př.:

$$4x^2 - 6x < 2x$$
$$4x^2 - 8x < 0$$
$$4x(x-2) < 0$$
$$NB = \{0, 2\}$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$4x$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$*$	+	-	+

$$K = (0; 2)$$

Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Má-li rovnice neznámou ve jmenovateli, je nutné vždy stanovit její definiční obor.

Rovnice v podílovém tvaru

Rovnice v podílovém tvaru má na jedné straně jediný zlomek s neznámou ve jmenovateli a na druhé straně nulu. Po stanovení definičního oboru řešíme rovnici tak, že položíme čitatele rovno nule a řešíme jako lineární rovnici nebo převedením na součinový tvar.

Nerovnice v podílovém tvaru

Nerovnici v podílovém tvaru nesmíme vynásobit společným jmenovatelem, který obsahuje neznámou!
Nerovnici v podílovém tvaru převedeme na podílový tvar a řešíme metodou nulových bodů.
Př.:

$$\frac{2x-1}{x+1} \geq 1$$
$$x \neq -1$$
$$\frac{2x-1}{x+1} - 1 \geq 0$$
$$\frac{2x-1-(x+1)}{x+1} \geq 0$$
$$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$$
$$NB = \{-1, 2\}$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2\rangle$	$\langle 2; +\infty)$
$x-2$	-	-	+
$x+1$	-	+	+
*	+	-	+

$$K = (-\infty; -1) \cup \langle 2; +\infty)$$

5 Soustavy rovnic a nerovnice

Soustava nerovnic

Soustavu nerovnic s jednou neznámou řešíme vyřešením každé nerovnice zvlášť. Řešením soustavy je $K_1 \cap K_2$.
Př.:

$$2x - 5 < 0$$
$$3x + 2 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc} 2x-5<0 & 3x+2\geq 0 \\ 2x<5 & 2x\geq -2 \\ x<\frac{5}{5} & x\geq -\frac{2}{3} \\ K_1=(-\infty,\frac{5}{2}) & K_2=\langle -\frac{2}{3},\infty) \end{array}$$

$$K = K_1 \cap K_2 = \langle -\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$$

Složenou nerovnici $ax + b < cx + d < ex + f$ převedeme na soustavu nerovnic:

$$ax + b < cx + d$$
$$cx + d < ex + f$$

6 Kvadratická rovnice a nerovnice

7 Lineární funkce a její vlastnosti

8 Kvadratická funkce a její vlastnosti

9 Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti

10 Exponenciální a logaritmická funkce

11 Goniometrické funkce

12 Množiny bodů dané vlastnosti

13 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

14 Shodná zobrazení

15 Podobná zobrazení

16 Pythagorova a Eukleidovy věty

17 Trigonometrie obecného trojúhelníku

18 Stereometrie – polohové vlastnosti

19 Stereometrie – metrické vlastnosti

20 Stereometrie – objem a povrch těles

21 Analytická geometrie – body a vektory

22 Analytická geometrie – přímka a polorovina v E2

23 Analytická geometrie – přímka a rovina v E3

24 Analytická geometrie – kuželosečky

25 Kombinatorika