Matematika pro sigmy

Fudži Mi Nagule

Únor 2025

Abstrakt

Vypracované otázky z matematiky, tipy a triky a tak

Obsah

1 Výroková logika a množiny

Množiny

Množinou rozumíme souhrn nějakých objektů (prvků). Zápis $x \in M$ znamená že prvek x náleží množině M. Množinu můžeme určit výčtem prvků, charakteristickou vlastností nebo množinovými operacemi. Rovnost množin znamená, že každý prvek množiny M je prvkem množiny N a současně každý prvek množiny N je prvkem množiny M.

Podmnožina

Množinu M nazýváme podmnožinou množiny N, právě když je každý prvek množiny M prvkem množiny N. Zápis symbolem $\subseteq$ nebo $\subset$; $M \subset N$ značí, že M je vlastní podmnožinou množiny N, tedy $M \neq N$; $M \subseteq N$ značí nevlastní podmnožinu, tedy $M \subset N$ nebo $M = N$.

Charakteristická vlastnost

Zápis $A = \{x \in M; \mathit{vlastnost}\}$, kde každý prvek z množiny M, mající danou vlastnost, patří do množiny A.

Množinové operace

Sjednocení $A \cup B$, je množina všech prvků, patřících alespoň do jedné z množin A, B.
Průnik $A \cap B$, je množina všech prvků, patřících zároveň do obou množin A, B.
Rozdíl $A \backslash B$, je množina všech prvků, patřících do množiny A a **nepatřících** do množiny B.
! Sjednocení i průnik jsou komutativní a asociativní operace.
Doplněk A'_M množiny A v množině M je množina všech prvků množiny M, které nepatří do množiny A $\Rightarrow A'_M = M \setminus A$.

Intervaly

Nechť a, b jsou dvě reálná čísla, že $a < b$, pak
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ je otevřený interval
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ je polootevřený interval
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ je polouzavřený interval
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ je uzavřený interval

Výroky

Výrokem rozumíme sdělení, o kterém má smysl uvažovat jeho pravdivost.
Každý výrok má **pravdivostní hodnotu**, 0 (nepravda) nebo 1 (pravda).
Hypotéza je výrok jehož pravdivostní hodnotu neznáme.
Výroková formule je tvrzení s proměnou, po dosazení se stane výrokem.

Negace výroku

Negace výroku, *"Není pravda, že A"*, zapisujeme $\neg A$, vždy opačná pravdivostní hodnota.

Logické operátory

Pomocí těchto operátorů tvoříme **složené výroky** nebo **formule**.
Konjunkce, "A a současně (et) B", zapisujeme $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkce, "A nebo (vel) B", zapisujeme $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ostrá disjunkce, "Buď A, nebo B", zapisujeme $A \veebar B$

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikace, "Z A plyne B", zapisujeme $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalence, "A je ekvivalentní s B.", "A právě tehdy, když B.", zapisujeme $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologie

Tautologie je výrok/formule, který je vždy pravdivý.
Kontradikce je výrok/formule, který je vždy nepravdivý.
Důležité tautologie:

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \veebar B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- $\neg(A \veebar B) \equiv A \Leftrightarrow B$

Kvantifikace výrokových formulí

Výroková formule $\varphi(x)$, obsahující proměnnou x, se stane výrokem po kvantifikaci x.
Obecný kvantifikátor $\forall$, "pro každé, pro všechna, ..."
Malý kvantifikátor $\exists$, "existuje alespoň jedno, nějaké, ..."
Př.: Formuli $\varphi(x) \sim x > 0$ lze kvantifikovat:
$(\forall x \in \mathbb{N}) x > 0$ ... Všechna přirozená čísla jsou kladná.
$(\exists x \in \mathbb{N}) x > 0$ ... Existuje alespoň jedno přirozené číslo větší než 0.

Negace kvantifikátorů

Negace výroku $(\forall x)\varphi(x)$ je výrok $(\exists x)\neg\varphi(x)$.
Negace výroku $(\exists x)\varphi(x)$ je výrok $(\forall x)\neg\varphi(x)$.

Věta, definice, důkaz, správné úsudky

Matematická věta je důležité, netriviální a dostatečně obecné tvrzení neboli výrok. Věta obsahuje předpoklad a závěr. **Axiom (postulát)** je tvrzení, které se předem předpokládá za platné. **Definice** slouží k zavedení nových pojmů; stanoví nový pojem a určí ho pomocí již stanovených.

Správný úsudek

Správný úsudek je takový, kdy je z pravdivých premis vyvozen pravdivý závěr.
Zákon vyloučení možnosti:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

Zákon odloučení:

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Zákon nepřímé úvahy:

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

Zákon kontrapozice:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$$

2 Mnohočleny, mocniny a odmocniny

Zápis $1 + \sqrt{1,5625 - (\frac{3}{4})^2}$ je **číselný výraz** s hodnotou 2.
Zápis $x^2 + 2xy + 1$ je výraz s proměnnými x, y.
Definiční obor výrazu je množina všech přípustných hodnot proměnné, pro které má výraz smysl.
Výraz $V = x^2 + 1$ má definiční obor $\mathbb{R}$
Výraz $V = \frac{1}{y}$ má smysl pro nenulové hodnoty y
$\Rightarrow D_V : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nebo $D_V = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Mnohočleny

Mnohočlen (polynom) s jednou proměnnou je výraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$, kde n je stupeň mnohočlenu.
$a_1 x + a_0$, resp. $ax + b$ je linearní dvojčlen.
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, resp. $ax^2 + bx + c$ je kvadratický trojčlen.

Dělení mnohočlenu mnohočlenem

$(4x^3 + 3x^2 - 2x - 5) : (x - 1) = 4x^2 + 7x + 5$
$4x^3 - 4x^2$

$0x^3 + 7x^2 - 2x$
$0x^3 + 7x^2 - 7x$

$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$
$0x^3 + 0x^2 + 5x - 5$

$0x^3 + 0x^2 + 0x - 0$
pozn. zbytek stejně jako u číselného dělení

Umocňování

- $(AB)^n = A^n B^n$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
- $(-A+B)^2 = (A-B)^2$
- $(-A-B)^2 = (A+B)^2$
- $(A+B)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

3 Lomené výrazy

Rozšiřování a krácení lomených výrazů

Rozšířit lomený výraz znamená vynásobit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

Krátit lomený výraz znamená vydělit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{a^2bc^3}{abc^2} = \frac{a^2bc^3 : abc}{abc^2 : abc} = \frac{ac^2}{c} = ac$$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

Nejdříve rozložíme všechny jmenovatele na součin, určíme společný jmenovatel jako NSN všech jmenovatelů, každý LV rozšíříme na společný jmenovatel, sečteme a odečteme čitatele, rozložíme čitatele na součin a zkrátíme (je-li to možné) a určíme podmínky.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{x^2-4} \\
V &= \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)} \\
V &= -\frac{(3+2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2-3x)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)} \\
V &= \frac{-7x-6-2x^2-8x+4+3x^2+16x-x^2}{(x-2)(x+2)} \\
V &= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\
V &= \frac{1}{x+2}
\end{aligned}
$$

Vyjadřování neznámé ze vzorce

Při vyjadřování neznámé ze vzorce využíváme:

- záměna stran vzorce
- vynásobení/vydělení vzorce nenulovým číslem nebo výrazem
- přičtení/odečtení libovolného čísla nebo výrazu
- pokud jsou ve vzorci nezáporné veličiny, pak umocnění nebo odmocnění

Výrazy s mocninami a odmocninami

Pro každá reálná a, b a pro každá reálná r, s platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

4 Lineární rovnice a nerovnice

Lineární rovnice

Lineární rovnice má tvar $ax + b = 0, a \neq 0$. Má jediný kořen $x = -\frac{b}{a}$.
Pokud užitím ekvivalentních úprav získáme tvar $0x + b = 0$, pak má rovnice nekonečně mnoho řešení ($b = 0$), nebo nemá řešení ($b \neq 0$).
Definiční obor rovnice je množina všech přípustných hodnot jejích kořenů; $x_1 \notin D_r \Rightarrow x_1 \notin K$.

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice má tvar:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \leq 0$:

$$b \leq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b > 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \geq 0$:

$$b \geq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b < 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b < 0$:

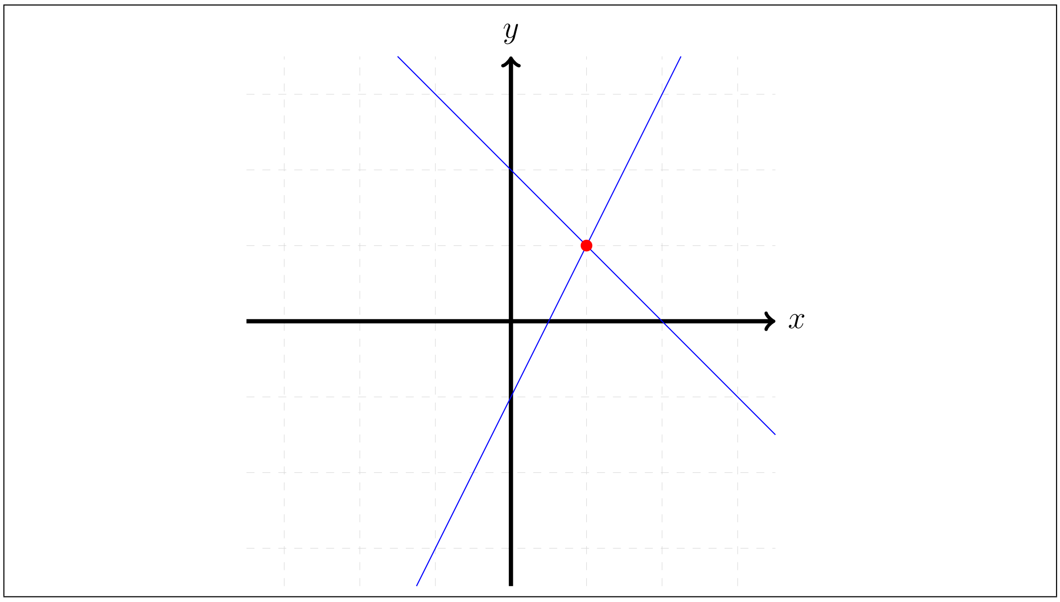
$$b < 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \geq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b > 0$:

$$b > 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \leq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Grafické řešení lineární rovnice a nerovnice

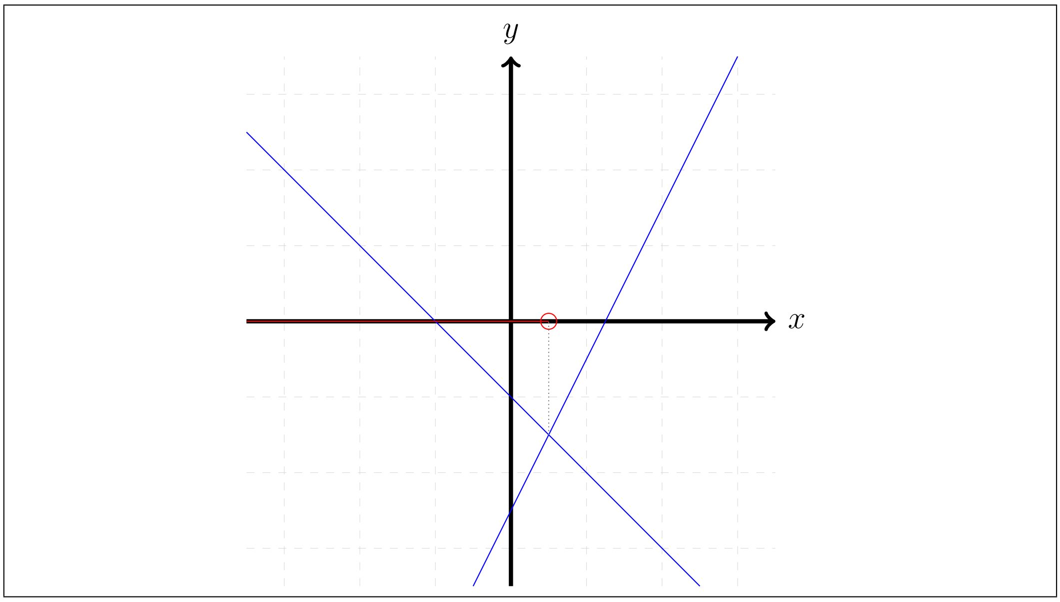
Lineární funkce je funkce s předpisem $y = ax + b$
Rovnici převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kořen leží v $f(x) \cap g(x)$.



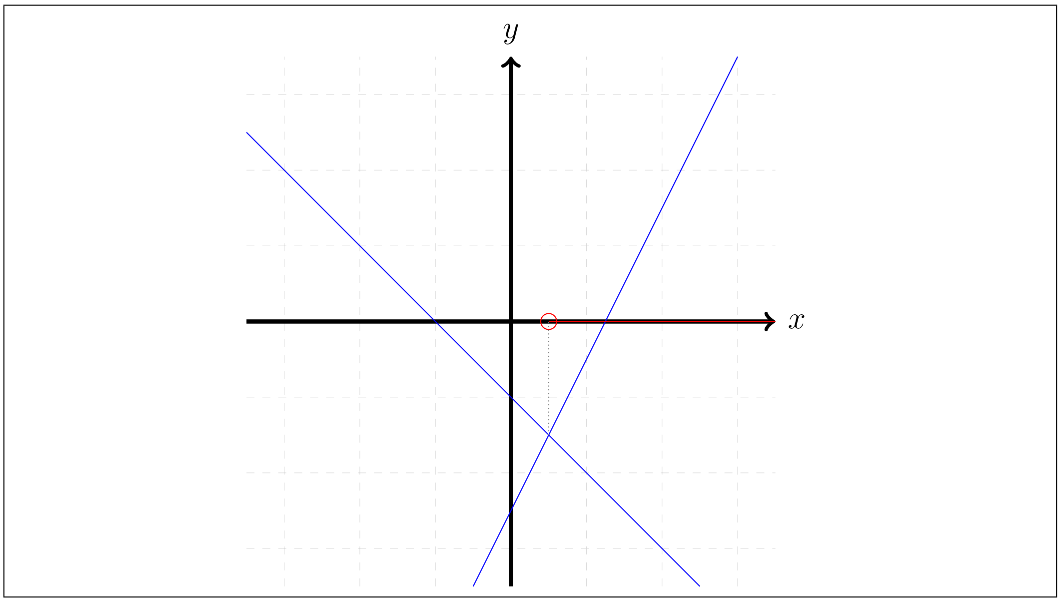
Obrázek 1: 2x-1=2-x

Lineární nerovnici řešíme podobně jako rovnici: převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, nerovnice mohou mít jeden z tvarů:

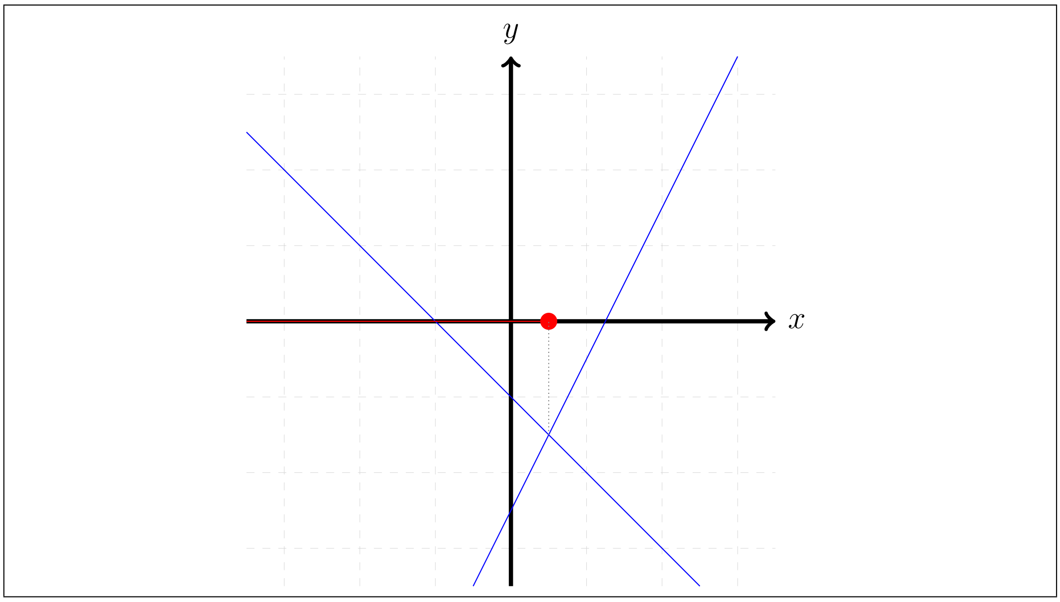
$-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$
$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
$K = (-\infty, \frac{1}{2})$	$K = (\frac{1}{2}, \infty)$	$K = (-\infty, \frac{1}{2}\rangle$	$K = \langle\frac{1}{2}, \infty)$
ad 2	ad 3	ad 4	ad 5



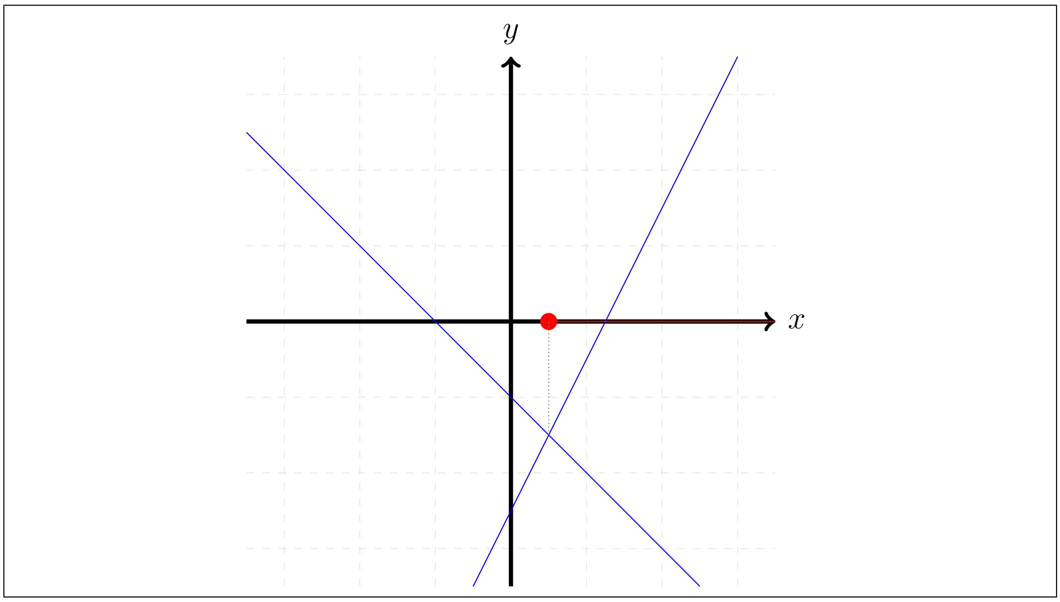
Obrázek 2: $-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 3: $-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 4: $-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 5: $-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$

Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

Při řešení využíváme $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.
Př.:

$$x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2$$
$$K = \{-2; 0\}$$

Lze též použít **metodu nulových bodů**
Př.:

$$4x^2 - 6x < 2x$$
$$4x^2 - 8x < 0$$
$$4x(x-2) < 0$$
$$NB = \{0, 2\}$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$4x$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$*$	+	-	+

$$K = (0; 2)$$

Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Má-li rovnice neznámou ve jmenovateli, je nutné vždy stanovit její definiční obor.

Rovnice v podílovém tvaru

Rovnice v podílovém tvaru má na jedné straně jediný zlomek s neznámou ve jmenovateli a na druhé straně nulu. Po stanovení definičního oboru řešíme rovnici tak, že položíme čitatele rovno nule a řešíme jako lineární rovnici nebo převedením na součinový tvar.

Nerovnice v podílovém tvaru

Nerovnici v podílovém tvaru nesmíme vynásobit společným jmenovatelem, který obsahuje neznámou!
Nerovnici v podílovém tvaru převedeme na podílový tvar a řešíme metodou nulových bodů.
Př.:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+1} &\geq 1 \\
x &\neq -1 \\
\frac{2x-1}{x+1} - 1 &\geq 0 \\
\frac{2x-1-(x+1)}{x+1} &\geq 0 \\
\frac{x-2}{x+1} &\geq 0 \\
NB &= \{-1, 2\}
\end{aligned}$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2\rangle$	$\langle 2; +\infty)$
$x-2$	-	-	+
$x+1$	-	+	+
$*$	+	-	+

$$K = (-\infty; -1) \cup \langle 2; +\infty)$$

Rovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota z reálného čísla je definována jako

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Také platí :

- $|a| = |-a|$
- $|a| \geq 0$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$

- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Nejprve určíme argumenty všech absolutních hodnot, ze kterých pak získáme nulové body a intervaly (u intervalu vždy ostrá závorka, kromě NB z jmenovatele). Poté vytvoříme tabulku jako v tabulkové metodě. Řešíme s upravenými tvary dle definice. **Ukaždého kořenu musíme ověřit zda leží v intervalu!**
Př.:

$$|x-3| + 2x = 9$$

$x \in$	$(-\infty; 3\rangle$	$\langle 3; +\infty)$
$x-3$	$-$	$+$
$\lvert x-3 \rvert$	$(x-3)$	$x-3$

a)	b)
$x \in (-\infty; 3\rangle$	$x \in \langle 3; +\infty)$
$-(x-3) + 2x = 9$	$x - 3 + 2x = 9$
$-x + 3 + 2x = 9$	$3x - 3 = 9$
$x = 6$	$x = 4$
$6 \notin (-\infty; 3\rangle$	$4 \in \langle 3; +\infty)$
$K_1 = \{\}$	$K_2 = \{4\}$

Rovnice má tedy jediný kořen $x = 4$, tedy $K = \{4\}$.

Rovnici ve tvaru $|ax+b| = c$ lze řešit i **rychlejší metodou** bez stanovení intervalů, neboť platí $ax + b = c \vee ax + b = -c$.
I rovnici ve tvaru $|ax + b| = |cx + d|$ lze řešit touto rychlou metodou: $ax + b = cx + d \vee ax + b = -(cx + d)$.

Nerovnice s absolutní hodnotou

Řešíme obdobně jako rovnici s absolutní hodnotou. Z argumentů určíme NB a řešíme nerovnice nahrezené dle definice. Množina řešení je sjednocení množin každého z případů.

$$|x+3| + 3x < 11$$

$x \in$	$(-\infty; 1\rangle$	$\langle 1; +\infty)$
$x-1$	$-$	$+$
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1)$	$x-1$

a)	b)
$x \in (-\infty, 1\rangle$	$x \in [1; +\infty)$
$-(x-1) + 3x < 11$	$x - 1 + 3x < 11$
$-x + 1 + 3x < 11$	$4x < 12$
$x < 5$	$x < 3$
$x \in (-\infty; 5)$	$x \in (-\infty; 3)$
$K_1 = (-\infty; 1\rangle \cap (-\infty; 5)$	$K_2 = (-\infty; 3) \cap \langle 1; +\infty)$
$K_1 = (-\infty; 1\rangle$	$K_2 = \langle 1; 3)$

Nerovnice má řešení $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 3)$.

5 Soustavy rovnic a nerovnice

Soustava nerovnic

Soustavu nerovnic s jednou neznámou řešíme vyřešením každé nerovnice zvlášť. Řešením soustavy je $K_1 \cap K_2$.
Př.:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &< 0 \\ 3x + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} 2x - 5 < 0 & 3x + 2 \geq 0 \\ 2x < 5 & 2x \geq -2 \\ x < \frac{5}{5} & x \geq -\frac{2}{3} \\ K_1 = (-\infty, \frac{5}{2}) & K_2 = \langle -\frac{2}{3}, \infty) \end{array}$$

$$K = K_1 \cap K_2 = \langle -\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$$

Složenou nerovnici $ax + b < cx + d < ex + f$ převedeme na soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} ax + b &< cx + d \\ cx + d &< ex + f \end{aligned}$$

Soustavy rovnic o dvou neznámých

Soustavu dvou rovnic řešíme buď:

- **slučovací** (sčítací) - rovnice vhodně vynásobíme a sečteme
- **porovnávací** - z každé rovnice vyjádříme tutéž neznámou a porovnáme
- **dosazovací** - z jedné rovnice vyjádříme neznámou a dosadíme do druhé

Řešení pomocí inverzních matic

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lze přepsat jako $A \cdot X = B$.
Je-li v soustavě rovnic $A \cdot X = B$ matice B rovna nulové matici, mluvíme o homogenní soustavě rovnic. Matici X nazýváme maticí řešení.
Maticovou rovnici $A \cdot X = B$ řešíme tak, že vynásobíme obě strany zleva vynásobíme maticí A^{-1}

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{B} \\
A^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= A^{-1} \cdot \mathbf{B} \\
\text{nezapomenout že } A^{-1} \cdot A &= E \\
E \cdot \mathbf{X} &= A^{-1} \cdot \mathbf{B} \\
\text{zde platí že } E \cdot X &= X \\
\mathbf{X} &= A^{-1} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Př.:

$$\begin{aligned}
4x + y &= -2 \\
3x + y &= 5
\end{aligned}$$

$A \cdot X = B$, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Určíme inverzní matici $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ a $X = A^{-1} \cdot B =$
$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -7 \wedge y = 26$

Pokud rozšíříme matici soustavy na tvar $(A|B)$, pak platí, že (Frobeniova věta) soustava je řešitelná, když $h(A) = h(A|B)$. Pokud $h(A)$ se rovná počtu neznámých, má soustava jediné řešení.

Gaussova eliminační metoda

Soustavu převedeme na tvar např. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, kterou pak upravíme do tvaru $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow K = \{[a_1, a_2]\}$. Pozn. aut. jestli se někdo dostane k tomuhle, nechť je mu zem lehká.

Cramerovo pravidlo

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ s maticí soustavy **A**.
Matice **A** vznike z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupkem pravé strany. Vznikou tři případy:

- $det(A) = 0$ a pro všechna $i \in \{1, 2, ..., n\}$ platí $det(A_i) = 0 \Rightarrow$ NMŘ
- $det(A) = 0$ a existuje alespoň jedno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ kdy $det(A_i) \neq 0 \Rightarrow$ ŽŘ
- $det(A) \neq 0$ a pro všechna $i \in \{1, 2, ..., n\}$ platí $x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)} \Rightarrow$ právě jedno řešení

Př.:

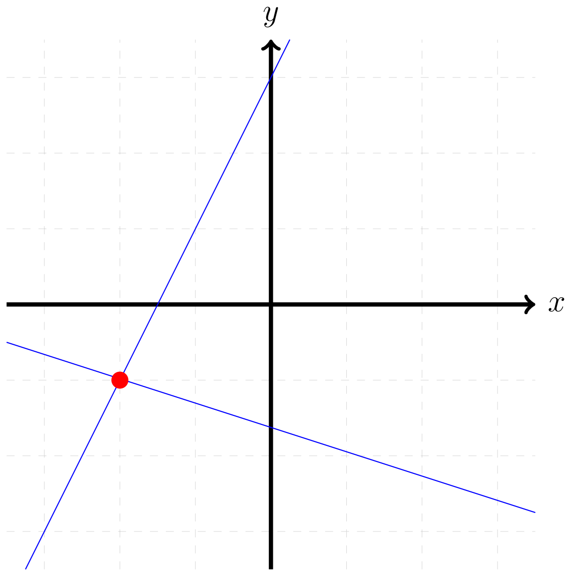
$$
\begin{aligned}
x + y &= 2 \\
x - y &= 4 \\
D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} &= -2 \\
D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} &= -6 \\
D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \\
x = \frac{D_x}{D_s} = 3 \wedge y = \frac{D_y}{D_s} &= -1 \\
K &= \{[3; -1]\}
\end{aligned}
$$

Grafické řešení soustavy (ne)rovnic o dvou neznámých

Soustava rovnic

Soustavu rovnic o dvou neznámých řešíme graficky tak, že si vyjádříme y a sestrojíme grafy funkcí.

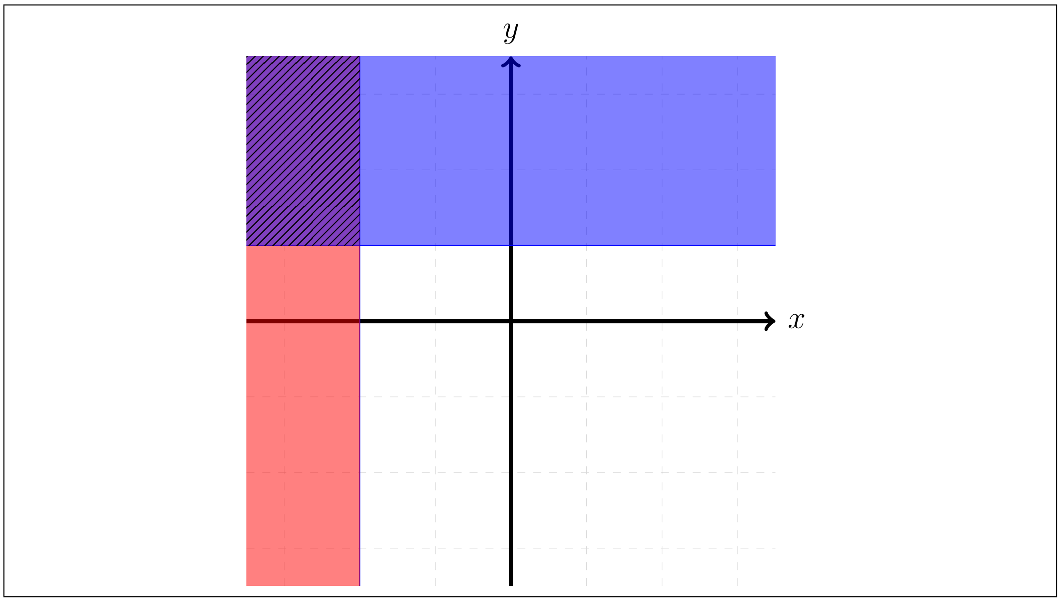
$$2x - y = -3 \Rightarrow y = 2x + 3$$
$$x + 3y = -5 \Rightarrow y = -\frac{x+5}{3}$$



Soustava nerovnic

Soustavu nerovnic řešíme graficky vyřešení každé zvlášť a určením průniku všech polorovin.

$$
\begin{aligned}
x + 2 < 0 &\Rightarrow x < -2 \\
y - 1 > 0 &\Rightarrow y > 1
\end{aligned}
$$



Soustavy tří rovnic o třech neznámých

Soustavu tří rovnic o třech neznámých řešíme nejčastěji metodou slučovací nebo dosazovací.
Metoda dosazovací: z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do zbylých dvou. Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých vyřešíme.
Metoda slučovací: Vhodně rovnice vynásobíme a sečteme tak, abychom získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.
Můžeme také použít inverzní matici, GEM nebo Cramerovy vzorce.

6 Kvadratická rovnice a nerovnice

Rovnici nazýváme kvadratickou, pokud lze převést na tvar $ax^2 + bx + c = 0$. Číslo a nazýváme kvadratický koeficient, b lineární koeficient a c absolutní člen.

- **Ryze kvadratická** - $b = 0 \wedge c \neq 0$ - $x^2 - 4 = 0$
- **Kvadratická bez absolutního členu** - $b \neq 0 \wedge c = 0$ - $x^2 + 2x = 0$
- **Úplná kvadratická** - $b \neq 0 \wedge c \neq 0$ - $2x^2 + 4x - 4 = 0$

Ryze kvadratická rovnice

Ryze kvadratická rovnice $ax^2 + c = 0$ je řešitelná právě když $a \cdot c < 0$. Řešíme ji převedním pomocí rozdílu čtverců. Př.:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8 &= 0 \\ 4 \cdot (-8) < 0 \Rightarrow \text{je řešitelná} & \\ 4(x^2 - 2) &= 0 \\ 4(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0 \\ K &= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Kvadratická rovnice bez absolutního členu $ax^2 + bx = 0$ je řešitelná vždy a jeden z kořenů je roven nule. Řešíme převedením na součinový tvar vytknutím x. Př.:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 18x &= 0 \\ 3x(x + 6) &= 0 \\ K &= \{-6; 0\} \end{aligned}$$

Úplná kvadratická

Řešíme pomocí **diskriminantu** a dosazením do vzorce.
$D = b^2 - 4ac \wedge x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

- $D > 0 \Rightarrow K = \{x_1, x_2\}, |K| = 2$
- $D = 0 \Rightarrow K = \{x_1/2\}, x_1 = x_2, |K| = 1$
- $D < 0 \Rightarrow K = \{\}, |K| = 0$

Rovnice vyšších řádů řešené pomocí KR

Bikvadratická rovnice ve tvaru $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kterou substitucí $y = x^2$ převedeme na kvadratickou rovnici.
Př.:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \\ [y = x^2] \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \\ (y-1)(y-2) = 0 \\ y = 1 \vee y = 2 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \vee -\sqrt{2} \\ K = \{\sqrt{(2)}; -1; 1; \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Viètovy vzorce

Kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ s kořeny x_1, x_2 lze rozložit na kořenové činitele: $a(x - x_1)(x - x_2)$.
Každou kvadratickou rovnici lze vydělením a normovat na tvar $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x = 0$, nebo $x + px + q = 0$.
Pro normovanou rovnici platí $x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q$.

Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnici $ax^2 + bx + c \geq 0$ řešíme převedením na součinový tvar pomocí rozkladů na kořenové činitele a poté metodou nulových bodů.
Př.:

$$
\begin{aligned}
-2x^2 - x + 3 &\geq 0 \\
2x^2 + x - 3 &\leq 0 \\
D = 25 \wedge x_1/2 &= \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \\
2(x-1)(x+\frac{3}{2}) &\leq 0
\end{aligned}
$$

$x \in$	$(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle$	$\langle -\frac{3}{2}; 1\rangle$	$\langle 1; +\infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + \frac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$
$*$	$+$	$-$	$+$

$$K = \langle -\tfrac{3}{2}; 1\rangle$$

Soustava lineární a kvadratické rovnice

Soustavu vždy řešíme dosazovací metodou a to tak, že z lineární rovnice vyjádříme neznámou a dosadíme to kvadratické.

Iracionální rovnice

Iracionální rovnice je rovnice, ve které je neznámá v odmocnině. Takovou rovnici musíme řešit po stanovení D_f. Můžeme poté obě strany umocnit, což je úprava důsledková, takže musíme provést zkoušku a vyloučit některé kořeny.
Př.:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{9+x} - \sqrt{x-7} &= 2 \\
\sqrt{9+x} &= 2 + \sqrt{x-7} \quad |^2 \\
9 + x &= 4 + 4\sqrt{x-7} + x - 7 \\
4\sqrt{x-7} &= 12 \\
\sqrt{x-7} &= 3 \quad |^2 \\
x - 7 &= 9 \\
x &= 16
\end{aligned}
$$

Zk.:
$L(16) = \sqrt{9+16} - \sqrt{16-7} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$
$P(16) = 2$
$L = P \Rightarrow K = \{16\}$

7 Lineární funkce a její vlastnosti

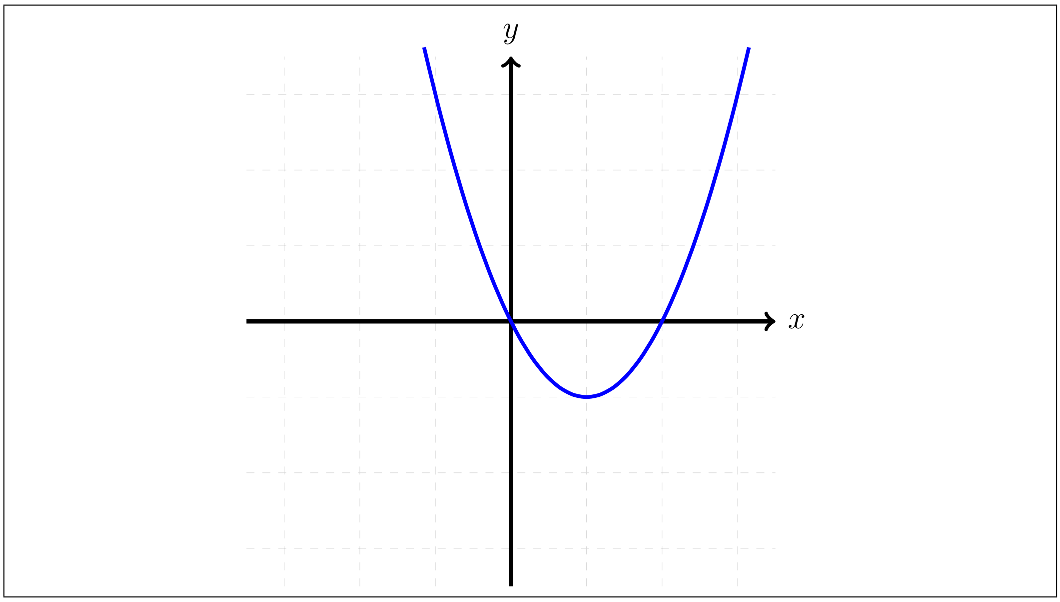
Nechť jsou dány neprázdné podmnožiny A,B množiny $\mathbb{R}$. Funkce f na množině A je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno číslo z množiny B.
Množina A se nazývá **definiční obor funkce**, značí se D_f a množina B **obor hodnot funkce**, značí se H_f.
Funkce může být zadána:

- předpisem $f : y = 4x - 1$
- tabulkou
- grafem

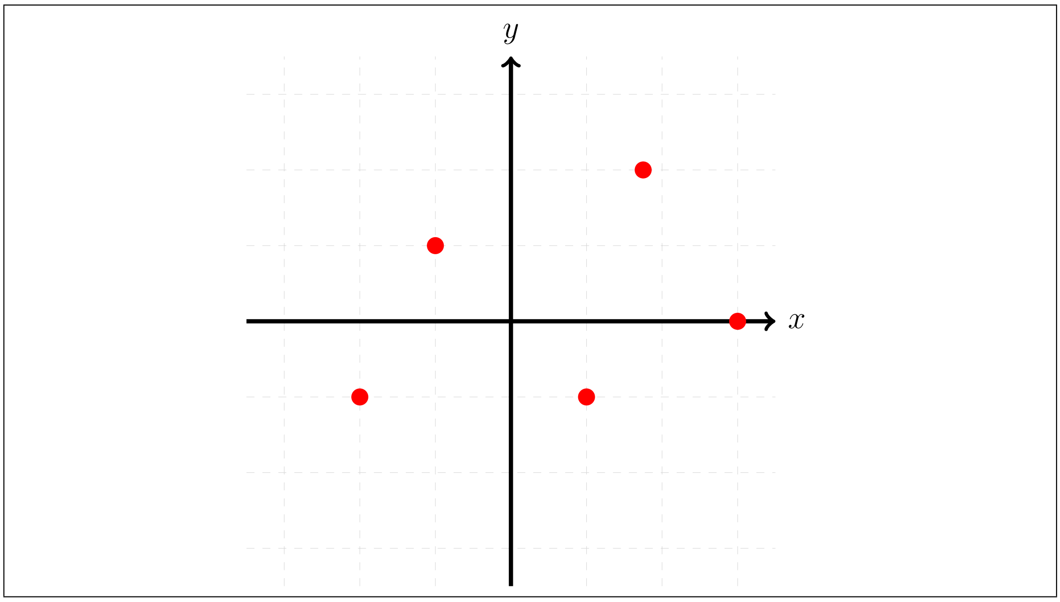
Že číslo x_0 z D_f přiřadí číslo y_0 z H_f, zapisujeme $y_0 = f(x_0)$.
$f(x_0)$ nazýváme **hodnotou funkce** $\boldsymbol{f}$ v **bodě** x_0.

Graf funkce

Graf funkce v soustavě souřadnic O_xy je množina všech bodů $[x, f(x)]$ kde $x \in D_f$.



Obrázek 6: Spojitý graf $y = x^2 - 2x$



Obrázek 7: Diskrétní graf

Maximální definiční obor je množina všech reálných čísel x_0 pro které je možné z předpisu určit funkční hodnotu $f(x_0)$.
Obor hodnot H_f funkce f je množina všech hodnot y ke kterým existuje alespoň jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$.
Průsečíky s osami:

- s osou x: $P_x[x_0, 0]$ - může jich být více
- s osou y: $P_y[0, y_0]$ - maximálně jeden

Lineární funkce

Lineární funkce je funkce s předpisem $f : y = ax + b$. Jejím grafem je přímka (pro $D_f = \mathbb{R}$).
Je-li $a = 0$, je to **konstantní funkce**.
Je-li $a \neq 0 \wedge b = 0$ je to **přímá úměra**.
Máme-li z grafu/tabulky určit předpis, musíme znát 2 její různé body, které dosadíme do předpisu $y = ax + b$.
Často se setkáváme s grafem **po částech lineární funkce**. Její předpis:

$$f : y = \begin{cases} 2x + 3, x \in \langle -2; -1 \rangle \\ x + 2, x \in \langle -1; 0 \rangle \\ -x + 2, x \in \langle 0; \frac{3}{2} \rangle \end{cases} \tag{1}$$

Vlastnosti funkcí

- **rostoucí** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$
- **nerostoucí** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **neklesající** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$

Každá rostoucí nebo klesající funkce je **prostá**.
Funkce může též být (ne)rostoucí/klesající na určitém intervalu.
Funkce f je:

- **sudá**, právě když pro každé $x \in D_f$ platí: $f(-x) = f(x)$; souměrná podle osy y
- **lichá**, prácě když pro každé $x \in D_f$ platí: $f(-x) = -f(x)$; souměrná podle počátku soustavy

Inverzní funkce

Inverzní funkcí f^{-1} k funkci f získámé tak, že v předpisu zaměníme navzájem proměnné.

8 Kvadratická funkce a její vlastnosti

Kvadratická funkce má obecný předpis $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$. Jejím grafem je **parabola**.
Funkce se nazývá:

- **zdola omezená**, právě když existuje reálné číslo d takové, pro $x \in D_f$ platí: $f(x) \geq d$
- **shora omezená**, právě když existuje reálné číslo h takové, pro $x \in D_f$ platí: $f(x) \leq h$
- **omezená**, právě když je shora i zdola omezená

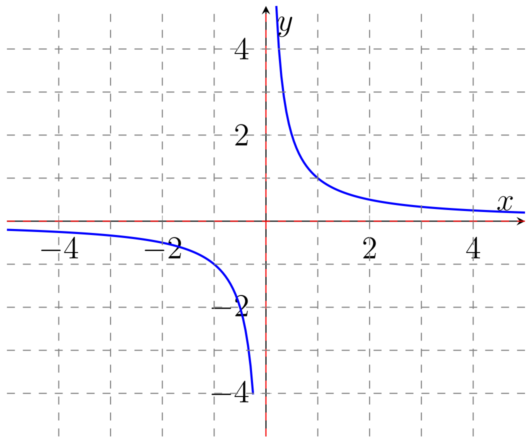
Předpis kvadratické funkce můžeme též vyjádřit ve **vrcholovém tvaru** $y = a(x - m)^2 + n; a \neq 0$ kde lze určit souřadnice vrcholu $V[m, n]$.

9 Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti

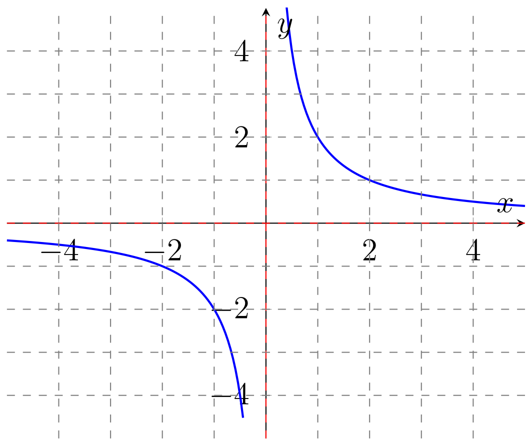
Lineárně lomená funkce

Lineárně lomená funkce má obecný předpis $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Jejím grafem je **hyperbola**.

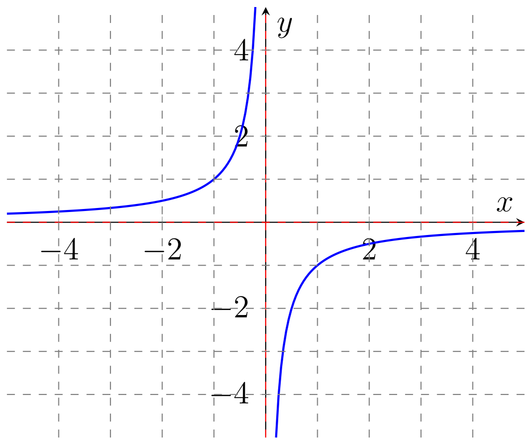
Nejjednoduší předpis LLF je $f : y = \frac{1}{x}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (je to nepřímá úměrnost), střed hyperboly je v bodě $[0; 0]$, osy x,y jsou asymptoty hyperboly.



Obrázek 8: $y = \frac{1}{x}$



Obrázek 9: $y = \frac{2}{x}$

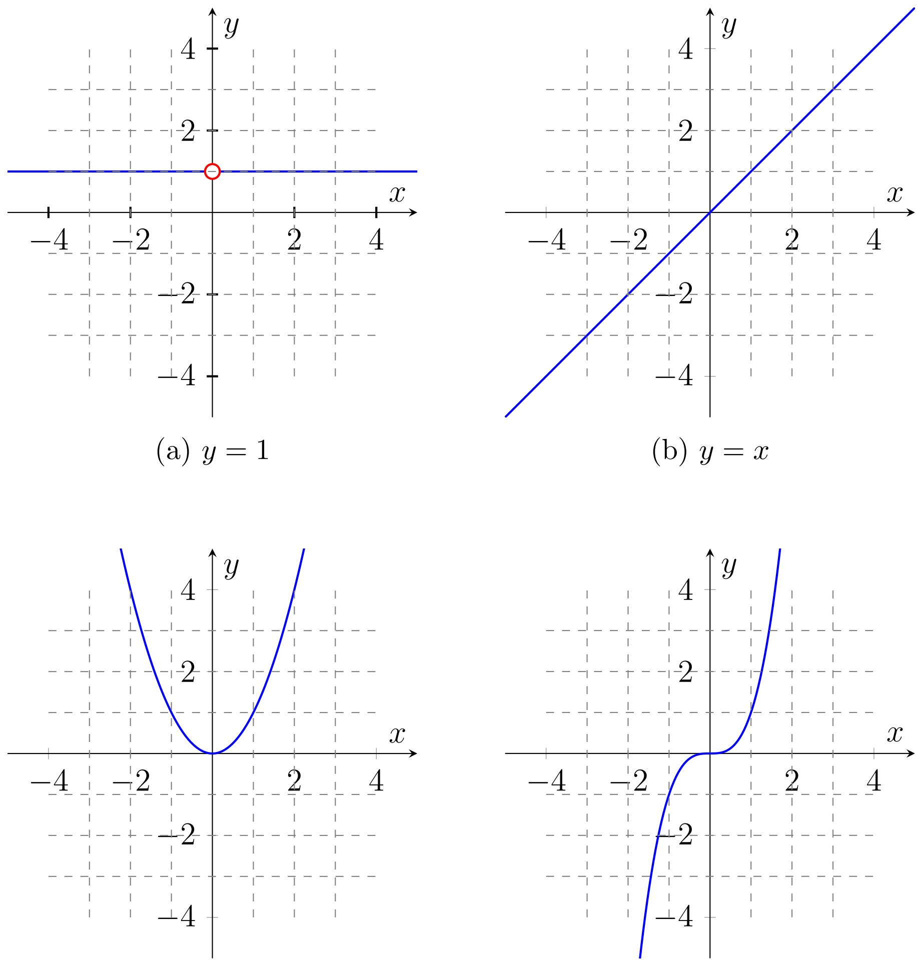


Obrázek 10: $y = -\frac{1}{x}$

Předpis LLF může být i ve **středovém tvaru** $y = \frac{a}{x-m} + n$, kde $[m; n]$ jsou souřadnice středu hyperboly (průsečík asymptot) a a je její koeficient. Obecný tvar na středový převedeme vydělením.

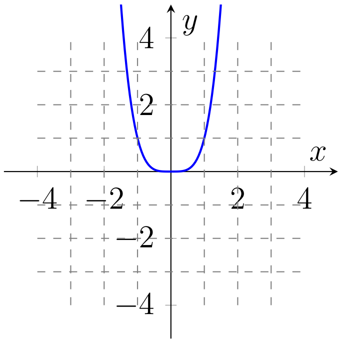
Mocninná funkce

Mocninná funkce je funkce s předpisem $y = x^n$.

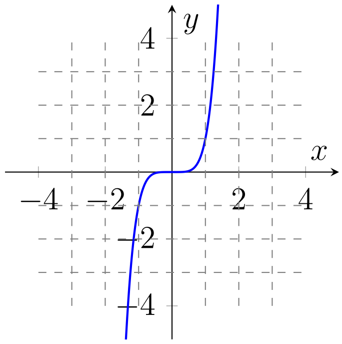


(a) $y = 1$ (b) $y = x$

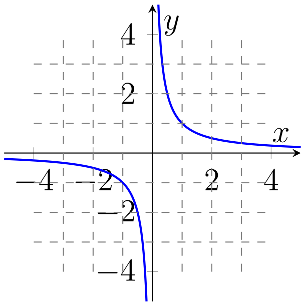
(c) $y = x^2$ (d) $y = x^3$



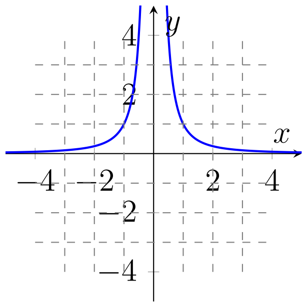
(a) $y = x^4$



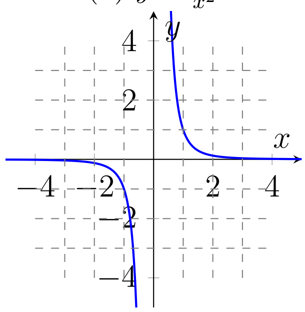
(b) $y = x^5$



(a) $y = \frac{1}{x}$

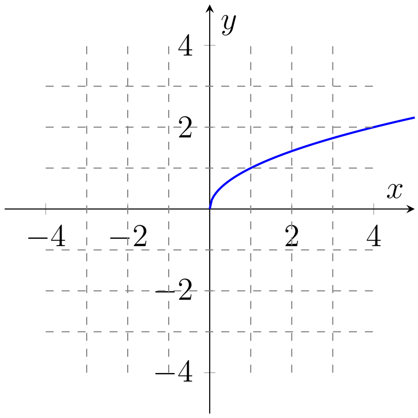


(b) $y = \frac{1}{x^2}$



(c) $y = \frac{1}{x^3}$

Dovětek Mocninnou funkci s předpisem $y = x^n$ lze definovat i pro $n \in \mathbb{Q}$. Např. $n = \frac{1}{2}$ bude mít předpis $y = \sqrt{x}$ což je inverzní funkce k kvadratické funkci. Inverzní funkci lze stanovit pouze k prosté funkci, musíme tedy stanovit D_f, na kterém je původní funkce prostá, v tomto případě je $D_f = \mathbb{R}_0^+$.

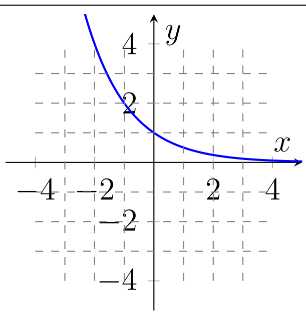


Obrázek 14: $y = \sqrt{x}$

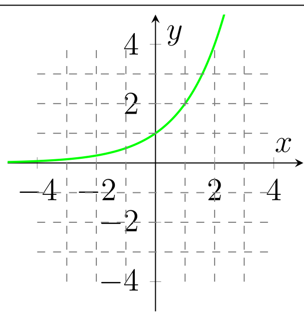
10 Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce o základu $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ je funkce s předpisem $y = a^x$ a křivkou exponenciálou.
Funkce je pro $a \in (0; 1)$ klesající, pro $a \in (1; +\infty)$ roustoucí. Maximální definiční obor je $\mathbb{R}$ a obor hodnot $H_f = (0; +\infty)$. Osa x je asymptotou. Je to funkce prostá.



(a) $f : y = \frac{1}{2}^x$



(b) $f : y = 2^x$

Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice prvního typu

ER je rovnice, kde se neznámá vyskytuje v exponentu. **První typ** ER jsou rovnice, které po užití vzorců (str. 12) a ekvivalentních úprav mají na obou stranách jednočlen. Řešíme převedením na mocninu se stejným základem a porovnáváme exponenty.
Př.:

$$\begin{aligned}
3^{x+2} + 3^{x-1} &= 28 \\
3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^-1 &= 28 \\
3^x(9 + \frac{1}{3}) &= 28 \\
3^x \cdot \frac{28}{3} &= 28| : \frac{28}{3} \\
3^x &= 3^1 \\
x &= 1 \\
K &= \{1\}
\end{aligned}$$

Exponenciální rovnice druhého typu

Druhým typem jsou rovnice, které nelze upravit tak, aby na obou stranách byl jednočlen. Musíme zavést substituci.
Př.:

$$\begin{aligned}
4^x - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\
&[y = 2^x] \\
(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\
y^2 - 9y + 8 &= 0 \\
(y-1)(y-8) &= 0 \\
y = 1 \vee y &= 8
\end{aligned}$$

! Musíme dosadit zpět do substituce!

$$\begin{array}{cc}
\text{i)} & \text{ii)} \\
2^x = 1 & 2^x = 8 \\
2^x = 2^0 & 2^x = 2^3 \\
x = 0 & x = 3
\end{array}$$

$$K = \{0; 3\}$$

Exponenciální nerovnice

Jednoduché exponenciální nerovnice lze upravit tak, aby měly jeden z tvarů: $a^r < a^s \vee a^r > a^s \vee a^r \geq a^s \vee a^r \leq a^s$. Záleží jestli je funkce $y = a^x$ klesající nebo rostoucí, je-li $a > 1$ pak neměníme znaménko. Pokud je $0 < a < 1$ pak se znaménko nerovnosti mění.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+2} &\leq 1 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+2} &\leq \left(\frac{1}{7}\right)^{0} \\ 3x+2 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{2}{3} \\ K &= \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Logaritmická funkce

Logaritmus

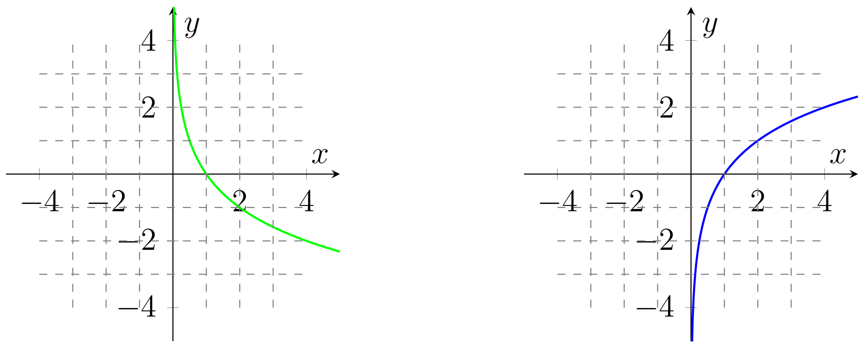
Logaritmus z kladného čísla a při základu z je roven číslu b zapisujeme $\log_z a = b$ právě když platí $z^b = a$.
Základ je vždy z intervalu $(0; 1) \cup (1; +\infty)$, je-li $z = 10$ pak píšeme jen $\log a$, je-li $z = e$ pak píšeme jen $\ln a$.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

- $\log_z 1 = 0$
- $\log_z ab = \log_z a + \log_z b$
- $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b$
- $\log_z a^n = n \log_z a$

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce $f : y = \log_z x, z \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ s definičním oborem $D_f = (0; +\infty)$ a oborem hodnot $H_f = \mathbb{R}$ je inverzní funkce k exponenciální funkci $y = z^x$.
Logaritmická funkce je pro $a \in (0; 1)$ klesající a pro $a \in (1; +\infty)$ rostoucí.



(a) $f : y = \log_{0.5} x$ (b) $f : y = \log_2 x$

Logaritmické rovnice

V logaritmické rovnici se nachazí neznámá v logaritmu. Musíme vždy stanovit definiční obor rovnice. Řešíme převedením na logaritmus o stejném základu a porovnáme argumenty. Není-li to možné, zavádíme substituci.

$$
\begin{aligned}
\log(x-3) - \log x &= -1 \\
\text{Podmínky: } x > 3 \land x > 0 \Rightarrow D_R &= (3; +\infty) \\
\log \frac{x-3}{3} &= \log 0.1 \\
\frac{x-3}{3} &= \frac{1}{10} \\
x - 3 &= \frac{1}{10} x \\
\frac{9}{10} x &= 3 \\
x &= \frac{10}{3} \\
K &= \left\{ \frac{10}{3} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log x + \frac{1}{\log x} &= 2 \\
\text{Podmínky: } x > 0 \wedge x \neq 1 \Rightarrow D_R &= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\
[y &= \log x] \\
y + \frac{1}{y} &= 2| \cdot y \\
y^2 - 2y + 1 &= 0 \\
y &= 1 \\
\log x &= 1 \\
x &= 10 \in D_R \\
K &= \{10\}
\end{aligned}
$$

Logaritmické nerovnice

Logaritmické nerovnice řešíme:

1. určíme D_R
2. obě strany převedeme na logaritmus o stejném základu
3. porovnáváme argumenty, platí změna znaménka při základu z intervalu $(0; 1)$

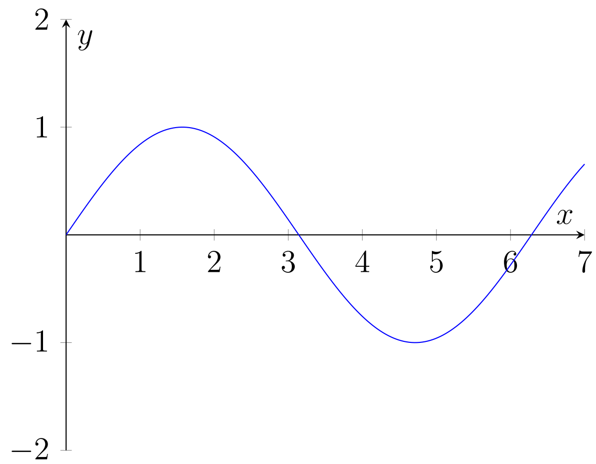
$$
\begin{aligned}
\log_{0.5}(x+3) &\leq \log_{0.2} 2x \\
\text{Podmínky: } x > 3 \wedge x > 0 \Rightarrow D_N &= \mathbb{R}^+ \\
x + 3 &\geq 2x \\
-x &\geq -3 \\
x &\leq 3 \\
K &= (-\infty; 3\rangle \cap D_N \\
K &= (0; 3\rangle
\end{aligned}
$$

11 Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k se středem S a poloměrem $r = 1j$, délka takové kružnice je $2\pi j$.
Radián je středový úhel, příslušící jednotkové kružnici oblouku o délce $1j$.

Sinus

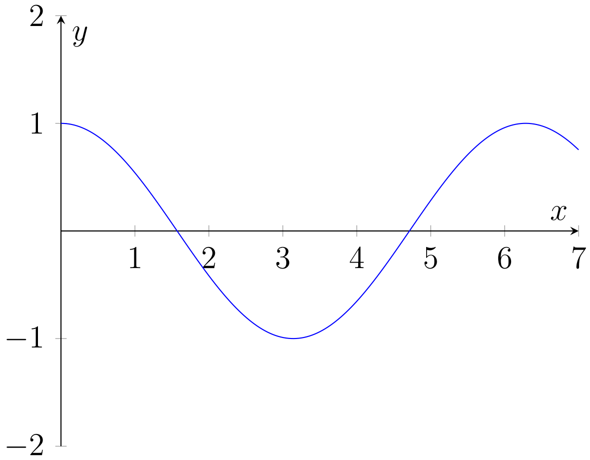
V pravoúhlém trojuhleníku definujeme funkci sinus jako poměr délek protilehlé odvěsny ku přeponě. Křivku funkce nazýváme sinusoida.
Funkce $f : y = sin(x)$ je v Q_1 a Q_2 nezáporná, v Q_3 a Q_4 je nekladná. Obor hodnot je interval $\langle -1; 1 \rangle$.
Funkce sinus je **periodická** s periodou $2\pi \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}) sin(x + 2k\pi) = sin(x)$.



(a) $f : y = sin(x)$

Kosinus

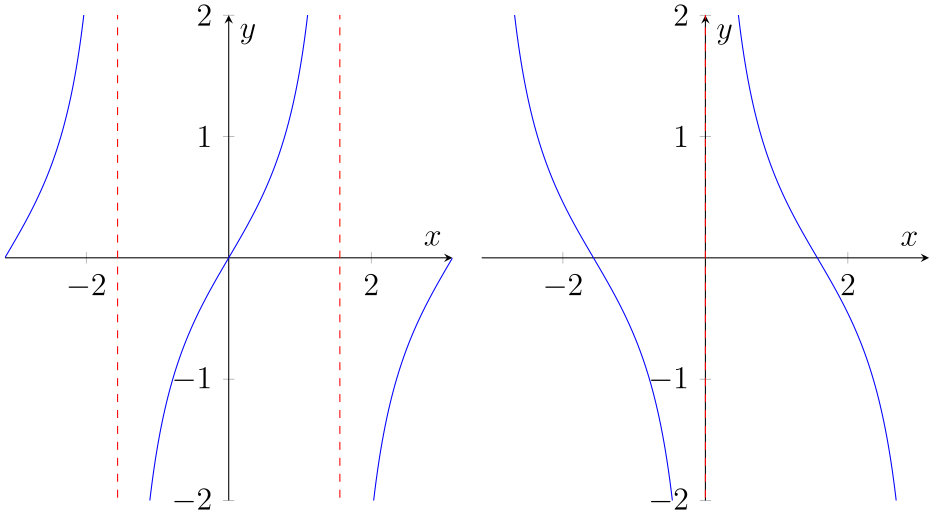
Funkce kosinus je v Q_1 a Q_4 nezáporná, a v Q_2 a Q_3 nekladná. Obor hodnot je interval $\langle -1; 1 \rangle$. Maximální definiční obor $\mathbb{R}$. Perioda je 2π.
Kosinusoida je sinusoida posunutá o $\frac{\pi}{2}$.



(a) $f : y = cos(x)$

Tangens a kotangens

Obor hodnot obou funkcí je $\mathbb{R}$ Funkce jsou periodické s periodou π. Obě funkce jsou v Q_1 nezáporné a v Q_2 nekladné.



(a) $f : y = \tan(x)$ (b) $f : y = \cot(x)$

Tangens

Funkce není definována v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. V grafu jsou to asymptoty.

Kotangens

Funkce není definována v bodech $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. V grafu jsou to asymptoty.

Goniometrické vzorce

Pozn. najdu je v **TABULKÁCH**!

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (první goniometrická jednotka)
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\tan x \cdot \cot x = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Goniometrické rovnice

Př.:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \text{je kladný v } Q_1 \wedge Q_2; \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi\}$$

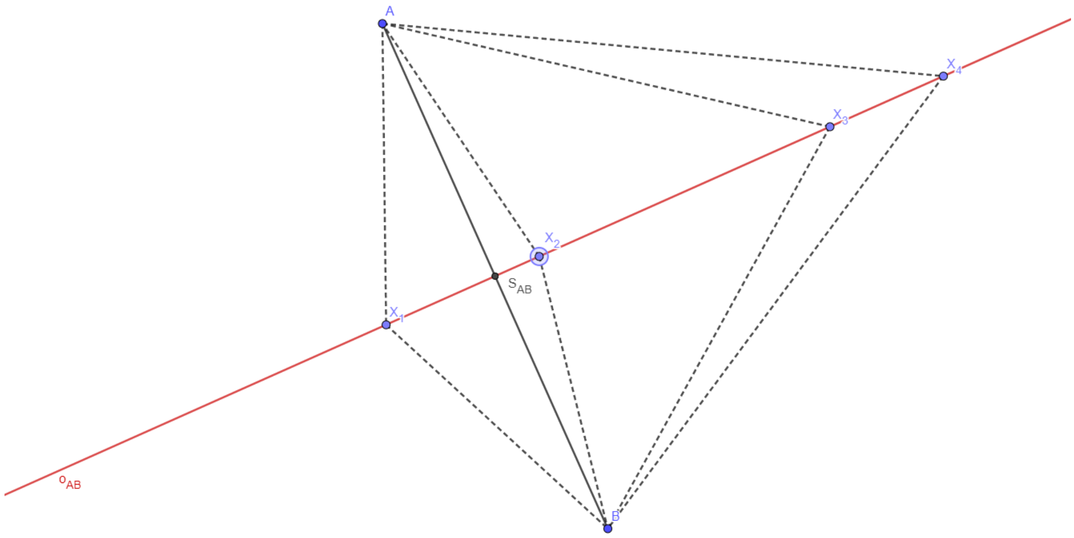
12 Množiny bodů dané vlastnosti

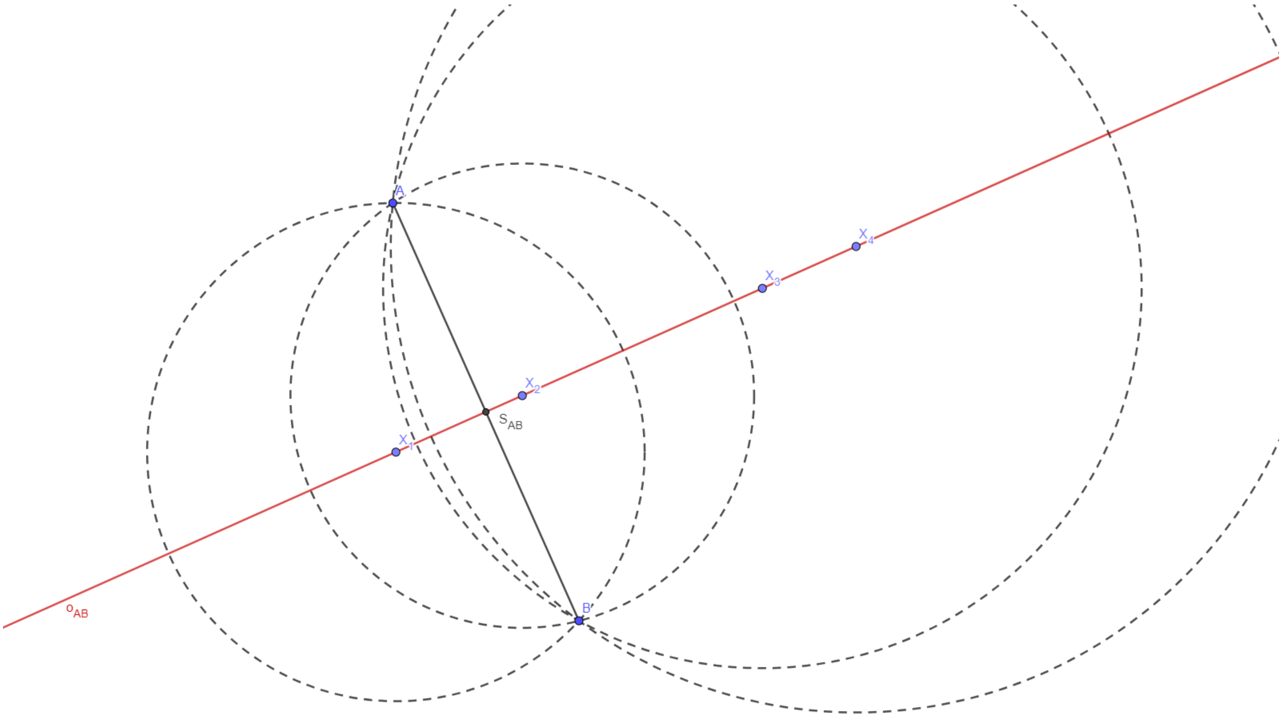
Množina M dané vlastnosti je množina všech bodů roviny, pro kterou platí:

- každý bod množiny M má danou vlastnost
- každý bod, který má danou vlastnost, patří do množiny M

Osa úsečky AB

- je množina všech bodů, které mají od dvou bodů A,B stejnou vzdálenost
- je množina všech středů kružnic, které procházejí danými body A,B



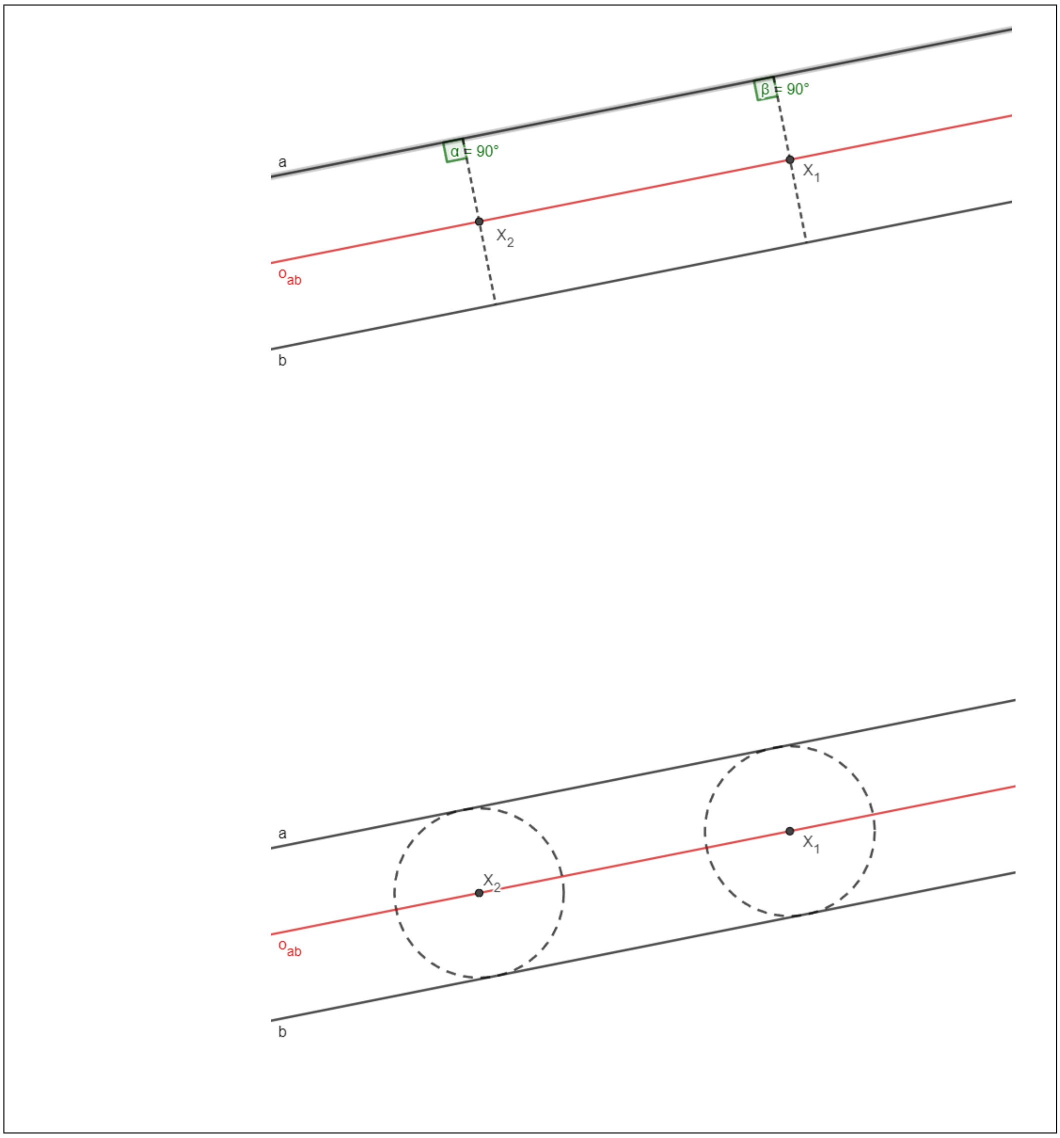


$o_{AB} = \{X; |AX| = |BX|\}$

Osa rovnoběžek a, b

Resp. osa rovinného pásu

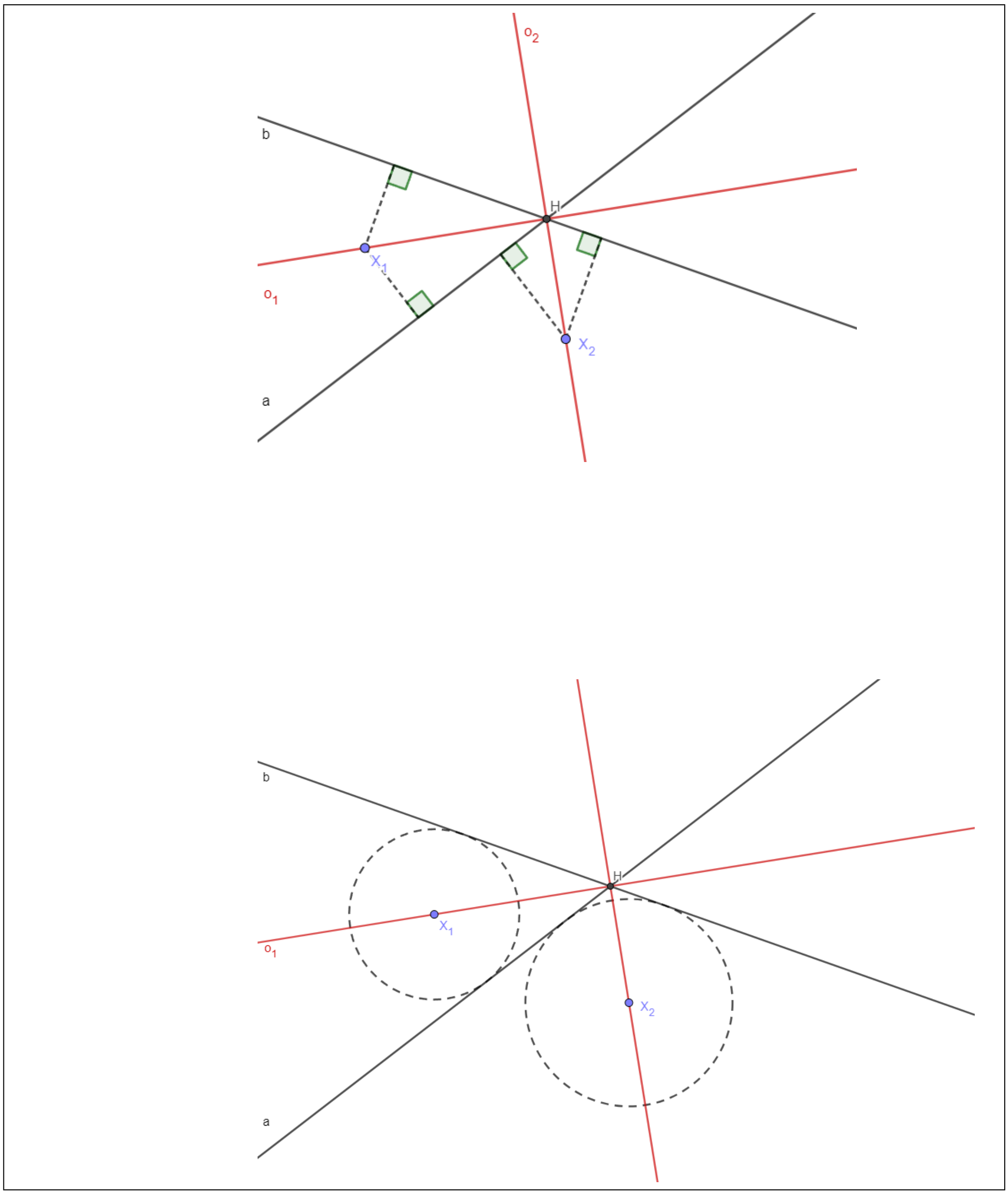
- je množina všech bodů, které mají od daných dvou rovnoběžek a,b stejnou vzdálenost
- je množina středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek a,b



$o_{ab} = \{X; |Xa| = |Xb| = \frac{1}{2}ab\}$

Osy různoběžek

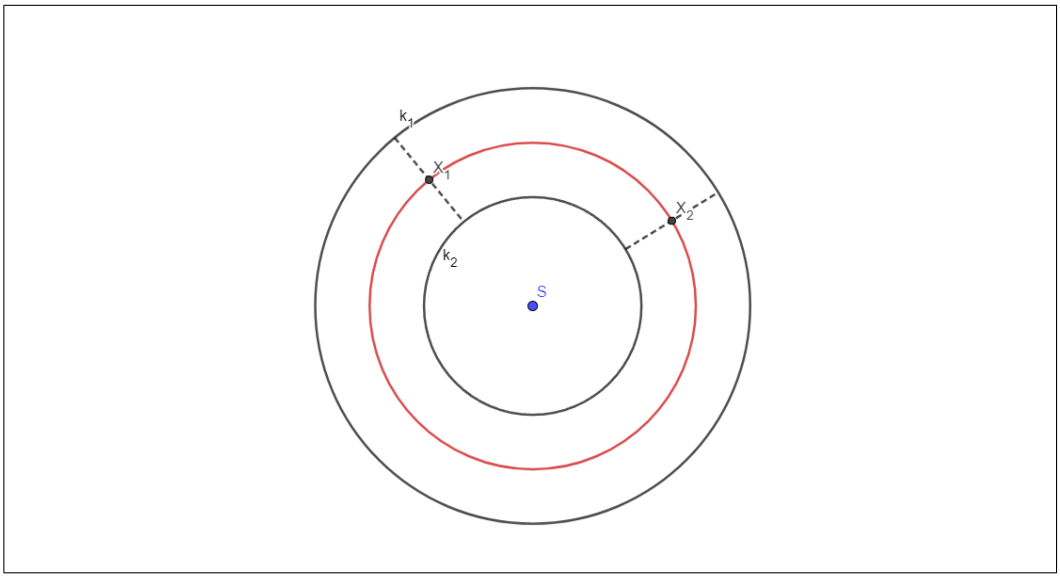
- je množina všech bodů, které mají od daných různoběžek a,b stejnou vzdálenost
- (kromě jejich průsečíku) je množina všech středů kružnic, které se dotýkají daných dvou různoběžek a,b



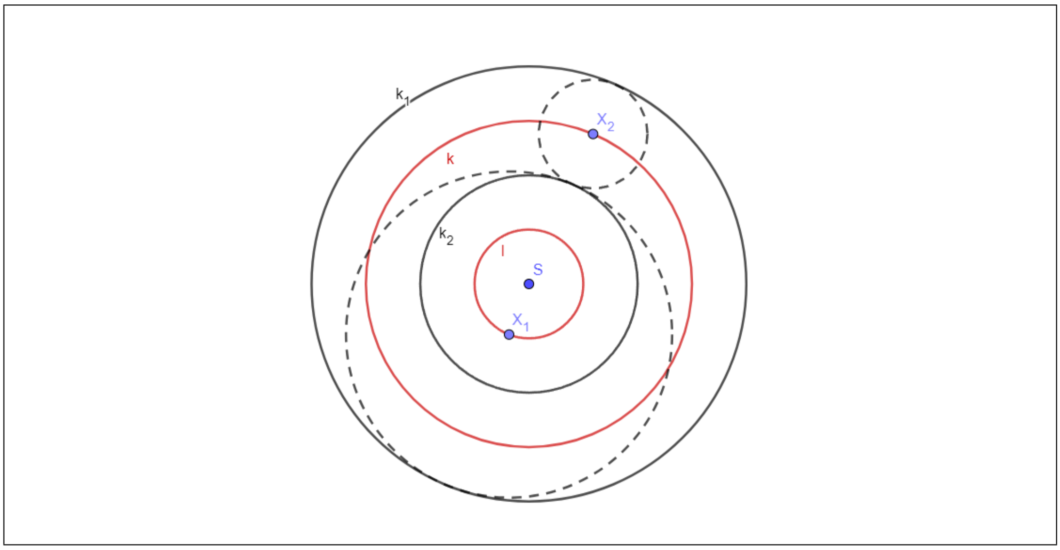
$o_1 \cup o_2 = \{X; |Xa| = |Xb|\}$
Osy různoběžek jsou na sebe vždy kolmé.

Soustředné kružnice

Nechť jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1), k_2(S, r_2), r_1 > r_2$. **Kružnice** $k(S, r)$ kde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, je množina všech bodů, které mají od daných kružnic stejnou vzdálenost.



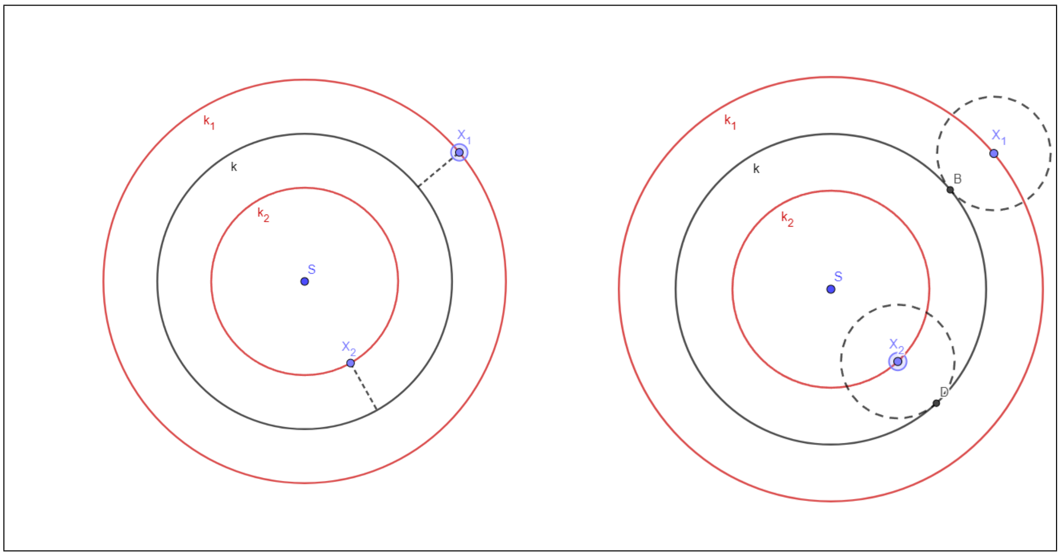
Dvě kružnice $k(S, r_1), l(S, r_2)$, kde $r_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), r_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ je množina středů kružnic, které se dotýkají daných kružnic.



Ekvidistanty kružnice

Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a kladné reálné číslo d.
Pro $d < r$ sjednocení kružnic $k_1(S, r + d) \cup k_2(S, r - d)$; pro $d \geq r$ kružnice $k_1(S, r + d)$ je

- množina všech bodů, které mají od dané kružnice k vzdálenost d
- množina středů všech kružnic s poloměrem d, které se dotýkají dané kružnice

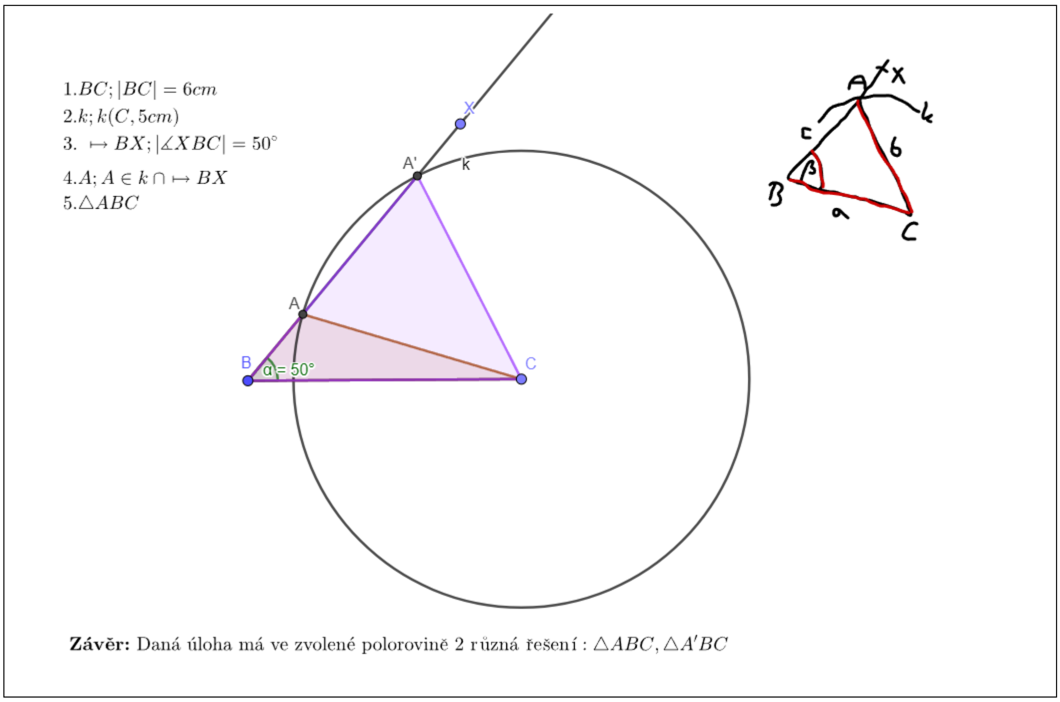


13 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Řešení konstrukční úlohy má tyto fáze:

- **rozbor úlohy** - předpokládáme že existuje alespoň jeden hledaný trojúhelník, ten načrtneme a vyznačíme hledané prvky; hledáme vztahy a množiny bodů
- **zápis konstrukce** - symbolický zápis všech kroků kontrukce (+ pomocný náčrtek)
- **konstrukce** - sestrojíme trojúhelník (všechna řešení nebo jen zvolenou polorovinu) podle zápisu
- **závěr** - uvedeme počet řešení, popř. zkouška

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 6cm, b = 5cm, \beta = 50°$.
Rozbor úlohy: po sestrojení strany BC s délkou 6 cm, musíme najít vrchol A, který je od vrcholu C vzdálen 5 cm, leží tedy na kružnici $k(C, 5cm)$; dále víme, že vrchol A leží na polopřímce BX tak, že velikost úhlu XBC je 50°; vrchol A leží v průsečíku množin bodů polopřímky BX a kružnice k.



Pokud nejsou zadány údaje konkrétně, ale pouze obecně, konstrukce se neprovádí a místo závěru se provede **diskuse řešitelnosti**.
U $\triangle ABC$ by vypadala: $a > 0, 0° < \beta < 180°$; jedno řešení: $\beta < 90° \wedge b = a \sin\beta$ nebo $\beta \geq 90° \wedge b > a$; dvě různá řešení: $\beta < 90° \wedge b > a \sin\beta$.

14 Shodná zobrazení

Zobrazení *Z* v rovině je předpis, který každému bodu *X* roviny přiřazuje právě jeden bod *X'* roviny. Bod *X* nazýváme **vzor**, bod *X'* jeho **obraz**.
Zápis: $Z : X \to X'$.
Bod *X*, pro něhož obraz *X'* platí, že $X = X'$, nazýváme **samodružný**. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný nazýváme **identita**.

Zobrazení nazýváme **shodné zobrazení** (nebo též **shodnost**), právě když obrazem každé úsečky *AB* je úsečka *A'B'* shodná s *AB*.
Pokud ověřujeme shodnost dvou útvarů, a pouze průsvitku otáčíme nebo posouváme, mluvíme o **přímé shodnosti**. Pokud průsvitku převrátíme na druhou stranu, mluvíme o **nepřímé shodnosti**.
V každém shodném zobrazení platí:

- obrazem přímky je přímka; obrazem rovnoběžek jsou rovnoběžky
- obrazem polopřímky je polopřímka; obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky
- obrazem úhlu *AVB* je úhel *A'V'B'*, který je shodný s úhlem *AVB*

Osová souměrnost

Osová souměrnost s osou o (zapisujeme $O(o) : X \to X'$) je shodné zobrazení, které přiřazuje:

- každému bodu $X \notin o$ obraz X' tak, že úsečka XX' je kolmá na osu o a střed úsečky XX' leží na ose o
- každému bodu $X \in o$ obraz X' tak, že $X = X'$

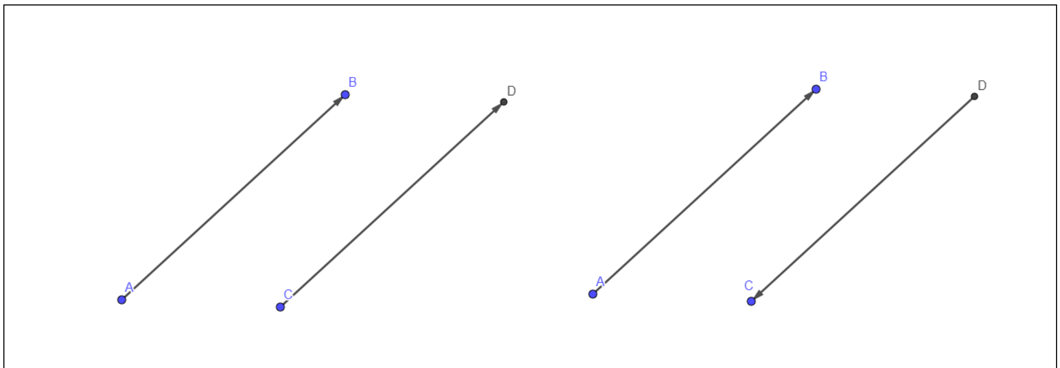
Středová souměrnost

Středová souměrnost se středem S (zapisujeme $S(S) : X \to X'$) je shodné zobrazení. které přiřazuje:

- každému bodu $X \neq S$ obraz X' tak, že bod S je středem úsečky XX'
- bodu S bod $S' = S$

Orientovaná úsečka

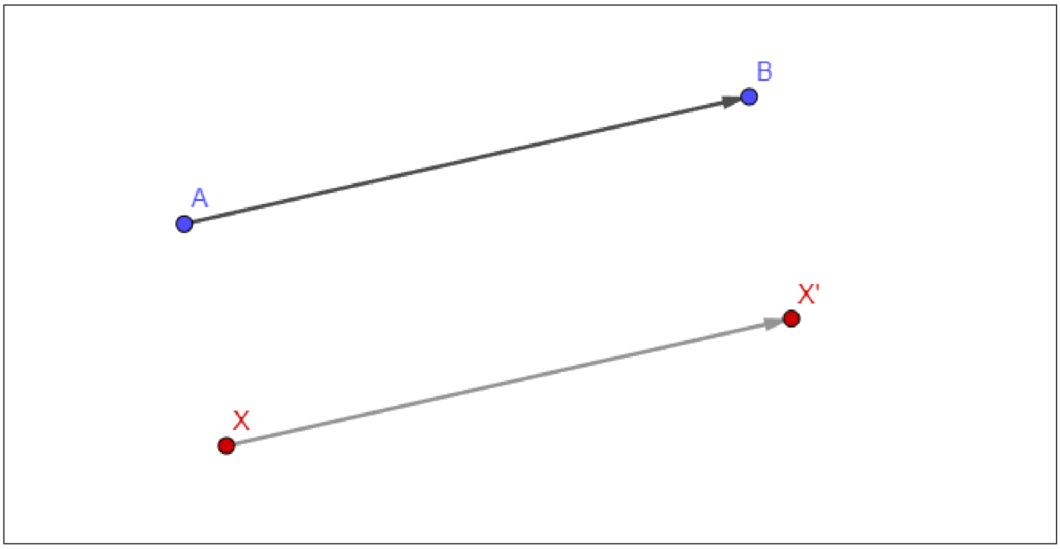
Orientovaná úsečka $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ je úsečka, u které rozlišujeme počáteční bod A a koncový bod B (vpodstatě vektor).
Velikost orientované úsečky je definována jako $|AB|$.
Nulová orientovaná úsečka má nulovou velikost a její počáteční i koncový bod splývají.
Jsou-li dvě orientované úsečky rovnoběžné, říkáme, že mají **stejný směr**. Navíc říkáme, že jsou:



(a) souhlasně orientované (b) nesouhlasně orientované

Translace

Posunutí (zapisujeme $T(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) : X \to X'$) je shodné zobrazení, které přiřazuje každému bodu X obraz X' tak, že úsečky $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a $\overrightarrow{\mathrm{XX'}}$ mají stejný směr, orientaci a velikost.



Orientovaný úhel

Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek se společným počátkem. První je počáteční rameno, druhá je koncové rameno.
Záleží na pořadní písmen!$\measuredangle AVB \neq \measuredangle BVA$

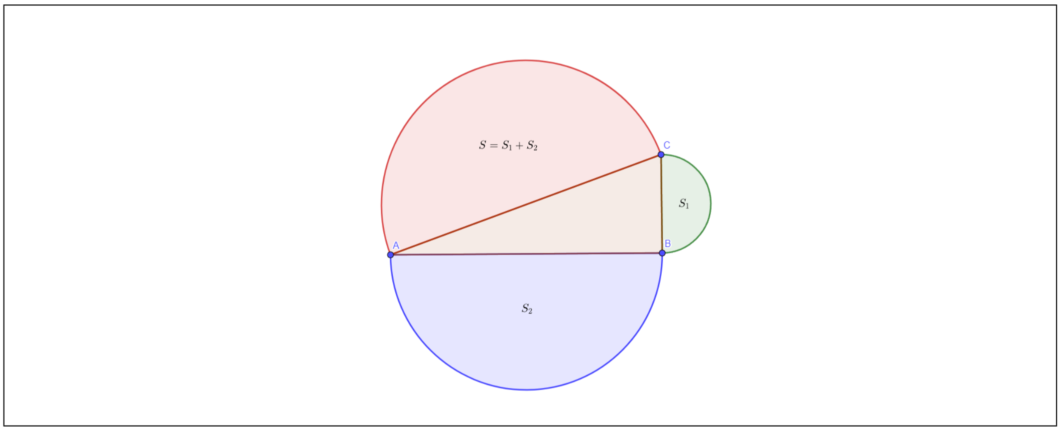
15 Podobná zobrazení

tady cekam na floru, protoze asi nemam ty archy? jako vim co to je, takovy to homotetie, rotace a tak ale idk zapis k tomu zejo

16 Pythagorova a Eukleidovy věty

Pythagorova věta

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahu čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.
Symbolicky zapisujeme: $c^2 = a^2 + b^2$, kde c je přepona.
Znění věty lze rozšířit i na např. půlkruhy.



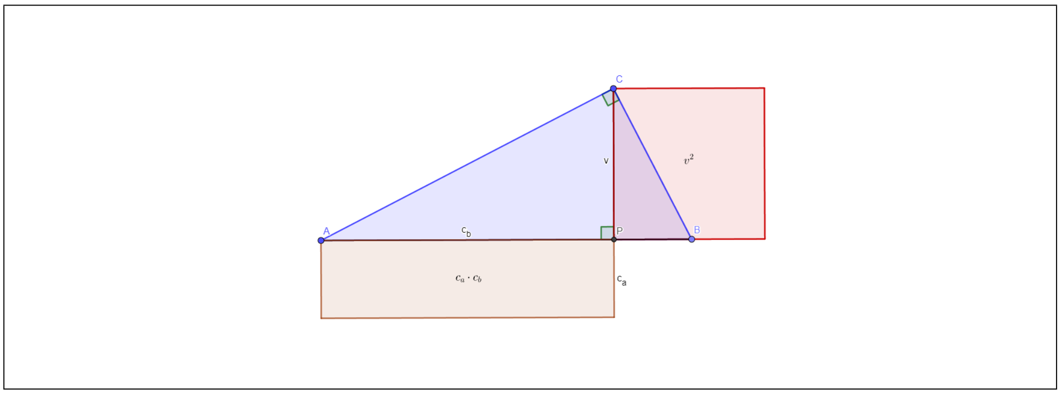
Eukleidovy věty

Výška v pravoúhlém trojuhelníku je vzdálenost vrcholu při pravém úhlu od přímky, na níž leží přepona. Pata P výšky rozdělí přeponu na dva úseky c_a a c_b.

Eukleidova věta o výšce

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku, jehož strany tvoří oba úseky přepony.

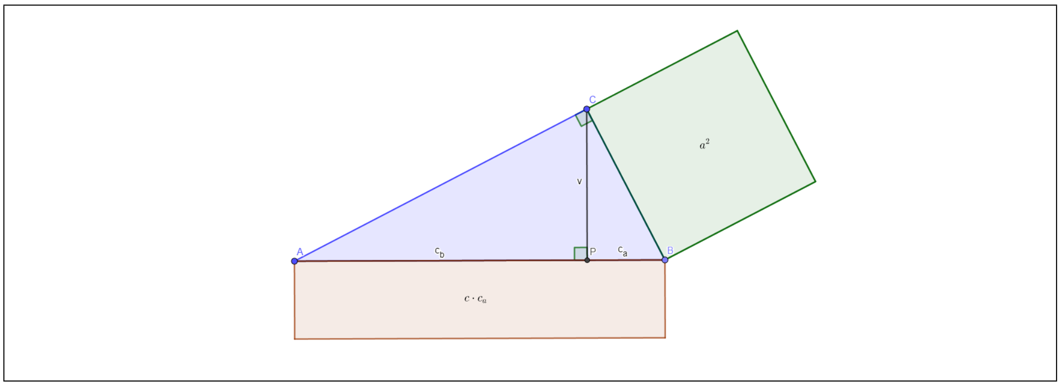
$$v^2 = c_a \cdot c_b$$



Eukleidova věta o odvěsně

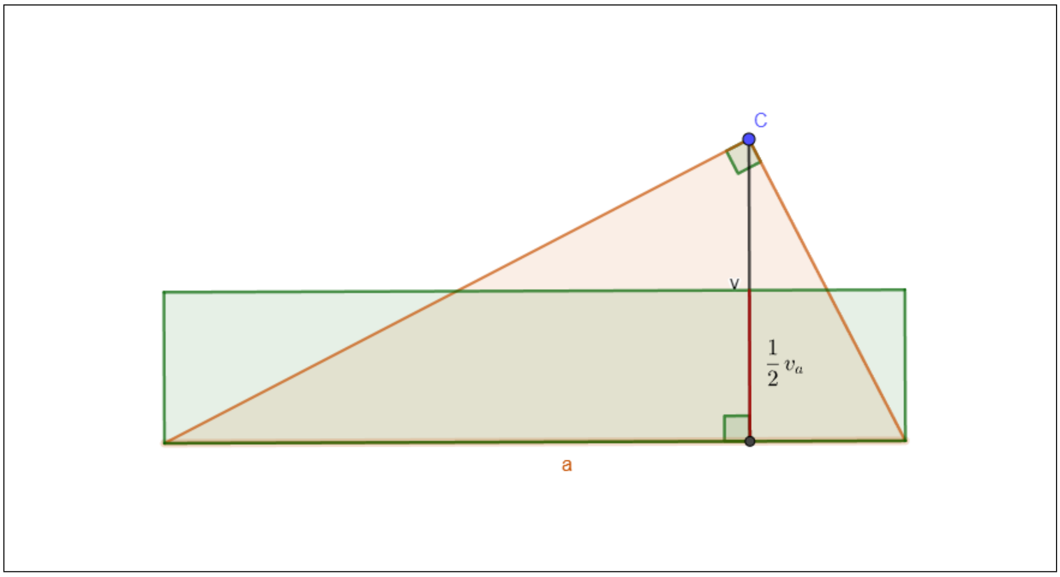
Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku, jehož strany tvoří přepona a přilehlý úsek.

$$a^2 = c \cdot c_a \vee b^2 = c \cdot c_b$$



Převod trojúhelníku na obdélník

Máme-li bez výpočtu sestrojit obdélník, který má stejný obsah jako daný trojúhelník, využijeme obsah trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ a upravíme jej na tvar $S = a \cdot \frac{v_a}{2}$. Sestrojit úsečku $b = \frac{v_a}{2}$ lze pomocí kružítka a pravítka. Máme vzorec $S = a \cdot b$, což je obsah obdélníku se stranami $a, b = \frac{1}{2} v_a$.

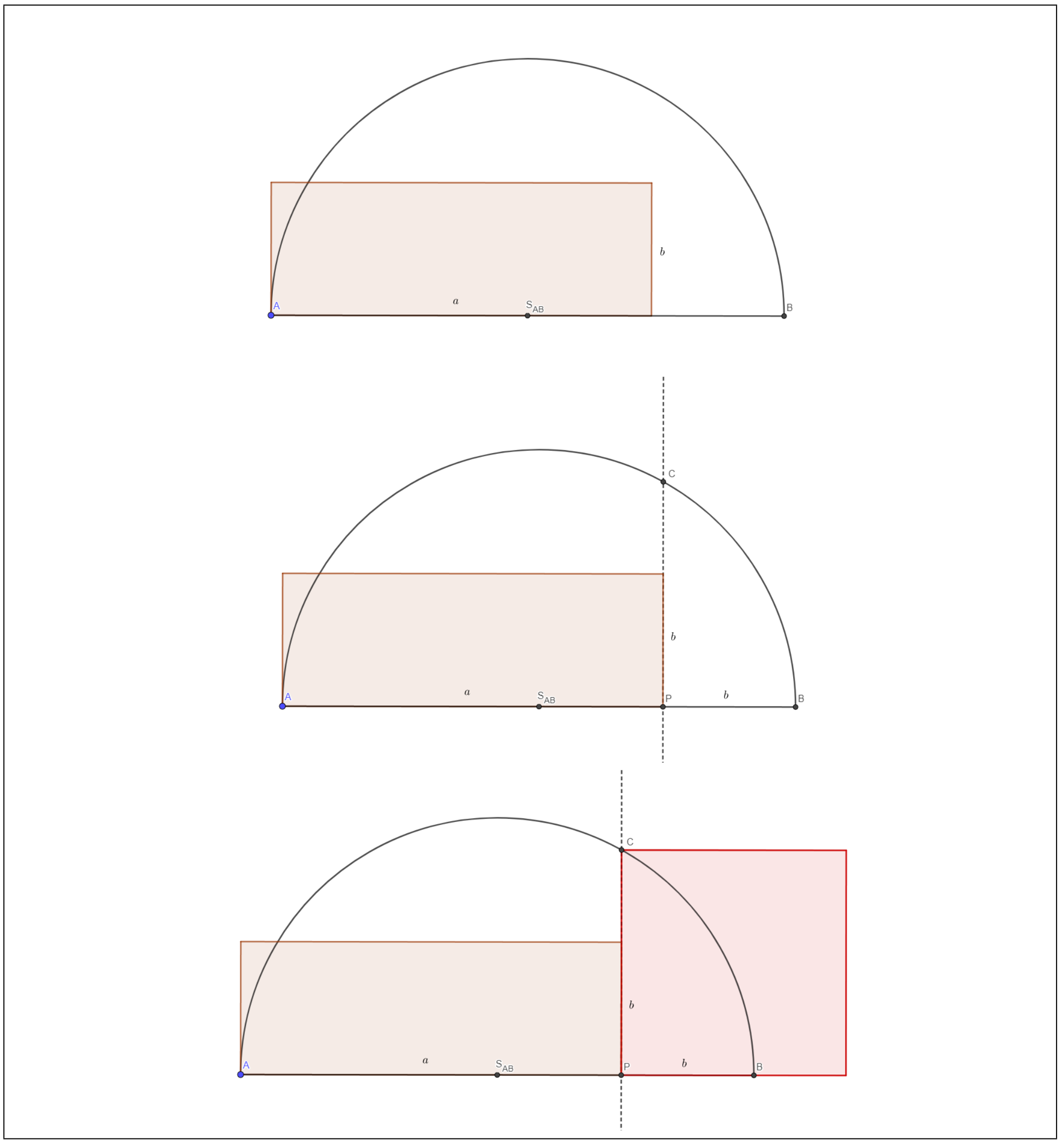


Převod obdélníku na čtverec

Jsou dva způsoby převodu:

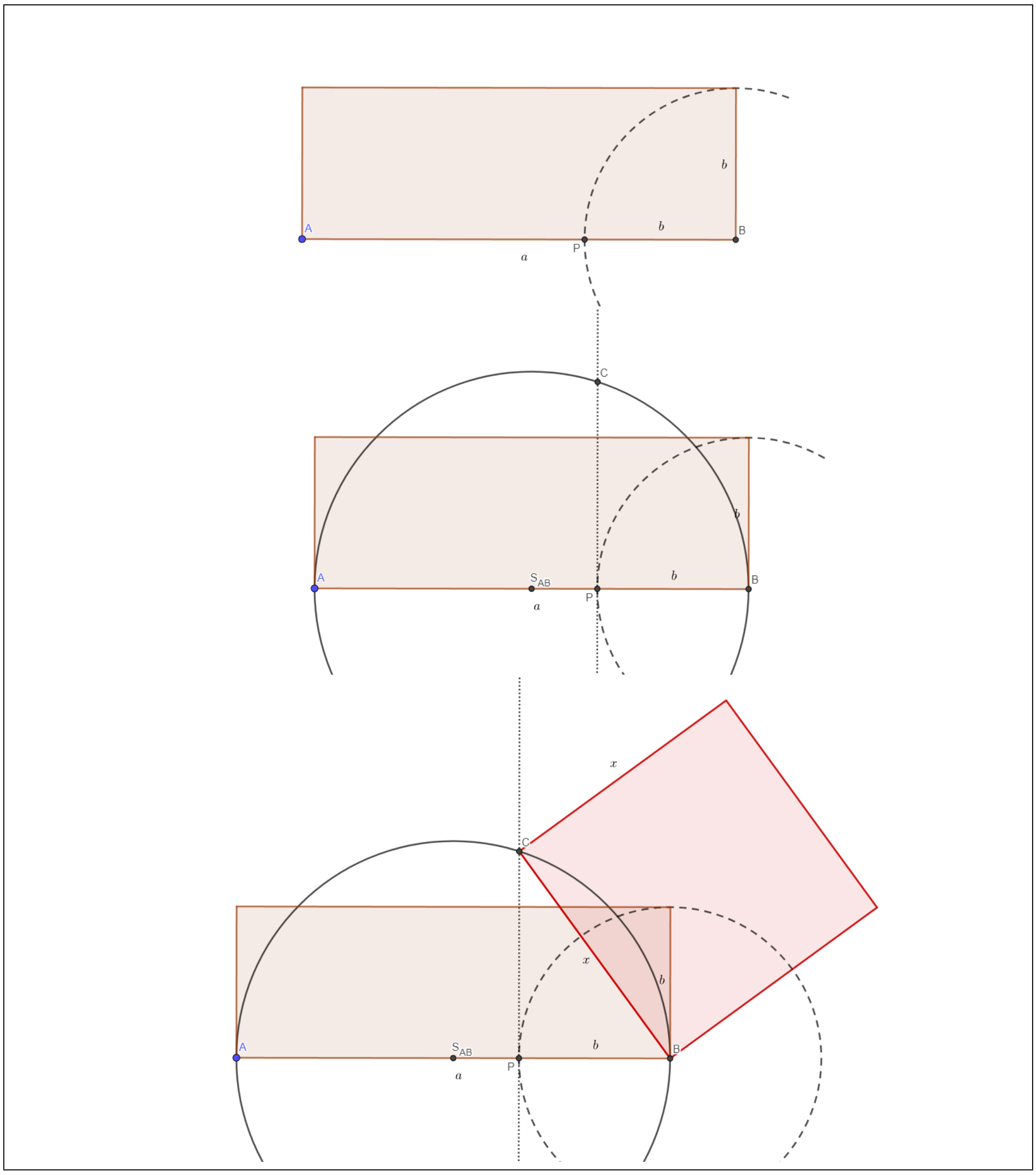
První s využitím EVV

Sestrojíme úsečku AB délky $a+b$ a nad ní Thaletovu kružnici. Bodem P (dělí AB na dva úseky) sestrojíme kolmici na AB. Průsečík s kružnicí označíme C. $\triangle ABC$ je pravoúhlý, AB je přepona a úsečka CP výška. Z EVV plyne: $|AP| \cdot |BP| = |CP|^2 \Rightarrow a \cdot = v^2$ a výška má velikost $v = \sqrt{ab}$



Druhý s využitím EVO

Delší stranu obdélníku označíme AB a zvolíme na ní pod P tak, aby $|PB| = b$. Nad AB sestrojíme Thaletovu kružnici a bodem P kolmici k AB. Průsečík komice a kružnice označíme C. $\triangle ABC$ je pravoúhlý s přeponou AB, odvěsnou BC a přilehlým úsekem PB. Z EVO plyne: $|AP| \cdot |BP| = |BC|^2 \Rightarrow a \cdot b = x^2$, úsečka $x = \sqrt{ab}$.



17 Trigonometrie obecného trojúhelníku

Nechť je dán libovolný trojúhleník ABC se stranami a,b,c a vnitřními úhly α, β, γ. Pak platí:

Sinová věta

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \vee \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \vee \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

souhrnně: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

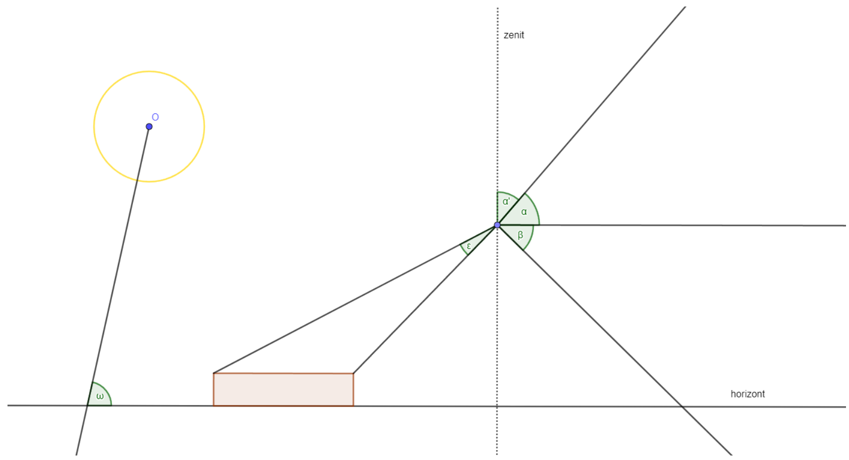
Kosinová věta

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, resp.
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, resp.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Obsah a poloměry

- **obsah** $\triangle ABC$ je roven: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, resp. $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
- **poloměr kružnice vepsané** je roven: $\rho = \frac{S}{s}$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$
- **poloměr kružnice opsané** je roven: $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$

Úhly při slovních úlohách



- ω ... výška nad obzorem
- α ... výškový úhel
- α' ... zenitový úhel
- β ... hloubkový úhel
- ϵ ... zorný úhel

18 Stereometrie – polohové vlastnosti

Volné rovnoběžné promítání je jedna ze zobrazovacích metod. **Průmětna** je rovina, do které přenášíme body pomocí rovnoběžek se směrem promítání. **Průmět** bodu je jeho obraz na průmětně. Směr promítání není rovnoběžný s průmětnou.
Vlastnosti VRP:

- Průmětem bodu je bod.
- Průmětem přímky je přímka nebo bod, je-li přímka promítací.
- Průmětem roviny je celá průmětna, nebo jen přímka, je-li rovina promítací.

- Rovnoběžné promítání zachovává incidenci (když $A \in BC$, pak $A' \in B'C'$).
- Rovnoběžné promítání zachovává dělící poměr (když $\frac{|AB|}{|CD|} = 3$,pak $\frac{|A'B'|}{|C'D'|} = 3$).
- Rovnoběžným průmětem dvou různých rovnoběžných přímek jsou opět rovnoběžné přímky (různé nebo splývající) nebo dva různé body, jsou-li přímky promítací.
- Útvar, který leží v průmětně nebo v rovině s průmětnou rovnoběžné, se promítá do útvaru, který je s ním shodný.

19 Stereometrie – metrické vlastnosti

za všim hledej trojuhelníky, všude prostě
A BACHA NA FALEŠNÝ PRŮSEČÍKY!!!!

20 Stereometrie – objem a povrch těles

vzorečky najdeš v tabulkách

21 Analytická geometrie – body a vektory

Určení bodu $A = [x_0, y_0]$ se používá uspořádaná dvojice v E2. Eukleidovský prostor je rozdělen na 4 kvadranty.
vzorečky najdeš v tabulkách - tohle tema je fakt ez, budu si sem vypisovat jenom poznamky na ktery bych jinak zapomněl hihi
smíšený součin - determinant!

22 Analytická geometrie – přímka a polorovina v E2

Přímka

Přímka má 4 vyjádření:

parametrické	obecné	směrnicové	úsekové
$x = x_0 + u_1 t, y = y_0 + u_2 t$	$ax + by + c = 0$	$y = kx + q$	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\vec{s_p} = (u_1; u_2)$	$\vec{n_p} = (a; b) = (u_2; -u_1)$	$k = y' = \frac{u_2}{u_1} = \tan\varphi$	p,q jsou úseky

Polorovina

Nerovnice $ax + by + c \geq 0$ nebo $ax + by + c \leq 0$ vyjadřují navzájem opačné poloroviny s hraniční přímkou $ax + by + c = 0$.
POZOR $\geq$ je včetně hraniční přímky, $<$ je bez!!!!

23 Analytická geometrie – přímka a rovina v E3

to samý co předtim, jenom o jednu osu víc, jako fakt nevim co k tomu napsat
bacha můžou to bejt i mimoběžky!
a vektory nemuzes jenom tak prohodit a zamenit znamenko, tak to nefunguje

24 Analytická geometrie – kuželosečky

klasicky zase přehled:

kružnice	elipsa	parabola	hyperbola
$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$	$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$

vzorečky jsou zase v tabulkách!
klasicky zase poznámky:

- převod z obecného tvaru - doplnění na čtverec
- pomůcka - parabola - v minusovejch ypsilonech je **-**2p(**y**-n)

25 Kombinatorika

permutace	**variace**	**kombinace**
$P(n) = n!$	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$
V kde n=k	záleží na pořadí	nezáleží na pořadí
!	nPr	nCr
s opak	**s opak**	**s opak**
$P'(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}$	$V'_k(n) = n^k$	$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$

Kombinační čísla

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$

Binomická věta

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + ... + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n =$

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

26 Pravděpodobnost

sorry, na tohle už fakt teď nemam, ale ve zkratce pravidlo součtu a součinu
pak bernoulliho schema
kdyz loterie, tak ty tri kombinacni cisla
a zbytek freestyle prostě

27 Statistika

Charakteristika polohy

- **aritmetický průměr** - $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$
- **vážený aritmetický průměr** - $\overline{x} = \frac{u_1x_1+u_2x_2+...+u_nx_n}{u_1+u_2+...+u_n}$

- **harmonický průměr** - $\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$ (pro dobu)
- **geometrický průměr** - $\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$ (pro tempo výroby)
- **medián** - $Med(x) = \tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$ anebo $\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n+1}{2}}}{2}$
- **modus** - $Mod(x) = \hat{x}$ je znak s největší četností

Charakteristika variability

- **variační rozpětí** - $R = x_{max} - x_{min}$
- **průměrná absolutní odchylka** - $\overline{d}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|$
- **mezikvartalové rozpětí** - $Q = \tilde{x}_{75} - \tilde{x}_{25}$ a **odchylka** - $q = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{75} - \tilde{x}_{25})$
- **rozptyl** - $s_x^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$
- **směrodatná odchylka** - $s_x = \sqrt{s_x^2}$
- **variační koeficient** - $v_x = \frac{s_x}{\overline{x}}$

28 Posloupnosti

Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem jsou $\mathbb{N}$. Je-li definičním oborem $1, 2, 3, ..., n$ mluvíme o konečné posloupnosti.
Posloupnost lze určit třemi způsoby:

- výčtem několika členů, např. $3, 6, 9, 12, ...$
- obecným vzorcem, např. $a_n = 3n$, nebo $\{3n\}_{n=1}^{\infty}$
- rekurentním vyjádřením, např. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 3$

Převod mezi vzorci

$$VP : 7, 9, 11, 13, 15, 17$$
$$RV : a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 2$$

S obecným vzorcem je to trochu složitější:

$\mathbf{a_n}$	**n**
7	1
9	2
11	3

$$7 = a_n + (1-1) \cdot d$$
$$9 = a_n + (2-1) \cdot d$$
$$d = 2$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$a_n = 7 + (n-1) \cdot 2$$
$$a_n = 7 + 2n - 2$$
$$a_n = 2n + 5$$

Vlastnosti posloupností

- Pokud $a_n < a_{n+1}$, posloupnost je rostoucí
- Pokud $a_n > a_{n+1}$, posloupnost je klesající
- Pokud $a_n \geq a_{n+1}$, posloupnost je nerostoucí
- Pokud $a_n \leq a_{n+1}$, posloupnost je neklesající

Roustoucí a klesající posloupnosti jsou **ryze monotónní**.
Posloupnost se nazývá **shora omezená**, právě když existuje alespoň jedno $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny členy platí $a_n \leq h$. Naopak **zdola omezená** je, pokud existuje alespoň jedno $d \in \mathbb{R}$, že pro všechny členy platí $a_n \geq d$.
Posloupnost je **omezená**, právě když je shora i zdola omezená.

Aritmetická posloupnost

Posloupnost je aritmetická, právě když rozdíl každých dvou sousedních členů je roven d - diferenci. Tj. $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} - a_n = d$
Pro aritmetickou posloupnost platí:

- $a_n = a_1 + (n-1)d$
- $a_r = a_s + (r-s)d$
- $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$[1]

[1] na tohle přišel gauss asi ve třetí třídě

Geometrická posloupnost

Posloupnost se nazývá geometrická, právě když podíl každých dvou sousedních členů je roven reálnému nenulovému q - kvocientu,
tj. $(\forall n \in \mathbb{N})\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Pro geometrickou posloupnost platí:

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$
- $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Užití geometrické posloupnosti - Finanční matematika

Pravidelný přírůstek

$a_n = a_0(1 + \frac{p}{100})^n$
v podstatě úročení

Pravidelný úbytek

$a_n = a_0(1 - \frac{p}{100})^n$
v podstatě amortizace

Pojmy finanční matematiky

- **Úrok** je částka, získaná veřitelem od dlužníka jako odměnu
- **Úroková míra** je podíl úroku kapitálu za období
- **Daň z úroku** je procentuální část úroku odvedená státu
- **Doba splatnosti** je doba, po jejímž ukončení je věřitel oprávněn získat kapitál zpět
- **Úroková doba** je doba, po kterou je kapitál úročen; standart *30E/360* nebo *ACT/365*
- **Jednoduché úročení** je způsob úročení, kde se úrok na konci úrokovacího období počítá z počátečního kap.
- **Složené úročení** je způsob úročení, kde se úrok přičítá k dosažené hodnotě kapitálu a dále se úročí

- **Kontokorent** je účet, kde banka z kreditního zůstatku vyplácí úroky, z debetního zůstatku se vyplácí úroky bance
- **Úmor dluhu** je ta část splátky úvěru, která snižuje dlužnou částku
- **Anuitní splátka** je splátka stejné výše opakující se v pravidelných intervalech

Spoření

Spoření má 3 modely:

1. Model I: klient ukládá pravidelně stejnou částku K_0 na **začátku** úrokovacích období
2. Model II: klient ukládá pravidelně stejnou částku K_0 na **konci** úrokovacích období
3. Model III: klient uloží při založení spoření částku K_0 a pak ukládá pravidelně stejnou částku K_0 na konci

29 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje takové reálně číslo a, pro které platí:
Pro každé kladné reálné číslo ϵ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \epsilon$.
Číslo a nazýváme **limita posloupnosti**, zapisujeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Pokud posloupnost není konvergentní, je **divergentní**.

Věty o limitách

Nechť

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \to \infty} b_n = b$$

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
- Každá konvergentní posloupnost je omezená.
- $$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$$
- $$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$
- $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$
- $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N}$$
- $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$$
- $$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Nevlastní limita

Některé posloupnosti mají nevlastní limitu, např.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

Mohou nastat 3 případy:

- posloupnost je konvergentní a má vlastní limitu, např.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
- posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu, např.
$$\lim_{n\to\infty} (1-n) = -\infty$$
- posloupnost je divergentní a nemá limitu, např.
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ neexistuje}$$

Neurčité výrazy

- $\infty - \infty$
- 1^∞
- 0^0
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $0 \cdot \infty$

Nekonečná geometrická řada

Nechť je dána geometrická posloupnost a_n.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

tento součet definujeme jako limitu posloupnosti částečných součtů, tj.

$$\lim_{n \to \infty} s_n$$

Pro $|q| < 1$ tato limita existuje a platí: $s = \frac{a_1}{1-q}$

30 Limita a derivace funkce

Spojitost funkce

Okolím bodu a rozumíme otevřený interval $(a - \delta; a + \delta), \delta \in \mathbb{R}^+$. Číslo a nazýváme střed okolí a číslo δ poloměrem okolí. Okolí bodu a značíme $U_\delta(a)$ a platí: $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta\}$. Prstencovým okolím bodu a rozumíme množinu $P_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$

Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když k libovolnému okolí bodu $f(a)$ existuje okolí bodu a takové, že pro každé x z okolí bodu a patří hodnota $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.
Funkce f je spojitá v intervalu (u, v) právě tehdy, když je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Limita funkce

Funkce f má v bodě a limitu A právě tehdy, když k libovolnému okolí bodu A existuje prstencové okolí bodu a takové, že pro každé x z prstencového okolí bodu a patří hodnota $f(x)$ do zvoleného okolí bodu A.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

a platí:

- Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.
- Funkce f je v bodě a spojitá právě tehdy, když platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$$

Věty pro výpočet limit najdu v tabulkách!!

Nevlastní limita

Funkce f může mít v bodě a nevlastní limitu $\pm\infty$, anebo může mít v nevlastním bodě $\pm\infty$ limitu. Sorry, tady je fakt pokokot teorie, to fakt rozepisovat nebudu. Prostě existujou i tyhle limity, a taky limita zprava a zleva ale na to taky seru, to si prostě nevytáhnu.

Asymptota funkce

Přímku $y = ax + b$ nazýváme asymptotou funkce f, jestliže

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax - b)] = 0$$

Směrnici a vypočítáme jako

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

a b jako

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$$

Derivace funkce

Geometrický význam: derivace funkce v bodě je směrnice tečny v tomto bodě.
Používá se $(\epsilon - \delta)$-definice, formulovaná Cauchym a Weierstrassem.
Př.:

$$f : y = x^2$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h)$$
$$f'(x) = 2x + 0 = 2x$$

Derivace elementárních funkcí najdu v tabulkách!

Průběh funkce

Návod:

1. Lokální extrémy - $y' = 0 \wedge (y'' > 0 \Rightarrow LMIN \wedge y'' < 0 \Rightarrow LMAX)$
2. Intervaly monotónnosti - nulové body z y' a tabulková metoda
3. Inflexní body - $y'' = 0 \wedge y''' \neq 0$
4. Konvexnost a konkávnost - nulové body z y'' a tabulková metoda (+ konvex - konkav)