Matematika pro dementy

Fantomas

Únor 2025

Abstrakt

Vypracované otázky z matematiky, tipy a triky a tak

Obsah

1 Výroková logika a množiny

Množiny

Množinou rozumíme souhrn nějakých objektů (prvků). Zápis $x \in M$ znamená že prvek x náleží množině M. Množinu můžeme určit výčtem prvků, charakteristickou vlastností nebo množinovými operacemi. Rovnost množin znamená, že každý prvek množiny M je prvkem množiny N a současně každý prvek množiny N je prvkem množiny M.

Podmnožina

Množinu M nazýváme podmnožinou množiny N, právě když je každý prvek množiny M prvkem množiny N. Zápis symbolem $\subseteq$ nebo $\subset$; $M \subset N$ značí, že M je vlastní podmnožinou množiny N, tedy $M \neq N$; $M \subseteq N$ značí nevlastní podmnožinu, tedy $M \subset N$ nebo $M = N$.

Charakteristická vlastnost

Zápis $A = \{x \in M; \textit{vlastnost}\}$, kde každý prvek z množiny M, mající danou vlastnost, patří do množiny A.

Množinové operace

Sjednocení $A \cup B$, je množina všech prvků, patřících alespoň do jedné z množin A, B.
Průnik $A \cap B$, je množina všech prvků, patřících zároveň do obou množin A, B.
Rozdíl $A \backslash B$, je množina všech prvků, patřících do množiny A a **nepatřících** do množiny B.
! Sjednocení i průnik jsou komutativní a asociativní operace.
Doplněk A'_M množiny A v množině M je množina všech prvků množiny M, které nepatří do množiny A $\Rightarrow A'_M = M \setminus A$.

Intervaly

Nechť a, b jsou dvě reálná čísla, že $a < b$, pak
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ je otevřený interval
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ je polootevřený interval
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ je polouzavřený interval
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ je uzavřený interval

Výroky

Výrokem rozumíme sdělení, o kterém má smysl uvažovat jeho pravdivost.
Každý výrok má **pravdivostní hodnotu**, 0 (nepravda) nebo 1 (pravda).
Hypotéza je výrok jehož pravdivostní hodnotu neznáme.
Výroková formule je tvrzení s proměnou, po dosazení se stane výrokem.

Negace výroku

Negace výroku, *"Není pravda, že A"*, zapisujeme $\neg A$, vždy opačná pravdivostní hodnota.

Logické operátory

Pomocí těchto operátorů tvoříme **složené výroky** nebo **formule**.
Konjunkce, "A a současně (et) B", zapisujeme $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkce, "A nebo (vel) B", zapisujeme $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ostrá disjunkce, "Buď A, nebo B", zapisujeme $A \veebar B$

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikace, "Z A plyne B", zapisujeme $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalence, "A je ekvivalentní s B.", "A právě tehdy, když B.", zapisujeme $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologie

Tautologie je výrok/formule, který je vždy pravdivý.
Kontradikce je výrok/formule, který je vždy nepravdivý.
Důležité tautologie:

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \veebar B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- $\neg(A \veebar B) \equiv A \Leftrightarrow B$

Kvantifikace výrokových formulí

Výroková formule $\varphi(x)$, obsahující proměnnou x, se stane výrokem po kvantifikaci x.
Obecný kvantifikátor $\forall$, "pro každé, pro všechna, ..."
Malý kvantifikátor $\exists$, "existuje alespoň jedno, nějaké, ..."
Př.: Formuli $\varphi(x) \sim x > 0$ lze kvantifikovat:
$(\forall x \in \mathbb{N}) x > 0$ ... Všechna přirozená čísla jsou kladná.
$(\exists x \in \mathbb{N}) x > 0$ ... Existuje alespoň jedno přirozené číslo větší než 0.

Negace kvantifikátorů

Negace výroku $(\forall x)\varphi(x)$ je výrok $(\exists x)\neg\varphi(x)$.
Negace výroku $(\exists x)\varphi(x)$ je výrok $(\forall x)\neg\varphi(x)$.

Věta, definice, důkaz, správné úsudky

Matematická věta je důležité, netriviální a dostatečně obecné tvrzení neboli výrok. Věta obsahuje předpoklad a závěr. **Axiom (postulát)** je tvrzení, které se předem předpokládá za platné. **Definice** slouží k zavedení nových pojmů; stanoví nový pojem a určí ho pomocí již stanovených.

Správný úsudek

Správný úsudek je takový, kdy je z pravdivých premis vyvozen pravdivý závěr.
Zákon vyloučení možnosti:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

Zákon odloučení:

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Zákon nepřímé úvahy:

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

Zákon kontrapozice:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$$

2 Mnohočleny, mocniny a odmocniny

Zápis $1+\sqrt{1,5625-(\frac{3}{4})^2}$ je **číselný výraz** s hodnotou 2.
Zápis $x^2+2xy+1$ je výraz s proměnnými x, y.
Definiční obor výrazu je množina všech přípustných hodnot proměnné, pro které má výraz smysl.
Výraz $V=x^2+1$ má definiční obor $\mathbb{R}$
Výraz $V=\frac{1}{y}$ má smysl pro nenulové hodnoty y
$\Rightarrow D_V: y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nebo $D_V=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Mnohočleny

Mnohočlen (polynom) s jednou proměnnou je výraz $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$, kde n je stupeň mnohočlenu.
a_1x+a_0, resp. $ax+b$ je linearní dvojčlen.
$a_2x^2+a_1x+a_0$, resp. ax^2+bx+c je kvadratický trojčlen.

Dělení mnohočlenu mnohočlenem

$(4x^3+3x^2-2x-5):(x-1)=4x^2+7x+5$
$4x^3-4x^2$

$0x^3+7x^2-2x$
$0x^3+7x^2-7x$

$0x^3+0x^2+5x-5$
$0x^3+0x^2+5x-5$

$0x^3+0x^2+0x-0$
pozn. zbytek stejně jako u číselného dělení

Umocňování

- $(AB)^n=A^nB^n$
- $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
- $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
- $(-A+B)^2 = (A-B)^2$
- $(-A-B)^2 = (A+B)^2$
- $(A+B)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

3 Lomené výrazy

Rozšiřování a krácení lomených výrazů

Rozšířit lomený výraz znamená vynásobit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

Krátit lomený výraz znamená vydělit čitatele i jmenovatele stejným číslem.

$$\frac{a^2bc^3}{abc^2} = \frac{a^2bc^3 : abc}{abc^2 : abc} = \frac{ac^2}{c} = ac$$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

Nejdříve rozložíme všechny jmenovatele na součin, určíme společný jmenovatel jako NSN všech jmenovatelů, každý LV rozšíříme na společný jmenovatel, sečteme a odečteme čitatele, rozložíme čitatele na součin a zkrátíme (je-li to možné) a určíme podmínky.

$$V = \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{x^2-4}$$
$$V = \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)}$$
$$V = -\frac{(3+2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2-3x)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x(16-x)}{(x+2)(x-2)}$$
$$V = \frac{-7x-6-2x^2-8x+4+3x^2+16x-x^2}{(x-2)(x+2)}$$
$$V = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$
$$V = \frac{1}{x+2}$$

Vyjadřování neznámé ze vzorce

Při vyjadřování neznámé ze vzorce využíváme:

- záměna stran vzorce
- vynásobení/vydělení vzorce nenulovým číslem nebo výrazem
- přičtení/odečtení libovolného čísla nebo výrazu
- pokud jsou ve vzorci nezáporné veličiny, pak umocnění nebo odmocnění

Výrazy s mocninami a odmocninami

Pro každá reálná a, b a pro každá reálná r, s platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

4 Lineární rovnice a nerovnice

Lineární rovnice

Lineární rovnice má tvar $ax + b = 0, a \neq 0$. Má jediný kořen $x = -\frac{b}{a}$.
Pokud užitím ekvivalentních úprav získáme tvar $0x + b = 0$, pak má rovnice nekonečně mnoho řešení ($b = 0$), nebo nemá řešení ($b \neq 0$).
Definiční obor rovnice je množina všech přípustných hodnot jejích kořenů; $x_1 \notin D_r \Rightarrow x_1 \notin K$.

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice má tvar:

- $ax + b < 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leq 0$
- $ax + b \geq 0$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \leq 0$:

$$b \leq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b > 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b \geq 0$:

$$b \geq 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b < 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b < 0$:

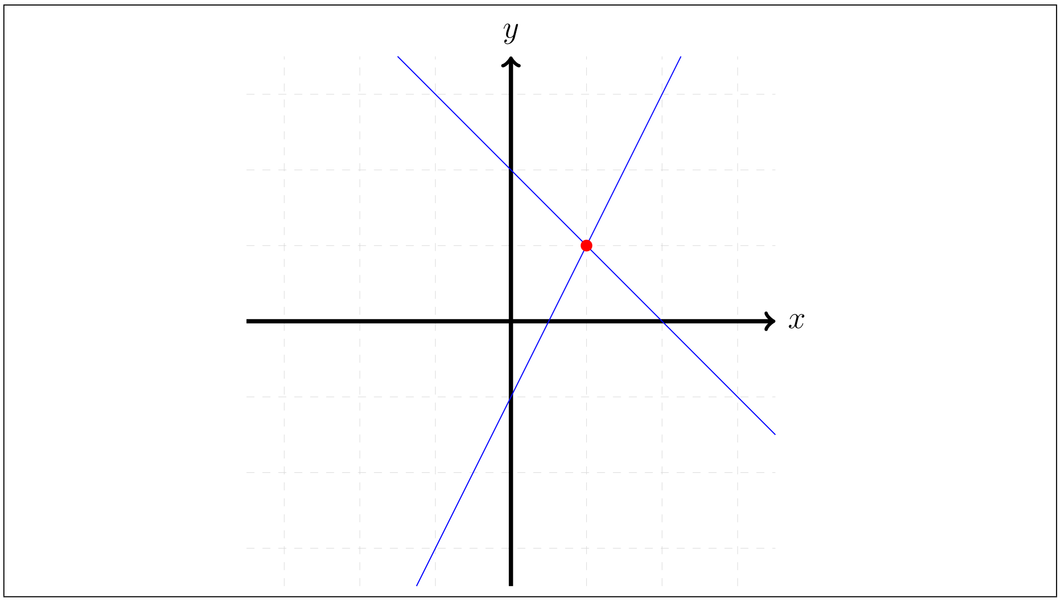
$$b < 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \geq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Pokud lze nerovnici převést na tvar $ax + b > 0$:

$$b > 0 \Rightarrow K = \mathbb{R} \vee b \leq 0 \Rightarrow K = \{\}$$

Grafické řešení lineární rovnice a nerovnice

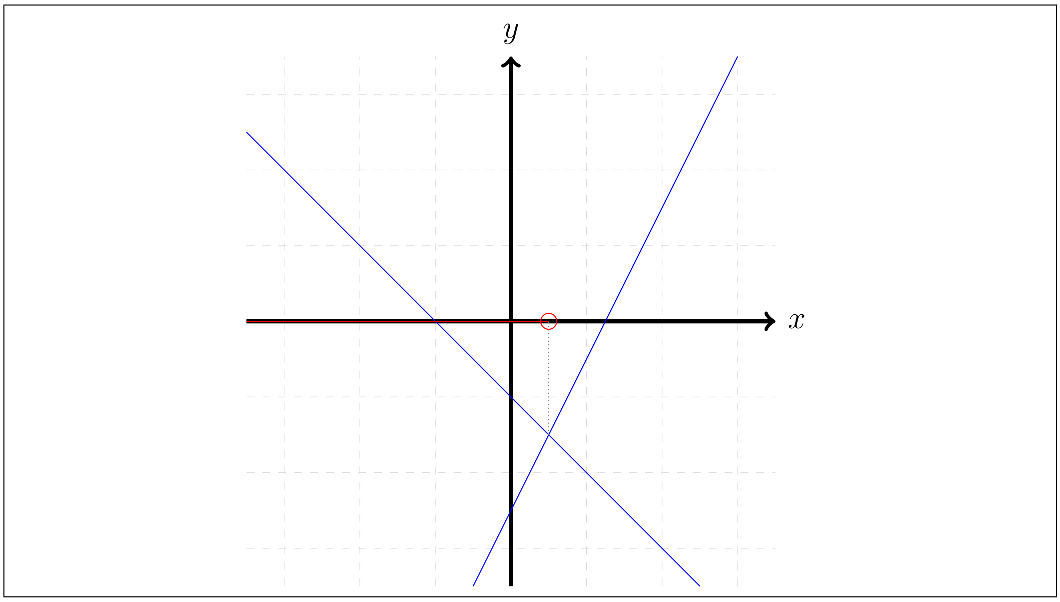
Lineární funkce je funkce s předpisem $y = ax + b$
Rovnici převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, kořen leží v $f(x) \cap g(x)$.



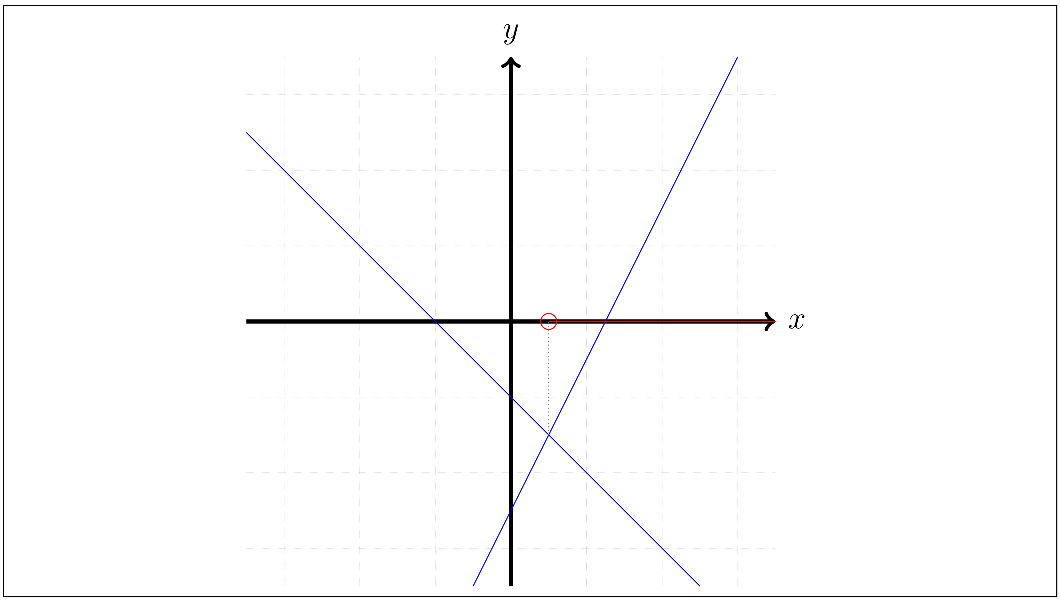
Obrázek 1: 2x-1=2-x

Lineární nerovnici řešíme podobně jako rovnici: převedeme na tvar $ax + b = cx + d$ a budeme uvažovat $f(x) = ax + b$ a $g(x) = cx + d$, nerovnice mohou mít jeden z tvarů:

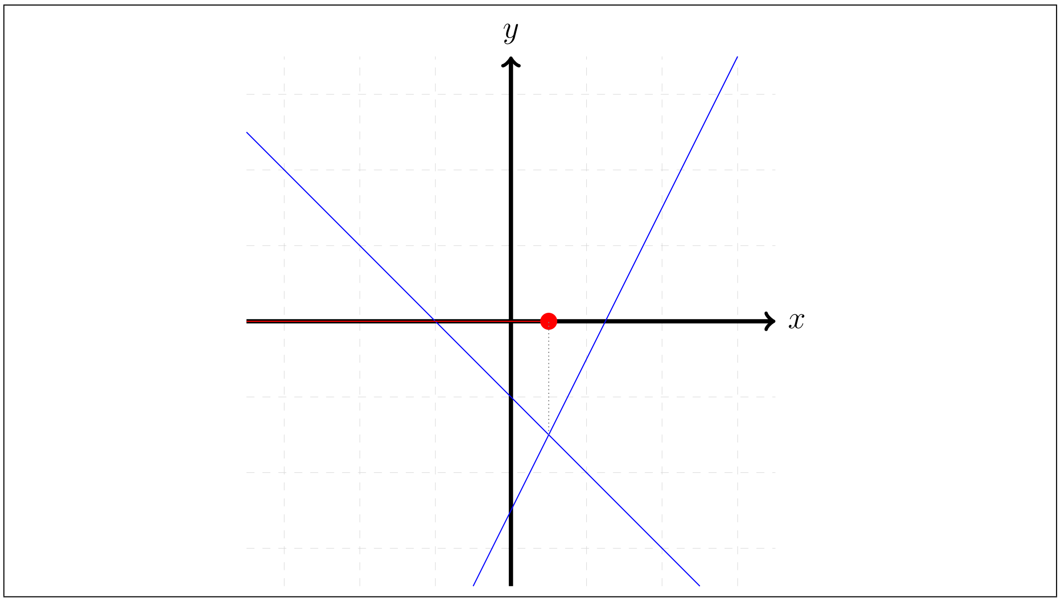
$-x - 1 > 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 < 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$	$-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$
$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
$K = (-\infty, \frac{1}{2})$	$K = (\frac{1}{2}, \infty)$	$K = (-\infty, \frac{1}{2}\rangle$	$K = \langle\frac{1}{2}, \infty)$
ad 2	ad 3	ad 4	ad 5



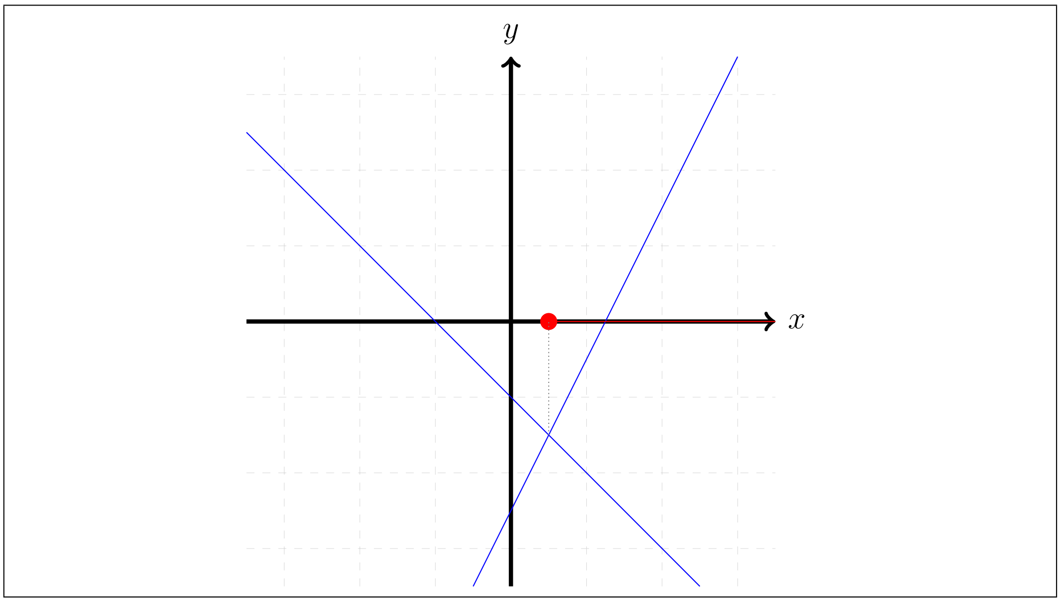
Obrázek 2: $-x-1 > 2x-\frac{5}{2}$



Obrázek 3: $-x-1 < 2x-\frac{5}{2}$



Obrázek 4: $-x - 1 \geq 2x - \frac{5}{2}$



Obrázek 5: $-x - 1 \leq 2x - \frac{5}{2}$

Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

Při řešení využíváme $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.
Př.:

$$x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2$$
$$K = \{-2; 0\}$$

Lze též použít **metodu nulových bodů**
Př.:

$$4x^2 - 6x < 2x$$
$$4x^2 - 8x < 0$$
$$4x(x-2) < 0$$
$$NB = \{0, 2\}$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$4x$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$*$	+	-	+

$$K = (0; 2)$$

Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Má-li rovnice neznámou ve jmenovateli, je nutné vždy stanovit její definiční obor.

Rovnice v podílovém tvaru

Rovnice v podílovém tvaru má na jedné straně jediný zlomek s neznámou ve jmenovateli a na druhé straně nulu. Po stanovení definičního oboru řešíme rovnici tak, že položíme čitatele rovno nule a řešíme jako lineární rovnici nebo převedením na součinový tvar.

Nerovnice v podílovém tvaru

Nerovnici v podílovém tvaru nesmíme vynásobit společným jmenovatelem, který obsahuje neznámou!
Nerovnici v podílovém tvaru převedeme na podílový tvar a řešíme metodou nulových bodů.
Př.:

$$\frac{2x-1}{x+1} \geq 1$$
$$x \neq -1$$
$$\frac{2x-1}{x+1} - 1 \geq 0$$
$$\frac{2x-1-(x+1)}{x+1} \geq 0$$
$$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$$
$$NB = \{-1, 2\}$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2\rangle$	$\langle 2; +\infty)$
$x-2$	-	-	$+$
$x+1$	-	$+$	$+$
$*$	$+$	-	$+$

$$K = (-\infty; -1) \cup \langle 2; +\infty)$$

Rovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota z reálného čísla je definována jako

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Také platí :

- $|a| = |-a|$
- $|a| \geq 0$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$

- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Nejprve určíme argumenty všech absolutních hodnot, ze kterých pak získáme nulové body a intervaly (u intervalu vždy ostrá závorka, kromě NB z jmenovatele). Poté vytvoříme tabulku jako v tabulkové metodě. Řešíme s upravenými tvary dle definice. **Ukaždého kořenu musíme ověřit zda leží v intervalu!**
Př.:

$$|x-3| + 2x = 9$$

$x \in$	$(-\infty; 3\rangle$	$\langle 3; +\infty)$
$x-3$	$-$	$+$
$\lvert x-3 \rvert$	$(x-3)$	$x-3$

a)	b)
$x \in (-\infty; 3\rangle$	$x \in \langle 3; +\infty)$
$-(x-3) + 2x = 9$	$x - 3 + 2x = 9$
$-x + 3 + 2x = 9$	$3x - 3 = 9$
$x = 6$	$x = 4$
$6 \notin (-\infty; 3\rangle$	$4 \in \langle 3; +\infty)$
$K_1 = \{\}$	$K_2 = \{4\}$

Rovnice má tedy jediný kořen $x = 4$, tedy $K = \{4\}$.

Rovnici ve tvaru $|ax+b| = c$ lze řešit i **rychlejší metodou** bez stanovení intervalů, neboť platí $ax + b = c \vee ax + b = -c$.
I rovnici ve tvaru $|ax + b| = |cx + d|$ lze řešit touto rychlou metodou: $ax + b = cx + d \vee ax + b = -(cx + d)$.

Nerovnice s absolutní hodnotou

Řešíme obdobně jako rovnici s absolutní hodnotou. Z argumentů určíme NB a řešíme nerovnice nahrezené dle definice. Množina řešení je sjednocení množin každého z případů.

$$|x+3| + 3x < 11$$

$x \in$	$(-\infty; 1\rangle$	$\langle 1; +\infty)$
$x-1$	$-$	$+$
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1)$	$x-1$

a)

$x \in (-\infty, 1\rangle$

$-(x-1) + 3x < 11$

$-x + 1 + 3x < 11$

$x < 5$

$x \in (-\infty; 5)$

$K_1 = (-\infty; 1\rangle \cap (-\infty; 5)$

$K_1 = (-\infty; 1\rangle$

b)

$x \in [1; +\infty)$

$x - 1 + 3x < 11$

$4x < 12$

$x < 3$

$x \in (-\infty; 3)$

$K_2 = (-\infty; 3) \cap \langle 1; +\infty)$

$K_2 = \langle 1; 3)$

Nerovnice má řešení $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 3)$.

5 Soustavy rovnic a nerovnice

Soustava nerovnic

Soustavu nerovnic s jednou neznámou řešíme vyřešením každé nerovnice zvlášť. Řešením soustavy je $K_1 \cap K_2$.
Př.:

$$2x - 5 < 0$$
$$3x + 2 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc} 2x - 5 < 0 & 3x + 2 \geq 0 \\ 2x < 5 & 2x \geq -2 \\ x < \frac{5}{5} & x \geq -\frac{2}{3} \\ K_1 = (-\infty, \frac{5}{2}) & K_2 = \langle -\frac{2}{3}, \infty) \end{array}$$

$$K = K_1 \cap K_2 = \langle -\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$$

Složenou nerovnici $ax + b < cx + d < ex + f$ převedeme na soustavu nerovnic:

$$ax + b < cx + d$$
$$cx + d < ex + f$$

Soustavy rovnic o dvou neznámých

Soustavu dvou rovnic řešíme buď:

- **slučovací** (sčítací) - rovnice vhodně vynásobíme a sečteme
- **porovnávací** - z každé rovnice vyjádříme tutéž neznámou a porovnáme
- **dosazovací** - z jedné rovnice vyjádříme neznámou a dosadíme do druhé

Řešení pomocí inverzních matic

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lze přepsat jako $A \cdot X = B$.
Je-li v soustavě rovnic $A \cdot X = B$ matice B rovna nulové matici, mluvíme o homogenní soustavě rovnic. Matici X nazýváme maticí řešení.
Maticovou rovnici $A \cdot X = B$ řešíme tak, že vynásobíme obě strany zleva vynásobíme maticí A^{-1}

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{B} \\ A^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= A^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \text{nezapomenout že } A^{-1} \cdot A &= E \\ E \cdot \mathbf{X} &= A^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \text{zde platí že } E \cdot X &= X \\ \mathbf{X} &= A^{-1} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Př.:

$$\begin{aligned} 4x + y &= -2 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

$A \cdot X = B$, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Určíme inverzní matici $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ a $X = A^{-1} \cdot B =$
$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -7 \wedge y = 26$

Pokud rozšíříme matici soustavy na tvar $(A|B)$, pak platí, že (Frobeniova věta) soustava je řešitelná, když $h(A) = h(A|B)$. Pokud $h(A)$ se rovná počtu neznámých, má soustava jediné řešení.

Gaussova eliminační metoda

Soustavu převedeme na tvar např. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, kterou pak upravíme do tvaru $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow K = \{[a_1, a_2]\}$. Pozn. aut. jestli se někdo dostane k tomuhle, nechť je mu zem lehká.

Cramerovo pravidlo

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ s maticí soustavy **A**.
Matice **A** vznike z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupkem pravé strany. Vznikou tři případy:

- $det(A) = 0$ a pro všechna $i \in \{1, 2, ..., n\}$ platí $det(A_i) = 0 \Rightarrow$ NMŘ
- $det(A) = 0$ a existuje alespoň jedno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ kdy $det(A_i) \neq 0 \Rightarrow$ ŽŘ
- $det(A) \neq 0$ a pro všechna $i \in \{1, 2, ..., n\}$ platí $x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)} \Rightarrow$ právě jedno řešení

Př.:

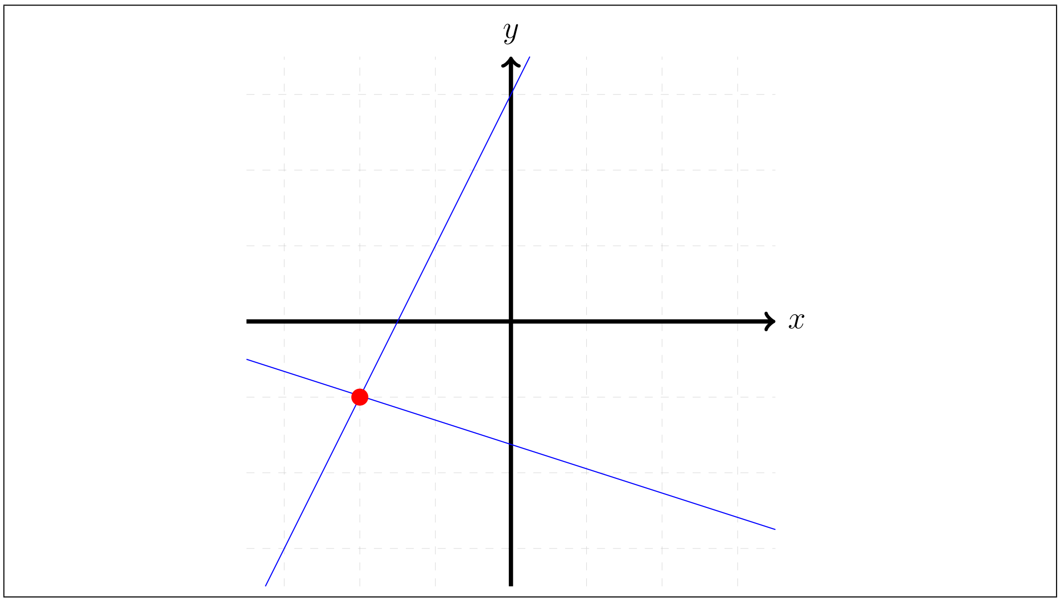
$$x + y = 2$$
$$x - y = 4$$
$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$
$$x = \frac{D_x}{D_s} = 3 \wedge y = \frac{D_y}{D_s} = -1$$
$$K = \{[3; -1]\}$$

Grafické řešení soustavy (ne)rovnic o dvou neznámých

Soustava rovnic

Soustavu rovnic o dvou neznámých řešíme graficky tak, že si vyjádříme y a sestrojíme grafy funkcí.

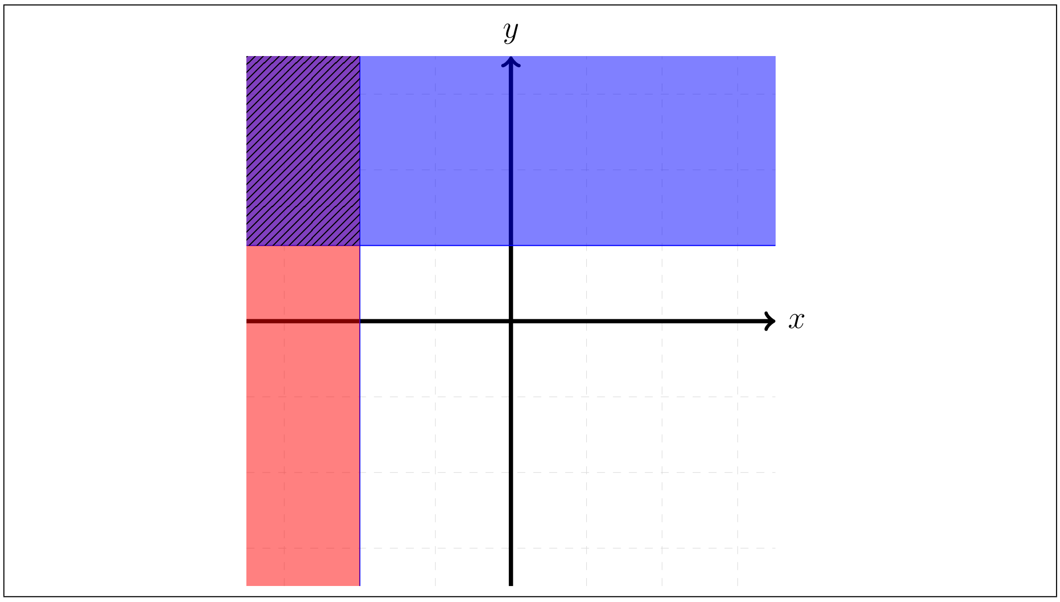
$$2x - y = -3 \Rightarrow y = 2x + 3$$
$$x + 3y = -5 \Rightarrow y = -\frac{x+5}{3}$$



Soustava nerovnic

Soustavu nerovnic řešíme graficky vyřešení každé zvlášť a určením průniku všech polorovin.

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$
$$y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$$



Soustavy tří rovnic o třech neznámých

Soustavu tří rovnic o třech neznámých řešíme nejčastěji metodou slučovací nebo dosazovací.
Metoda dosazovací: z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do zbylých dvou. Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých vyřešíme.
Metoda slučovací: Vhodně rovnice vynásobíme a sečteme tak, abychom získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.
Můžeme také použít inverzní matici, GEM nebo Cramerovy vzorce.

6 Kvadratická rovnice a nerovnice

Rovnici nazýváme kvadratickou, pokud lze převést na tvar $ax^2 + bx + c = 0$. Číslo a nazýváme kvadratický koeficient, b lineární koeficient a c absolutní člen.

- **Ryze kvadratická** - $b = 0 \wedge c \neq 0$ - $x^2 - 4 = 0$
- **Kvadratická bez absolutního členu** - $b \neq 0 \wedge c = 0$ - $x^2 + 2x = 0$
- **Úplná kvadratická** - $b \neq 0 \wedge c \neq 0$ - $2x^2 + 4x - 4 = 0$

Ryze kvadratická rovnice

Ryze kvadratická rovnice $ax^2 + c = 0$ je řešitelná právě když $a \cdot c < 0$. Řešíme ji převedním pomocí rozdílu čtverců. Př.:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8 &= 0 \\ 4 \cdot (-8) < 0 &\Rightarrow \text{je řešitelná} \\ 4(x^2 - 2) &= 0 \\ 4(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0 \\ K &= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Kvadratická rovnice bez absolutního členu $ax^2 + bx = 0$ je řešitelná vždy a jeden z kořenů je roven nule. Řešíme převedením na součinový tvar vytknutím x. Př.:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 18x &= 0 \\ 3x(x + 6) &= 0 \\ K &= \{-6; 0\} \end{aligned}$$

Úplná kvadratická

Řešíme pomocí **diskriminantu** a dosazením do vzorce.
$D = b^2 - 4ac \wedge x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

- $D > 0 \Rightarrow K = \{x_1, x_2\}, |K| = 2$
- $D = 0 \Rightarrow K = \{x_1/2\}, x_1 = x_2, |K| = 1$
- $D < 0 \Rightarrow K = \{\}, |K| = 0$

Rovnice vyšších řádů řešené pomocí KR

Bikvadratická rovnice ve tvaru $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kterou substitucí $y = x^2$ převedeme na kvadratickou rovnici.
Př.:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \\ [y = x^2] \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \\ (y-1)(y-2) = 0 \\ y = 1 \lor y = 2 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \lor x = -1 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \lor -\sqrt{2} \\ K = \{\sqrt(2); -1; 1; \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Viètovy vzorce

Kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ s kořeny x_1, x_2 lze rozložit na kořenové činitele: $a(x - x_1)(x - x_2)$.
Každou kvadratickou rovnici lze vydělením a normovat na tvar $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x = 0$, nebo $x + px + q = 0$.
Pro normovanou rovnici platí $x_1 + x_2 = -p \land x_1 \cdot x_2 = q$.

Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnici $ax^2 + bx + c \geq 0$ řešíme převedením na součinový tvar pomocí rozkladů na kořenové činitele a poté metodou nulových bodů.
Př.:

$$-2x^2 - x + 3 \geq 0$$
$$2x^2 + x - 3 \leq 0$$
$$D = 25 \wedge x_1/2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$
$$2(x-1)(x+\frac{3}{2}) \leq 0$$

$x \in$	$(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle$	$\langle -\frac{3}{2}; 1\rangle$	$\langle 1; +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+\frac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$
$*$	$+$	$-$	$+$

$K = \langle -\frac{3}{2}; 1\rangle$

Soustava lineární a kvadratické rovnice

Soustavu vždy řešíme dosazovací metodou a to tak, že z lineární rovnice vyjádříme neznámou a dosadíme to kvadratické.

Iracionální rovnice

Iracionální rovnice je rovnice, ve které je neznámá v odmocnině. Takovou rovnici musíme řešit po stanovení D_f. Můžeme poté obě strany umocnit, což je úprava důsledková, takže musíme provést zkoušku a vyloučit některé kořeny.
Př.:

$$\sqrt{9+x} - \sqrt{x-7} = 2$$
$$\sqrt{9+x} = 2 + \sqrt{x-7} \quad |^2$$
$$9 + x = 4 + 4\sqrt{x-7} + x - 7$$
$$4\sqrt{x-7} = 12$$
$$\sqrt{x-7} = 3 \quad |^2$$
$$x - 7 = 9$$
$$x = 16$$

Zk.:
$L(16) = \sqrt{9+16} - \sqrt{16-7} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$
$P(16) = 2$
$L = P \Rightarrow K = \{16\}$

7 Lineární funkce a její vlastnosti

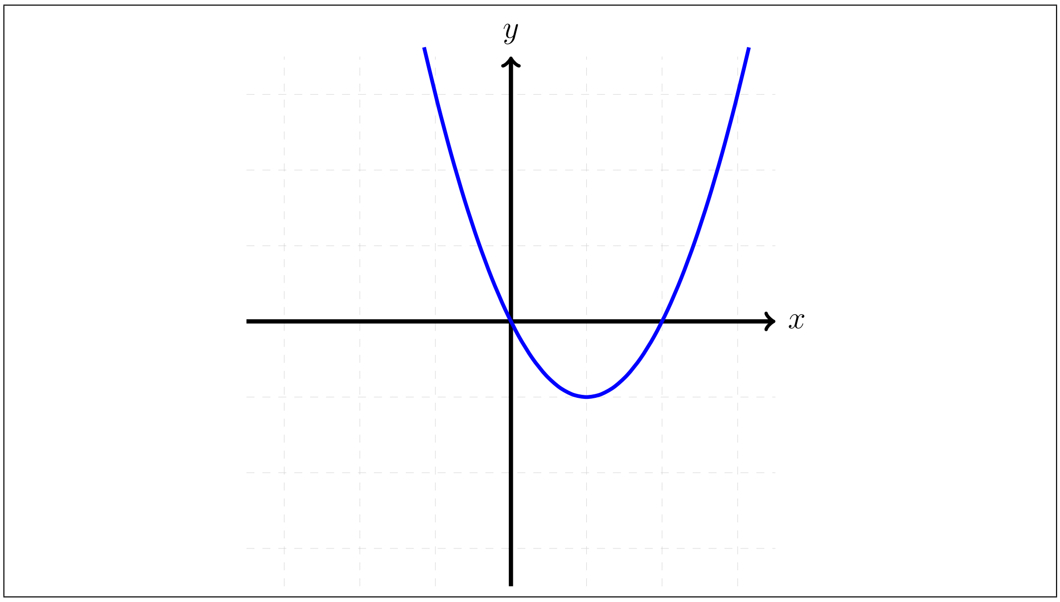
Nechť jsou dány neprázdné podmnožiny A,B množiny $\mathbb{R}$. Funkce f na množině A je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno číslo z množiny B.
Množina A se nazývá **definiční obor funkce**, značí se D_f a množina B **obor hodnot funkce**, značí se H_f.
Funkce může být zadána:

- předpisem $f : y = 4x - 1$
- tabulkou
- grafem

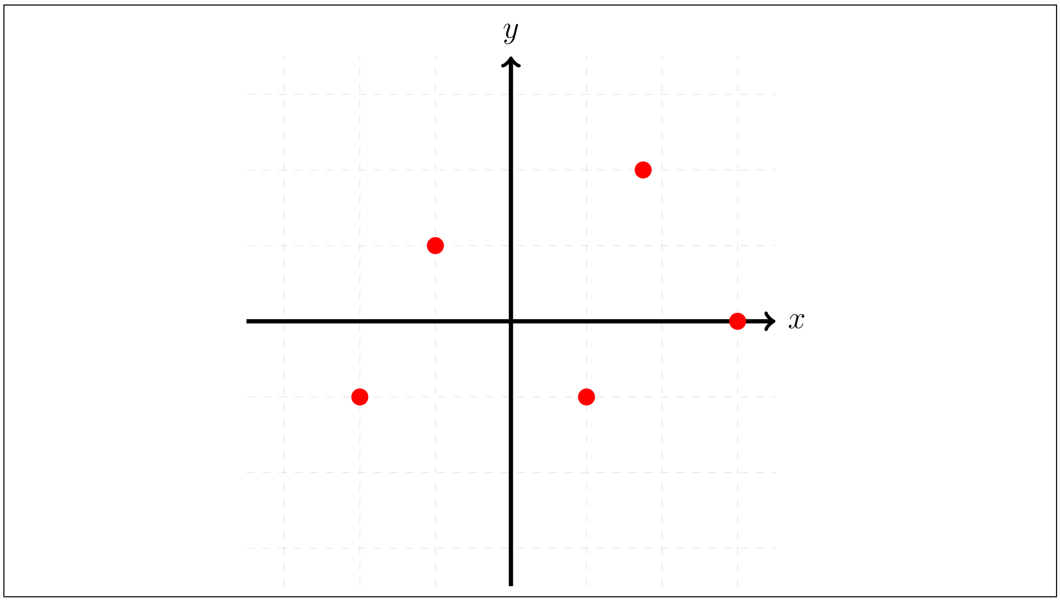
Že číslo x_0 z D_f přiřadí číslo y_0 z H_f, zapisujeme $y_0 = f(x_0)$.
$f(x_0)$ nazýváme **hodnotou funkce f** v **bodě** x_0.

Graf funkce

Graf funkce v soustavě souřadnic O_xy je množina všech bodů $[x, f(x)]$ kde $x \in D_f$.



Obrázek 6: Spojitý graf $y = x^2 - 2x$



Obrázek 7: Diskrétní graf

Maximální definiční obor je množina všech reálných čísel x_0 pro které je možné z předpisu určit funkční hodnotu $f(x_0)$.
Obor hodnot H_f funkce f je množina všech hodnot y ke kterým existuje alespoň jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$.
Průsečíky s osami:

- s osou x: $P_x[x_0, 0]$ - může jich být více
- s osou y: $P_y[0, y_0]$ - maximálně jeden

Lineární funkce

Lineární funkce je funkce s předpisem $f : y = ax + b$. Jejím grafem je přímka (pro $D_f = \mathbb{R}$).
Je-li $a = 0$, je to **konstantní funkce**.
Je-li $a \neq 0 \wedge b = 0$ je to **přímá úměra**.
Máme-li z grafu/tabulky určit předpis, musíme znát 2 její různé body, které dosadíme do předpisu $y = ax + b$.
Často se setkáváme s grafem **po částech lineární funkce**. Její předpis:

$$f : y = \begin{cases} 2x + 3, x \in \langle -2; -1 \rangle \\ x + 2, x \in \langle -1; 0 \rangle \\ -x + 2, x \in \langle 0; \frac{3}{2} \rangle \end{cases} \tag{1}$$

Vlastnosti funkcí

- **rostoucí** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$
- **nerostoucí** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **neklesající** - pro $x_1, x_2 \in D_f$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$

Každá rostoucí nebo klesající funkce je **prostá**.
Funkce může též být (ne)rostoucí/klesající na určitém intervalu.
Funkce f je:

- **sudá**, právě když pro každé $x \in D_f$ platí: $f(-x) = f(x)$; souměrná podle osy y
- **lichá**, prácě když pro každé $x \in D_f$ platí: $f(-x) = -f(x)$; souměrná podle počátku soustavy

Inverzní funkce

Inverzní funkcí f^{-1} k funkci f získámé tak, že v předpisu zaměníme navzájem proměnné.

8 Kvadratická funkce a její vlastnosti

Kvadratická funkce má obecný předpis $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$. Jejím grafem je **parabola**.
Funkce se nazývá:

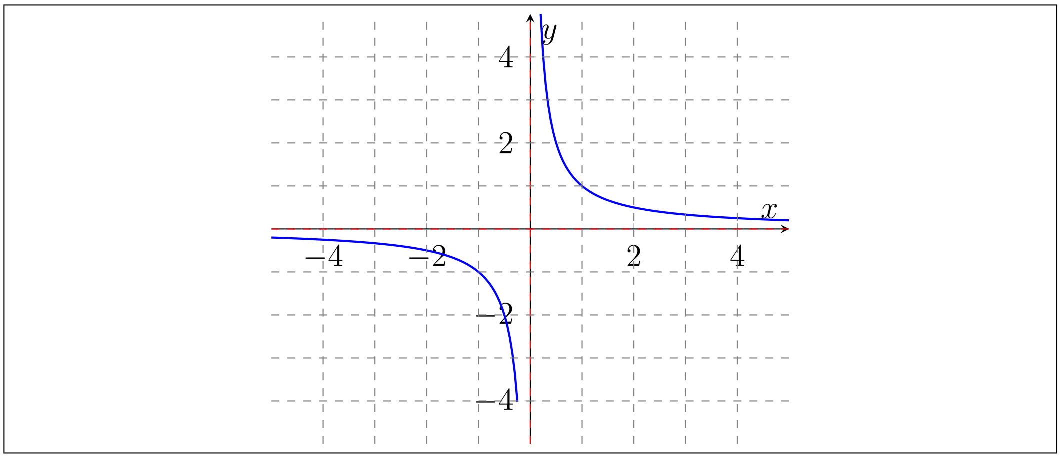
- **zdola omezená**, právě když existuje reálné číslo d takové, pro $x \in D_f$ platí: $f(x) \geq d$
- **shora omezená**, právě když existuje reálné číslo h takové, pro $x \in D_f$ platí: $f(x) \leq h$
- **omezená**, právě když je shora i zdola omezená

Předpis kvadratické funkce můžeme též vyjádřit ve **vrcholovém tvaru** $y = a(x-m)^2 + n; a \neq 0$ kde lze určit souřadnice vrcholu $V[m, n]$.

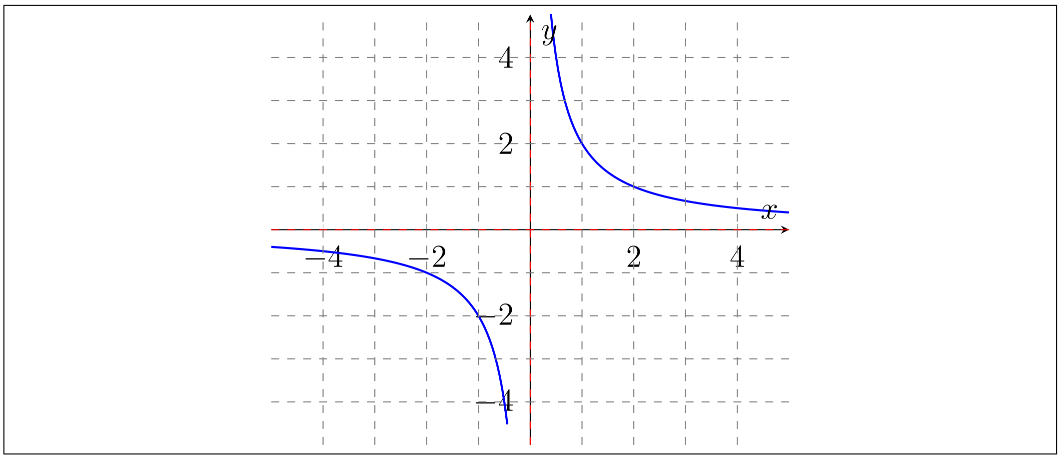
9 Mocninná a lomená funkce a její vlastnosti

Lineárně lomená funkce

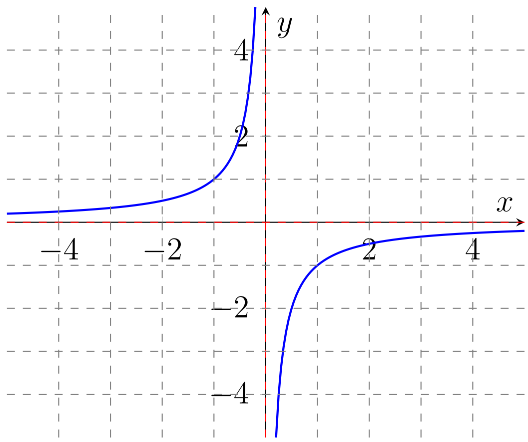
Lineárně lomená funkce má obecný předpis $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Jejím grafem je **hyperbola**.
Nejjednoduší předpis LLF je $f : y = \frac{1}{x}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (je to nepřímá úměrnost), střed hyperboly je v bodě $[0; 0]$, osy x,y jsou asymptoty hyperboly.



Obrázek 8: $y = \frac{1}{x}$



Obrázek 9: $y = \frac{2}{x}$

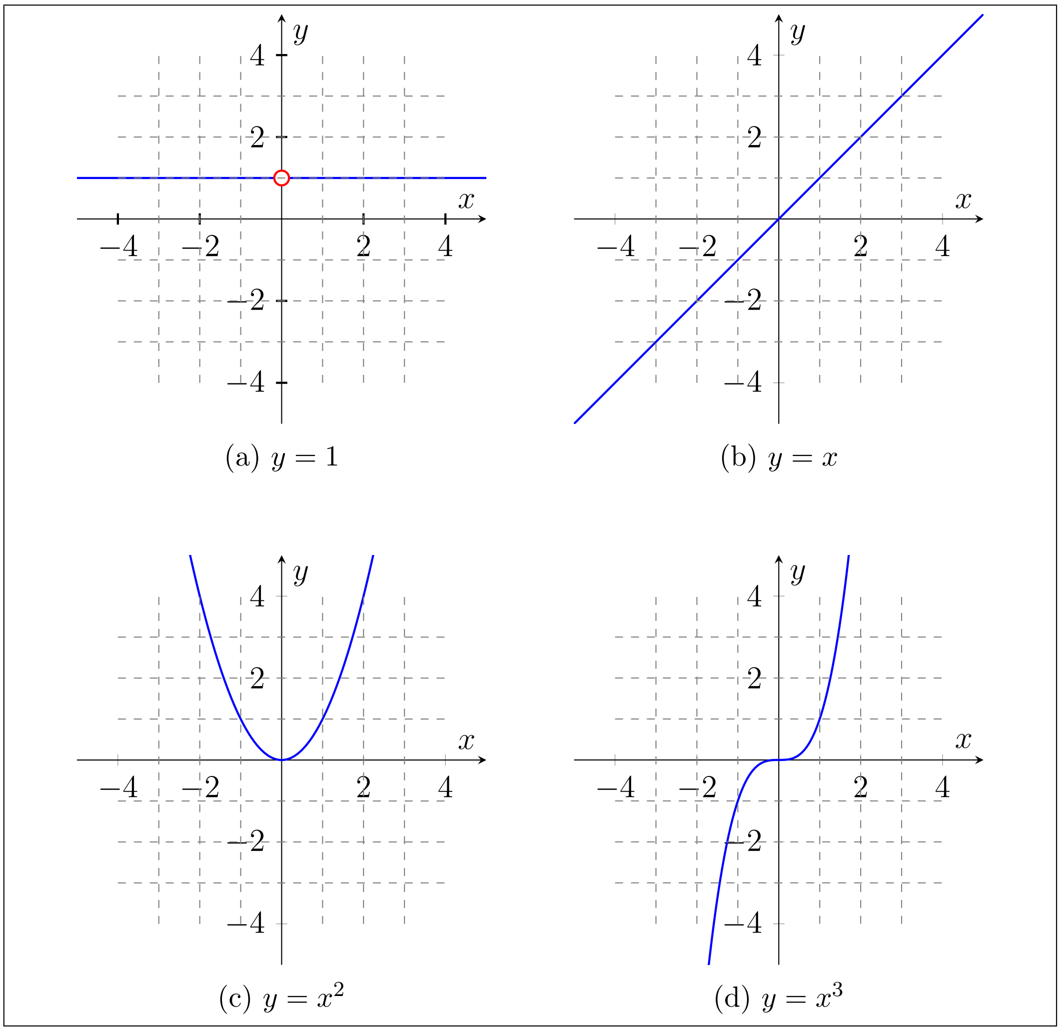


Obrázek 10: $y = -\frac{1}{x}$

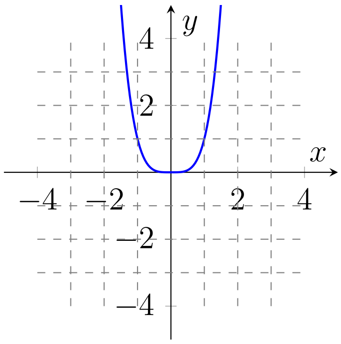
Předpis LLF může být i ve **středovém tvaru** $y = \frac{a}{x-m} + n$, kde $[m; n]$ jsou souřadnice středu hyperboly (průsečík asymptot) a a je její koeficient. Obecný tvar na středový převedeme vydělením.

Mocninná funkce

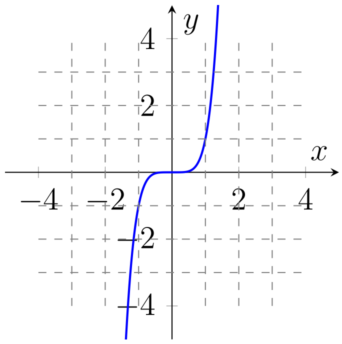
Mocninná funkce je funkce s předpisem $y = x^n$.



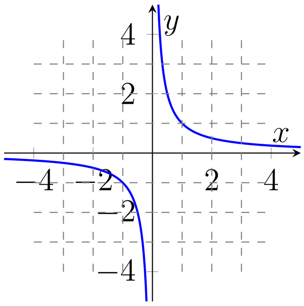
(a) $y = 1$ (b) $y = x$ (c) $y = x^2$ (d) $y = x^3$



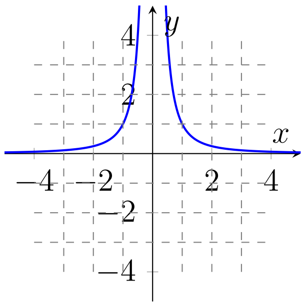
(a) $y = x^4$



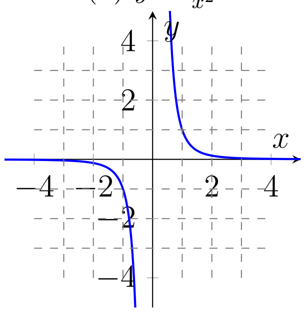
(b) $y = x^5$



(a) $y = \frac{1}{x}$

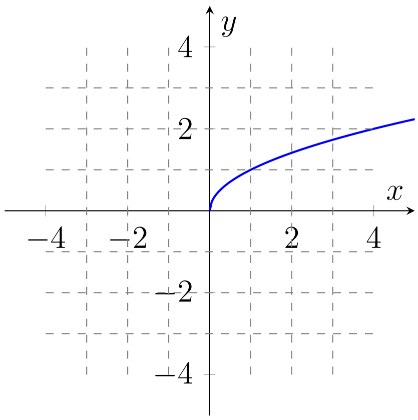


(b) $y = \frac{1}{x^2}$



(c) $y = \frac{1}{x^3}$

Dovětek Mocninnou funkci s předpisem $y = x^n$ lze definovat i pro $n \in \mathbb{Q}$. Např. $n = \frac{1}{2}$ bude mít předpis $y = \sqrt{x}$ což je inverzní funkce k kvadratické funkci. Inverzní funkci lze stanovit pouze k prosté funkci, musíme tedy stanovit D_f, na kterém je původní funkce prostá, v tomto případě je $D_f = \mathbb{R}_0^+$.

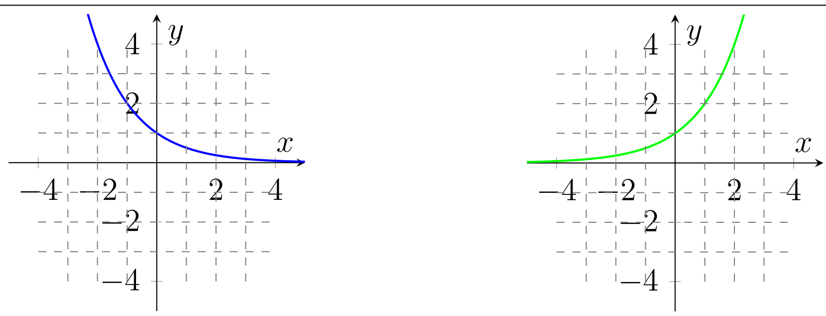


Obrázek 14: $y = \sqrt{x}$

10 Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce o základu $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ je funkce s předpisem $y = a^x$ a křivkou exponenciálou.
Funkce je pro $a \in (0;1)$ klesající, pro $a \in (1;+\infty)$ roustoucí. Maximální definiční obor je $\mathbb{R}$ a obor hodnot $H_f = (0;+\infty)$. Osa x je asymptotou. Je to funkce prostá.



(a) $f : y = \frac{1}{2}^x$

(b) $f : y = 2^x$

Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice prvního typu

ER je rovnice, kde se neznámá vyskytuje v exponentu. **První typ** ER jsou rovnice, které po užití vzorců (str. 12) a ekvivalentních úprav mají na obou stranách jednočlen. Řešíme převedením na mocninu se stejným základem a porovnáváme exponenty.
Př.:

$$\begin{aligned}
3^{x+2} + 3^{x-1} &= 28 \\
3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^-1 &= 28 \\
3^x(9 + \frac{1}{3}) &= 28 \\
3^x \cdot \frac{28}{3} &= 28| : \frac{28}{3} \\
3^x &= 3^1 \\
x &= 1 \\
K &= \{1\}
\end{aligned}$$

Exponenciální rovnice druhého typu

Druhým typem jsou rovnice, které nelze upravit tak, aby na obou stranách byl jednočlen. Musíme zavést substituci.
Př.:

$$\begin{aligned}
4^x - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\
[y &= 2^x] \\
(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\
y^2 - 9y + 8 &= 0 \\
(y-1)(y-8) &= 0 \\
y = 1 \vee y &= 8
\end{aligned}$$

! Musíme dosadit zpět do substituce!

$$\begin{array}{cc}
\text{i)} & \text{ii)} \\
2^x = 1 & 2^x = 8 \\
2^x = 2^0 & 2^x = 2^3 \\
x = 0 & x = 3
\end{array}$$

$$K = \{0; 3\}$$

Exponenciální nerovnice

Logaritmická funkce

Logaritmus

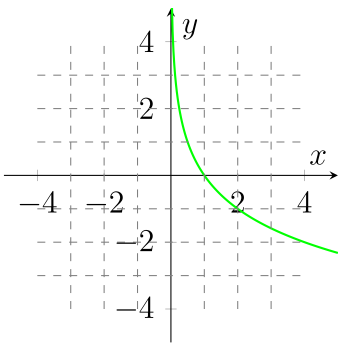
Logaritmus z kladného čísla a při základu z je roven číslu b zapisujeme $\log_z a = b$ právě když platí $z^b = a$.
Základ je vždy z intervalu $(0;1) \cup (1;+\infty)$, je-li $z = 10$ pak píšeme jen $\log a$, je-li $z = e$ pak píšeme jen $\ln a$.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

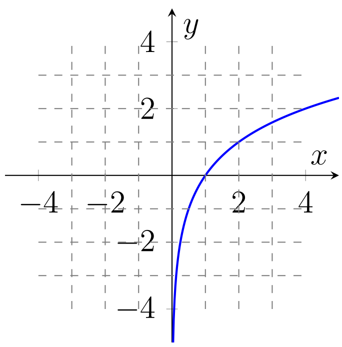
- $\log_z 1 = 0$
- $\log_z ab = \log_z a + \log_z b$
- $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b$
- $\log_z a^n = n \log_z a$

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce $f : y = \log_z x, z \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ s definičním oborem $D_f = (0;+\infty)$ a oborem hodnot $H_f = \mathbb{R}$ je inverzní funkce k exponenciální funkci $y = z^x$.
Logaritmická funkce je pro $a \in (0;1)$ klesající a pro $a \in (1;+\infty)$ rostoucí.



(a) $f : y = \log_{0.5} x$



(b) $f : y = \log_2 x$

11 Goniometrické funkce

12 Množiny bodů dané vlastnosti

13 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

14 Shodná zobrazení

15 Podobná zobrazení

16 Pythagorova a Eukleidovy věty

17 Trigonometrie obecného trojúhelníku

18 Stereometrie – polohové vlastnosti

19 Stereometrie – metrické vlastnosti

20 Stereometrie – objem a povrch těles

21 Analytická geometrie – body a vektory

22 Analytická geometrie – přímka a polorovina v E2

23 Analytická geometrie – přímka a rovina v E3

24 Analytická geometrie – kuželosečky

25 Kombinatorika

26 Pravděpodobnost

27 Statistika

28 Posloupnosti

29 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada

30 Limita a derivace funkce