Вдовин
Евгений Петрович

Теория чисел.

1.09.14
лекция 1

опр Кольцо R коммутативное и с един. наз-ся <u>евклидовым</u>, если в нем применим алгоритм Евклида:

$r, s \in R$, то можно разделить с остатком $r = s \cdot t_0 + h_0$

Есть некоторая ф-ция (метрика) сопоставляющая паре натур-ное число (остаток). Эта метрика уменьшается при следующих шагах.

$s = h_0 t_1 + h_1$

$h_{k-2} = h_{k-1} t_k + h_k$

$h_{k-1} = h_k t_{k+1} + h_{k+1}$

Когда-то $h_{k+1} = 0$, то $h_k = (r, s)$ <u>наиб. общ. делитель</u>

Почему наиб? Пусть d — делитель, тогда d делит h_k.

в $\mathbb{Z}$ метрикой явл-ся остатки (натур. число)

в $F[x]$ — степень многочлена (у нулевого мн-на степень $-\infty$)
(над $F[x]$: многочлены)

опр <u>Диофантово ур-ие</u> имеет вид $mx + ny = k$, где $k, m, n \in R$

ДУ разр-мо $\Leftrightarrow$ (m, n) делит k.

$\Rightarrow$ Очевидно

$\Leftarrow$ $mx + ny = (m, n)$

$h_{k-2} = h_{k-1} t_k + h_k$

$h_{k-1} = h_k t_{k+1} + h_{k+1}$

~~$h_{k+1} = h_{k-1} - h_k t_{k+1}$~~

$h_k = h_{k-2} - h_{k-1} t_k$.

доходим до h_0 и:

опр R — коммутативное кольцо с един, $I \subseteq R$ наз-ся <u>идеалом</u>, если

1) $I + I \subseteq I$, где $I + I = \{r + s \mid r \in I, s \in I\}$

2) $-I \subseteq I$

$\{-r \mid r \in I$ (это противоположный!)$\}$

3) $I \cdot R \subseteq I$

$\{s \cdot r \mid s \in I, r \in R\}$

$I \trianglelefteq R$

~~свойства~~

$1 \in I \Leftrightarrow I = R$

опр R^* — <u>мн-во обратимых эл-тов</u> кольца R (по умн-нию)

<u>замечание</u> $1 \in R^*$
$-1 \in R^*$

сущ-ют кольца, где $R^* = \{-1, 1\}$ ($\mathbb{Z}$)

$F[x]^* = F^*$, $F^* = F \setminus \{0\}$

~~всегда R^*~~

Если R — кольцо, в котором опр-но деление с остатком (любое евклидово, любое поле) то r наз-ся <u>простым</u> или <u>неразложимым</u>, если из $r = s \cdot t$ следует, что либо $s \in R^*$, либо $t \in R^*$

1 не явл-ся простым

$\{I_j \mid j \in J\}$ — сем-во идеалов кольца R $\Rightarrow$ $\bigcap_{j \in J} I_j = I \trianglelefteq R$

(из курса алгебры: пересеч. алгебр. сист. явл. алгебр. системой!)

опр $M \subseteq R$ $\quad$ $d(M) = (M) = \bigcap_{\substack{I \trianglelefteq R \\ M \subseteq I}} I$ — <u>идеал, порожденный подмн-вом M</u>

$(M) = \{ m_1 r_1 + \ldots + m_k r_k \mid m_i \in M, r_i \in R \}$ (это тоже самое $\boxed{\text{чтр}}$)

опр Пусть $I \trianglelefteq R$ рассмотрим фактор-мн-во $R/I = \{ r + I \mid r \in R \}$ где $r + I = \{ r + s \mid s \in I \} \subseteq R$ — смежный класс по идеалу I

Смежные классы не пересекаются, либо совпадают.

что $r_1 + I \cap r_2 + I \neq \emptyset$,

Д-во т.е. сущ. r_3 их пересеч.,

т.е. сущ s_1: $r_3 = r_1 + s_1$

и сущ s_2: $r_3 = r_2 + s_2$

$r_3 + I = \{ r_3 + s \mid s \in I \} = \{ r_1 + \underbrace{s_1 + s}_{\in I} \mid s \in I \} \subseteq \{ r_1 + s \mid s \in I \} = r_1 + I$.

аналогично $r_1 + I \subseteq r_3 + I \Rightarrow r_1 + I = r_3 + I$

также получаем, что $r_2 + I = r_3 + I$.

$r_1 + I = r_2 + I \Leftrightarrow r_1 - r_2 \in I$.

$\langle R/I, +, \cdot \rangle$

$(r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I$

$(r_1 + I) \cdot (r_2 + I) = (r_1 \cdot r_2) + I$

очевидно, эти операции алгебраические.

Надо проверить корректность: что результат операции не зависит от выбора представителя. ($\boxed{\text{чтр док-во}}$)

Лемма 1 (чтр)

(а) Операции „+" и „·" на R/I заданы корректно и $\langle R/I, +, \cdot \rangle$ — кольцо коммутативное и с 1

(б) Если R — евклидово кольцо, то для любого идеала $I \trianglelefteq R$ сущ. $m \in R$ такой, что $(m) = I$.

(в) R/I явл-ся полем $\Leftrightarrow I$ — макс. идеал.

В частности, если R евклидово, то R/I поле $\Leftrightarrow m$ — простой и неразлож.

замечание в поле $1 \neq 0$

т.е. кольцо из одного нуля — не поле

(г) Если $R = \mathbb{Z}$, то $\mathrm{mod}(n) = n\mathbb{Z} = \{ n \cdot m \mid m \in \mathbb{Z} \}$, если $R = F[x]$, то $id(f) = f \cdot F(x)$

(д) В $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ найти 2^{-1}

В $\mathbb{Q}[x] / (x^3+2)\mathbb{Q}[x]$ найти $x^{-1}, (x^2+1)^{-1}, (x^2+2)^{-1}$

не приводим по признаку Эйзенштейна.

опр $R \leq S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ $R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \{ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in R[x_1, \ldots, x_n] \}$

подкольцо кольца S, порождённое R и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. мн-во значений мн-ов от n эл-тов над R от значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

опр эл-т $\alpha \in \mathbb{C}$ наз-ся **алгебраическим**, если сущ $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$: $f(\alpha) = 0$

В противном случае α наз-ся **трансцендентным**.

Оп (альтернативное) Если $K \le L$ (K, L — поля), то $\alpha \in L$ наз-ся алгебраич. над K, если сущ. $f(x) \in K[x]$: $f(\alpha)=0$

Оп Многочлен $f(x) \in F[x]$ наз-ся унитарным, если коэфф при его старшей степени равен 1

Лемма 2 $\alpha \in L$ являе-ся алгебраич. над $K \Leftrightarrow \dim(K[\alpha])$ как векторн. пр-ва над K конечно.

Д-во: $\boxed{\Rightarrow}$ сущ. $f(x) \in K[x]$: $f(\alpha)=0$, т.е. сущ. $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$: $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$, не огр. общ. $a_n \neq 0$ и разд. на a_n

(2) $-(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \alpha^n$

Вспомним, $K[\alpha] = \{b_0 + b_1\alpha + \dots + b_m\alpha^m \mid b_i \in K, m \in N\}$

если $m \geq n$, то $(\alpha^n)\cdot\alpha^{m-n}$ ⇒ понижаем степень, подставляя вместо α^n (2)

$\Rightarrow K[\alpha] = \{b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1} \mid b_i \in K\} = L_K(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$

лин. оболочка на эл-ты

это конечное векторное пр-во $\Rightarrow \dim(K[\alpha]) \leq n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ сущ. n: $1, \alpha, \dots, \alpha^n$ лин. зависимы,

т.е. сущ $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$: $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$.

возьмем $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$

и $f(\alpha) = 0$. $\Rightarrow$ α алгебраич.

Следствие Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебр. эл-ты из $\mathbb{C}$ и $\dim(\mathbb{Q}[\alpha_i]) \leq k_i$, то $\dim(\mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]) \leq k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$. В частности, любой эл-т $\alpha \in \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ являе-ся алгебраич.

лин. об. $v_1, \dots, v_{k_1}$

$\dim(\mathbb{Q}[\alpha_1]) \leq k_1$,

$u_1, \dots, u_{k_2}$

$\dim(\mathbb{Q}[\alpha_2]) \leq k_2$ $\quad \dim(\mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2])$ v_iu_j порождают $\mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2]$

$\dim(\mathbb{Q}[\alpha_1][\alpha_2]) \leq k_2$. и т.д. увелич.

над $\mathbb{Q}[\alpha_1]$

Пусть α — алгебраическое число (компл., явл-ся корнем мн-на с рацион. коэф)

Обозначим $I(\alpha, x) = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\alpha) = 0\}$

Очевидно, что $I(\alpha, x) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$

Поскольку ~~$I(\alpha,x)$~~ $\mathbb{Q}[x]$ — евкл. кольцо, $I(\alpha, x)$ порождается $h(x)$ и можно считать, что $h(x)$ унитарный.

Оп Обозначим $h_\alpha(x)$ и назовем его минимальным аннулирующим многочленом для α

Лемма 3 Пусть α – алгебраич. число, $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – унитарная. Тогда следующие утверждения экв-тны:

(а) $h(x) = h_\alpha(x)$

(б) $h(\alpha) = 0$ и $\forall f \in I(\alpha, x)$ h делит f,
это озн., что h_α определен ед. образом.

(в) $h(\alpha) = 0$ и $h(x)$ неприводим.

Д-во:

(а) $\Rightarrow$ (б) $id(h_\alpha(x)) = I(\alpha, x)$; $id(h_\alpha(x)) = \{h_\alpha(x) g(x) \mid g(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$
т.е. любой $f(x) \in I(\alpha, x)$ делится на $h_\alpha(x)$

(б) $\Rightarrow$ (в) Пусть $h(x)$ приводим, т.е. $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$ и $0 < \deg h_1 < \deg h_2 < \deg h$.
$h(\alpha) = 0 = h_1(\alpha) \cdot h_2(\alpha) \Rightarrow h_1(\alpha) = 0$ или $h_2(\alpha) = 0$
с точн-тью до перенумерации $h_1(\alpha) = 0$.
Тогда $h_1(x) \in I(\alpha, x)$ и h делится на h_1 противоречие.

(в) $\Rightarrow$ (а) Нужно док-ть, что $\forall f \in I(\alpha, x)$ $h \mid f$, т.е. $I(\alpha, x) = h \cdot \mathbb{Q}[x]$.
„h делит f"

$f \in I(\alpha, x)$, $f = h \cdot t + s$ $\quad \deg(s) < \deg(h)$
строго!

Кроме того, $s(\alpha) = 0 \Rightarrow s(x) \in I(\alpha, x)$
находим НОД $\Rightarrow (f, h)(\alpha) = 0$, но, т.к. h неприводим,
то $(f, h) = 1$ либо $(f, h) = h$,
но $1|_{\alpha} \neq 0 \Rightarrow (f, h) = h$.

интегральная ф-ия Чебышева.

$\tilde{\psi}(x) \sim x$.

она ~~[illegible]~~ дифф-ма в любой точке ⓪ можно конт.-аналит-ски.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{если } n = p^k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$ ф-ия Мангольдта

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \ln\left(\frac{x}{n}\right) =$$

Эта ф-ия имеет вид $f(x) = \sum_{n \le x} f_n$ (дискретная сумма)

опр Для исс-ния таких ф-ий можно исп-ть ряд Дирихле (для ф-ии $f(z)$)

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}$$

опр Ф-ия Римана $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, при $\mathrm{Re}\, z > 1$ ряд сх-ся равномерно и абсолютно

Д. Признак Коши для равн. сх-ти ряда.

для $\zeta(z)$ мажорирующая оценка $\frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}$

След. ряд $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \ln(\cancel{z})}{n^z} = (\ln(\zeta(z)))'$$

~~в~~ особые точки этого ряда можно искать с помощью ф-ии Римана

опр Пусть $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ — арифметическая ф-ия, тогда f наз-ся мультипликативной если для любых взаимно-простых m и n (т.е. $(m,n)=1$) справедливо рав-во:

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

опр Ф-ия Мебиуса $\mu(n)$ — мультипликативная, определена на степенях простых чисел.

$$\mu(p^n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ -1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{если } n > 1 \end{cases}$$

Пусть f, g — мультипликативные

опр Свертка Дирихле $$f \circ g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

— это ассоциативная операция. (без док)

есть единичная ф-ия $e(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

есть обратный эл-т. (без док)

$I(n) \equiv 1$

Лемма 1

Пусть f, g — арифметич. ф-ции такие, что $f \circ I = g$.
Тогда $g \circ \mu = f$

Д-во: Рассмотрим $(I \circ \mu)(p^n) = I(1) \cdot \mu(p^n) + \ldots + I(p^{n-1}) \cdot \mu(p) +$

$+ I(p^n) \cdot \mu(1) = \mu(p) + \mu(1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n > 0 \\ 1, & \text{если } n = 0 \end{cases}$

$I(m \cdot n) = I(m) \cdot I(n) = 1 \Rightarrow (I \circ \mu)(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$) $\Rightarrow$

Без док-ва: свертка мультипликативных ф-ций — мультипликативная ф-ция.

$\Rightarrow$ $I \circ \mu = e$

$f \circ I = g \mid \circ \mu \Rightarrow (f \circ I) \circ \mu = g \circ \mu$

пользуемся ассоциативн. ∎

Лемма 2

Ф-ция Мангольта $\Lambda = \ln \circ \mu$

Д-во: Докажем, что ~~$\ln \circ I = \Lambda$~~ $\Lambda \circ I = \ln$

$n = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \ldots p_k^{d_k}$.

по опр. $\Lambda \circ I(n) = \sum\limits_{d \mid n} \Lambda(d) \cdot I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{d_i} \ln p_i = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i \ln p_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{k} \ln p_i^{d_i} = \ln p_1^{d_1} \ldots p_k^{d_k} = \ln n$

потом используем Лемму 1. ∎

Лемма 3

Пусть f, g — арифм.ф-ции такие, что ряды
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^z}$ сх-ся абсолютно для некот. $z \in \mathbb{C}$

Тогда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^z}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f \circ g(n)}{n^z}$

Д-во: т.к. сх-ся абсолютно, то в любом порядке суммируем.
и используем дистрибутивность.

$(\sum\limits_n a_n)(\sum\limits_n b_n) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$

тогда $\left(\sum\limits_n \frac{f(n)}{n^z}\right)\left(\sum\limits_n \frac{g(n)}{n^z}\right) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot g(m)}{(n \cdot m)^z} =$

этот ряд сх-ся тоже абсолютно, поэтому суммируем в любом порядке.

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{d \mid n} \frac{f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)}{n^z} = \sum \frac{(f \circ g)(n)}{n^z}$

∎

функция римана — аналитическая при $\operatorname{Re} z > 1$.
(т.к. Re каждое — аналит. ф-ии)

беск. дифф, интеграл по замкнут. контуру равен нулю и т.д.

<u>Лемма 1</u>

Пусть f — мультипликативная ф-ия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}$ сх-ся абсолютно.

Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \underbrace{\left(\sum_{d=0}^{\infty} f(p^d)\, p^{-dz} \right)}$$
это частичные суммы ряда $\sum_n \frac{f(n)}{n^z}$
поэтому тоже сх-ся абсолютно

Д-во: $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$ (пронумеровали в порядке возраст.)

$$\prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{d=0}^{\infty} f(p_k^d)\, p_k^{-dz} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{-z}} = \Sigma_N$$

конечное произв. абс. сх-ся рядов, получили дистриб-тью.

все простые делители числа n не превосходят p_k

Рассмотрим
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} - \Sigma_N \leq \sum_{n=p_N}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

∎

<u>Теорема</u> (Эйлера)

Если $\operatorname{Re} z > 1$, то справедливы следующие рав-ва:

(1) $\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-z})^{-1}$

(2) $(\zeta(z))^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$

Д-во: $\boxed{(1)}$ $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^z} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{d=0}^{\infty} p^{-dz} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-z})^{-1}$

мультиплик.

$\boxed{(2)}$

Заметим $\zeta(z)^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-z})$

$\zeta(z) \cdot (\zeta(z))^{-1} = 1$, тогда перемножим

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^z} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(I \circ \mu)(n)}{n^z} = 1$$

(т.к. $I \circ \mu = e$.)

Более
$$\sum \frac{\mu(n)}{n^z} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{d=0}^{\infty} \mu(p^d) \cdot p^{-dz} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-z})$$

∎

Теорема 2 (одна из теорем Вейерштрасса)

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — посл-ть аналитических в обл-ти D ф-ций.
Предположим, что на любом компакте $K \subset D$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\underset{\text{равн-но}}{\text{сх-ся}}$.
Тогда $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ явл-ся аналитической на всей D
и более ~~того~~ того $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$

Лемма 5

$\zeta(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z > 1$

Д-во: Мы получили, что $\dfrac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^z}$

по теореме ? аналитическая ⇒ ~~$\zeta(z)$ аналитич~~ → нет особ. точек ? ∎

Лемма 6

$(\ln \zeta(z))' = +\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^z}$

в обл-ти $\operatorname{Re} z > 1$

Д-во:
$$\zeta'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right)' \overset{\text{Теор 2}}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^z}$$

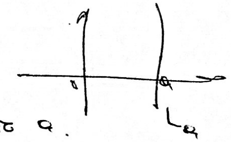
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^z}\right) =$$

сх-ся абс., т.к. мажорируется $\dfrac{\ln n}{n^{\operatorname{Re} z}}$

$$\overset{\text{Лемма 3}}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \circ \ln)(n)}{n^z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$$
∎

Теорема 3

Для любого $a > 1$ и $x \geq 1$ справедливо рав-во
$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_a} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z^2}\, dz$$



L_a — прямая из чисел, где вещ. часть a.
$L_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\}$

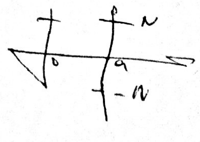
Д-во: интеграл несобств, нужно будет посл-ть интегралов, это можно, т.к. этот интеграл сх-ся абсолютно.

$$\left|-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| = \left|\sum \frac{\Lambda(n)}{n^z}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\operatorname{Re} z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^a} = C_{onst}.$$

$$\int_{L_a} \left|-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z^2}\right| dz \leq C x^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+y^2}\, dy \leq D$$

т.е. инт. сх-ся абсолютно

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-N}^{N} -\frac{\zeta'(a+iy)}{\zeta(a+iy)} \frac{x^{a+iy}}{(a+iy)^2}\, dy =$$



$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_a^N} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z^2}\,dz = I(N)$$

$$I(N) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_a^N}\left(\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^z}\right)\cdot\frac{x^z}{z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_n\int_{L_a^N}\frac{\Lambda(n)}{n^z}\frac{x^z}{z^2}\,dz.$$

Имеем оценку

$$\int_{L_a^N}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^z}\frac{x^z}{z^2}\right|dz \le \frac{\Lambda(n)}{n^a}x^a\int_{L_a^N}\frac{1}{z^2}\,dz.$$

Значит ряд в $I(N)$ сх-ся абсолютно, значит можем предел под знак суммы внести.

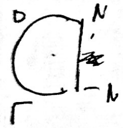
$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_a^N}\frac{\Lambda(n)}{n^z}\frac{x^z}{z^2}\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_a^N}\underbrace{\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z}\,dz =$$

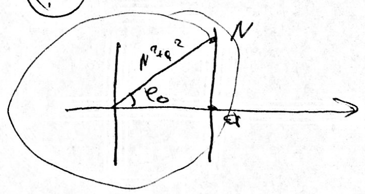
не аналитич. в т. $z=0$
нужно найти вычет

$$\left(\frac{x}{n}\right)^z = \exp\left(\left(\ln\frac{x}{n}\right)z\right) = 1 + \frac{\ln\frac{x}{n}}{1}z + \frac{\ln^2\frac{x}{n}}{2!}z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0}\dots = \ln\frac{x}{n}$$?



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 dz = \text{вычету}$$



$$= \ln\frac{x}{n}$$

С другой стороны $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\dots dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_a^N} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta} dz$

$$\int_{\Delta}\left|\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z\right|dz = \int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0}\frac{\Lambda(n)}{N^2+a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz \dots$$

$\Lambda(n)>0.$

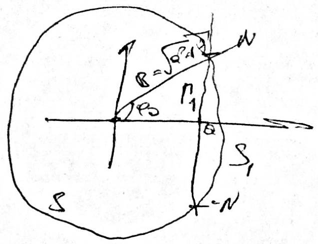
// 13.10.14 лекция 7.

$$I = \lim_{N\to\infty}\int_{a-iN}^{a+iN}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z^2}\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz = \ldots$$

найдем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz$$



$\Gamma = S \cup \Gamma_1$

1.) $\frac{x}{n} \ge 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz = \operatorname{Res}_{z=0}\ldots = \Lambda(n)\ln\frac{x}{n}.$$

аналитич. с полюсом в $z=0$.

с другой стороны, это

$$\int_{\Gamma} \cancel{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz} = \int_{S} + \int_{\Gamma_1}$$

$\{z \mid z = Be^{i\varphi},\ \varphi\in[\varphi_0, 2\pi-\varphi_0]\}$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0}\frac{\Lambda(n)}{(Be^{i\varphi})^2}\left(\frac{x}{n}\right)^{Be^{i\varphi}} d(Be^{i\varphi})\right| \le$$

$$\le \frac{\Lambda(n)}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0}\frac{1}{B^2}\left(\frac{x}{n}\right)^{B\cos\varphi = a} B\,d\varphi \le$$

$$\le \frac{\Lambda(n)}{2\pi B}\left(\frac{x}{n}\right)^a\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^a}{B}\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$$

итог: при $\frac{x}{n}\ge 1$ $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz = \Lambda(n)\ln\frac{x}{n}$

2) $\frac{x}{n} < 1$ $\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{\Lambda(n)}{z^2}\left(\frac{x}{n}\right)^z dz = 0.$

аналогично предыдущему

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{\Lambda(n)}{(Be^{i\varphi})^2}\left(\frac{x}{n}\right)^{Be^{i\varphi}} d\,Be^{i\varphi}\right| \le \frac{\Lambda(n)}{2\pi}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{1}{B^2}\left(\frac{x}{n}\right)^a\cdot B\,d\varphi \xrightarrow[N\to\infty]{}0.$$

В конечном итоге имеем

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n} = \hat{\psi}(x)$$

~~по доказанному~~ по опред.

Хотим нули ф-ии Римана.

? Построим аналитич. продолжение ф-ии Римана на область $\operatorname{Re} z \le 1$? или $\operatorname{Re} z > 0$.

Пусть $f(u, z)$ – ф-ия; $u \in [a,b]$, $z \in D \subset \mathbb{C}$.
Предположим, что $\forall\, u \in [a,b]$ ф-ия $f(u,z)$ аналитична в D.
Предположим также, что

$$(*)\ \begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \text{при } |\Delta u|<\delta,\ u+\Delta u \in [a,b] \Rightarrow \\ |f(u+\Delta u, z) - f(u,z)| < \varepsilon \quad \forall z \in D \text{ и } u \in [a,b] \end{cases}$$

Тогда $F(z) = \int_a^b f(u,z)\,du$ яв-ся аналитической и её произв. м.б. вычислена след. образом:

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(u,z)}{\partial z}\,du$$

Нестрого: $\underset{\text{по Риману}}{\int_a^b f\,du} = \lim_{N\to\infty} \sum \ldots = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} f(u_j, z)\,\Delta u}_{\text{частичная сумма}}$ д-мо. $f(u_j,z)$ диф. сх-ся равн-но по z из $(*)$ $\Rightarrow$ Почему? надо спросить на консультации

$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса (не формулировали!) $F(z)$ яв-ся аналитич.

В силу равн. сх-ти можем в Σ провести дифф-ие.

Теорема 1

Сущ. ф-ия $\tilde{\zeta}(z)$ аналитичная в обл-ти $\operatorname{Re} z > 0$, $z \ne 1$ такая, что $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z)$ при $\operatorname{Re} z > 1$.
При этом $z=1$ – простой полюс и $\operatorname{Res}_{z=1}(\tilde{\zeta}(z)) = 1$

Д-во: Введем $\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$, где $\{u\}$ – дробная часть u. $-\frac{1}{2} < \rho \le \frac{1}{2}$

Зафиксируем $0<N<M$ и определим ф-ию

$$I(N,M,z) = \int_{N+\frac12}^{M+\frac12} \left(\frac{1}{u^z} + z\frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\right) du$$

Имеем

$$I(N,M,z) = \int_{N+1/2}^{M+1/2} \frac{1}{u^z} + z\,\frac{\frac12 - u + [u]}{u^{z+1}}\,du =$$

$$= \underbrace{\int_{N+1/2}^{M+1/2} \frac{1-z}{u^z}\,du}_{= u^{1-z}\big|_{N+1/2}^{M+1/2}} + \underbrace{\frac12 \int_{N+1/2}^{M+1/2} \frac{z\,du}{u^{z+1}}}_{-\,''\,-} + \int_{N+\frac12}^{M+1/2} \frac{z[u]}{u^{z+1}}\,du =$$

$$= u^{1-z}\Big|_{N+1/2}^{M+1/2} - \frac12 u^{-z}\Big|_{N+1/2}^{M+1/2} + \int_{N+1/2}^{N+1} \frac{zN}{u^{z+1}}\,du + \int_{N+1}^{N+2} \frac{z\cdot(N+1)}{u^{z+1}}\,du + \ldots + \int_{M}^{M+1/2} \frac{z\cdot M}{u^{z+1}}\,du =$$

$$= \frac{1}{(M+1/2)^{z-1}} - \frac{1}{(N+1/2)^{z-1}} - \frac{1}{2(M+1/2)^z} + \frac{1}{2(N+1/2)^z} - N\left(\frac{1}{(N+1)^z} - \frac{1}{(N+1/2)^z}\right) - \ldots - M\left(\frac{1}{M^z} - \frac{1}{(M+1/2)^z}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{(M+1/2)^{z-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(M+1/2)^{z}} - \frac{M}{(M+1/2)^{z}}\right)^{\to 0} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{(N+1/2)^{z-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(N+1/2)^{z}} + \frac{N}{(N+1/2)^{z}}\right)^{\to 0} + \left(\frac{N+1}{(N+1)^{z}} - \frac{N}{(N+1)^{z}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{N+2}{(N+2)^{z}} - \frac{N+1}{(N+2)^{z}}\right) + \ldots + \left(\frac{M}{M^{z}} - \frac{M-1}{M^{z}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(N+1)^{z}} + \ldots + \frac{1}{M^{z}}$$

$$I(N,M,z) = \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^{z}} \quad \text{при } z \neq 1.$$

$\forall N$ при $\operatorname{Re} z > 1$ справедливо $\zeta(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{z}}}_{\text{определен при } \operatorname{Re} z > 0} + \lim_{M\to\infty} I(N,M,z)$

$$I(N,M,z) = \int_{N+1/2}^{N+1/2} \frac{du}{u^{z}} + \int_{N+1/2}^{M+1/2} z\frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du =$$

$$= +\frac{1}{1-z}\, u^{1-z}\Big|_{N+1/2}^{M+1/2} + z\int \frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du \xrightarrow[\substack{\operatorname{Re} z>1 \\ M\to\infty}]{} -\frac{(N+1/2)^{1-z}}{1-z} + z\int_{N+1/2}^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du =$$

$$z\left(\int_{N+1/2}^{N+1} \frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du + \int_{N+1}^{N+2} \frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du + \ldots\right) \quad (**)$$

Утверждается, что $(**)$ сх-ся абсолютно при любом z: $\operatorname{Re} z > 0$.
Кроме того, он сх-ся равн-но по z в обл. $\operatorname{Re} z \geq \delta$ $\forall \delta > 0$.

$$\left|\int_{N+k}^{N+k+1} \frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du\right| \leq \int_{N+k}^{N+k+1} \frac{|\rho(u)|}{|u^{z+1}|}\,du \leq \frac{1}{2}\int_{N+k}^{N+k+1} \frac{du}{u^{\operatorname{Re}(z+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{Re} z}\left(\frac{1}{(N+k)^{\operatorname{Re} z}} - \frac{1}{(N+k+1)^{\operatorname{Re} z}}\right)$$

Тогда $\displaystyle\sum_{k=1}^{L}\left|\int_{N+k}^{N+k+1} \frac{\rho(u)}{u^{z+1}}\,du\right| \leq \frac{1}{2\operatorname{Re} z}\left(\frac{1}{(N+1)^{\operatorname{Re} z}} - \frac{1}{(N+L+1)^{\operatorname{Re} z}}\right) \leq$

$\displaystyle \leq \frac{1}{2\operatorname{Re} z}\frac{1}{(N+1)^{\operatorname{Re} z}}$. $\Rightarrow$ ряд сх-ся абс.

Этот ряд сх-ся равн-но (нечетно?) можно записать ф-цу через δ

Нужно понять, что $\frac{\rho(u)}{u^{z+1}}$ равномерно непр-на.

$$\left|\frac{p(u+\Delta u)}{(u+\Delta u)^{z+1}} - \frac{p(u)}{u^{z+1}}\right| \leq \left|\frac{p(u+\Delta u)}{(u+\Delta u)^{z+1}} - \frac{p(u+\Delta u)}{u^{z+1}} + \frac{p(u+\Delta u)}{u^{z+1}} - \frac{p(u)}{u^{z+1}}\right| \leq$$

$$\leq \left|p(u+\Delta u)\right| \cdot \left|\frac{1}{(u+\Delta u)^{z+1}} - \frac{1}{u^{z+1}}\right| + \frac{1}{u^{z+1}}|\Delta u| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{(u+\Delta u)^{z+1}} - \frac{1}{u^{z+1}}\right| + \frac{1}{u^{z+1}}|\Delta u| \leq$$

по теор. о произв. знач.

$$\leq |\Delta u| \cdot \left|\frac{-(z+1)}{u_1^{z+2}}\right| + |\Delta u| \frac{1}{z^{z+1}} = |\Delta u| \left(\frac{z}{u_1^{z}} + \frac{1}{u^{z+1}}\right)$$

$$= |\Delta u| \left(\frac{1+z}{u_1^{z+2}} + \frac{1}{u^{z+1}}\right) < \varepsilon$$

Т.о. при $\mathrm{Re}\, z > 1$ справедливо:

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^z} + \frac{(N+1/2)^{1-z}}{z-1} + z \int_{N+1/2}^{\infty} \frac{p(u)}{u^{z+1}}\, du$$

аналит. с полюсом $z = 1$.

аналит. ф-ия при $\mathrm{Re}\, z > 0$.

вычет в $\underset{z=1}{\mathrm{Res}} \ldots = 1$. ∎

Лемма.

Лемма 1 При $s>1$ и любом $t\in\mathbb{R}$ справедливо нер-во:

$$|\zeta^3(s)\cdot\zeta^4(s+it)\cdot\zeta(s+2it)|\geq 1 \quad (*)$$

// Лемешев 28.10.14.

Д-во: $\zeta(z) \overset{\text{тождество Эйлера}}{=} \prod\limits_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-z})^{-1}$ $\quad\Big|\quad \left|\prod(1-p^{-s})^{-3}(1-p^{-s-it})^{-4}(1-p^{-s-2it})^{-1}\right|$

$$0\overset{?}{\leq}\ln\left(\left|\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-3}(1-p^{-s-it})^{-4}(1-p^{-s-2it})\right|\right)=$$

$$=\sum_{p\in\mathbb{P}}\left(-3\ln|1-p^{-s}|-4\ln|1-p^{-s-it}|-\ln|1-p^{-s-2it}|\right) \ominus$$

// $\ln|w|=\mathrm{Re}\ln w \qquad w=e^{\ln|w|}e^{i\arg(w)}=\ln|w|+i\arg(w)$

$$\ominus -\mathrm{Re}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}}\left(3\ln(1-p^{-s})+4\ln(1-p^{-s-it})+\ln(1-p^{-s-2it})\right)\right)=$$

// при $0\leq|z|<1$ $\quad \ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots$

$$=\mathrm{Re}\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\frac{p^{-ns}}{n}+4\frac{p^{(-s-it)n}}{n}+\frac{p^{(-s-2it)n}}{n}\right)=$$

$$=\mathrm{Re}\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{-ns}}{n}\left(3+4p^{-itn}+p^{-2itn}\right)\ominus$$

// $\mathrm{Re}\,p^{-itn}=\mathrm{Re}\,e^{-itn\ln p}=\cos(tn\ln p)$

$$\ominus\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{-ns}}{n}\left(3+4\cos(\underbrace{tn\ln p}_{\varphi})+\cos(\underbrace{2tn\ln p}_{2\varphi})\right)\ominus$$

// $3+4\cos\varphi+2\cos^2\varphi=3+4\cos\varphi+2\cos^2\varphi-1=2(\cos\varphi+1)^2$

$$\ominus\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{-ns}}{n}\cdot 2(\cos\varphi+1)^2\geq 0.$$

//? про внешний ряд и $s>1$.

Сх-ся абс. т.к. мажорируется $\frac{p^{-ns}}{n}$

все слагаемые неотриц. ☒

Теорема 1 ζ-ция Римана на прямой $\mathrm{Re}\,z=1$ не имеет нулей.

Д-во: Предположим $1+it$ — ноль φ-ии Римана.

рассм $|\zeta(s)|$ при $1<s<2$ $\qquad \zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\leq 1+\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}=$

$$=1+\frac{1}{1-s}x^{s-1}\Big|_1^{\infty}=1+\frac{1}{s-1}<\frac{2}{s-1}$$

в окр. $1+it$ ф-ия аналитична $\Rightarrow$ на любом компакте производная ограничена.

т.е. в $s \in [1;2]$ произв-ная $|\zeta'(s+it)|$ ограничена $\le C$.

$$\left|\frac{\zeta(s+it)-\zeta(1+it)}{s-1}\right| \le C$$

это ноль; значит.

$$|\zeta(s+it)| \le C(s-1)$$

в отрезке $s \in [1,2]$ $|\zeta(s+2it)| < M$.

$$1 \le |\zeta^3(s)\cdot\zeta^4(s+it)\cdot\zeta(s+2it)| < \frac{2^3}{(s-1)^3}C^4(s-1)^4\cdot M = D(s-1)$$

$\forall s \in (1,2)$

Но мы можем сделать $s-1$ сколь угодно малым. ∎

Лемма 2 Сущ константы C_1 и C_2 такие, что при $|t| \ge 3$ и $s \in [1,2]$ справедливы нер-ва:

$|\zeta(s+it)| \le C_1 \ln|t|$

$|\zeta'(s+it)| \le C_2 \ln^2|t|$

Д-во: $$\zeta(s+it) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{s+it}} + \frac{(N+1/2)^{1-s-it}}{s-1+it} + \int_{N+1/2}^{\infty}\frac{(s+it)\,\rho(u)}{u^{s+it+1}}\,du$$

это было аналитич. продолжение ф-ии.

В качестве N берем $[|t|]$

первое слагаем $$\sum_{k=1}^{[|t|]}\frac{1}{k^{s+it}} \le \sum_{k=1}^{[|t|]}\frac{1}{k} = 1 + \int_1^{[|t|]}\frac{dx}{x} \le 1 + \ln|t| < 2\ln|t|$$

т.к. $\ln|t| > 1$.

второе слагаем $$\left|\frac{([|t|]+1/2)^{1-s-it}}{s-1+it}\right| \le \frac{([|t|]+1/2)^{1-s}}{|t|} \le \frac{1}{|t|} \le \frac{1}{3}$$

третье $$\int_{[|t|]+1/2}^{\infty}\frac{(s+it)\,\rho(u)}{u^{s+it+1}}\,dy \le (s+|t|)\int_{[|t|]+1/2}^{\infty}\frac{du}{u^{s+1}} \le (s+|t|)\int_{|t|-1}^{\infty}\frac{du}{u^{s+1}} =$$

подинтеграл. ф-ия полож.

$$= (s+|t|)\frac{1}{-s}u^{-s}\Big|_{|t|-1}^{\infty} \le \frac{s+|t|}{s(|t|-1)} \le C.$$

в итоге $|\zeta(s+it)| \le 2\ln|t| + \frac{1}{3} + C \le C_1\ln|t|$ для некотор C_1

$s+it=z$

$$y'(s+it)=\zeta'(z)=-\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln k}{k^z}-\frac{(N+1/2)^{1-z}}{(z-1)^2}-\frac{\ln(N+1/2)\,(N+1/2)^{1-z}}{z-1}$$ ⑦

$$\left(\frac{(N+1/2)^{1-z}}{z-1}\right)'=-\frac{(N+1/2)^{1-z}}{(z-1)^2}-\frac{\ln(N+1/2)\,(N+1/2)^{1-z}}{z-1}$$

$$\left(\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{z\,\rho(u)}{u^{z+1}}du\right)'=\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^{z+1}}du-\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{z\rho(u)\ln u}{u^{z+1}}du$$

аналит $\Rightarrow$ под знак инт. диф.

$$+\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^{z+1}}du-\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{z\rho(u)\ln(u)}{u^{z+1}}du$$

$$y'(s+it)=-\sum_{k=1}^{[|t|]}\frac{\ln k}{k^{s+it}}-\frac{(N+1/2)^{1-s-it}}{(s+it-1)^2}-\frac{\ln(N+1/2)\,(N+1/2)^{1-s-it}}{s+it-1}+$$

$$+\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+it+1}}du-\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{(s+it)\rho(u)\ln(u)}{u^{s+it+1}}du$$

возьмем $N\overset{\text{Df}}{=}[|t|]$

$$\left|\sum_{k=1}^{[|t|]}\frac{\ln k}{k^{s+it}}\right|\le\sum_{k=1}^{[|t|]}\frac{\ln k}{k}\le\int_1^{[|t|]}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2|t|$$

$$\left|\underbrace{\frac{([|t|]+1/2)^{1-s-it}}{(s+i(t-1))^2}}_{\le C=4/3}+\underbrace{\ln([|t|]+1/2)\frac{([|t|]+1/2)^{1-s-it}}{s+it-1}}_{\le\ln|t|}\right|\le 2\ln|t|$$

(из пред. оценка)
(из первой части)

$$\left|\int_{|t|-1}^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+it+1}}du-\int_{|t|-1}^{\infty}\frac{(s+it)\rho(u)\ln u}{u^{s+it+1}}du\right|\le$$

$$\le\int_{|t|-1}^{\infty}\frac{du}{u^2}+(s+|t|)\int_{|t|-1}^{\infty}\frac{\ln u}{u^2}du\le D+$$

т.к. $s\ge1$.

$$+(s+|t|)\left[\frac{\ln u}{u}\Big|_{\infty}^{|t|-1}+\int_{|t|-1}^{\infty}\frac{1}{u^2}\right]$$

// $\int\frac{\ln u}{u^2}du=\int\ln u\,d\left(-\frac{1}{u}\right)=-\frac{\ln u}{u}+\int\frac{1}{u}\frac{1}{u}du=$

$$=-\frac{\ln u}{u}+\frac{1}{u}$$

$\le D+k\ln(t)$.

Лемма 3 Сущ. констант $T_0 \geq 3$, $C_3, C_4 > 0$ такие, что $\forall s \in [1,2]$ и $\forall t \geq T_0$ вып. нер-ва:

$$|\zeta(s+it)| \geq C_3 \ln^{-3/4}|t| > C_3 \ln^{-8}|t|$$

$$\left|\frac{\zeta'(s+it)}{\zeta(s+it)}\right| \leq C_4 \ln^{10}|t|$$

// любая степень логарифма — хорошо, себя убывает медленнее чем любая степенная ф-ия.

Д-во: было $\zeta(s) \leq \frac{2}{s-1}$, при $s \in (1,2)$

было $|\zeta(s+2it)| \leq C_1 \ln 2|t| < 2C_1 \ln|t|$ $\left(\begin{matrix} s \in [1,2] \\ t \geq s \end{matrix}\right)$

из (*) $|\zeta(s+it)| \geq |\zeta(s)|^{-3/4}| \cdot |\zeta(s+2it)|^{-1/4} \geq \underset{4C_1}{\overset{\parallel}{C}} \left(\frac{2}{s-1}\right)^{-3/4} \ln^{-1/4}|t|$

зафикс. t, положим $\delta = \frac{2}{\ln^{10}|t|}$

При $s \in [1+\delta, 2]$: $|\zeta(s+it)| \geq 2C \ln^{-15/2}|t| \ln^{-1/4}|t|$

пусть $s \in [1, 1+\delta]$

$$|\zeta(1+\delta+it) - \zeta(s+it)| \leq C_2 \ln^2|t| \cdot \frac{2}{\ln^{10}|t|} \leq$$

Тогда $\leq 2C_2 \ln^{-8}|t|$ оценка на пр. огранич. знач. длина интервала.

$$|\zeta(s+it)| \geq |\zeta(1+\delta+it)| - 2C_2 \ln^{-8}|t| \geq$$

$$\geq C_3' \ln^{-31/4}|t| - C_2 \ln^{-8}|t| \geq$$

$|a-b| < c$
$|b| \geq |a| - c$

Сущ. t_0, чтобы это в 2 раза меньше этого

$$\geq \Big/\!\!/ \begin{matrix} \text{сущ } T_0 \\ \forall t, |t| \geq t_0 \end{matrix} \Big/\!\!/ \geq \underbrace{\tfrac{1}{2} C_3'}_{C_3} \ln^{-31/4}|t|. \quad //?$$

Второе

$$\left|\frac{\zeta'(s+it)}{\zeta(s+it)}\right| \leq \frac{C_2 \ln^2|t|}{C_3 \ln^{-8}|t|} \leq C_4 \ln^{10}|t|.$$

Теорема 1 | 21.10.19 Лекция 10.

$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$. (асимптотически эквивалентна?)

число простых чисел в $[0, x]$

~~Док-во~~:

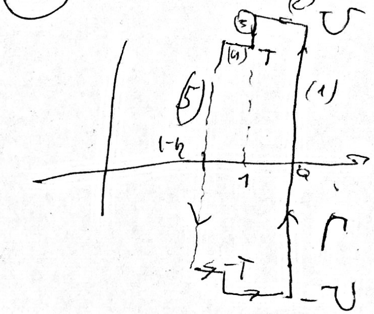
$\tilde\psi(x) \sim x$:

$$\tilde\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_a}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z^2}\,dz. \iff$$

$U > T > T_0$ (из предыд. лекции).

$$\iff \frac{1}{2\pi i}\int_{L_a}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^{z-1}}{z^2}\,dz \to 1, \quad x\to\infty.$$

Ю. Сво: $I \stackrel{def}{=}$

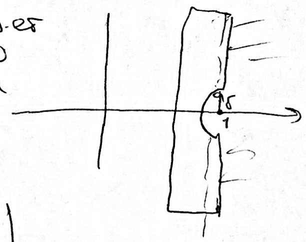


$z=1$ → полюс логарифм. произв. ф-ии Римана.

можем выбрать окр-ть радиуса δ | $\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \neq 0$. (в частности, $|\zeta(z)| \neq 0$)

Док-ли, при $\operatorname{Re} z > 1$ $\zeta(z) \neq 0$.

Утв.: На этом компакте сущ.ет лишь конечное число нулей ф-ии Римана (иначе нашли бы т. сгущения, если бы на границе ф-ия была нулем, то она была бы нулем во всем компакте).



Можем найти η такую, что в мн-во $\{z \mid 1-\eta \le \operatorname{Re} z \le 1, -T \le \operatorname{Im} z \le T\}$ нет нулей ф-ии Римана.

Рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^{z-1}}{z^2}\,dz = 1. \quad (3)$$

?−1

Рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)dz = P - N$$

кол-во полюсов; кол-во нулей; принцип аргумента.

в Γ $N=0$, $P=1$

Воспользуемся Теоремой Руше: | на Γ $|f|>|g| \Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (f(z)+g(z))\,dz$.

$$f(z) = \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \qquad g(z) = \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\left(-1 + \frac{x^{z-1}}{z^2}\right)$$

Надо бы $\quad 1 > \left|-1 + \dfrac{x^{z-1}}{z^2}\right|$

Но мы можем взять такой контур близкий к $z=1$

$\Rightarrow \dfrac{x^{z-1}}{z^2}$ будет близка к 0.

$$\operatorname{Re} \frac{x^{z-1}}{z^2} \geq 0.$$

по теор. Коши интегралы совпадают (по Г и по)

$\Rightarrow$ (У) доказан.

$$\int_{a-iU}^{a+iU} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \qquad I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iU}^{a+iU}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^{z-1}}{z^2}\,dz$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{a+iU}^{1+iU} + \frac{1}{2\pi i}\int_{1-iU}^{a-iU}$$

$I_1 \xrightarrow[U\to\infty]{} I$ $\qquad I_5 \ldots$

Надо док-ть, что остальные к нулю сх-ся.

самое маленькое.

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi}\, 2\int_{a}^{a} c_4 \ln^{10} U \cdot \frac{x^{q-1}}{s^2+U^2}\,ds \leq c_5 \ln^{10} U \cdot \frac{x^{a-1}}{U^2}$$

Re z

с предыд. леммы 3 $\qquad$ сюда входит D.

$$\frac{1}{U^2}\int_{q}^{a}\frac{ds}{\frac{s^2+U^2}{U^2}} \leq \frac{D}{U^2} \quad \text{в кон-ке D пойдет } a.$$

мала.

$\ln^{10} t < t^{1/2}$

$$|I_3| \leq 2\frac{1}{2\pi}\int_T^U \ln^{10} t\,\frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{T}\int_T^U \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \frac{D}{T^{1/2}}.$$

из леммы 3 (л.3) $\qquad$ при дост. ~~достаточно большое~~ большом T.

(4) $\quad (\ln \zeta)'$

~~Подынтеграл.~~ фция аналитич, (4) ∪ (5) — компакт $\Rightarrow$

$\exists M = M(T, \eta)$ такая, что $\left|\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \leq M$ на (4) ∪ (5)

(I_4)

$$|I_4| \le \frac{1}{\pi}\int_{1-\eta}^{1} M \frac{x^{s-1}}{s^2+T^2}\,ds \le \frac{2M}{\pi T^2 x}\int_{1-\eta}^{1} x^s\,ds = \frac{2M}{\pi T^2 x}\left(\frac{x^s}{\ln x}\Big|_{1-\eta}^{1}\right)$$

$\frac{1}{s+1} \le 2$.

$$\le \frac{2Mx}{\pi T^2 x \ln x}\left(1 - x^{-\eta}\right) \le \frac{F(T,\eta)}{\ln x}$$

$$|I_5| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} M \frac{x^{\overset{=\mathrm{Re}(z)}{1-\eta}-1}}{(1-\eta)^2+s^2}\,ds \le \frac{M}{2\pi x^{\eta}}\int_{-T}^{T}\frac{ds}{(1-\eta)^2+s^2} \le \frac{G(T,\eta)}{x^{\eta}}$$

↑ конечный, можно посчитать, но нет смысла

$$1 = \lim_{U\to\infty} I_1 + \underbrace{I_3+I_4+I_5} = \frac{\tilde{\psi}(x)}{x} + I_3+I_4+I_5.$$

Надо $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall x>N$ $|1-I_1|<\varepsilon$.

т.е. эта сумма мала.

D не зависит ни от чего. $\Rightarrow \exists T: I_3 < \frac{\varepsilon}{3}$

выбрав T

строим $\eta=\eta(T) \Rightarrow F(T,\eta)$ и $G(T,\eta)$ определены.

тогда $\exists N$: при $x>N$ $I_4 < \frac{\varepsilon}{3}$

и $I_5 < \frac{\varepsilon}{3}$ (т.к. η - фикс.).

<u>Гипотеза Римана</u>: все нули ф-ии Римана лежат на прямой $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.

Если доказать гипотезу Римана, то можно $\frac{\tilde{\psi}(x)}{x} = 1 + O(x^{\frac{1}{2}+\delta})$

<u>Следствие</u>

$p_n \sim n\ln n$. (асимптотич. эквив.)

т.е. $\frac{p_n}{n\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Д-во: $\pi(p_n) = \boxed{n = \frac{p_n}{\ln p_n}(1+R_n)}$ $\quad R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\boxed{\ln n = \ln(\pi(p_n)) = \ln p_n - \ln\ln p_n + \ln \overset{0}{1} + \ln R_n.}$$

$$n\cdot\ln n = \left[\frac{p_n}{\ln p_n}(1+R_n)\right]\cdot\left[\ln p_n - \ln\ln p_n + \ln(1+R_n)\right] =$$

$$= (1+R_n)\left[p_n - \underbrace{\frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n}}_{n\to 0} + \underbrace{\frac{\ln(1+R_n)}{\ln p_n}}_{\to 0}\right]$$

Могли бы точнее R_n оценивать, точнее бы p_n оценивали

Док-ко, при фикс ε и дост. большом n
в $[n, (1+\varepsilon)n]$ нет простых чисел.

Теор. Дирихле. „Третий большой кусок"

$X = \{a + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$, $(a, d) = 1$ $\Rightarrow$ X содержит бесконечно много простых чисел.

Идея док-ва: $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$ (расходится)

так будем с условием наличия арифм. прогр X.
но нестандартное (с использ. абелев. групп)

опр $\langle G, \circ \rangle$ – абелева группа, если.

(1). $\forall a, b, c \in G$ $(ab)c = a(bc)$

ключевое. почему Абелева (2) $\forall a, b \in G$ $ab = ba$

(3) $\exists e \in G$: $\forall a \in G$ $ae = a$

(4) $\forall a \in G$ $\exists a^{-1} \in G$: $a \cdot a^{-1} = e$.

$|G|$ – порядок группы G (мощность мн-ва G)

опр Поряд элемента $g \in G$ $|g| = \min\{k > 0\}$ $g^k = e$
если такого k не сущ, то $|g| = \infty$.

$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$ – подгруппа, порожденная элементом g.

$g^n = \overbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}^{n \text{ раз}}$ если $n > 0$.

$g^n = \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \ldots \cdot g^{-1}}_{-n \text{ раз}}$ если $n < 0$.

(замкн. отн произв и взятию обратного)

$g^0 = e$.

$|\langle g \rangle| = |g|$ бу док-ва (из курса Алгебры).

опр. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ – группы.
$G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \{(g_1, \ldots, g_n) \mid g_i \in G_i\}$.
можно задать покоординатн. операцию.,
тогда
$\langle G_1 \times \ldots \times G_n, \cdot \rangle$ – группа, наз-ся прямым произв. групп $G_1 \ldots G_n$.

Лемма: (1) Если $|g|=\infty$, то $\langle g\rangle \simeq \langle \mathbb{Z},+\rangle$
изоморфна.

если $|g|=n<\infty$, то $\langle g\rangle \simeq \langle \mathbb{Z}_n,+\rangle$,
циклическая

где $\mathbb{Z}_n$ – кольцо вычетов по mod n.

(2) Если $g^m=1$ то m делит $|g|$

(3) Если $g\in G$, то $|g|$ делит $|G|$ (частн. случ. теор. Лагранжа)

(4) Если $g_1, g_2 \in G$ и $\langle g_1\rangle \cap \langle g_2\rangle = \{e\}$, ~~то $|g_1 g_2|$~~

то $|g_1 g_2| = [|g_1|, |g_2|]$, ← наим. общ. крат.

в частн-ти, если $(|g_1|,|g_1|)=1$, то

$|g_1 \cdot g_2| = |g_1|\cdot|g_2|$.

Мы ГО Кэли абелевы ф. Рациональны

Теорема (о строении конечных абелевых групп).
Если G – конечная (абелева) группа, ~~то~~:

то сущ. $d_1, \dots, d_n$: $G \simeq \mathbb{Z}_{d_1}\times\dots\times\mathbb{Z}_{d_n}$

(не единств. разл, но если $d_1|d_2$, $d_2|d_3 \dots$ то ед-но)

~~[illegible]~~ Предпол, что в гр. G сущ. подгруппы $G_1, G_2, \dots, G_n$ такие, что $G_1\cdot G_2 \dots G_n = \{g_1 g_2 \dots g_n \mid g_i \in G_i\} = G$ и $G_i \cap \prod_{j\neq i} G_j = 1 \ \forall i$.

10.11.14 лекция 11

Тогда $G \simeq G_1\times\dots\times G_n$

$V = V_1\oplus\dots\oplus V_n$ $\mathbb{Z}_n$ – кольцо вычетов по модулю n.

$\mathbb{Z}_n^* = \{m\in\mathbb{Z}_n \mid$ ~~...~~ у m сущ. обратный по умножению.$\}$

$\mathbb{Z}_5^* = \{1,2,3,4\}$

$\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot\rangle$ – группа. $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^*$ $(m_1 m_2)^{-1} = m_2^{-1}\cdot m_1^{-1}$

утв.
$$\boxed{\begin{array}{l} m\in\mathbb{Z}_n^* \Leftrightarrow (m,n)=1. \\ |\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n) \text{ – ф-ия Эйлера.} \\ \text{Если } (n,m)=1, \text{ то } \varphi(mn)=\varphi(m)\cdot\varphi(n) \\ \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \end{array}}$$

Гомоморфизм $\varphi: G \to \mathbb{C}^*$ наз-ся <u>характером группы</u> G.

χ – гомоморфизм $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G$ $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$.

$\hat{G}$ – мн-во всех характеров гр. G.

$\langle \hat{G},\cdot\rangle$ – группа, $\forall \chi_1,\chi_2\in\hat{G}$, $\forall g\in G$, $\chi_1\chi_2(g) = \chi_1(g)\cdot\chi_2(g)$

группа у нас коммутативна, поэтому хар. в том опред-ся.

изоморфно

Теорема 1 | $\langle \hat{G}, \cdot \rangle$ — абелева группа, более того, $\hat{G} \simeq G$

Д-во: Пусть $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$, покажем, что $\chi_1 \cdot \chi_2 \in \hat{G}$

Возьмем произв. $g_1, g_2 \in G$ $(\chi_1 \cdot \chi_2)(g_1 \cdot g_2) \underset{\text{умн хар.}}{=} \chi_1(g_1 g_2) \cdot \chi_2(g_1 \cdot g_2) \underset{\text{умн. компл.}}{=}$

$= \chi_1(g_1) \cdot \chi_1(g_2) \cdot \chi_1(g_2) \cdot \chi_2(g_2) \underset{\text{комм. компл.}}{=} (\chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_1)) \cdot (\chi_2(g_1) \cdot \chi_2(g_2)) = (\chi_1\chi_2)(g_1) \cdot (\chi_1\chi_2)(g_2)$

$\chi_e: G \to 1$ — главный характер.

$\chi \in G$, тогда $\chi^{-1}(g) = (\chi(g))^{-1}$ | упр. док-ть что это характеры.

с прошлой лекции.

$G = \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_n} = \langle g_1 \rangle \times \ldots \times \langle g_n \rangle$ $|g_i| = d_i$

$\forall g \in G$ $\exists k_1, \ldots, k_n$: $g = g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n}$

$\chi_j(g_j) \overset{df}{=} \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j}\right)$, $\chi_j(g_k) \overset{df}{=} 1$ если $j \neq k$. единств. обр.

$\chi_j(g) = \chi_j(g_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{k_n}) \overset{df}{=} \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j} k_j\right)$ поэтому корректно.

$\chi_j(g_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{k_n}) = \chi_j(g_1^{k_1}) \ldots \chi_j(g_n^{k_n}) = \chi_j(g_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \chi_j(g_n)^{k_n} =$

$= \chi_j(g_j)^{k_j} = \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{d_j}\right)\right)^{k_j} = \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j} k_j\right)$

$g' = g_1^{m_1} \ldots g_n^{m_n}$, $\chi_j(g \cdot g') = \chi(g_1^{k_1+m_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{k_n+m_n}) = \ldots \chi_j(g) \cdot \chi_j(g')$

Докажем, $\hat{G} \overset{?}{=} \langle \chi_1 \rangle \times \ldots \times \langle \chi_n \rangle$

Покажем $|\chi_j| = d_j$ $\chi_j^{d_j}(g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n}) = \chi_j^{d_j}(g_j^{k_j}) = \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j} k_j\right)^{d_j} = 1$.

если $m < d_i$ $\chi_j^m(g_j) = \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j} \cdot m\right) \neq 1$.

$\langle \chi_1 \rangle \times \ldots \times \langle \chi_n \rangle \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_n} \simeq G$

Пусть $\chi \in \hat{G}$. ~~Р~~ Рассмотрим $\chi(g_j) = \xi_j \in \mathbb{C}$

$(\chi(g_j))^{d_j} = \chi(g_j) \cdot \ldots \cdot \chi(g_j) = \chi(g_j \cdot \ldots \cdot g_j) = \chi(g_j^{d_j}) = 1$.

$\Rightarrow \xi_j^{d_j} = 1 \underset{\text{ф-ла Муавра}}{\Rightarrow} \xi_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j} k_j\right)$

т. обр. для g_j $\chi(g_j) = \exp\left(\frac{2\pi}{d_j} k_j\right) \underset{\text{по опр. было}}{=} \chi_j^{k_j}(g_j)$.

Тогда $\chi = \chi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \chi_n^{k_n}$

1) т. обр. $\hat{G} = \langle \chi_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \chi_n \rangle$. Проверили.

2) $\langle \chi_j \rangle \cap \prod_{k \neq j} \langle \chi_k \rangle = 1 = \{\chi_e\}$

Пусть $\chi \in \langle \chi_j \rangle \cap \prod_{k \neq j} \langle \chi_k \rangle \Rightarrow \forall k \neq j$ $\chi(g_k) = 1$.
$\chi(g_j) = 1$.

$\Rightarrow \forall g \in G$ $\chi(g) = 1$ $\to \chi = \chi_e$. ■

Предложение 1 (соотношение ортогональности).

$\forall g \in G$ $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{если } g = 1. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

$\forall \chi \in \hat{G}$ $\sum_{g \in G} \hat{\chi}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{если } \chi = \chi_e \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Д-во: $\sum\limits_{\chi\in\hat G}\chi(1) = \sum\limits_{\chi\in\hat G} 1 = |G|$

$g \neq 1$ $\sum\limits_{\chi\in\hat G}\chi(g) \Rightarrow$ суЩ $\chi_0\in\hat G : \chi_0(g)\neq 1.$

$g = g_1^{k_1}\cdots g_n^{k_n}$ $\chi_m(g) = \chi_m(g_m^{k_m})\neq 1$

$\sum\limits_{\chi\in\hat G}\chi(g) = a \mid \cdot\, \chi_0(g) \Rightarrow \sum\limits_{\chi\in\hat G}\chi(g)\cdot\chi_0(g) = \sum\limits_{\chi\in\hat G}(\chi\cdot\chi_0)(g) =$

$= \sum\limits_{\chi\in\hat G}\chi(g) = a\,\chi_0(g)$

$a\,\chi_0(g) = a$ т.к. $\chi_0(g)\neq 0 \Rightarrow a = 0.$

$\chi\neq\chi_e \Rightarrow$ сущ. $g_0\in G : \chi(g)\neq 1.$

$\sum\limits_{g\in G}\chi(g)\chi(g_0) = \sum\limits_{g\in G}\chi(gg_0) = \sum\limits_{g\in G}\chi(g) \Rightarrow \sum\limits_{g\in G}\chi(g) = 0.$

Рассмотрим $G = \mathbb{Z}_m^*$ $|G| = \varphi(m)$

? $\chi\in\hat G$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ определим $\chi(k) = \begin{cases}\chi(k \bmod m), & \text{если } (k,m)=1\\ 0, & \text{если } (k,m)\neq 1.\end{cases}$

$\chi : \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

χ – характер по модулю m.

G_m – группа характеров по модулю m.

χ – характер по мод. $m \Leftrightarrow$ 1. $\forall k_1, k_2$, $\chi(k_1k_2) = \chi(k_1)\chi(k_2)$
2. $(k,m) = 1 \Leftrightarrow \chi(k)\neq 0.$
3. если $k_1\equiv k_2 \pmod m$, то $\chi(k_1) = \chi(k_2)$

„очевидно"

$k\in\mathbb{Z}$ $\sum\limits_{\chi\in G_m}\chi(k) = \begin{cases}\varphi(m), & \text{если } k\equiv 1 \pmod m\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

$L(z,\chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^z}$ L ряд характера χ.

<u>Теорема 2</u> Пусть $\chi\in G_m$

(1) $L(z,\chi)$ сх-ся абсолютно при $\mathrm{Re}\, z > 1$
(2) Если $\chi\neq\chi_e$, то $L(z,\chi)$ сх-ся равн-но на любом компакте из $\mathrm{Re}\, z > 0.$
(3) $L(z,\chi_e)$ допускает аналитическое продолжение на $\mathrm{Re}\, z > 0$ с единств. простым полюсом $z = 1.$

Д-во: $\forall n\in\mathbb{N}$ $|\chi(n)|\leq 1.$ (любой хар-р — корень из единицы некот. степени)

$\boxed{(1)}$ $\Rightarrow (1)$

$\boxed{(2)}$ Достаточно д-ть равн-ую сходимость при $\mathrm{Re}\, s \geq a > 0.$

Рассмотрим частичные суммы $s(x) = \sum\limits_{n\leq x}\chi(n)$

в силу свойств ортогон. $s(m) = 0.$

$s(2m) = 0$, $s(3m) = 0.$

$\forall x$ $|s(x)|\leq\varphi(m)$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S(n)-S(n-1)}{n^z} =$$

$$= \frac{S(N)}{N^z} - \frac{S(N-1)}{N^z} + \frac{S(N-1)}{(N-1)^z} - \frac{S(N-2)}{(N-1)^z} + \ldots =$$

$$= \frac{S(N)}{N^z} + \sum_{n=1}^{N-1} S(n)\left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}\right) = \frac{S(N)}{N^z} + \sum_{n=1}^{N-1} S(n)\int_n^{n+1} \frac{z}{x^{z+1}}\,dx =$$

[illegible] не влияет

$$= \frac{S(N)}{N^z} + \sum_{n=1}^{N-1} z \int_n^{n+1} \frac{S(x)}{x^{z+1}}\,dx$$

$$\left|\int_n^{n+1} \frac{S(x)}{x^{z+1}}\,dx\right| \le \varphi(m)\left|\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{z+1}}\right| \le \varphi(m)\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{a+1}} =$$

$$= \frac{\varphi(m)}{a}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a}\right)$$

Т.о. $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^z}\right| \le \frac{\varphi(m)}{N^a} + |z|\frac{\varphi(m)}{a}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a}\right) =$

$$= \frac{\varphi(m)}{N^a} + |z|\frac{\varphi(m)}{a}\left(1 - \frac{1}{N^a}\right) = |z|\frac{\varphi(m)}{a} + \underbrace{\frac{c}{N^a}}_{\substack{\to 0 \\ N\to\infty}}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-\chi_e(p)p^{-z})^{-1} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}} (1-p^{-z})^{-1} =$

$= \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-z})^{-1} = \zeta(z)$ – ф-ция Римана

$$\frac{\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-z})^{-1}}{\left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}(1-p^{-z})^{-1}\right)} = f(z)^{-1}$$ – аналитич. ф-ция.

$$L(z, \chi_e) = \zeta(z)\cdot f(z)$$

$\uparrow$ допускает аналит. прод. на $\mathrm{Re}\, z > 0$

(един. полюсом в $z = 1$

<u>Лемма 1</u>

Пусть $H \le \hat{G}_m$ — конечная.

определим $L(z,H) = \prod_{\chi\in H} L(z,\chi)$

// 17.1114
лекция 12

Тогда $L(z,H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ при $\mathrm{Re}\, z > 1$, причем $a_n \overset{\ge 0}{\in} \mathbb{Z}$

и, более того, если $n = k^{\varphi(m)}$, $(k,m)=1$, то $a_n \ge 1$.

Д-во: было $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^z}\right)\left(\sum \frac{\chi_2(n)}{n^z}\right) = \sum \frac{(\chi_1\circ\chi_2)(n)}{n^z}$, где свертка $(g\circ f)(n) = \sum_{d\mid n} g(d)\cdot f\left(\frac{n}{d}\right)$

$H = \langle\chi_1\rangle \times \langle\chi_2\rangle \times \ldots \times \langle\chi_r\rangle$

знаем код. [illegible] цикл. групп.

будем вести док-во индукцией по r

$r = 1$ т.о. $H = \langle\chi\rangle$, $|\chi| = |H| = h$.

? $L(z,\chi) = \sum \frac{\chi(n)}{n^z} = \prod_{p\in\mathbb{P},\, p\nmid m} (1-\chi(p)p^{-z})^{-1}$

$H = \{\chi_1, \chi^2, \dots, \chi^h\}$ $\quad \chi^h = \chi_e$.

$$L(z,H) = \prod_{k=1}^{h} \left(\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} (1 - \chi^k(p) p^{-z})^{-1} \right)$$

целое.

$$\chi^h(p) = 1 = (\chi(p))^h \Rightarrow \chi(p) = \exp\left(\frac{2\pi i}{h} \cdot a_p\right) = \xi_p.$$

может случится, что $\chi(p)^{\tilde h} = 1$, где $\tilde h < h$.

обозначим $d_p = (a_p, h)$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{2\pi i}{h} a_p\right)^{h/d_p} = 1$$ ξ_p — примитивный корень из 1

$x^n - 1$

$b = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right)$, $(n, k) = 1$

$x_1 = b, \dots, x_n = ?$

Рассмотрим.

$$\prod_{k=1}^{h} (x - \xi_p^k) = (x^{\frac{h}{d_p}} - 1)^{d_p}$$

теор. Безу. подставим — $\frac{p^z}{p^z}$

$$\prod_{k=1}^{h} \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} (1 - \chi^k(p) p^{-z})^{-1} = \prod_{k=1}^{h} \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} p^z (p^z - \xi_p^k)^{-1} =$$

$$= \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} p^{zh} \cdot \prod_{k=1}^{h} (p^z - \xi_p^k)^{-1} = \prod p^{zh} (p^{\frac{zh}{d_p}} - 1)^{-d_p} =$$

к арифмет. прогр. переходим.

$$= \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} (1 - p^{-\frac{zh}{d_p}})^{-d_p} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{-\frac{znh}{d_p}}\right)^{d_p}$$

число сочетаний.

Есть формула $\quad (1 + t + t^2 + \dots)^s = 1 + st + \binom{s+1}{2} t^2 + \binom{s+2}{3} t^3$

$$L(z, H) = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(1 + d_p p^{-zh/d_p} + \binom{d_p + 1}{2} p^{-\frac{zh}{d_p} 2} + \dots \right) =$$

$$= \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{p,k} p^{-kz} \right) =$$

$k = \frac{nh}{d_p}$, $\quad u_{p,k} = \begin{cases} \binom{d_p + k\frac{d_p}{h} - 1}{k\frac{d_p}{h}}, & \text{если } k \cdot d_p \vdots h \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

делится.

$n = k^{\varphi(m)}$, $(k, m) = 1$

так же будет индукция

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

? $a_n = u_{p_1 \varphi(m)} \cdots u_{p_s \varphi(m)} \geq 1$ $\quad$ пусть $k = p_1 \dots p_s$. $\quad \varphi(m) = |G_m|$

в разложение k входят $p \nmid m$. $\quad$ надо брать $p_1^{\varphi(m)} \dots p_s^{\varphi(m)}$

$\Rightarrow h \mid \varphi(m) \quad \Rightarrow u_{p,k} \neq 0$.

$\boxed{r-1 \to r}$

$\langle \chi_1\rangle \times \ldots \times \langle \chi_{r-1}\rangle = H_0$. $|H| = h$.

$\chi_r = \chi$ $|\chi| = t$, $|H_0| = h_0$.

$H = H_0 \times \{\chi\}$

$H_0 = \{\chi_1, \ldots, \chi_{h_0}\}$

$\langle \chi\rangle = \{\chi, \ldots, \chi^t\}$, $H = \{\chi_1\chi, \ldots, \chi_{h_0}\chi, \chi_1\chi^2, \ldots, \chi_{h_0}\chi^2, \ldots$
$\ldots, \chi_1\chi^t, \ldots, \chi_{h_0}\chi^t\}$

$$\left(\chi_1 \circ (\chi_2 \circ \chi_3)\right)(n) = \chi_1(n) \cdot \sum_{d|n} \chi_2(d)\chi_3\left(\frac{n}{d}\right) =$$

| дистрибутивн

$$= \chi_1\left(\frac{nd}{d}\right) \cdot \sum_{d|n} \chi_2(d)\chi_3\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= \sum_{d|n} \chi_1(d)\chi_2(d) \cdot \chi_1\left(\frac{n}{d}\right)\chi_3\left(\frac{n}{d}\right) = \left((\chi_1\chi_2) \circ (\chi_1\chi_3)\right)(n).$$

$$L(z,H) = \prod_{\chi \in H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \prod_{k=1}^{t} \prod_{m=1}^{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\chi_m\chi^k)(n)}{n^z} =$$

перемн.

$$= \prod_{k=1}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\chi_1\chi^k \circ \ldots \circ \chi_m\chi^k)(n)}{n^z} \underset{\text{дистриб.}}{=} \prod_{k=1}^{t} \sum \frac{\chi^k(\chi_1 \circ \ldots \circ \chi_m)(n)}{n^z} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\chi(\chi_1 \circ \ldots \circ \chi_m)) \circ (\chi^2(\chi_1 \circ \ldots \circ \chi_m)) \ldots (\chi^t(\chi_1 \circ \ldots \circ \chi_m))](n)}{n^z} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\chi \circ \ldots \circ \chi^t)(n)\,(\chi_1 \circ \ldots \circ \chi_m)(n)}{n^z} \;=$$

$$L(z, \langle\chi\rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\chi \circ \ldots \circ \chi^t)(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$$

$b_n \geq 0$
$b_n \in \mathbb{Z}$
и если $n = k^{\varphi(n)}$, то $b_n \geq 1$.

$$L(z, H_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\chi_1 \circ \ldots \circ \chi_m)(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{(b_n \cdot c_n)}^{=a_n}}{n^z};$$

$\blacksquare$

Смысл леммы L ряд Дирихле не обр-ся в ноль.

$L(1, \chi) \neq 0$ $\forall \chi \in G_m$. — хотели доказать.

Теорема 1 (Ландау — другой!)

Пусть ф-ия $F(z)$ аналитична при $\mathrm{Re}\, z > 0$ и предполож., что при $\mathrm{Re}\, z > 1$ $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$, где $a_n \geq 0$.
Также предположим, что $F^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_n (\ln n)^k}{n^z}$ при $\mathrm{Re}\, z > 1$.
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ сх-ся при $s \in (0,2)$.

Д-во: Рассмотрим ряд Тейлора для $F(x)$ в т. $x=2$.

по опр. $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(2)}{k!}(s-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_n (\ln n)^k}{n^2 k!}(s-2)^k =$

ряд сх-ся абс. однознак. $\Rightarrow$ меняем порядок суммир.

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (2-s)^k \frac{a_n(\ln n)^k}{n^2 k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2-s)\ln n)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} e^{\ln n (2-s)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} n^{(2-s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Рассмотрим $L(z, G_m) = \prod_{\chi \in G_m} L(z, \chi)$

если χ не главный, т.е. $\chi \neq \chi_e$, то $L(z,\chi)$ — аналитич. в обл. $\mathrm{Re}\, z > 0$ ф-ия.

если $\chi = \chi_e$, то $L(z,\chi)$ — аналитич. в обл. $\mathrm{Re}\, z > 0$ с един. полюсом $z=1$.

если $L(z,\chi)$ хотя бы для одной $\chi \in G_m$ обр-ся в нуль, то $L(z, G_m)$ — аналитич. ф-ия.

Следствие $\forall \chi \neq \chi_e$ $L(1,\chi) \neq 0$.

Д-во: Предположим противное, тогда $L(z, G_m)$ — аналитич. ф-ия в обл-ти $\mathrm{Re}\, z > 0$.

$L(z, G_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$, при $\mathrm{Re}\, z > 1$, $a_n \geq 0$. — сх-ся абс-но, можно почленно диф.

$\Rightarrow$ выполн. усл. теор. Ландау.

$\Rightarrow \forall s \in (0,2)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ сх-ся $\Rightarrow \exists M: \forall N \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \leq M$.

Воспольз. другой частью леммы. Оставим слагаемые вида $n = km+1$, $s = \frac{1}{\varphi(m)}$

$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \geq \sum_{k=1}^{T} \frac{a_n}{km+1} \geq \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{km} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{расход.}} \infty$ противоречие.

$(km+1)^{\varphi(m)} \leq N$

$k \leq \left[\frac{N^{\frac{1}{\varphi(m)}}}{m} - 1\right] \overset{\text{об.}}{=} T$. ∎

$\{a+km \mid k\in\mathbb{N},\ (a,m)=1\}$ сущ. беск. много простых чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сущ. беск. много простых чисел $p\equiv a \pmod m$

(Дирихле)

$L(z,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^z}$; Покажем $\frac{1}{L(z,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^z}$ (в $\operatorname{Re} z>1$) ф-ия Мебиуса

$|\mu(n)|\le 1$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^z}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\chi\circ(\chi\mu))(n)}{n^z}=$$

сх-ся абс.

$e(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((\chi\cdot I)\circ(\chi\mu))}{n^z}\overset{\text{свертка мультипл.}}{=}\sum\frac{(\chi\cdot(I\circ\mu))(n)}{n^z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\chi e)(n)}{n}=1.$$

22.11.14

Лекция 13

$$\ln(L(z,\chi))'=\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)}=\|\text{при } \operatorname{Re} z>1\|=$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\cdot\mu(n)}{n^z}\right)\cdot\left(\sum\frac{\chi(n)}{n^z}\ln n\right)=$$

почленно продифф.

ф-ия Мангольдта

$$=\sum\frac{(\chi\mu)\circ(\chi\cdot\ln)(n)}{n^z}=\sum\frac{\chi\cdot(\mu\circ\ln)(n)}{n^z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\chi\cdot\Lambda)(n)}{n^z}\ominus$$

мультип.

Ф-ия Мангольдта $\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p & \text{если } n=p^m\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$

$$\ominus\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi(p^k)\ln p}{p^{kz}}=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(p)\ln p}{p^z}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\chi(p)^k\ln p}{n^z}$$

покажем, что $\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\chi(p)^k\ln p}{n^z}$ $\ominus$ сх-ся абсолютно при $\operatorname{Re} z\ge\frac12+\varepsilon$. аналитич. ф-ция

для произв. ε.

$$\ominus\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln p\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\chi(p)^k}{p^{kz}}\right)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln p\left(\frac{\chi(p)^2}{p^{2z}}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\chi(p)}{p^z}\right)^k=$$

$$=\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln p\left(\frac{\chi(p)^2}{p^{2z}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^z}}\right)$$

модули рассмотрим

$$\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^z}}\le\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt2}}<C\ (=4)$$

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln p\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{\chi(p)^k}{p^{kz}}\right|\right)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln p\left|\frac{\chi(p)^2}{p^{2z}}\right|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\chi(p)}{p^z}\right|^k=$$

$$=\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln p\left|\frac{\chi(p)^2}{p^{2z}}\right|\left|\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^z}}\right|\le C\sum\frac{\ln p}{p^{1+2\varepsilon}}\le C_1.$$

($\frac{\ln p}{p}$ как $\frac{1}{p^\varepsilon}$ сх-ся)

т.е. $\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\chi(p)^k\ln p}{n^z}$ — аналитич.

$$\prod_{\chi\in G_m} \ln(L(z,\chi))' = \prod_{\chi\in G_m}\left(\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)}\right) \ ?$$

$$\sum_{\chi\in G_m}\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)} = \sum_{\chi\in G_m}\sum_{p\in P}\frac{\chi(p)\ln p}{p^z} + \overbrace{\sum_{\chi\in G_m}\sum_{p\in P}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\chi(p)^k\ln p}{p^{kz}}}^{R(z)} \ \Big| \ \chi(b)$$

a и m – взаимнопросты $\Rightarrow$ $\exists \chi$: $\chi(a)\neq 0$ $\exists b$: $ab\equiv 1 \pmod m$

$\chi(a\cdot b)=1$

Т.к. внешняя сумма конечна, имеем

$$\sum_{p\in P}\sum_{\chi\in G_m}\frac{\chi(p\cdot b)\ln p}{p^z} + R(z)\cdot\chi(b) = \sum_{p\in P}\frac{\ln p}{p^z}\left(\sum\chi(p\cdot b)\right) + R(z)\chi(b) =$$

из теоремы об ортог. $\sum\chi(p\cdot b) = \begin{cases}\varphi(m) & p\cdot b\equiv 1 \pmod m\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$

$$= \sum_{\substack{p\in P\\ p\equiv a \pmod m}}\frac{\varphi(m)\ln p}{p^z} + \underbrace{R(z)\,\chi(b)}_{\text{аналитич. при } \operatorname{Re} z\geq \frac12+\varepsilon} = \sum_{\chi\in G_m}\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)}.$$

тоже аналит, если кол-во p: $p\equiv a \pmod m$ конечно (при $\operatorname{Re} z\geq \frac12+\varepsilon$).

$$\chi(b) \ \Big| \ \ln(L(z,\chi_e))' + \underbrace{\sum_{\chi\in G_m\setminus\{\chi_e\}} \ln(L(z,\chi))'}_{\text{аналитич. при } \operatorname{Re} z\geq \frac12+\varepsilon}$$

полюс в т. $z=1$.

предположим, что $P(m)$? конечное число, получим противоречие.

опр. Пара (F,ν), где F – поле, а ν – отображение. $\nu: F\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ наз-ся <u>метризованным полем</u>, а ν – метрикой на поле F, если

(1) $\nu(x)\geq 0$ $\forall x\in F$ и $\nu(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

(2) $\forall x,y\in F$ $\nu(x+y)\leq\nu(x)+\nu(y)$

согласов. с умнож. (3) $\forall x,y\in F$ $\nu(x\cdot y)=\nu(x)\cdot\nu(y)$

<u>Предложение 1</u> (простейшие св-ва)

1) $\nu(-1)=1$ | $\nu(1)=1$

2) $\nu(x^n)=\nu(x)^n$ при $n\in\mathbb{Z}$

Д-во: $\nu(1)\cdot\nu(1)=\nu(1)$ $\nu(1)\neq 0 \Rightarrow \nu(1)=1$.

$\nu(-1)\cdot\nu(-1)=\nu(1)=1$ $\nu^2(-1)=1\Rightarrow\nu(-1)=1$.

$\nu(\frac1x)\cdot\nu(x)=\nu(1)=1 \Rightarrow \nu(\frac1x)=\nu(x)^{-1}$

(2) из св-ва 3

Метрика опр-деляет топологию (базу откр мн-в)

$B_\varepsilon(a) = \{x \in F \mid \nu(x-a) \le \varepsilon\}$ база топологии

отобр. непр-но, если прообраз открытого мн-ва — открытое.

Тихоновская топология?

∄ слож, умн, взятие противопол → непр-ые отобр-ие.

опр Есть топология ⇒ можем определить предел.

$\{x_n\}$ сх-ся к $a \in F$ в метрике ν

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (когда очевидна метрика)

$\{x_n\} \xrightarrow[(\nu)]{} a$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N \ \nu(x_n - a) < \varepsilon$.

Предложение 2

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$

если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ — члены, которые обр-ся в нуль, надо не рассматр.

сюда ≠ и

Д-во: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$\nu(x_n) = \nu(x_n - a + a) \le \overset{0}{\nu(x_n - a)} + \nu(a) \Rightarrow \{\nu(x_n)\}$ огр-на. A

$\{\nu(y_n)\}$ огр-на B

$\nu(x_n \cdot y_n - ab) = \nu\big((x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)\big) \le$

$\le \nu((x_n - a) y_n) + \nu((y_n - b) a) = \nu(x_n - a)\nu(y_n) + \nu(y_n - b)\nu(a) \le$

$\le B\,\underset{\downarrow 0}{\nu(x_n - a)} + \nu(a)\,\underset{\downarrow 0}{\nu(y_n - b)}$.

Для третьего нужно показать, что кол-во нулевых x_n огранич.

опр $(F,\nu_1) \sim (F,\nu_2)$ метрика ν_1 и ν_2 наз-ся экв-ными, если

$\{a_n\} \xrightarrow[(\nu_1)]{} a \Leftrightarrow \{a_n\} \xrightarrow[(\nu_2)]{} a$.

Лемма 1

~~$\nu_1 \sim \nu_2$~~ $\nu_1 \sim \nu_2$ тттт, когда $\nu_1(x) < 1 \Leftrightarrow \nu_2(x) < 1$.

Д-во: $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $x \in F$ таков, что $\nu_1(x) < 1 \Rightarrow$

$\nu_1(x)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\nu_1(x)^n = \nu_1(x^n) \Rightarrow x^n \xrightarrow[(\nu_1)]{} 0 \Rightarrow x \xrightarrow[(\nu_2)]{} 0 \Rightarrow \nu_2(x) < 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Если $x \in F$, $\nu_1(x) \geq 1$, то $\nu_2(x) \geq 1$.

Тогда $\forall x \in F \setminus \{0\}$ $\nu_1(x) = \nu_2(x) = 1$.

Если $\nu_1(x) > 1$, то $\nu_1(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\nu_1(x)} < 1$.

Поэтому можно считать, что $\nu_1(x) < 1$ для нек. $x \in F$

Рассмотрим $\{x_n\} \xrightarrow[(\nu_1)]{} a$

$\forall n \in \mathbb{N}$ пол. $\{x^m \cdot x_n\} \xrightarrow[(\nu_1)]{} x^m \cdot a$.

$\forall m \Rightarrow \exists N: \forall n > N \quad \nu_1(x^m x_n - x^m a) < 1$.

$\nu_2(x^m x_n - x^m \cdot a) < 1 \Rightarrow \nu_2(x^m)\, \nu_2(x_n - a) < 1$

// идея: $\underbrace{\nu_2(x)^m}_{a<1}$ для большого отриц. m $\nu_2(x_n - a) < \frac{1}{\nu_2(x^m)}$ – екс.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M: \forall m > M \quad \nu_2(x)^m < \varepsilon$, т.е. $\nu_2(x)^{-m} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Тогда $\nu_2(x^{-m})\, \nu_2(x_n - a) < 1 \Rightarrow \nu_2(x_n - a) < \varepsilon \quad \forall n > N$.

Пусть $F = \mathbb{Q}$ $\quad \nu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ – тривиальная норм.

$\nu_\alpha(x) = |x|^\alpha$, где $\alpha \in (0,1]$

// $|1+1|^\alpha \leq |1|^\alpha + |1|^\alpha = 2$.

$2^\alpha \leq 2 \Rightarrow \alpha \leq 1$

упр: д-ть, что это метрика $\longrightarrow$ $\nu_{p,\rho}(x) = \rho^{\nu_p(x)}$, где $\nu_p(x)$ опр-ся из рав-ва $x = p^{\nu_p(x)} \frac{a}{b}$, $(a \cdot b, p) = 1$.

$\nu_{p,\rho}(\frac{1}{p}) = \rho^{-1}$ $\quad$ $\rho \in (0,1)$

$\nu_{p,\rho}(p) = \rho$. $\quad$ p – простое.

<u>Лемма 2</u> 1) $\forall \alpha_1, \alpha_2$: $\nu_{\alpha_1} \sim \nu_{\alpha_2}$

2) $\forall \rho_1, \rho_2$ $\nu_{p,\rho_1} \sim \nu_{p,\rho_2}$

3) $\nu_\alpha \not\sim \nu_{p,\rho}$

4) $\nu_{p_1,\rho_1} \not\sim \nu_{p_2,\rho_2}$ если $p_1 \neq p_2$

Д-во: использовать критерий.

$\nu_{p,\rho_1}(x) < 1 \Rightarrow x = p^{\nu_p(x)} \frac{a}{b}$ и $\nu_p(x) > 0 \Rightarrow \nu_{p,\rho_1}(x) = \rho_2^{\nu_p(x)} < 1$.

$\not\sim$: найти нек-ко точки.

$\nu_p(x)$ наз-ся p-адической метрикой.

Других метрик на $\mathbb{Q}$ нет.

Теорема

Если $(\mathbb{Q}, \nu)$ — метрическ. поле, то $\nu = \nu_0$
либо $\nu = \nu_\alpha$
либо $\nu = \nu_{p,\rho}$.

Д-во: Если $\nu \neq \nu_0$, то $\exists x \neq 0 : \nu(x) \neq 1 \Rightarrow \nu(n) \neq 1$ для нек. $n \in \mathbb{N}$

Можем считать $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ либо $\nu(a) \neq 1$ либо $\nu(b) \neq 1$.
// $\nu(-x) = \nu(x)$

Два случая: (1) $\exists n \in \mathbb{N} : \nu(n) > 1$.
(2) $\forall n \in \mathbb{N} : \nu(n) \leq 1$.