

Geometria differenziale

Diego Conti

Università di Pisa
`diego.conti@unipi.it`

Cenni di motivazione

La geometria differenziale studia le varietà differenziali (*smooth manifolds*) e le strutture su di esse, in particolare, le metriche pseudo-riemanniane.

È di interesse per la fisica per vari motivi.

- Un sistema in cui le coordinate dello spazio delle fasi sono soggette a vincoli è descritto da una varietà (se i vincoli sono sufficientemente regolari).
- Lo spazio-tempo della relatività è una varietà pseudo-riemanniana, la cui curvatura riflette la presenza di massa.
- In teoria di gauge, l'oggetto di studio sono connessioni su un fibrato.
- Nelle teoria delle stringhe, lo spazio-tempo viene sostituito da varietà pseudo-riemanniane di dimensione superiore a 4, con dimensioni "interne" aggiuntive; spinori e campi di vettori giocano il ruolo di fermioni e bosoni.

Il corso non farà cenno a queste applicazioni, ma il linguaggio della geometria differenziale è importante per comprenderle.

Programma

Geometria
differenziale

- Cenni di topologia generale.
- Varietà lisce. Spazio tangente. Differenziale di una funzione. Sottovarietà. Fibrati vettoriali. Fibrato tangente e cotangente. Tensori. Fibrati tensoriali. Sezioni di fibrati e campi vettoriali. Parentesi di Lie. Orientabilità. Forme differenziali. Differenziale esterno. Integrazione. Teorema di Stokes.
- Varietà pseudo-riemanniane. Connessioni su fibrati. Derivata covariante lungo una curva. Trasporto parallelo. Connessione di Levi-Civita. Geodetiche. Mappa esponenziale. Intorni normali. Lunghezza di una curva. Le geodetiche sono le curve localmente minimizzanti. Lemma di Gauss. Teorema di Hopf-Rinow. Curvature Riemanniana, sezionale e di Ricci. Cenni su gruppi di Lie e algebre di Lie; metriche invarianti.

Informazioni pratiche

- Come canale di comunicazione con gli studenti userò Teams.
- I testi di riferimento sono:
 - Gallot, Hulin, Lafontaine. Riemannian geometry. Springer-Verlag.
 - O'Neill, Barrett. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press.
- Pubblicherò delle note su teams, tipicamente **dopo** la lezione.
- L'esame è orale.