"METODI MATEMATICI 2" (175BB)
Corso di LT in Fisica, III anno, I semestre, 6 CFU (circa 50 ore)
Docente: **E. Meggiolaro**

Scopo della prima parte del corso è quella di fornire una conoscenza dettagliata dei fondamenti della "**teoria delle funzioni di una variabile complessa**" e delle sue applicazioni al calcolo di integrali definiti e a numerosi problemi di potenziale in due dimensioni in fisica.

Nella seconda parte del corso tali tecniche verranno utilizzate per illustrare le principali proprietà della cosiddetta "**funzione di Green di un sistema lineare**", una nozione di fondamentale importanza con svariate applicazioni in molti campi della fisica.

Contestualmente, verranno anche esposti i fondamenti della cosiddetta "**teoria delle distribuzioni**" (in particolar modo delle "*distribuzioni temperate*" e delle loro trasformate di Fourier), mettendo così su basi matematicamente rigorose la nozione della famosa "**delta di Dirac**".

Articolo apparso su "le Scienze" (Luglio 2023):

FISICA QUANTISTICA

Universo immaginario

I numeri complessi sono una componente inevitabile della teoria quantistica standard

di Marc-Olivier Renou, Antonio Acín e Miguel Navascués

$i^2 = -1$

$\sqrt{-4}$

$i^4 = 1$

Illustrazione di Andrea Ucini

Programma di massima:

A. FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA:

Nozione di funzione di una variabile complessa: continuità, punti di diramazione e tagli.
Derivazione di una funzione di una variabile complessa: definizione e condizioni di Cauchy-Riemann.
Definizione e proprietà delle cosiddette "*funzioni analitiche*".
Integrale di una funzione rispetto ad una variabile complessa: proprietà fondamentali e "*teoremi di Cauchy*".
La formula dell'integrale di Cauchy per una funzione analitica e alcune sue conseguenze.
Integrali dipendenti da un parametro e derivata di ordine qualsiasi di una funzione analitica: "*teorema di Morera*" e "*teorema di Liouville*".
Serie uniformemente convergenti di funzioni di una variabile complessa: proprietà generali e "*teorema di Weierstrass*".
Serie di potenze di una variabile complessa e serie di Taylor.
Gli zeri di una funzione analitica e il "*teorema di unicità*".
Il prolungamento analitico dall'asse reale al piano complesso di alcune funzioni elementari. La nozione di "*superficie di Riemann*".
Serie di Laurent e classificazione dei punti singolari isolati di una funzione analitica.
Residuo di una funzione analitica in un punto singolare isolato: il "*teorema fondamentale della teoria dei residui*".
Calcolo degli integrali definiti mediante i residui: il "*lemma di Jordan*".
La relazione fra funzioni analitiche ed armoniche e le cosiddette "*trasformazioni conformi*": alcune applicazioni ai problemi di potenziale.

B. FUNZIONI DI GREEN ED ELEMENTI DI TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI:

Definizione e proprietà della cosiddetta "*funzione di Green*" (per sistemi lineari e indipendenti dal tempo): l'analisi in frequenza e la "*legge di dispersione*".
Proprietà della funzione di Green nel piano complesso del dominio delle frequenze per sistemi causali: le "*trasformate di Hilbert*" e il "*teorema di Titchmarsh*".
L'esempio fisico della suscettività elettrica di un mezzo dielettrico: le "*relazioni di dispersione*" di Kramers e Kroenig.
Definizione generale di "*distribuzione*": le "*distribuzioni a supporto compatto*" (E'), le "*distribuzioni temperate*" (S') e le "*distribuzioni di Schwartz*" (D').
Vari esempi di distribuzioni, fra cui la "*delta di Dirac*".
La "*convergenza debole*" di una successione di distribuzioni: esempi di successioni di distribuzioni convergenti alla delta di Dirac.
Definizione della derivata e della trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.
La distribuzione "*parte principale*" $[P(1/x)]$.
Prodotto e convoluzione fra distribuzioni.
Proprietà e esempi di applicazioni delle distribuzioni.
La funzione di Green per il problema del potenziale coulombiano generato da una data distribuzione di cariche.
Esempi di funzioni di Green per problemi con condizioni al contorno assegnate.
Le funzioni di Green del campo elettromagnetico e la derivazione dei cosiddetti "*potenziali ritardati*".
Osservazioni sulla "*trasformata di Laplace*": la sua relazione con la trasformata di Fourier e il suo utilizzo per lo studio di sistemi lineari e indipendenti dal tempo.

Prerequisiti/Propedeuticità e frequenza:

Si assume che lo studente che segue questo corso abbia già seguito il corso di “*Metodi Matematici 1*” (oltre, ovviamente, a tutti i corsi di matematica del biennio) e anche il corso di “*Fisica 2*”.
Per poter sostenere l’esame è necessario aver prima superato e verbalizzato l’esame del corso di “*Metodi Matematici 1*”.
Non si richiede obbligo di frequenza, ma quest’ultima è, comunque, altamente consigliata.

Modalità dell’esame:

L’esame consisterà in una **prova scritta** (durante la quale verrà richiesto di risolvere tipicamente due problemi, uno sulla prima parte del corso e un altro sulla seconda parte) e (nel caso di superamento con esito positivo) in una **prova orale (opzionale)**.

Bibliografia consigliata e materiale didattico:

1) G. Cicogna, "*Metodi matematici della Fisica*" (Second Edition, Ed. Springer, 2015): i capitoli 3, 4 e 5 coprono la quasi totalità degli argomenti del corso.

2) G. Cicogna, "*Exercises and Problems in Mathematical Methods of Physics*" (Second Edition, Ed. Springer, 2020).

3) A.G. Sveshnikov & A.N. Tikhonov, "*The theory of functions of a complex variable*" (Mir Publishers, 1982): contiene una trattazione approfondita degli argomenti della prima parte del corso.

4) J.D. Jackson, "*Elettrodinamica classica*" (Ed. Zanichelli, 2001): contiene una trattazione approfondita degli esempi fisici discussi durante il corso.

Nella **pagina web del corso** sono inoltre disponibili gli appunti delle lezioni e i testi delle prove d'esame (alcuni con soluzione).