

三門問題

你參加一項電視遊戲節目，這個節目提供的獎品是一部汽車。節目主持人先給你看三扇門，說其中一扇門裡面是一部汽車，另外兩扇門裡面是山羊。他要你挑選一扇門。你選了，但是門沒打開。主持人打開你未選的兩扇門中的一扇，裡面是一頭山羊（因為他知道門後面是甚麼），然後他說在那扇門打開之前你還有最後一次機會可以改變主意，你可以得到一部汽車，否則就是一頭山羊。這時他問你要不要改變主意換另一扇沒有大開的門。請問你該怎麼辦？

瑪麗蓮回答說，你應該改變主意，換選最後一扇門，因為選中汽車的機率是三分之二。

但是你如果憑直覺，你會以為機率是一半一半，因為你會認為門後有汽車的機率是百分之五十。

儘管瑪麗蓮非常審慎的加以解說，許多人還是投書到雜誌社說她錯了。她接到的投書中有百分之九十二說她是錯的，其中不乏許多數學家和科學家。他們是這樣說的：

本人對一般大眾缺乏數學理解力深表關切，但坦承你的錯誤以正視聽。

喬治梅森大學 羅伯·沙克斯博士

這個國家的數學文盲夠多了，我們不需要世界智商最高的人來廣為宣傳。丟臉死了！

佛羅里達大學 史考特·史密斯博士

至少有三位數學家出面糾正了，妳居然還不能正視妳的錯誤，真令人震驚。

狄金森州立大學 肯特·福特

相信你一定會接到許多高中生和大學生的投書, 奉勸妳保留幾個地址, 或許將來還能在妳的專欄中派上用場。

喬治亞州立大學 W·羅伯·史密斯博士

妳大錯特錯.....要多少憤怒的數學家才能使妳改變心意?

喬治城大學 E·雷·玻伯博士

如果連這些博士都錯了, 那麼這個國家的麻煩就大了。

美國陸軍研究中心 艾瑞佛E·哈曼博士

然而瑪麗蓮是對的。如果你改變主意, 你有三分之二的機會可以得到汽車。假如你維持原議, 你得到汽車的機會只有三分之一。

〈附錄〉

Car location:	Host opens:	Total probability:	Stay:	Switch:
$\frac{1}{3}$ Door 1	$\frac{1}{2}$ Door 2	$\frac{1}{6}$	Car	Goat
	$\frac{1}{2}$ Door 3	$\frac{1}{6}$	Car	Goat
$\frac{1}{3}$ Door 2	1 Door 3	$\frac{1}{3}$	Goat	Car
$\frac{1}{3}$ Door 3	1 Door 2	$\frac{1}{3}$	Goat	Car

有三種可能的情況, 全部都有相等的可能性 ($\frac{1}{3}$):

1. 參賽者挑汽車, 主持人挑兩頭羊的任何一頭。轉換將失敗。
2. 參賽者挑 A 羊, 主持人挑 B 羊。轉換將贏得汽車。
3. 參賽者挑 B 羊, 主持人挑 A 羊。轉換將贏得汽車。

問題是: 關於第一種可能性的表述可以分成兩種可能:

1. 參賽者挑汽車, 主持人挑 A 羊。轉換將失敗。

2. 參賽者挑汽車, 主持人挑 B 羊。轉換將失敗。

在後兩種情況, 參賽者可以透過轉換選擇而贏得汽車。第一種情況是唯一一種參賽者透過保持原來選擇而贏的情況。因為三種情況中有兩種是透過轉換選擇而贏的, 所以透過轉換選擇而贏的機率是 $\frac{2}{3}$ 。

爲了說服讀者, 她請大家想像有 1,000,000 扇門, 她說:

你選擇 1 號門, 而主持人知道門後有什麼, 他總是避開有獎的那扇門, 除了 777,777 號門外, 把別的門都打開了。這時你會毫不猶豫地換到另一扇門, 是吧?」

其實, 無需任何機率法則的運算, 只要反過來想, 如果你選擇換門, 那麼一開始選到山羊才會贏, 所以贏的機率是 $\frac{2}{3}$; 如果選擇不換門, 那麼一開始選中新車才會贏, 所以贏的機率是 $\frac{1}{3}$ 。