NUMERICKÉ METODY 2
CVIČENÍ 2

Metoda konečných diferencí (metoda sítí)

Řešená úloha:

$$-\left(k(x)\, u'(x)\right)' = f(x) \qquad \forall x \in (0, L)$$

+ okrajové podmínky,
k, f konstantní

$$(D) \begin{cases} -k\, u''(x) = f & \forall x \in (0, L) \\ u(0) = U & \\ -k\, u'(L) = T & \end{cases}$$

Taylor:

$$u(x+h) \doteq u(x) + u'(x) \cdot h + \frac{1}{2} u''(x) h^2$$

$$u(x-h) \doteq u(x) - u'(x) \cdot h + \frac{1}{2} u''(x) h^2$$

$$+ \quad u(x-h) + u(x+h) \doteq 2u(x) + u''(x) h^2$$

$$u''(x) \doteq \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}$$

→ síť: n intervalů délky h $(L = n \cdot h)$
$(n+1$ bodů $x_i)$

→ neznámé: n neznámých $u_i = u(x_i)$

pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$: vnitřní body

$$-k\,u''(x) = f$$

$$-k \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f$$

$$\underbrace{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = -\frac{f \cdot h^2}{k}}_{n-1 \text{ rovnic}}$$

1. rovnice upravím: $-2u_1 + u_2 = -\frac{f h^2}{k} - U$

D.o.p.

elyjvá n-tá rovnice (N.o.p)

$$-k\,u'(L) = T$$

$$u_{n-1} \doteq u_n - h \cdot u'(L)$$

$$u'(L) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h}$$

aproximace pomocí ZPĚTNÉ diference

$$-k\,\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = T$$

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{Th}{k}$$

$$\boxed{u_{n-1} - u_n = \frac{Th}{k}}$$

Jiný způsob zohlednění N. o. p.:

- uvažujme stejnou rovnici i pro poslední bod x_n

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = -\frac{f \cdot h^2}{k} \qquad (*)$$

- aproximujeme derivaci v bodě x_n pomocí funkční hodnoty v x_n a ve virtuálním bodě x_{n+1}

$$u'(L) = u'(x_n) \doteq \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h}$$

aproximace pomocí DOPŘEDNÉ diference

- dosadíme do N. o. p.:

$$-k\, u'(L) = T$$

$$-k\, \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = T$$

- vyjádříme u_{n+1} a dosadíme do $*$

$$u_{n+1} = \frac{-Th}{k} + u_n$$

$$u_{n-1} - 2u_n + \frac{-Th}{k} + u_n = -\frac{f \cdot h^2}{k}$$

- upravíme (převedeme neznámé doleva, zbytek doprava) a dostaneme tak poslední rovnici soustavy

$$u_{n-1} - u_n = -\frac{f h^2}{k} + \frac{Th}{k}$$