CVIČENÍ 7 — 23.3.2021

# Metoda konečných prvků – pokračování

## Z minulé hodiny:

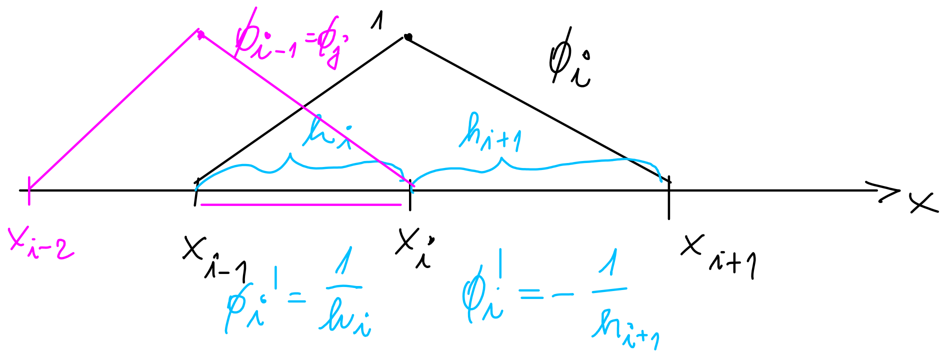
$$(\tilde V)\ \begin{cases} \text{Hledáme } \tilde u \in \tilde U_D : \\ a(\tilde u, \phi_i) = b(\phi_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

$$u(x) \approx \tilde u(x) = U_0 \phi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j(x)$$

↳ n neznámých

$$a\left(U_0 \phi_0 + \sum u_j \phi_j, \phi_i\right) = b(\phi_i)$$

$$\sum a(\phi_j, \phi_i) = \underbrace{-U_0\, a(\phi_0, \phi_i)}_{-U_0 \,\cdot\, \text{1. sloupec rozšířené matice soustavy}} + b(\phi_i)$$




rozšířená matice soustavy

→ soustava $A u = b$

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_\Omega k\, \phi_j' \phi_i' \, dx$$

$x_i$ $x_{i+1}$

① $i = j$ :

$$A_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} k\, \phi_j' \phi_i' \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k\, \phi_j' \phi_i' \, dx =$$

$$= \int_{E_i} k \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 dx + \int_{E_{i+1}} k \left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right)^2 dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h_i^2} \int_{E_i} k \, dx}_{\text{PŘÍSPĚVEK } E_i} + \underbrace{\frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{E_{i+1}} k \, dx}_{\text{PŘÍSPĚVEK } E_{i+1}} = k_i \frac{1}{h_i} + k_{i+1} \frac{1}{h_{i+1}}$$

PRO $k$ KONSTANTNÍ NA ELEMENTU

② $j = i - 1$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} k\, \phi_i' \, \phi_j' \, dx = \int_{E_i} k \frac{1}{h_i} \left(-\frac{1}{h_i}\right) dx = \underbrace{-\frac{1}{h_i^2} \int_{E_i} k \, dx}_{\text{PŘÍSPĚVEK } E_i} =$$

$$= -k_i \cdot \frac{1}{h_i}$$

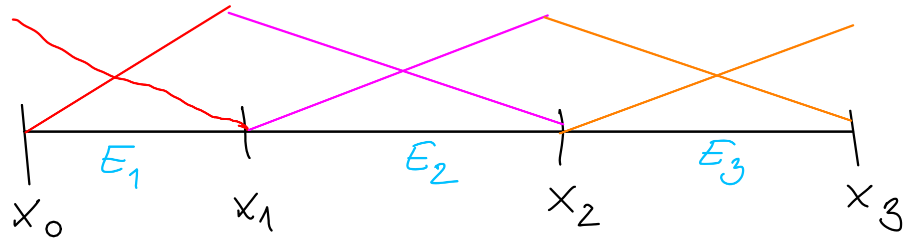
PRO $k$ KONSTANTNÍ NA ELEMENTU

③ $j = i + 1$ $\Rightarrow$ analogicky $A_{ij} = \underbrace{-\frac{1}{h_j^2} \int_{E_j = E_{i+1}} k \, dx}_{\text{PŘÍSPĚVEK } E_j} = -k_j \cdot \frac{1}{h_j}$

④ $|i - j| > 1$ $\phi_i$ a $\phi_j$ nemají žádný společný support

$$A_{ij} = 0$$

$\longrightarrow$ řídká matice




$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[ \begin{array}{cccc} E_1 & E_1 & & \\ E_1 & E_1 | E_2 & E_2 & \\ & E_2 & E_2 | E_3 & E_3 \\ & & E_3 & E_3 \end{array} \right] \end{array}$$

lokální matice $A_{E_i} = \begin{bmatrix} \oplus \, \frac{k_i}{h_i^2} \int_{E_i} k \, dx & \ominus \\ \ominus & \oplus \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{h_i^2} \int_{E_i} k \, dx \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k_i}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

k konstantní na $E_i$

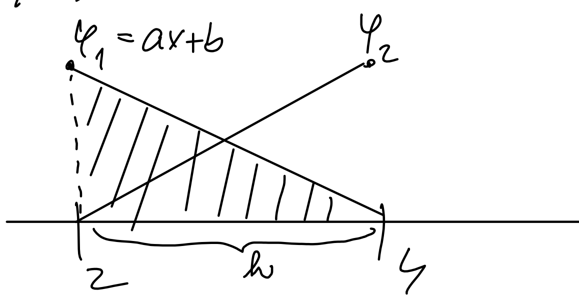
KONKRÉTNÍ ÚLOHA

$$(7) \begin{cases} -\left[(x^2+1) \cdot u'\right]' + 3u' = x & \text{v } \Omega = (0, L) \\ u(0) = 4 & \\ u(L) = 5 & \end{cases}$$

$$\underbrace{\int_0^L (x^2+1) u' v' \, dx + \int_0^L 3 u' v \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^L x v \, dx}_{b(v)}$$

$\Rightarrow$ určete lokální matici pro $E = (2, 4)$

$$A_E \begin{bmatrix} a_E(\varphi_1, \varphi_1) & a_E(\varphi_2, \varphi_1) \\ a_E(\varphi_1, \varphi_2) & a_E(\varphi_2, \varphi_2) \end{bmatrix}$$



$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

$$a_E(\varphi_1, \varphi_1) = \int_2^4 (x^2+1)\, \overbrace{\varphi_1' \varphi_1'}^{\frac{1}{h^2}}\, dx + \int_2^4 3 \cdot \overset{-\frac{1}{h}}{\varphi_1'} \cdot \varphi_1 =$$
$$= \frac{1}{h^2}\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_2^4 - \frac{3}{h} \underbrace{\int_2^4 \varphi_1\, dx}_{=1} = \text{dosadit}$$

$$a_E(\varphi_1, \varphi_2) = \int_2^4 (x^2+1)\,dx \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + \int_2^4 3 \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_2 = \dots$$

$$a_E(\varphi_2, \varphi_1) = \text{———} \,//\, \text{———} + \int_2^4 3 \cdot \varphi_2' \cdot \varphi_1 = \dots$$

$$a_E(\varphi_2, \varphi_2) = \dots$$

pravá strana – sestavíme z lokálních $b_{E_i}$

$\Rightarrow$ zde pro $E = (2,4)$

$$b_E(\varphi_1) = \int_E f \cdot \varphi_1\, dx = \int_E x \cdot \varphi_1\, dx$$

$$b_E = \begin{bmatrix} b_E(\varphi_1) \\ b_E(\varphi_2) \end{bmatrix} \qquad b_E(\varphi_1) = \int_2^4 x\, \varphi_1\, dx = \int_2^4 x\left(-\frac{x}{2} + 2\right) = \dots$$
$$b_E(\varphi_2) = \int_2^4 x\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \dots$$

$\Rightarrow$ příspěvek elementu $E = (2,4)$ do matice $A$
a pravé strany $b$

$\Rightarrow$ umístíme na správné pozice (uzly $x_i = 2$, $x_{i+1} = 4$)
(tj. přičteme)

PRO KONSTANTNÍ FUNKCI $f$ NA ELEMENTU $E_i$:

$$b_{E_i}(\varphi_i) = f_i \int_{E_i} \varphi_i\, dx = f_i \cdot \frac{h_i}{2} = b_{E_{i-1}}(\varphi_i)$$

$$\longrightarrow \quad b_{E_i} = \frac{1}{2} f_i h_i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(viz implementace v Matlabu)}$$