NUMERICKÉ METODY 2
CVIČENÍ 1

Osnova:
- náplň předmětu (cv.)
- programovací prostředí
- průběh cvičení
- materiály ke cvičení
- získání zápočtu

- náplň předmětu
  1d a 2d DR numericky (MKP) (FEM)
  - analyticky 1d
  - metoda sítí 1d (MKD) (FDM)

  } cv.

  - MKP 1d + porovnávání variačních formulací
  - 2d úlohy
  - MKP 2d

  } PŘ. i CV.

- programovací prostředí: Octave + Jupyter

- průběh cvičení
  - zadání jednoduchého úkolu + čas na samostatné řešení + diskuze + někdo promítne řešení (a tak dokola)

- materiály ke cvičení – odkaz na repozitář na LMS

- získání zápočtu – 3 úkoly v průběhu semestru po 10 bodech, odevzdání např. ve formě Jupyter notebooků (tj: kód + komentář + okomentované experimenty)

Analytické řešení

① Difúze, všechny vstupní funkce konstantní

$$(D)\begin{cases} -k\,u''(x) = f & x\in(0,L) \\ u(0) = U_0 \\ u(L) = U_L \end{cases}$$

$$u(0) = C_2 = U_0$$

$$u(L) = -\frac{fL^2}{2k} + C_1 L + U_0 = U_L$$

$$C_1 = \frac{fL}{2k} + \frac{U_L - U_0}{L}$$

$$u''(x) = -\frac{f}{k}$$

$$u'(x) = -\frac{f}{k}x + C_1$$

$$u(x) = -\frac{f}{2k}x^2 + \underline{C_1}x + \underline{C_2}$$

②

$$(D)\begin{cases} -k\,u''(x) = f & x\in(0,L) \\ u(0) = U \\ -k\,u'(L) = T \end{cases}$$

$$C_2 = U$$

$$-k\,u'(L) = -k\left(-\frac{fL}{k} + C_1\right) = fL - C_1 k = T$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{fL - T}{k}$$

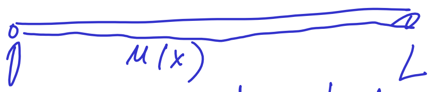
③ Difúzní úloha + materiálové rozhraní

$$(D)\begin{cases} -k_1 u_1''(x) = f & x\in(0,M) \\ -k_2 u_2''(x) = f & x\in(M,L) \\ \circ\ u_1(0) = U \\ \circ\ -k_2 u_2'(x) = T \\ \circ\ u_1(M) = u_2(M) \\ \circ\ -k_1 u_1'(x) = -k_2 u_2'(x) \end{cases}$$

$$u_1(x) = \frac{-f}{2k_1}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$u_2(x) = \frac{-f}{2k_2}x^2 + D_1 x + D_2$$

4 Úloha s reaktivním členem



+ vliv teploty okolí $\hat{U}$

$$-k u''(x) + k_0 u(x) = g \qquad x \in (0, L)$$

difúze: $-k u''(x) = f$

+ vliv $\hat{U}$: $-k u''(x) = f + k_0(\hat{U} - u(x))$

$$\rightarrow (D) \begin{cases} -k u''(x) + k_0 u(x) = \underbrace{f + k_0 \hat{U}}_{g}, & x \in (0, L) \\ u(0) = U_0 \\ u(L) = U_L \end{cases}$$

$$u_h''(x) - \frac{k_0}{k} u_h(x) = 0 \qquad \text{(homogenní)}$$

$$\lambda^2 - \frac{k_0}{k} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k_0}{k}} = \pm K$$

$$u_h(x) = C_1 \exp(-Kx) + C_2 \exp(Kx)$$

$$u(x) = u_h(x) + \frac{g}{k_0}$$

$$u_p(x) = \frac{g}{k_0}$$

$$u(0) = C_1 + C_2 + \frac{g}{k_0} = U_0 \Rightarrow C_1 = -C_2 - \frac{g}{k_0} + U_0$$

$$u(L) = C_1 \exp(-KL) + C_2 \exp(KL) + \frac{g}{k_0} = U_L$$

$$C_1 = \dots \qquad C_2 = \dots$$

(5)

$$(D)\begin{cases} -k u''(x) + q_0 u(x) = g & x \in (0,L) \\ u(0) = U \\ -k u'(L) = T \end{cases}$$

$$u'(x) = -C_1 k \exp(-kx) + C_2 k \exp(kx)$$
$$u'(L) = -C_1 k \exp(-kL) + C_2 k \exp(kL) = -\frac{T}{k}$$

$$u(0) = C_1 + C_2 + \frac{g}{q_0} = U \Rightarrow C_2 = U - C_1 - \frac{g}{q_0}$$

$$-C_1 k \exp(-kL) + \left(U - C_1 - \frac{g}{q_0}\right) k \exp(kL) = -\frac{T}{k}$$

$$C_1 = \frac{\frac{T}{k} + \left(U - \frac{g}{q_0}\right) k \exp(kL)}{k\left(\exp(-kL) + \exp(kL)\right)}$$

(6) Úloha s konvektivním členem

$$(D)\begin{cases} -k u''(x) + D \cdot u'(x) = f & x \in (0,L) \\ u(0) = U_0 \\ u(L) = U_L \end{cases}$$

(7)

$$(D)\begin{cases} -k u''(x) + D \cdot u'(x) = f & x \in (0,L) \\ u(0) = U \\ -k u'(L) = T \end{cases}$$

$\longrightarrow$ opět rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty