CVIČENÍ 12 — 27.4.2021

2d MKP – řešení úloh

- s anizotropním materiálem
  $$-\mathrm{div}(K\nabla u) = f \qquad (K: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2})$$
  $\Omega = (0,L_1)\times(0,L_2)$
  $A_T = B^T K B \cdot |T|$
- s reaktivním členem
  $$-\mathrm{div}(k\nabla u) + k_0 u = f$$
- s konvektivním členem $\quad (k, k_0, q_1, q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$
  $$-\mathrm{div}(k\nabla u) + q_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f$$
  (zadána oblast + okrajové podmínky)

Úloha s reaktivním členem

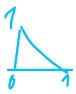
variační formulace

$$\underbrace{\int_\Omega K \nabla u \nabla v \, dx + \overbrace{\int_\Omega k_0 u v \, dx}^{\text{reaktivní člen}}}_{a(u,v)} = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \hat{T} v \, ds \qquad \forall v \in V$$

technika referenčního prvku (shrnutí)

$$x = F(\hat{x}) = x^{(1)} + DF\hat{x} \qquad x = (x_1, x_2)$$

$\hat{x}$ … bod referenčního prvku



x … bod obecného prvku

$$\hat{\varphi}_i = \varphi_i \circ F$$

$$\hat{\varphi}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \varphi_i(\underbrace{F_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}_{x_1}, \underbrace{F_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}_{x_2})$$

$$A_{ij} = \underbrace{\sum_T \int_T k(x) \nabla \varphi_j(x) \nabla \varphi_i(x)\, dx}_{\text{rozšířená matice „tuhosti"}} + \underbrace{\sum_T \int_T k_0(x)\, \varphi_j(x) \varphi_i(x)\, dx}_{M_{ij}}$$

M_{ij} … rozšířená matice „hmotnosti"

Označme $m_{ij,T} = \int_T k_0(x)\, \varphi_j(x)\, \varphi_i(x)\, dx$ … prvek lokální matice „hmotnosti"

pro $k_0(x)$ konstantní: $m_{ij,T} = k_0 \int_T \varphi_j(x)\, \varphi_i(x)\, dx$

$$\hat{m}_{ij,\hat{T}} \text{ (na referenčním prvku)} = k_0 \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_j(\hat{x})\, \hat{\varphi}_i(\hat{x})\, d\hat{x} = k_0 \int_{\hat{T}} \varphi_j(F(\hat{x}))\, \varphi_i(F(\hat{x}))\, d\hat{x}$$

Vyjádření $\overbrace{M_{ij} \text{ pomocí } \hat{M}_{ij}}^{\text{resp. } m_{ij,T} \text{ pomocí } \hat{m}_{ij,\hat{T}}}$ je snadné:
(substituce ve dvojném integrálu)

$$m_{ij,T} = k_0 \int_{T = F(\hat{T})} \varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \begin{bmatrix} \text{SUBSTITUCE} \\ x = F(\hat{x}) \\ dx = |DF|\,d\hat{x} \end{bmatrix} = k_0 \int_{\hat{T}} \overbrace{\varphi_j(F(\hat{x}))}^{\hat{\varphi}_j(\hat{x})}\, \overbrace{\varphi_i(F(\hat{x}))}^{\hat{\varphi}_i(\hat{x})}\, \underbrace{|DF|}_{2\cdot|T|}\, d\hat{x}$$

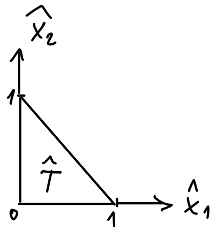
(z minula $|DF| = 2|T|$)

$$= 2|T|\, \underbrace{k_0 \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_j(\hat{x})\,\hat{\varphi}_i(\hat{x})\,d\hat{x}}_{\hat{m}_{ij,\hat{T}}}$$

$\Longrightarrow$ lokální matice „hmotnosti" pro T: $M_T = 2|T| \cdot \underbrace{M_{\hat{T}}}_{\text{1 konkrétní matice, snadno určíme}}$

$$M_{\hat{T}} = k_0 \cdot \begin{bmatrix} \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1 & sym & sym \\ \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2 & \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2 & sym \\ \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_3 & \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_2 \hat{\varphi}_3 & \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_3 \hat{\varphi}_3 \end{bmatrix} = k_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{24}$$

dosadíme
$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$$
$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}) = \hat{x}_1$$
$$\hat{\varphi}_3(\hat{x}) = \hat{x}_2$$



$$\int_{\hat{T}} \ldots\, d\hat{x} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\hat{x}_1} \ldots\, d\hat{x}_2 \right) d\hat{x}_1$$