Řešení 1d Dirichletovy okrajové úlohy pomocí metody konečných prvků

SD

7. února 2021

Úloha 1. Uvažujme Dirichletovu okrajovou úlohu

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{rcll} -\left(k\left(x\right)\cdot u'\left(x\right)\right)' & = & 1 & \text{v } \Omega=(0,1)\\ u\left(0\right) & = & c & \\ u\left(1\right) & = & d & \end{array}\right. ,$$

kde $k\in L^{\infty}\left(\Omega\right)$, $k\left(x\right)\geq k_0>0\ \forall x\in\Omega$.

1 Variační formulace

Nejprve odvodíme variační formulaci. Uvažujme prostor $U=H^1\left(\Omega\right)$, viz [1, Definice 3.15].

Pro všechny testovací funkce $v\in V=\left\{w\in U: w\left(0\right)=w\left(1\right)=0\right\}$ platí:

$$\underbrace{\int_0^1 -\left(k\left(x\right)\cdot u'\left(x\right)\right)'\cdot v\left(x\right)\mathrm{d}x}_{\downarrow\ \text{per partes}\ \uparrow} = \int_0^1 1\cdot v\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\overbrace{\int_0^1 k\left(x\right)\cdot u'\left(x\right)\cdot v'\left(x\right)\mathrm{d}x-\left[k\left(x\right)\cdot u'\left(x\right)\cdot v\left(x\right)\right]_0^1} = \int_0^1 v\left(x\right)\mathrm{d}x$$

Jelikož $v\in V$, platí $v\left(0\right)=v\left(1\right)=0$.

$$\underbrace{\int_0^1 k\left(x\right)\cdot u'\left(x\right)\cdot v'\left(x\right)\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 v\left(x\right)\mathrm{d}x}_{b(v)}$$

Slabým řešením okrajové úlohy je funkce u, pro kterou platí:

$$(\mathcal{V})\left\{\begin{array}{l} u\in U_D=\left\{w\in U: w\left(0\right)=c\wedge w\left(1\right)=d\right\}\\ a\left(u,v\right)=b\left(v\right)\quad\forall v\in V\end{array}\right. .$$

V případě homogenních Dirichletových podmínek $(c=d=0)$ platí $U_D=V$.

2 Galerkinova metoda & metoda konečných prvků

Zvolíme diskretizaci oblasti Ω:

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_M=1,$$

rozdělíme tak oblast na M podoblastí:

$$e_1=\left(x_0,x_1\right),e_2=\left(x_1,x_2\right),\ldots,e_M=\left(x_{M-1},x_M\right).$$

Délku podoblasti e_i označíme h_i.

Nyní definujme podprostor $\widetilde{U}$ prostoru U, v němž budeme hledat aproximaci slabého řešení. Báze tohoto prostoru je tvořena lineárními konečnými prvky ϕ_i, které jsou jednoznačně určeny následujícími podmínkami:

- $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (tj. $\phi_i(x_i) = 1$ a $\phi_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$),
- ϕ_i má lineární průběh na každé z podoblastí $e_1, \ldots, e_M$.

Funkce ϕ_i jsou tedy spojité na Ω, jedná se o tzv. „stříšky“. Prostor $\widetilde{U}$ je definován následovně:

$$\widetilde{U} = \operatorname{span}\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_M\}.$$

Dále (s ohledem na zadané okrajové podmínky, zde Dirichletovy) definujme množiny $\widetilde{V}$ a $\widetilde{U}_D$:

$$\begin{aligned} \widetilde{V} &= \left\{ w \in \widetilde{U} : w(0) = w(1) = 0 \right\}, \\ \widetilde{U}_D &= \left\{ w \in \widetilde{U} : w(0) = c \wedge w(1) = d \right\}. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme zapsat Galerkinovu formulaci. Galerkinovým řešením okrajové úlohy je funkce $\widetilde{u}$, pro kterou platí:

$$(\mathcal{G}) \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u} \in \widetilde{U}_D \\ a(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = b(\widetilde{v}) \quad \forall \widetilde{v} \in \widetilde{V} \end{array} \right. . \tag{1}$$

Jelikož jsou bázové funkce prostoru $\widetilde{U}$ vyvořené na základě diskretizace oblasti, jedná se o řešení metodou konečnečných prvků (MKP), tj. MKP je speciálním případem Galerkinovy metody.

Každou funkci $\widetilde{u}(x) \in \widetilde{U}_D$ můžeme vyjádřit jako

$$\widetilde{u}(x) = \overbrace{\sum_{i \in I_D} u_i \phi_i(x)}^{\phi_D} + \sum_{i \in I_V} u_i \phi_i(x).$$

Zde $I_D = \{0, M\}$, $I_V = \{1, 2, \ldots, M-1\}$; hodnoty u_0, u_M jsou zadané Dirichletovými podmínkami ($u_0 = c$, $u_M = d$). Platí tedy

$$\widetilde{u}(x) = \overbrace{u_0 \phi_0(x) + u_M \phi_M(x)}^{\phi_D} + \sum_{i=1}^{M-1} u_i \phi_i(x). \tag{2}$$

Nyní dosadíme (2) do (1). Zároveň si uvědomíme, že pokud má být tato formulace splněna $\forall \widetilde{v} \in \widetilde{V}$, stačí požadovat splnění pro všechny bázové funkce prostoru $\widetilde{V} = \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{M-1}\}$. Získáváme tak následující formulaci:

$$(\mathcal{G}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hledáme funkci } \widetilde{u} = \phi_D + \sum_{i=1}^{M-1} u_i \phi_i : \\ \sum_{i=1}^{M-1} u_i a(\phi_i, \phi_j) = b(\phi_j) - a(\phi_D, \phi_j) \quad \forall j \in I_V \end{array} \right. . \tag{3}$$

3 MKP soustava $\mathbf{A}\overline{u} = \mathbf{b}$

Formulace (3) definuje soustavu $M-1$ rovnic o $M-1$ neznámých $u_1, u_2, \ldots, u_{M-1}$. Pro jednotlivé prvky matice soustavy platí

$$\mathbf{A}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 k(x) \cdot \phi_i'(x) \cdot \phi_j'(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{e_m} \int_{x_{m-1}}^{x_m} k(x) \cdot \phi_i'(x) \cdot \phi_j'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Pro jednotlivé prvky vektoru pravé strany platí

$$\mathbf{b}_j = b(\phi_j) - a(\phi_D, \phi_j) = \int_0^1 \phi_j \mathrm{d}x - \int_0^1 k(x) \cdot \phi_D'(x) \cdot \phi_j'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Na elementu $e_i = (x_{i-1}, x_i)$ jsou nenulové pouze bázové funkce ϕ_{i-1} a ϕ_i. Můžeme vyjádřit jejich předpisy na e_i (tj. restrikce na e_i). V tomto případě však pro sestavení MKP soustavy stačí znát pouze jejich derivace na e_i

a hodnoty určitých integrálů přes e_i:

$$\phi_{i-1}(x)\,|_{e_i} = \frac{x-x_i}{-h_i},\ \phi'_{i-1}(x)\,|_{e_i} = -\frac{1}{h_i},\ \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h_i}{2} \tag{4}$$

$$\phi_i(x)\,|_{e_i} = \frac{x-x_{i-1}}{h_i},\ \phi_i(x)'\,|_{e_i} = \frac{1}{h_i},\ \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h_i}{2} \tag{5}$$

(Konkrétně pro prvky matice soustavy:

- pro $j = i$ (hlavní diagonála):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ii} &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\cdot\left(\phi'_i(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\cdot\left(\phi'_i(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\cdot\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \mathrm{d}x + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\cdot\left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right)^2 \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{h_i^2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h_{i+1}^2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

  příspěvky z ostatních podoblastí jsou nulové,

- pro $j = i-1$ (vedlejší diagonála):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ij} &= \int\limits_{x_j}^{x_i} k(x)\cdot\phi'_j(x)\cdot\phi'_i(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{x_j}^{x_i} k(x)\cdot\left(-\frac{1}{h_i}\right)\cdot\frac{1}{h_i}\mathrm{d}x = -\frac{1}{h_i^2}\int\limits_{x_j}^{x_i} k(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

  podobně pro $j = i+1$,

- pro $|i-j| > 1$: $A_{ij} = 0$.

Konkrétně pro prvky vektoru pravé strany:

$$\mathbf{b}_1 = \int\limits_0^{x_1} \phi_1 \mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} \phi_1 \mathrm{d}x - \int\limits_0^{x_1} k(x)\cdot u_0\cdot\phi'_0(x)\cdot\phi'_1(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + u_0\frac{1}{h_1^2}\int\limits_0^{x_1} k(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathbf{b}_j = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j \mathrm{d}x + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j \mathrm{d}x = \frac{h_j}{2} + \frac{h_{j+1}}{2}\ (\text{pro } 1 < j < M-1\ ),$$

$$\mathbf{b}_{M-1} = \int\limits_{x_{M-2}}^{x_{M-1}} \phi_{M-1}\mathrm{d}x + \int\limits_{x_{M-1}}^{x_M} \phi_{M-1}\mathrm{d}x - \int\limits_{x_{M-1}}^{x_M} k(x)\cdot u_M\cdot\phi'_M(x)\cdot\phi'_{M-1}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{h_{M-1}}{2} + \frac{h_M}{2} + u_M\frac{1}{h_M^2}\int\limits_{x_{M-1}}^{x_M} k(x)\,\mathrm{d}x.)$$

Příklad 1. Uvažujte diskretizaci

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 1,$$

rozdělíte tak oblast na $M = 4$ podoblasti:

$$e_1 = (x_0, x_1), e_2 = (x_1, x_2), e_3 = (x_2, x_3), e_4 = (x_3, x_4).$$

Dále uvažujte po částech konstantní materiálovou funkci

$$k(x) = k_m \, \forall x \in e_m, \, m \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Sestavte MKP soustavu.

Řešení 1. Pro $j = i - 1$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ii} &= \frac{1}{h_i^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{h_{i+1}^2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x) \, \mathrm{d}x = \frac{k_i}{h_i} + \frac{k_{i+1}}{h_{i+1}}, \\ \mathbf{A}_{ij} &= -\frac{1}{h_i^2} \int\limits_{x_j}^{x_i} k(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{k_i}{h_i}. \end{aligned}$$

Matice MKP soustavy pro neznámé u_1, u_2, u_3 má tedy tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{h_1} + \frac{k_2}{h_2} & -\frac{k_2}{h_2} & 0 \\ -\frac{k_2}{h_2} & \frac{k_2}{h_2} + \frac{k_3}{h_3} & -\frac{k_3}{h_3} \\ 0 & -\frac{k_3}{h_3} & \frac{k_3}{h_3} + \frac{k_4}{h_4} \end{bmatrix}.$$

Pravá strana MKP soustavy má tvar

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + u_0 \frac{1}{h_1^2} \int_0^{x_1} k(x) \, \mathrm{d}x \\ \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \\ \frac{h_3}{2} + \frac{h_4}{2} + u_M \frac{1}{h_M^2} \int_{x_{M-1}}^{x_M} k(x) \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \\ \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \\ \frac{h_3}{2} + \frac{h_4}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \frac{k_1}{h_1} \\ 0 \\ u_M \frac{k_M}{h_M} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Vyřešením MKP soustavy získáme neznámé $u_1, u_2, \ldots, u_{M-1}$, pomocí kterých vyjádříme neznámou funkci $\widetilde{u} = \phi_D + \sum_{i=1}^{M-1} u_i \phi_i$. Následující sekce popisuje praktičtější způsob sestavení téže MKP soustavy pomocí lokálních matic a lokálních vektorů pravé strany.

4 Rozšířená MKP soustava, lokální matice, lokálních vektory pravé strany

Uvažujme opět prostor $U = H^1(\Omega)$, kde $\Omega = (0, 1)$, prostor testovacích funkcí $V = \{w \in U : w(0) = w(0) = 0\}$ a variační formulaci

$$(\mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} u \in U_D = \{w \in U : w(0) = c \wedge w(1) = d\} \\ \underbrace{\int\limits_0^1 k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int\limits_0^1 v(x) \, \mathrm{d}x}_{b(v)} \quad \forall v \in V \end{array} \right. .$$

Dále uvažujme po částech konstantní materiálovou funkci

$$k(x) = k_m \, \forall x \in e_m, \, m \in \{1, 2, \ldots, M\}.$$

Využijeme (4) a (5) a určíme lokální MKP matici $\mathbf{A}_{e_i}$ a lokální pravou stranu $\mathbf{b}_{e_i}$ pro element $e_i = (x_{i-1}, x_i)$.

Lokální matice má tvar

$$\mathbf{A}_{e_i} = \begin{bmatrix} a_{e_i}(\phi_{i-1}, \phi_{i-1}) & a_{e_i}(\phi_i, \phi_{i-1}) \\ a_{e_i}(\phi_{i-1}, \phi_i) & a_{e_i}(\phi_i, \phi_i) \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}
a_{e_i}\left(\phi_{i-1},\phi_{i-1}\right) &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k\left(x\right)\cdot\left(\phi_{i-1}'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x = \frac{k_i}{h_i}\\
a_{e_i}\left(\phi_i,\phi_{i-1}\right) = a_{e_i}\left(\phi_{i-1},\phi_i\right) &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k\left(x\right)\cdot\phi_{i-1}'\left(x\right)\cdot\phi_i'\left(x\right)\mathrm{d}x = -\frac{k_i}{h_i}\\
a_{e_i}\left(\phi_i,\phi_i\right) &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k\left(x\right)\cdot\left(\phi_i'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x = \frac{k_i}{h_i}
\end{aligned}$$

Lokální pravá strana má tvar

$$\mathbf{b}_{e_i} = \begin{bmatrix} b_{e_i}\left(\phi_{i-1}\right)\\ b_{e_i}\left(\phi_i\right)\end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}
b_{e_i}\left(\phi_{i-1}\right) &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\phi_{i-1}\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{h_i}{2}\\
b_{e_i}\left(\phi_i\right) &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\phi_i\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{h_i}{2}
\end{aligned}$$

Pomocí lokálních matic a lokálních vektorů pravé strany sestavených pro všechny elementy diskretizace můžeme sestavit rozšířenou matici soustavy o rozměrech $(M+1)\times(M+1)$ a rozšířený vektor pravé strany o délce $M+1$. Ukažme si to na příkladu.

Příklad 2. Uvažujte diskretizaci

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 1,$$

rozdělíte tak oblast na $M=4$ podoblasti:

$$e_1 = \left(x_0,x_1\right), e_2 = \left(x_1,x_2\right), e_3 = \left(x_2,x_3\right), e_4 = \left(x_3,x_4\right).$$

Dále uvažujte po částech konstantní materiálovou funkci

$$k\left(x\right) = k_m\,\forall x\in e_m,\ m\in\left\{1,2,3,4\right\}.$$

Sestavte rozšířenou matici soustavy a rozšířený vektor pravé strany, které odpovídají známým i neznámým hodnotám $u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{M-1},u_M$.

Řešení 2. Rozšířená matice soustavy má tvar

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
\frac{k_1}{h_1} & -\frac{k_1}{h_1} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{k_1}{h_1} & \frac{k_1}{h_1}+\frac{k_2}{h_2} & -\frac{k_2}{h_2} & 0 & 0\\
0 & -\frac{k_2}{h_2} & \frac{k_2}{h_2}+\frac{k_3}{h_3} & -\frac{k_3}{h_3} & 0\\
0 & 0 & -\frac{k_3}{h_3} & \frac{k_3}{h_3}+\frac{k_4}{h_4} & -\frac{k_4}{h_4}\\
0 & 0 & 0 & -\frac{k_4}{h_4} & \frac{k_4}{h_4}
\end{bmatrix}.$$

Rozšířený vektor pravé strany má tvar

$$\widehat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix}
\frac{h_1}{2}\\
\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\\
\frac{h_2}{2}+\frac{h_3}{2}\\
\frac{h_3}{2}+\frac{h_4}{2}\\
\frac{h_4}{2}
\end{bmatrix}.$$

Rozšířenou matici soustavy a rozšířený vektor pravé strany můžeme nyní snadno využít k sestavení MKP soustavy. Nejprve vytvoříme nulový vektor $\widehat{\mathbf{u}}$ o délce $M+1$, na příslušné pozice (indexy I_D) zapíšeme známé hodnoty u_0 a u_M, tj.

$$\widehat{\mathbf{u}} = (u_0, 0, \ldots, 0, u_M)^T .$$

Matici $\mathbf{A}$ získáme vybráním řádků a sloupců odpovídajících indexové množině I_V z matice $\widehat{\mathbf{A}}$. Vektor pravé strany $\mathbf{b}$ získáme vybráním řádků odpovídajících indexové množině I_V z vektoru $\widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\mathbf{A}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}$. Zde

$$\widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\mathbf{A}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} \\ \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \\ \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \\ \frac{h_3}{2} + \frac{h_4}{2} \\ \frac{h_4}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0 \cdot \frac{k_1}{h_1} \\ -u_0 \cdot \frac{k_1}{h_1} \\ 0 \\ -u_M \cdot \frac{k_4}{h_4} \\ u_M \cdot \frac{k_4}{h_4} \end{bmatrix},$$

což odpovídá vektoru (6).

Reference

[1] Blaheta, R. Matematické modelování a metoda konečných prvků. 2012. URL: http://mi21.vsb.cz/modul/matematicke-modelovani-metoda-konecnych-prvku-numericke-metody-2