Metoda konečných prvků v 1d

16.3.2021

Modelová úloha:

$$(P)\quad \begin{cases} -(k\,u')' = f & \text{v } \Omega = (0,L) \\ u(0) = U_0 \\ -k\,u'(L) = T \end{cases}$$

- variační formulace, prostory U, U_D, V

$$\int_\Omega -(k u')' v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in V$$

$$\left[-k u' v\right]_0^L + \int_\Omega k u' v' \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\underbrace{\int_\Omega k u' v' \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v \, dx - T v(L)}_{b(v)}$$

Dirichlet

$$(V)\quad \begin{cases} \text{Hledáme } u \in U_D: \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Neumann

$$U = U(\Omega): \quad C^1(\Omega) \subset U(\Omega) \subset C^0(\Omega)$$

funkce $u \in U$ jsou spojité na $\overline{\Omega} = \langle 0, L\rangle$

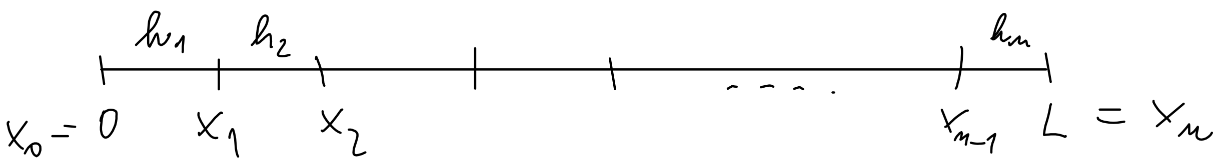
$$V = \{v \in U : v(x) = 0 \ \ \forall x \in \Gamma_D\} = \{v \in U : v(0) = 0\}$$

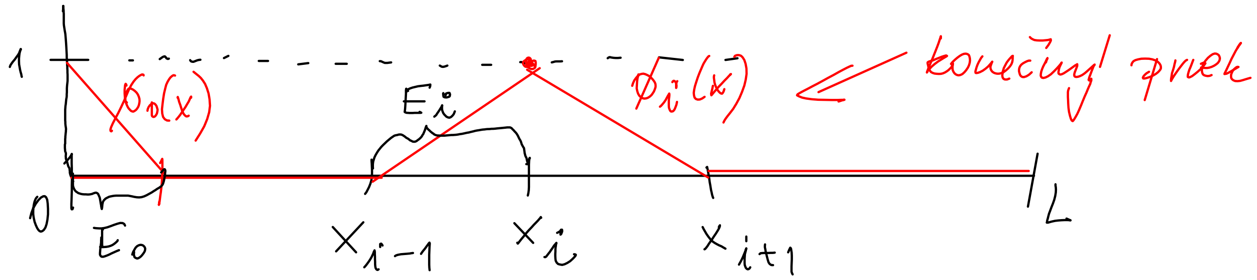
$$U_D = \{w \in U : w \text{ splňuje DP}\} = \{u \in U : u(0) = U_0\}$$

(afinní)

1D

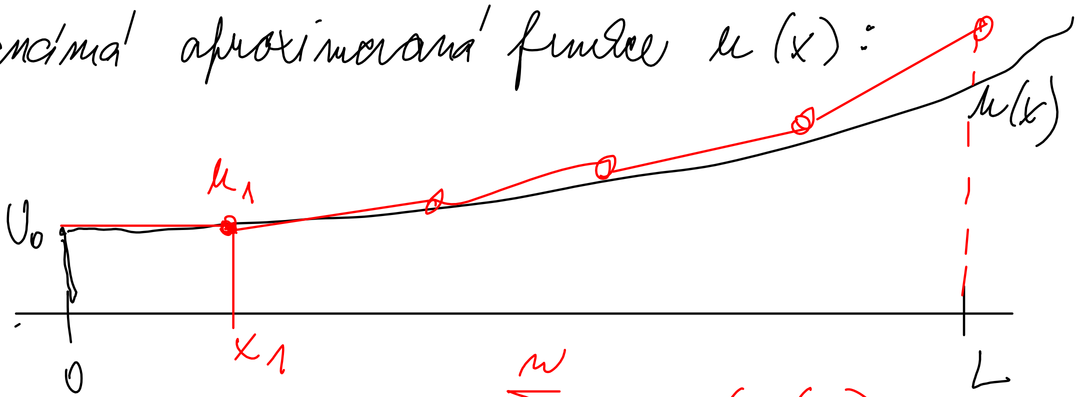
- MKP diskretizace, po částech lineární bázové funkce





→ množina funkcí $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$

neznámá aproximovaná funkce $u(x)$:



$$u(x) \approx \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\alpha_j}_{\text{neznámé koeficienty}} \phi_j(x)$$

$$u(x_i) \approx \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \phi_j(x) = \underline{\underline{\alpha_i = u_i}}$$

KOEFICIENTY PŘÍMO REPREZENTUJÍ UZLOVÉ HODNOTY

- pojmy „uzel", „element", „<u>konečný prvek</u>"

uzly: $\{x_0, \dots, x_n\}$

i-tý element $= (x_{i-1}, x_i)$ o délce $h_i = x_i - x_{i-1}$

- příprava sítě a vstupních dat pro implementaci MKP

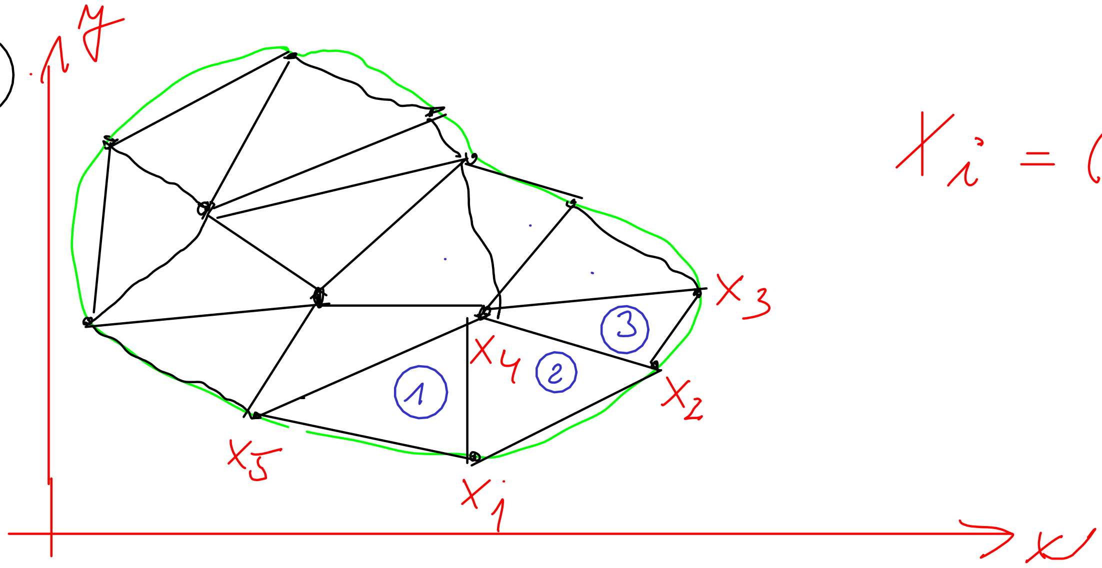
1d uzlové body NODE

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \\ n+1. \end{array} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1 \times d}, \quad d = 1$$

elementy ELEM

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \vdots & \\ n & n+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{\underbrace{n}_{\text{počet elementů}} \times \overbrace{2}^{\text{kolik uzlů náleží do 1 elementu}}}$$

(2d)



$X_i = (x_i, y_i)$

$$\text{NODE} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \\ x_{n_N} & y_{n_N} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_N = \text{počet uzlů} \end{array}$$

$$\text{ELEM} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_E = \text{počet elementů} \end{array}$$

+ <u>další vstupy</u>: kde je Dirichlet, materiály ε, f

- prostory $\tilde{U}, \tilde{U}_D, \tilde{V}$

$$\tilde{U} \subset U; \quad \tilde{U} = \mathrm{Lin}\{\underbrace{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k}_{\text{předepsaný koeficient z Dirichleta}}, \overbrace{\phi_{k+1}, \dots, \phi_n}^{\text{bázové prvky nad volnými uzly}}\}$$

$$\tilde{U}_D = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \phi_i + \mathrm{Lin}\{\phi_{k+1}, \dots, \phi_n\}$$

$$\tilde{V} = \mathrm{Lin}\{\phi_{k+1}, \dots, \phi_n\}$$

v našem 1d případě s 1 Dir. p.:

$$\tilde{U} = \mathrm{Lin}\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$$

$\phi_0 \hookrightarrow$ Dirichlet

$$\tilde{U}_D = U_0 \phi_0(x) + \underbrace{\mathrm{Lin}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}}_{\tilde{V}}$$

$$\tilde{V} = \mathrm{Lin}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$$

U, U_D, V „nahradíme" $\tilde{U}, \tilde{U}_D, \tilde{V}$ (bude vysvětleno)

$$(\tilde{V}) \begin{cases} \text{Hledáme } \tilde{u} \in \tilde{U}_D : \\ a(\tilde{u}, v) = b(v) \quad \forall v \in \tilde{V} \\ a(\tilde{u}, \phi_i) = b(\phi_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = U_0 \phi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \underline{\underline{u_j}} \phi_j(x)$$

$\hookrightarrow n$ neznámých

→ definuje soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, mohli bychom ji sestavit rovnou po jednotlivých rovnicích, ale lepší – jiný způsob

Příště:

- restrikce na element: $a_E(\cdot,\cdot)$, $b_E(\cdot)$
- pojmy „lokální matice", „rozšířená matice soustavy"