CVIČENÍ 10 13.4.2021

1) poznámky k homogenizaci materiálu
2) MKP ve 2d

Homogenizace materiálu

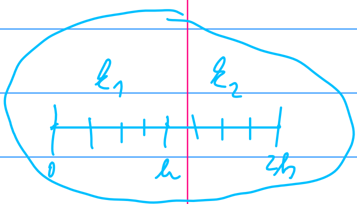
Uvažujme následující úlohu ($f \in \mathbb{R}$):

$$(P_d)\begin{cases}(k(x)\,u'(x))' = f & v\ \Omega=(0,L)\\ u(0)=u(L)=0 & \end{cases}$$

kde $k(x)$ je periodický materiál s periodou d.

Posloupnost ANALYTICKÝCH řešení úlohy P_d pro $d \to 0$ konverguje k řešení úlohy s konstantním materiálem k_{homog}:

$$(P_{homog})\begin{cases}k_{homog}\, u''(x) = f & v\ \Omega=(0,L)\\ u(0)=u(L)=0 & \end{cases}$$



kde $k_{homog} = \dfrac{d}{\int_0^d \frac{1}{k(x)}\,dx}$.

$$\int_0^d k(x)\,dx = \frac{k_1+k_2}{2}$$

$$k_{homog} = \frac{2h}{\int_0^h \frac{1}{k_1} + \int_h^{2h} \frac{1}{k_2}} = \frac{2h}{\frac{h}{k_1}+\frac{h}{k_2}} = \frac{2}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$$

Jak bychom řešili úlohu (P_d) pro konkrétní d NUMERICKY pomocí MKP? Krok MKP diskretizace (ozn. h) nemusí nijak souviset s délkou periody d.

- v obecném případě:

$$A_{E_i} = \overbrace{\int_{E_i} k(x)\,dx}^{k_{E_i}} \cdot \frac{1}{\underbrace{|E_i|^2}_{=h^2}} \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

- pro $h = nd$, $n \in \mathbb{N}$ (materiál je velmi jemný, ale např. z důvodu výpočetní náročnosti si nemůžeme dovolit dostatečně jemnou síť)

$$k_{E_i} = \int_{E_i} k(x)\,dx = \underbrace{n\int_0^d k(x)\,dx}$$

nezávisí na i $\Longrightarrow$ stejná konstanta pro všechny elementy diskretizace

$$A_{E_i} = n\int_0^d k(x)\,dx \cdot \frac{1}{(nd)^2}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{d}\int_0^d k(x)\,dx \cdot \frac{1}{n}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

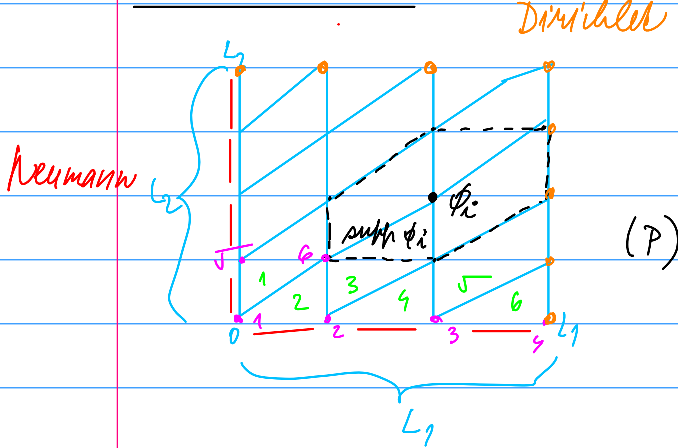
$\longrightarrow$ MKP řešení je stejné jako řešení úlohy s konstantním materiálem $k_{MKP} = \frac{1}{d}\int_0^d k(x)\,dx \neq k_{homog.}$

$\longrightarrow$ MKP řešení je stejné jako řešení úlohy s konstantním materiálem

$$k_{MKP} = \frac{1}{d}\int_0^d k(x)\,dx \neq k_{homog}$$

(Pokud L je celočíselným násobkem d, samozřejmě $k_{MKP} = \frac{1}{L}\int_0^L k(x)\,dx$)

MKP ve 2d

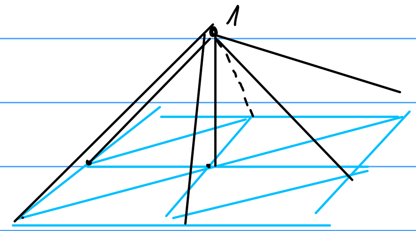


$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$

$$(P)\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\cdot\nabla u(x)) = f(x) & \dots x \in \Omega \\ u(x) = \hat{u}(x) & \dots x \in \Gamma_D \\ k(x)\,\dfrac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = g(x) & \dots x \in \Gamma_N \end{cases}$$

$$(V)\begin{cases} \text{hledáme } u \text{ t.ž.} \\ a(u,v) = b(v) \\ \forall v \in V \end{cases}$$

MKP báze = „stříšky"



$\longrightarrow$ báze $\{\phi_i,\ i \in \{1, n_{NODE}\}\}$

$$NODE = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix}}_{2 \text{ sloupce}} \Big\} n_{NODE} \qquad ELEM = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Dirichletovy podmínky — předepisují řešení na hranici

Neumannovy podmínky — —||— hranám, které leží ale v hranici

Rozšíření matice soustavy

$$A_{i,j} = a(\varphi_j, \phi_i) \overset{ozn}{=} a_{ij} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \sum_{pq} k_{pq} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x_q}\, dx$$

Lokální matice

$\mathcal{T}$ ... diskretizace Ω (triangulace)

pro konkrétní T

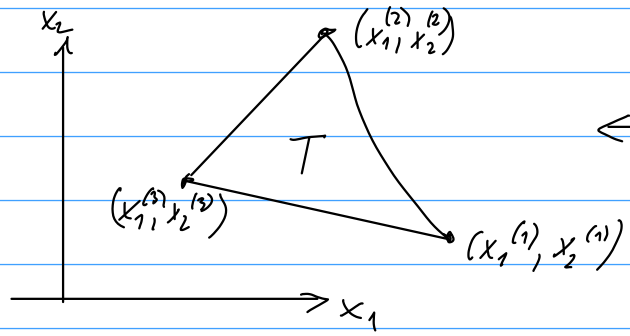
$$A_T = \begin{bmatrix} a_{11,T} & a_{21,T} & a_{31,T} \\ a_{12,T} & a_{22,T} & a_{32,T} \\ a_{13,T} & a_{23,T} & a_{33,T} \end{bmatrix} = k_T B_T^T B_T \cdot |T|$$

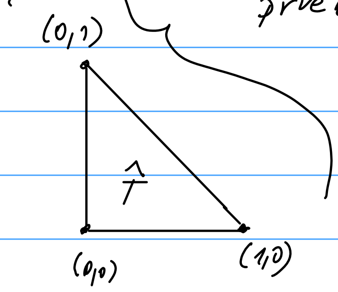
$$B_T^T B_T \cdot \int_T k(x)\, dx$$

$$a_{12,T} = k_T \int_T \overbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}^{\text{konst.}} dx + k_T \int_T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\, dx$$

$$B_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Referenční prvek





$\phi_1(x_1, x_2)$ $\qquad$ $\hat{\phi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$

$\phi_2(x_1, x_2)$ $\qquad$ $\hat{\phi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$

$\phi_3(x_1, x_2)$ $\qquad$ $\hat{\phi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$

$$B_T = \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2|T|}$$