NM2 19. 3. 2021 U, U_D, V

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } u \in U_D: \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

VARIAČNÍ FORMULACE

+předpoklad $a(u,v)$ je symetrická a nezáporná

a definujeme $J: U \to \mathbb{R}$

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - b(v)$$

$$(E)\begin{cases} \text{Hledáme } u \in U_D: \\ J(u) = \min\{J(w): w \in U_D\} \end{cases}$$

ENERGETICKÁ FORMULACE

Věta: $(V) \Longleftrightarrow (E)$

Důkaz: $\Longrightarrow$ $\qquad w = u + v$

u řešením (V), libovolné $w \in U_D \Longrightarrow v = w - u \in V$

$$J(w) = \frac{1}{2} a(w,w) - b(w) = \frac{1}{2} a(u+v, u+v) - b(u+v) =$$

$$= \frac{1}{2} a(u,u) + a(u,v) + \frac{1}{2} a(v,v) - b(u) - b(v) =$$

$$= J(u) + 0 + \underbrace{\frac{1}{2} a(v,v)}_{\geq 0} \geq J(u)$$

$\Longleftarrow$

$u: J(u) = \min\{J(w): w \in U_D\}$, libovolné v, $s \in \mathbb{R}$

$\varphi: s \to J(u + sv)$ má minimum v $s = 0$

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} a(u+sv, u+sv) - b(u+sv) =$$

$$= \frac{1}{2} a(u,v) + s\, a(u,v) + \frac{1}{2} s^2 a(v,v) - b(u) - s\, b(v)$$

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$

$$\varphi'(s) = a(u,v) + s \cdot a(v,v) - b(v)$$

$$\varphi'(0) = a(u,v) - b(v) = 0 \quad \text{pro } v \in V \qquad \square$$

Závislost slabého řešení na vstupních datech

na modelové úloze:

$$(P)\begin{cases} -(ku')' = f_0 & \text{v } \Omega \in (0,L) \\ u(0) = U_0 \\ -ku'(L) = T_0 \end{cases}$$

vstupní data: f_0, U_0, T_0

$W_{1,2}$

Věta: Nechť a je V-eliptická a uvažujme slabé řešení (P) se vstupními daty f_0, U_0, T_0. Pokud řešení u_0 odpovídá (f_0, U_0, T_0) a u_1 odpovídá (f_1, U_0, T_1)
potom $\exists C \in \mathbb{R}$: $\| u_0 - u_1 \|_{1,2} \leq C (\| f_0 - f_1 \|_{L_2} + |T_0 - T_1|)$

Důkaz: pracujeme s funkcí $u_0 - u_1$ a dosadíme do a, tj. $a(u_0 - u_1, v)$ + použití C-S nerovnosti

- V-eliptičnost: $\exists m > 0 \ \forall v \in V: a(v,v) \geq m \|v\|_{2,1}^2$
- omezenost: $\exists M > 0 \ \forall u, v \in V: |a(u,v)| \leq M \|u\|_{2,1} \|v\|_{2,1}$

V-eliptičnost (často současní předpokladů)
– důkazy pro konkrétní úlohy v přednášce

①
$$\begin{cases} -(k u')' + \underbrace{q u}_{\text{REAKTIVNÍ ČLEN}} = f & \text{v } \Omega = (0, L), \quad \underline{k > 0}, \ \underline{q > 0} \\ u(0) = U_0 \\ -k u'(L) = T \end{cases}$$

$$a(v,v) = \int_0^L k (v')^2 + \cancel{q v^2} \, dx \geq$$

$$\geq \underbrace{\min\{k, q\}}_{= m > 0} \cdot \overbrace{\int_0^L (v')^2 + \cancel{v^2} \, dx}^{\|v\|_{1,2}^2} =$$

$$= m \cdot \|v\|_{1,2}^2$$

② pro úlohu (P) také platí V-eliptičnost
⇒ pouze seminorma $\int_0^L (v')^2 \, dx$
⇒ nutné použít Friedrichsovu větu

Jednoznačnost řešení (V)

Věta: Nechť a je V-eliptická. Potom existuje nejvýše 1 řešení (V).

Důkaz: $u_1, u_2 \dots$ řešení (V)

$\Rightarrow \quad v = u_1 - u_2 \in V$

$$\left.\begin{aligned} a(u_1, v) &= b(v) \\ a(u_2, v) &= b(v) \end{aligned}\right\} \quad \forall v \in V, \text{ tedy i pro } v = u_1 - u_2$$

$\rightarrow$ dosadíme $v = u_1 - u_2$, odečteme

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

z V-eliptičnosti $\|u_1 - u_2\|_{1,2} = 0$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ $\square$

Metoda konečných prvků

– modelová úloha (P)

$\boxed{\text{prostory } U, V_D, V}$

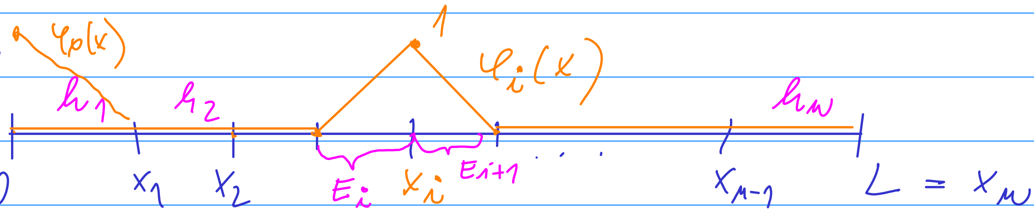
$$(V)\left\{\begin{array}{l} \text{Hledáme } u \in V_D: \\ \underbrace{\int_0^L k u'(x)\, v'(x)\, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^L f(x)\, v(x)\, dx - T v(1)}_{b(v)} \end{array}\right.$$

$U = U(\Omega): C^1(\Omega) \subset U \subset C^0(\Omega)$

$V = \{ v \in U : v(0) = 0 \}$

$V_D = \{ v \in U : v(0) = u_0 \}$

MKP diskretizace



n elementů

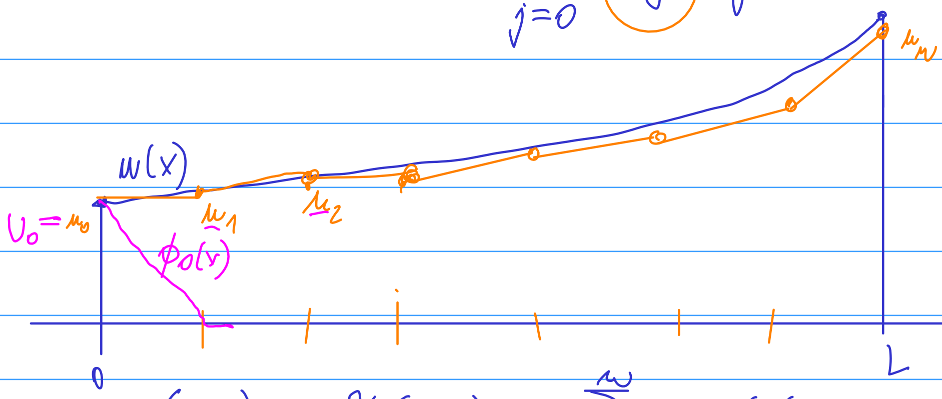
konečný prvek nad uzlem x_i = po částech lineární funkce, rovna 1 v x_i, v ostatních nulová

$\rightarrow$ množina funkcí $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$

neznámou funkci $u(x)$ na Ω aproximujeme jako

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=0}^{n} \underset{\parallel}{\overset{u_j}{}}\alpha_j \, \phi_j(x)$$

KOEFICIENTY JSOU PŘÍMO UZLOVÉ HODNOTY



$$u(x_i) \approx \tilde{u}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \phi_j(x) = \alpha_i \overbrace{\phi_i(x)}^{1} = u_i$$

→ pojmy „uzel" ($= x_i$), „element" $= (x_{i-1}, x_i) = E_i$, „konečný prvek" = celá stříška

Galerkinova metoda – (U, U_D, V) „nahradíme" prostory konečné dimenze $(\tilde{U}, \tilde{U}_D, \tilde{V})$

$\tilde{U} \subset U$; $\tilde{U} = Lin\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$

$\tilde{U}_D = u_0 \phi_0 + \underbrace{Lin\{\phi_1, \dots, \phi_n\}}_{\tilde{V}}$, $u_0 = U_0$

$\tilde{V} = Lin\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$

v našem 1d případě s 1 DIM. prostoru

(MKP) Hledáme $\tilde{u} \in \tilde{U}_D$:

$a(\tilde{u}, v) = b(v) \quad \forall v \in \tilde{V}$

$a(\tilde{u}, \phi_i) = b(\phi_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = U_0 \phi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j(x)$$

→ n neznámých

→ dostáváme n lin. rovnic o n neznámých

Příště: restrikce na element → $a_E(\cdot, \cdot)$, $b_E(\cdot)$

lokální matice, rozšířená matice soustavy

$$a(u,v) = \int_0^L k u' v' \, dx \qquad b(v) = \int_0^L f v \, dx - T v(L)$$

$$a_E(u,v) = \int_E k u' v' \, dx \qquad b_E(v) = \int_E f v \, dx - T v(L)$$

$$\to \quad A u = b$$

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \quad \neq 0 \text{ pro } j = i-1, \; j = i, \; j = i+1$$

jinak = 0

$$a(\phi_i, \phi_i) = a_{E_i}(\phi_i, \phi_i) + a_{E_{i+1}}(\phi_i, \phi_i)$$

$$a(\phi_i, \phi_{i-1}) = a_{E_i}(\phi_i, \phi_i)$$

A je řídká matice