NM2 5.3.2021

1 Variační formulace 1d okrajové úlohy s HLADKÝMI vstupními daty

$$(P)\quad \begin{cases} -k\,u''(x) = f(x) & x \in (0,L) \\ u(0) = U \\ -k\,u'(1) = T \end{cases}$$

$$\int_0^L -k\,u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^L f(x)\,v(x)\,dx$$

per partes

$$(V)\quad \begin{cases} \text{Hledáme } u(x) \in C^1(\langle 0,L\rangle): \\ \bullet\ u(0) = U \\ \bullet\ \underbrace{\underbrace{\int_0^L k\,u'(x)\,v'(x)\,dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^L f(x)\,v(x)\,dx - T\,v(1)}_{b(v)}}_{\text{(A) VARIAČNÍ IDENTITA}} \end{cases}$$

(B) hladká vstupní data $\Rightarrow$ existuje klasické řešení (řešení (P)) $u \in C^2(\underbrace{(0,L)}_{\Omega})$

(C) u je řešením (P) $\Rightarrow$ u je řešením (V) ✓

(D) u je řešením (V) $\wedge$ $u \in C^2((0,L))$ $\Rightarrow$ u je řešením (P)
(důkaz viz přednáška)

② Variační formulace 1d okrajové úlohy se skokem v materiálu

$$k = \begin{cases} k_1 \ldots x \in (0; 1/2) \\ k_2 \ldots x \in (1/2; 1) \end{cases}$$

(A) variační formulace stejná ✓ $\quad u = \begin{cases} u_1 \text{ na} \ldots \\ u_2 \text{ na} \ldots \end{cases}$

(B) nemáme hladká data ✗

(C) (?) ⇒ (V) ✓

(D) u je řešením (V) $\wedge\ u_1 \in C^2((0;1/2)) \wedge u_2 \in C^2((\tfrac{1}{2};1))$

$\Rightarrow u$ je řešením (V)

③ Aproximace řešení pomocí polynomu 3. stupně (vyjdeme z (V))

CVIČENÍ

$$u(x) \doteq \cancel{a_0} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad (a_0 = U)$$

báze $\underbrace{\{\cancel{1}, x, x^2, x^3\}}$ $\Leftarrow$ $u(0) = U$, $-ku'(L) = T$

$$u(0) = a_0 = U$$

$$a(u, v) = b(v)$$

$$a(U + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, v) = b(v)$$

$$a(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, v) = b(v) - a(U, v)$$

Dosadíme x, x^2, x^3 za v:

$$a(\underline{a_1} x + \underline{a_2} x^2 + \underline{a_3} x^3, x^j) = b(x^j) - \underline{a(U, x^j)}$$

3 rovnice o 3 neznámých

$$j=1) \quad a_1 \cdot a(x, x) + a_2 (x^2, x) + a_3 (x^3, x) = RHS_1$$

$$j=2) \quad a_1 \cdot a(x, x^2) + a_2 (x^2, x^2) + a (x^3, x^2) = RHS_2$$

$$j=3) \quad a_1 \cdot a(x, x^3) + a_2 (x^2, x^3) + a (x^3, x^3) = RHS_3$$

$\longrightarrow$ zbývá vypočíst $a(x^i, x^j)$, $b(x^j)$, $a(U, x^j)$

např.:
$$a(x^2, x^3) = \int_0^L k \cdot (2x) \cdot (3x^2)\, dx = 6 \cdot k \frac{L^4}{4}$$

⋮

atd.

(4) Totéž, ale s Dirichletovými o. p. (na obou stranách)

$u(0) = U_0$

$u(L) = U_L$

$u(0) = a_0 = U_0$ ✓

$u(L) = U_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = U_L \rightsquigarrow ?$

$\{1, x\} \to$ „zakódování" obou podmínek

$$\mathrm{Lin}\{1, x, x^2, x^3\} = \mathrm{Lin}\{1, x, \underbrace{x(x-L), x^2(x-L)}\}$$

nulové v bodech, kde jsou zadány Dirichlet. podm.