

# Metoda konečných diferencí

RB, SD

## 1 difúze + konvekce v 1D

Uvažujme rovnici

$$-(ku')' + Du' = f, \quad D > 0$$

v intervalu  $(0, 1)$  a následující okrajové podmínky:

1. smíšené:  $u(0) = 1$  a  $-ku'(1) = -1$
2. Dirichletovy:  $u(0) = 1$  a  $u(1) = 0$ .

Pro jednoduchost můžeme zvolit např.  $k \equiv 1$ ,  $f \equiv 0$  a porovnat numerické řešení s analytickým.

### 1.1 Diskretizace

Zvolíme uzly  $x_i = ih$ ,  $h = 1/n$ ,  $u_i = u(x_i)$ . Pro  $i = 1, \dots, n$  (resp.  $1, \dots, n-1$ ) formulujeme diferenční rovnice:

DCD - Diskretizace centrálními diferencemi

$$\frac{1}{h^2} [-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}] + \frac{D}{2h} [u_{i+1} - u_{i-1}] = f_i$$

DUW - Diskretizace up-wind (up-stream)

$$\frac{1}{h^2} [-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}] + \frac{D}{h} [u_i - u_{i-1}] = f_i$$

DDW - Diskretizace down-wind (down-stream)

$$\frac{1}{h^2} [-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}] + \frac{D}{h} [u_{i+1} - u_i] = f_i$$

## 1.2 Numerické experimenty

Volíme postupně  $D \in \{0, 5, 10, 20, 40, 200\}$  . Očekáváme následující chování:

- pro vyšší hodnoty  $D$  a  $h$  bude druhý člen DCD dominantní a metoda bude oscilovat,
- dobré chování DUW, špatné chování DDW.

**Poučení:** Ne každá numerická metoda se (vždy) chová dobře. Je potřeba experimentovat, a to nejdříve s jednoduchými úlohami, a je také potřeba snažit se o analýzu chování numerické metody (numerickou analýzu).

Následují grafy řešení pro úlohu se smíšenými OP  $u(0) = 1$  a  $-ku'(1) = T$ .

## 2 Diferenční metoda pro parabolickou rovnici

$$c \frac{\partial u}{\partial t} - (ku')' = f, \quad c > 0$$

Při použití explicitní Eulerovy metody také očekáváme oscilace.

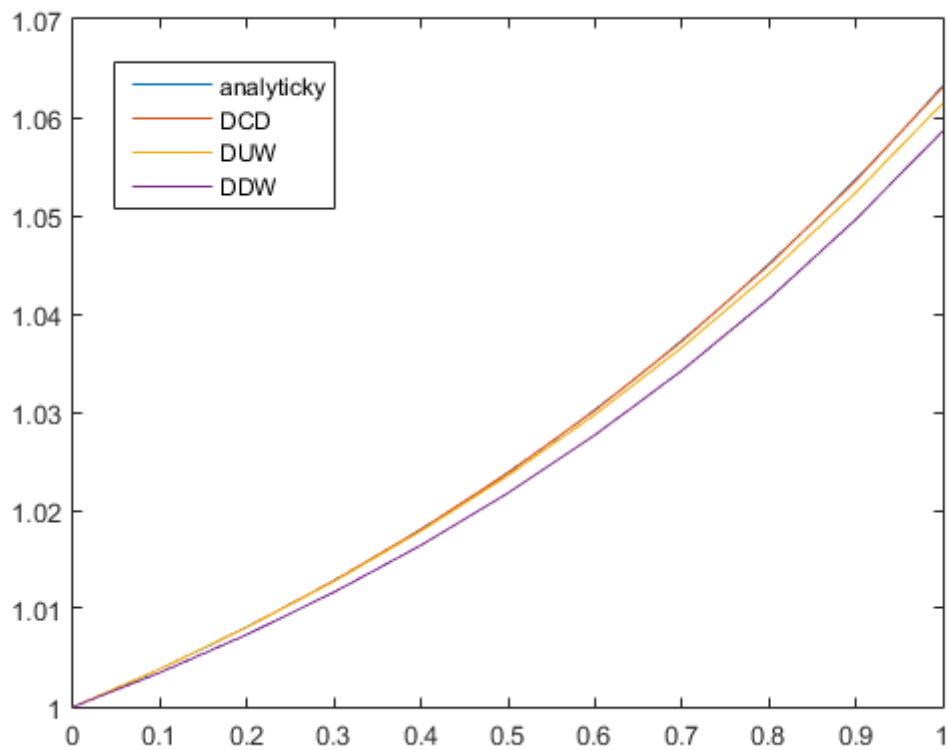


Figure 1:  $w = 1$ ,  $h = 1/20$

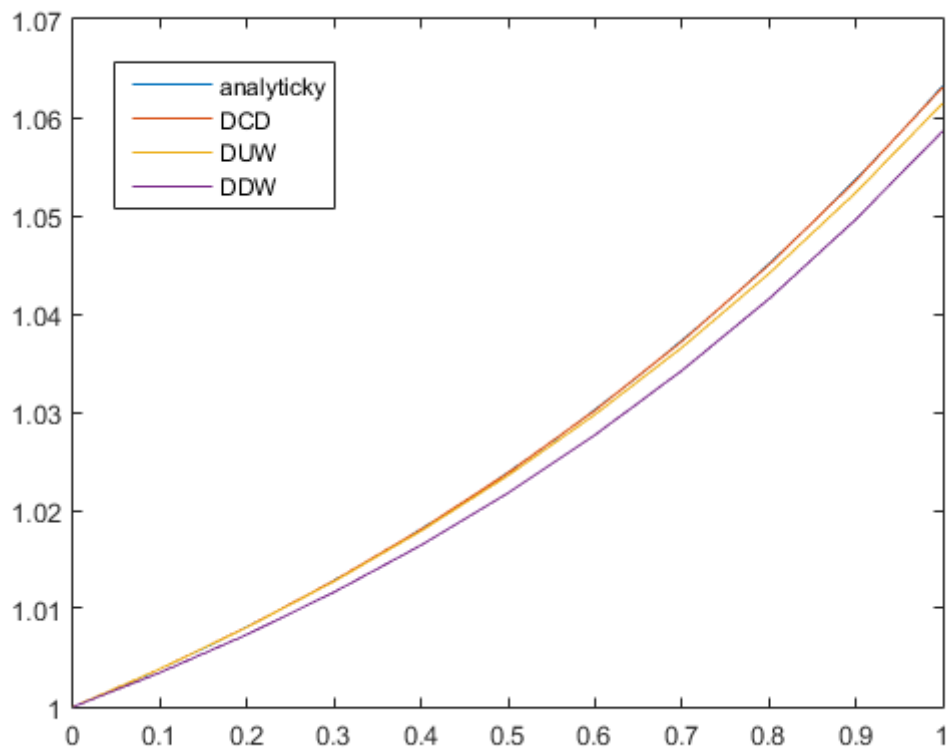


Figure 2:  $w = 5$ ,  $h = 1/20$

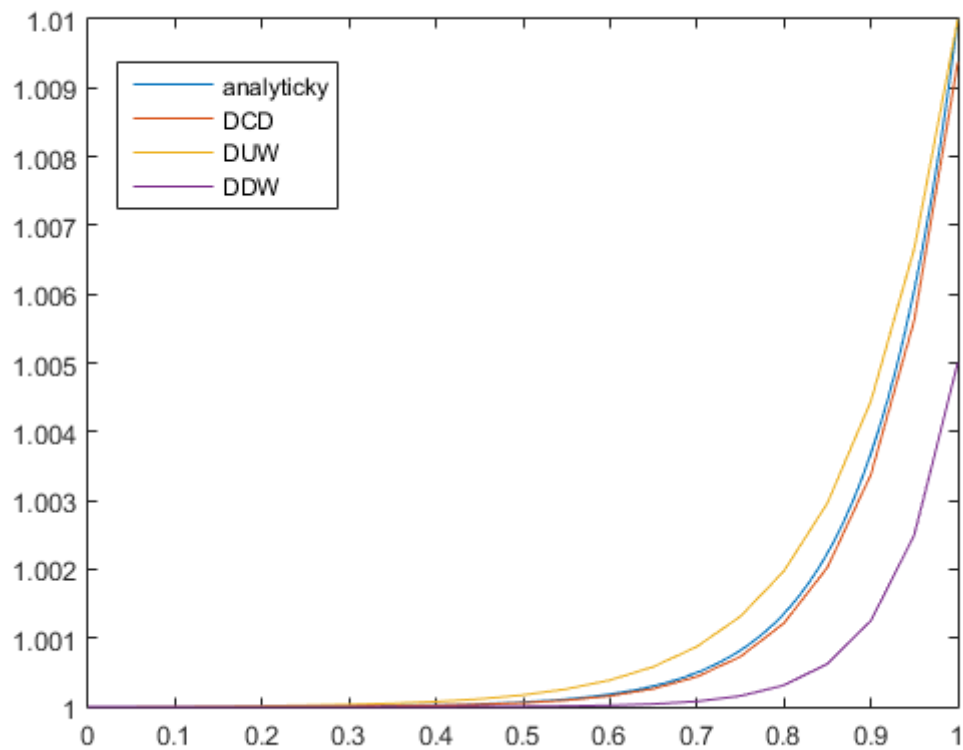


Figure 3:  $w = 10$ ,  $h = 1/20$

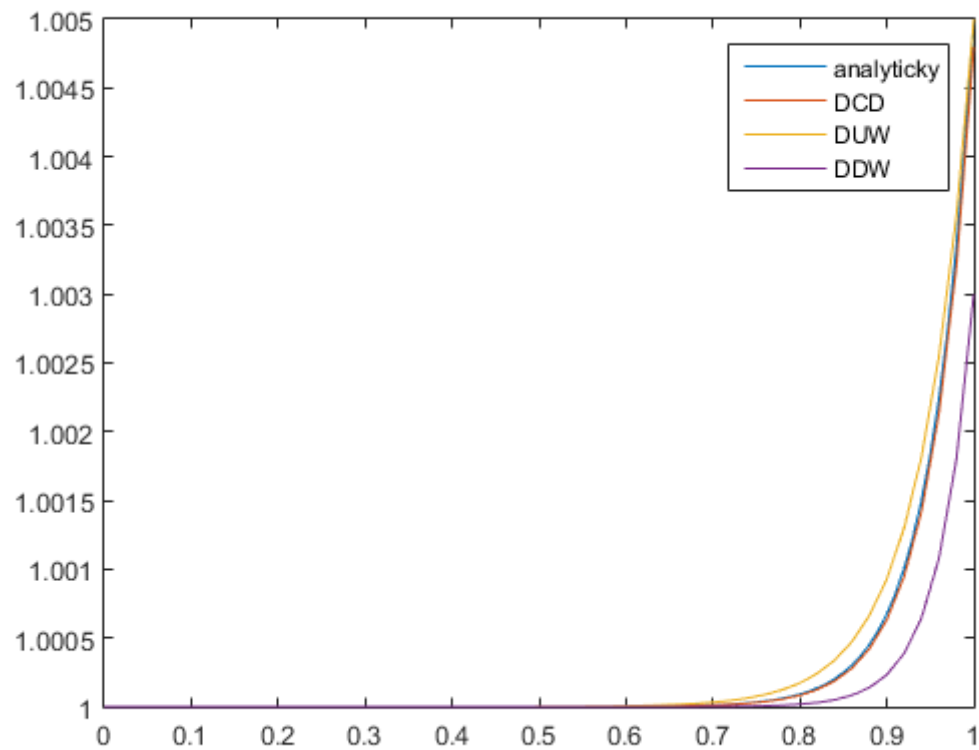


Figure 4:  $w = 20$ ,  $h = 1/50$

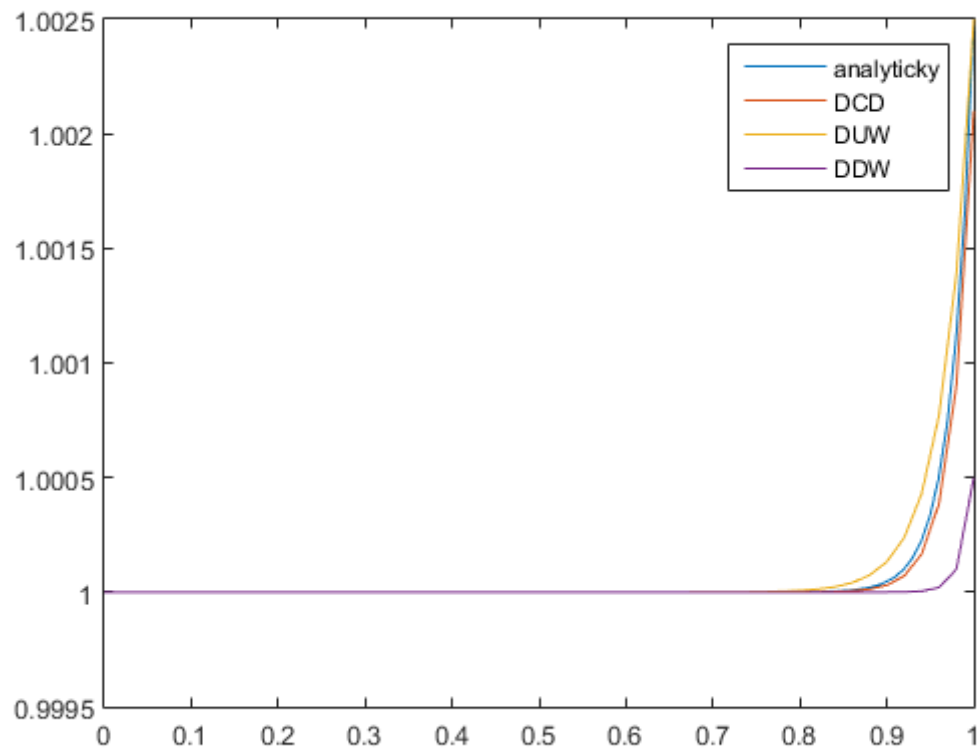


Figure 5:  $w = 40$ ,  $h = 1/50$

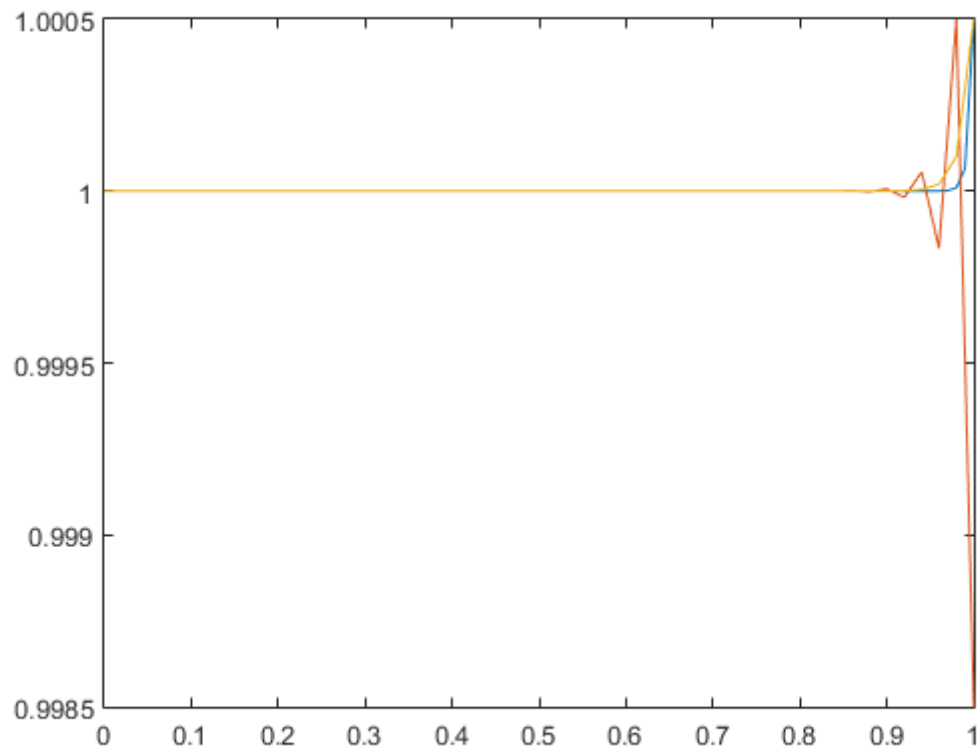


Figure 6:  $w = 200$ ,  $h = 1/50$ , DDW úlohu nevyřeší