

Finite differences method (FDM, metoda konečných diferencí, metoda sítí)

Simona Domesová

e-mail: simona.domesova@vsb.cz

web: homel.vsb.cz/~dom0015

Metoda sítí (konečných diferencí) v 1d a výsledná soustava lineárních rovnic

(průhyb struny o délce L , stacionární vedení tepla, šíření koncentrace)

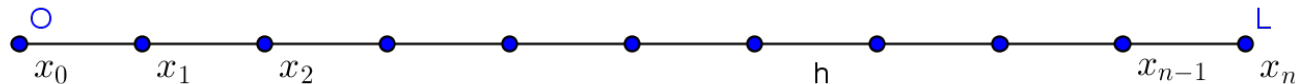
Okrajová úloha:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{Dirichletova okrajová podmínka})$$

Aproximace druhé derivace (vychází z Taylorova rozvoje):

$$u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2 \cdot u(x) + u(x+h)}{h^2}$$

Diskretizace oblasti $(0, L)$ na n částí o délce h (ekvidistantní síť):



$$f(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} f_i, \quad u(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} u_i$$

→ soustava $n - 1$ rovnic o neznámých u_1, \dots, u_{n-1} :

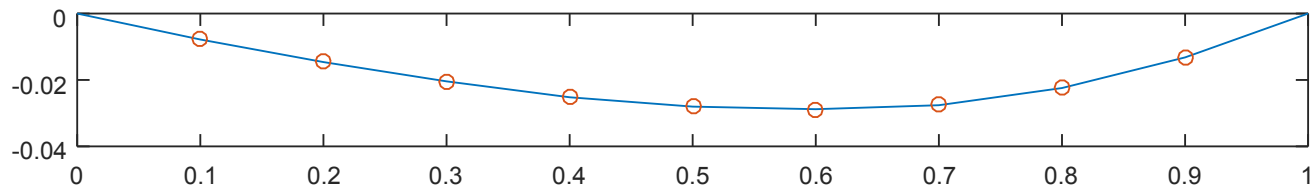
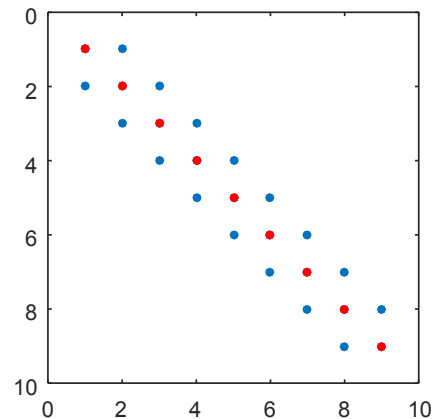
$$-(u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) = h^2 f_i$$

$$-(u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) = h^2 f_i$$

soustava lineárních rovnic s SPD maticí

$$A \cdot u = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u_0 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u_n \end{pmatrix}$$



Metoda sítí (konečných diferencí) ve 2d

(průhyb membrány o rozměrech $L \times L$, stacionární vedení tepla, šíření koncentrace)

Okrajová úloha:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega = (0, L) \times (0, L) \\ u(x, y) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Aproximace druhých parciálních derivací:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \approx \frac{u(x-h, y) - 2 \cdot u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \approx \frac{u(x, y-h) - 2 \cdot u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2}$$

Diskretizace oblasti $(0, L) \times (0, L)$ na $n \times n$ čtverců o straně délky h :

$$f(x_i, y_j) \stackrel{ozn}{=} f_{i,j}, \quad u(x_i, y_j) \stackrel{ozn}{=} u_{i,j}$$

→ soustava $(n-1) \times (n-1)$ rovnic:

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4 \cdot u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j}$$

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \cdots & 0 \\ I & B & I & \ddots & \vdots \\ 0 & I & B & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & 0 & I & B \end{pmatrix}, \text{ kde } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

