CVIČENÍ 9 6.4.2021

1) pokračování z minula:
L_2 a H^1 chyba MKP řešení pro úlohu se skokem v materiálu

2) kvadratické konečné prvky v 1d
- sestavení lokální matice pro člen $\int_\Omega k u' v' dx$
- aplikace na konkrétní úlohu
- implementace
- vizualizace MKP řešení

Modelová úloha

$$(7)\ \begin{cases} -(k(x)\,u'(x))' & v\ \Omega = (0,L) \\ u(0) = U \\ -k(L)u'(L) = T \end{cases}$$

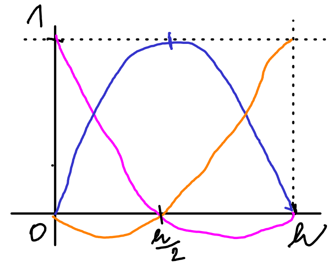
$$k(x) = \begin{cases} k_1 & na\ (0,M) \\ k_2 & na\ (M,L) \end{cases}$$

a) MKP síť respektuje skok v materiálu (M je bodem diskretizace)
$\Rightarrow$ na každém elementu je $k(x)$ konstantní
$\Rightarrow$ lokální matice $\frac{k_i}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

b) MKP nerespektuje skok (M je uvnitř elementu),
pro tento element – lokální matice $\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx \cdot \frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$= \left[\int_{x_{i-1}}^{M} k_1 \, dx + \int_{M}^{x_i} k_2 \, dx \right] \cdot \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[k_1 (M - x_{i-1}) + k_2 (x_i - M) \right] \cdot \text{—//—}$$



Kvadratické konečné prvky

$$a_E(\varphi_1, \varphi_2) = \int_E k \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_2' \, dx$$

k pro jednoduchost konstantní na elementu

kvadratické funkce pro element $E = (0, h)$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - h/2)(x - h)}{(0 - h/2)(0 - h)} = \frac{2}{h^2} \left(x^2 - \frac{3}{2} h x + \frac{h^2}{2} \right)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - 0)(x - h)}{(h/2 - 0)(h/2 - h)} = \ldots$$

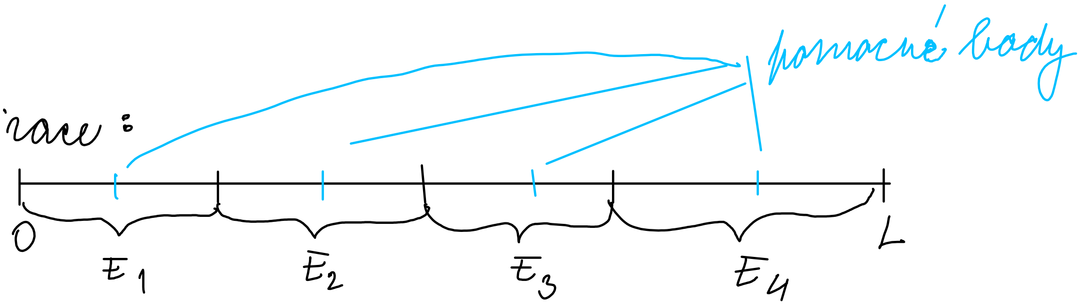
$$\varphi_3(x) = \frac{(x - 0)(x - h/2)}{(h - 0)(h - h/2)} = \ldots$$

$$\varphi_1'(x) = \frac{2}{h^2} \left(2x - \frac{3}{2} h \right)$$

$$\varphi_2'(x) = -\frac{4}{h^2} (2x - h)$$

$$\varphi_3'(x) = \frac{2}{h^2} \left(2x - \frac{h}{2} \right)$$

př. diskretizace:



$\rightarrow$ rozšířená matice soustavy o rozměrech 9×9,
4 elementy diskretizace,
hodnota v $x=0$ známa $\rightarrow$ 8 neznámých

lokální matice pro $E = (0,h)$; $a(u,v) = \int k u'v'$

$$a_E = k_E \cdot \begin{bmatrix} \int_E \varphi_1'\varphi_1'\,dx & \cdot & \cdot \\ \int_E \varphi_1'\varphi_2'\,dx & \cdot & \cdot \\ \int_E \varphi_1'\varphi_3'\,dx & \cdot & \int_E \varphi_3'\varphi_3'\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= k_E \cdot \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3h}$$

lokální pravá strana pro E; $b(v) = \int_E f v$

$$b_E = f_E \cdot \begin{bmatrix} \int_E \varphi_1\,dx \\ \int_E \varphi_2\,dx \\ \int_E \varphi_3\,dx \end{bmatrix} = f_E \begin{bmatrix} h/6 \\ 2h/3 \\ h/6 \end{bmatrix}$$

pro jednoduchost konstantní na elementu

POZOR, součástí a, b mohou být i další členy.