CVIČENÍ 4 2.3.2021

- FDM pro 1d úlohu s konvektivním členem
- 2d FDM
- aproximace řešení 1d difúzní úlohy pomocí polynomiální báze

FDM pro 1d úlohu s konvektivním členem

$$\begin{cases} -k u''(x) + D u'(x) = f & x \in (0, L) \\ u(0) = U_0 \\ u(L) = U_L \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k u''(x) + D u'(x) = f & x \in (0, L) \\ u(0) = U \\ -k u'(L) = T \end{cases}$$

+ aproximace členu $D u'(x)$ pomocí
  - centrálních
  - zpětných
  - dopředných

diferencí.

ZPĚTNÉ: $D \cdot \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$

(DOPŘEDNÉ naopak)

$\Rightarrow$ upravíme hlavní a −1. diagonálu matice soustavy

CENTRÁLNÍ: $D \cdot \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$

$\Rightarrow$ obě vedlejší diagonály

aproximace řešení 1d difuzní úlohy pomocí polynomiální báze

$$\begin{cases} -k\,u''(x) = f & x \in (0,L) \\ u(0) = U & \\ -k\,u'(L) = T & \end{cases}$$

$\rightarrow$ najděte aproximaci funkce $u(x)$ v bázi $\{1, x, x^2, x^3\}$

$$u(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 x^3$$
$$u(0) = a_0 = U$$
$$u(x) = U + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 x^3$$

$\Rightarrow$ 3 neznámé (a_1, a_2, a_3)

Variační formulace:

$$\int_0^L k\,u'(x)\,v'(x)\,dx = \int_0^L f(x)\,v(x)\,dx - T v(L)$$

$$k\int_0^L \left(U' + a_1 p_1'(x) + a_2 p_2'(x) + a_3 p_3'(x)\right) v'(x)\,dx = f\int_0^L v(x)\,dx - T v(L)$$

$\rightarrow$ soustava s maticí $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$

PRO DANÉ j — pravá strana $b \in \mathbb{R}^3$

$$k\int_0^1 U v'(x) + \sum_{i=1}^3 a_i \int_0^L k\, p_i'(x)\, p_j'(x)\,dx = f\int_0^L p_j'(x)\,dx - T v(L)$$

3 rovnice (pro $j \in \{1,2,3\}$):

$$k\sum_{i=1}^3 a_i \underbrace{\int_0^L p_i'(x)\,p_j'(x)\,dx}_{} = f\int_0^L p_j'(x)\,dx - \overbrace{k\int_0^1 U' p_j'(x)\,dx}^{0} - T\,p_j(L)$$

$$n_1(x) = x \qquad n_1'(x) = 1$$
$$n_2(x) = x^2 \qquad n_2'(x) = 2x$$
$$n_3(x) = x^3 \qquad n_3'(x) = 3x^2$$

1. rovnice:
$(j=1)$

$$LHS = k\left(a_1 \cdot \underbrace{\int_0^L 1 \cdot 1}_{L} + a_2 \underbrace{\int_0^L 1 \cdot 2x}_{L^2} + a_3 \underbrace{\int_0^L 1 \cdot 3x^2}_{L^3}\right)$$

$\vdots$

$$RHS = \begin{bmatrix} f\int 1\,dx - TL \\ f\int 2x\,dx - TL^2 \\ f\int 3x^2 dx - TL^3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{array}$$