NM2 cvičení 5 9.3.2021

minule:

$$(P)\begin{cases} -k\,u''(x) = f(x) & x\in(0,L) \\ u(0) = U \\ -k\,u'(L) = T \end{cases}$$

$\{1, \underbrace{x, x^2, x^3}_{\text{testovací funkce}}\}$ → Dik. dif. fce

- variační formulace
- řešení vycházející z variační formulace (polynomiální aproximace)

Variační formulace – rekapitulace

- testovací funkce
- variační vs. diferenciální formulace

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } u\in C^2((0,L)) \wedge u(0)=U: \\ \underbrace{\int_0^L k\,u'(x)\,v'(x)\,dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^L f(x)\,v(x)\,dx - T\,v(L)}_{b(v)} \quad \forall v\in V \end{cases}$$

① hladká vstupní data ⟹ existuje klasické řešení (řešení (P) $u\in C^2((0,L))$)

② u je řešením (P) ⟹ u je řešením (V)

③ $\left.\begin{array}{l} u \text{ je řešením (V)} \\ u\in C^2((0,L)) \end{array}\right\}$ ⟹ u je řešením (P)

- abstraktní rámec $U_D = V + u_D$

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } u\in U_D: \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v\in V \end{cases}$$

- vlastnosti bilineární formy $a: V\times V\to\mathbb{R}$
  - omezenost $\exists M>0: |a(u,v)| \le M\cdot\|u\|\cdot\|v\| \quad \forall u,v\in V$
  - V-eliptická $\exists m>0: a(u,u) \ge m\cdot\|u\|^2 \quad \forall u\in V$

$u \in L^2 = W_{0,2}$

$u \in L^2 \wedge u' \in L^2 \Rightarrow u \in W_{1,2} = H^1$

Variační formulace dalších úloh

o viz. kat: reaktivní člen
konvektivní člen
Robinova o.p.

$$(7)\begin{cases} -(k(u)u')' = \underbrace{f}_{b(v)} & x \in (0,L) \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

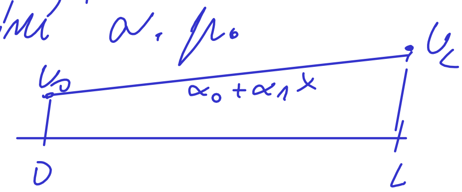
$$LHS = \int_0^L -(k(u)u')'v\,dx = \underbrace{\int_0^L k(u)u'v'\,dx}_{a(u,u,v)} \overbrace{-\left[k(u)u'v\right]_0^L}^{\to b(v)}$$

$\rightarrow$ variační identita $a(u,u,v) = b(v)$

Polynomiální aproximace řešení dalších úloh

$$(7)\begin{cases} -k u''(x) = f(x) & x \in (0,L) \\ u(0) = U_0 \\ u(L) = U_L \end{cases}$$

„zakladní" o. p.



$$\tilde{u} \in Lin\{\overbrace{1, x}, x^2, x^3\}$$

$$Lin\{1, x, x(x-L), x^2(x-L)\}$$

$$u(x) \approx \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

$\alpha_0 = U_0$

$\alpha_1 = \dfrac{U_L - U_0}{L}$

x^2, x^3

Aproximace polynomy libovolného stupně

$$(P)\begin{cases} k\,u''(x) = f \\ u(0) = 0 \\ -k\,u'(L) = T \end{cases} \qquad \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

prvek matice:

$$a(p_i, p_j) = \int_0^L k (x^i)'(x^j)'\,dx =$$

$$= \int_0^L k\, i\, x^{i-1}\, j\, x^{j-1}\,dx = k\,i\,j \int x^{i+j-2}\,dx =$$

$$= k\,i\,j \;\frac{1}{i+j-1} L^{i+j-1}$$

prvek RHS:

$$b(p_j) = f \int_0^L p_j\,dx - T\,p_j(L)$$

$$b(x^j) = f\,\frac{L^{j+1}}{j+1} - T\,L^j$$

$$(P)\begin{cases} k\,u''(x) + k_0 u(x) = f \\ u(0) = 0 \\ -k\,u'(L) = T \end{cases}$$

$\to$ variační identita: $a(u,v) + \underbrace{a_0(u,v)}_{\text{výše}} = b(v)$

přičteme k prvkům matice:

$$a_0(p_i, p_j) = \int_0^L k_0\, x^{i+j} = k_0\left[\frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1}\right]_0^L = \underline{\frac{k_0}{i+j+1} L^{i+j+1}}$$

$$(P)\begin{cases} k\,u''(x) + D\,u'(x) = f \\ u(0) = 0 \\ -k\,u'(L) = T \end{cases}$$

$\longrightarrow$ variační identita $a(u,v) + a_D(u,v) = b(v)$

příspěvek z konvektivního členu:

$$a_D(\varphi_i,\varphi_j) = \int_0^L D\,\varphi_i' \cdot \varphi_j \, dx = D\int_0^L i\,x^{i-1}x^j =$$

$$= D i \left[\frac{1}{i+j}\, x^{i+j}\right]_0^L = D i \frac{1}{i+j} L^{i+j}$$