CVIČENÍ 8 30.3.2021

Norma chyby MKP řešení

L_2, H^1

$$(P)\begin{cases} -u'' = 1 & \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

analytické řešení

MKP řešení s krokem h

$\rightarrow$ spočítat $\| u - u_h \|_{L_2}$

a

$\| u - u_h \|_{H^1}$

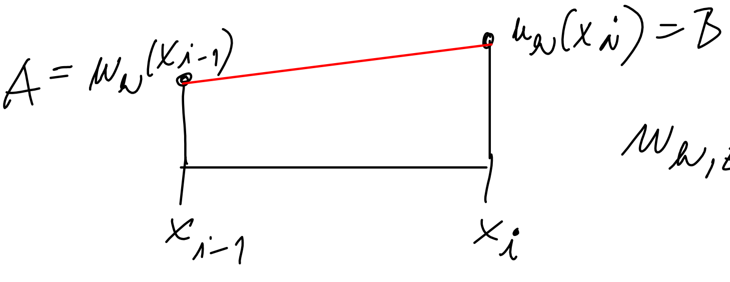
$\rightarrow$ zvolíme různá h, znázorníme závislost norem na h

L_2 norma

$$\| u - u_h \|^2_{L_2} = \int_0^1 \left(u(x) - u_h(x) \right)^2 dx =$$

$$(\text{přes elementy}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big(u(x) - \underbrace{u_h(x)}_{\text{lineární na elementu}} \Big)^2 dx$$

pro konkrétní element $E_i = (x_{i-1}, x_i)$



$$u_{h,E_i}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (B - A) + A$$

$\Rightarrow \forall E_i$ vyjádříme $f(x) = \left(u(x) - u_{h,E_i}(x)\right)^2$
a zintegrujeme přes E_i,
sečteme, odmocníme

<u>H^1 norma</u>

$$\|u - u_h\|^2_{H^1} = \underbrace{\int_0^1 (u(x) - u_h(x))^2 dx}_{\|u-u_h\|^2_{L_2}} + \underbrace{\int_0^1 (u'(x) - u_h'(x))^2 dx}_{\|u'-u_h'\|^2_{L_2}}$$

$$= \overbrace{\|u - u_h\|^2_{L_2}}^{\text{VÝŠE}} + \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'(x) - u_h'(x))^2 dx$$

pro element E_i : $u'_{h,E_i}(x) = \dfrac{B-A}{x_i - x_{i-1}}$