Úkoly k získání zápočtu

Ke každému z následujících úkolů vypracujte krátký report obsahující požadované výsledky (grafy, tabulky, atd.) a vaše slovní komentáře. K reportu přiložte i kódy, použijte libovolný programovací jazyk. Případně můžete kód společně s výstupy odevzdat v podobě Jupyter notebooku. Při zpracování úkolů můžete libovolně využívat kódy ze cvičení.

1. úkol (do 11.4.) - Homogenizace materiálu:

Pomocí MKP (lineární konečné prvky) vyřešte úlohu

$$\begin{cases} -\left(ku'\right)' &= 1 \qquad \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$$

s periodickým materiálem $k(x) = k_m$ pro $x \in (h(m-1), hm)$, kde $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$, $h = \frac{1}{M}$,

$$k_m = \begin{cases} k_1 & \text{pro } m \text{ liché,} \\ k_2 & \text{pro } m \text{ sudé.} \end{cases}$$

Zvolte konkrétní hodnoty, např. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $M = 20$, a vyzkoušejte následující varianty:

a) pravidelná síť s krokem h (materiál na každém elementu bude konstantní)

b) pravidelná síť s krokem $2h$ (materiál každém elementu bude složen ze dvou různých částí) MKP soustavu sestavte standardně, tj. $a_{ij} = \int_0^1 k(x)\,\phi_i'\phi_j' \mathrm{d}x$, což pro lineární konečné prvky vede na úlohu s konstantním materiálem $\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x$.

c) opět pravidelná síť s krokem $2h$, tentokrát ale volte konstantní (homogenizovaný) materiál $k_h = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{k(x)} \mathrm{d}x}$

Všechny tři varianty porovnejte s analytickým řešením. Můžete využít připravené analytické řešení `skoky_analyt.jpg` a příslušný kód. V reportu uveďte, zda výsledné porovnání odpovídá vašemu očekávání.

2. úkol (do 25.4.) - Adaptivní zjemňování sítě:

Pomocí MKP (lineární konečné prvky) vyřešte úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) &= \exp\left(-100\,(x-0.25)^2\right) \qquad \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$$

Použijte dělení na 5 elementů o různých velikostech. Pro každý element vypočtěte indikátor chyby

$$\eta_E = \left\| h_E \left(f + u_h''\right) \right\|_{L^2(E)} = \left\| h_E f \right\|_{L^2(E)}$$

(podle vzorce (4.34) ze skript). Jeden nebo více elementů s nejvyššími indikátory chyby rozdělte na polovinu (přidáním nového uzlu do středu elementu) a opět proveďte MKP řešení. Tento postup několikrát zopakujte.

Pokles chyby při zjemňování sítě vhodně znázorněte (tabulkou/graficky). Místo přesného řešení můžete počítat chybu oproti řešení na velmi jemné pravidelné síti.

3. úkol (do 9.5.) - Konvergence MKP

Pomocí 2d MKP vyřešte úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\nabla u\left(x\right)\right) & = & 2\sin\left(x_1\right)\sin\left(x_2\right) & \text{v } \Omega = (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u\left(x\right) & = & 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Použijte pravidelnou diskretizaci na $2N^2$ pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. MKP řešení u_h vizuálně porovnejte s analytickým řešením $u\left(x\right) = \sin\left(x_1\right)\sin\left(x_2\right)$.

Dále úlohu řešte pro různé hodnoty N. Vždy vypočtěte normy chyby $\left\|u_h - u\right\|_{2,0,\Omega}$ a $\left\|u_h - u\right\|_{2,1,\Omega}$. Pokles chyby při zvyšování N znázorněte pomocí tabulky nebo grafu konvergence. Pro výpočet příspěvků $\left\|u_h - u\right\|_{2,0,T}$ a $\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}u_h - \frac{\partial}{\partial x_i}u\right\|_{2,0,T}$ z jednotlivých trojúhelníkových elementů T můžete použít pomocnou funkci `normT.m`.