Variační formulace 1d úloh a metoda konečných prvků
Řešené příklady

SD

18. dubna 2019

1 Variační formulace 1d úloh

Úloha 1. Uvažujme Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\left(\left(2+\sin x\right)\cdot u'\left(x\right)\right)' + 3\cdot u'\left(x\right) & = & x^2 & \text{v } \Omega = (K, L) \\ u\left(K\right) & = & 4 & \\ u\left(L\right) & = & 5 & \end{array} \right. ,$$

kde $K \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $K < L$. Odvoďte variační formulaci.

Řešení 1. Uvažujme prostor $U = H^1\left(\Omega\right)$, viz [1, Definice 3.15].
Pro všechny testovací funkce $v \in V = \{w \in U : w\left(K\right) = w\left(L\right) = 0\}$ platí:

$$\underbrace{\int_K^L -\left(\left(2+\sin x\right)\cdot u'\left(x\right)\right)'\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x}_{\downarrow\ \text{per partes}\ \uparrow} + \int_K^L 3\cdot u'\left(x\right)\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int_K^L x^2\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\overbrace{\int_K^L \left(2+\sin x\right)\cdot u'\left(x\right)\cdot v'\left(x\right)\,\mathrm{d}x - \left[\left(2+\sin x\right)\cdot u'\left(x\right)\cdot v\left(x\right)\right]_K^L} + \int_K^L 3\cdot u'\left(x\right)\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int_K^L x^2\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{Jelikož } v \in V,\ \text{ platí } v\left(K\right) = v\left(L\right) = 0.$$

$$\underbrace{\int_K^L \left(2+\sin x\right)\cdot u'\left(x\right)\cdot v'\left(x\right)\,\mathrm{d}x + \int_K^L 3\cdot u'\left(x\right)\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_K^L x^2\cdot v\left(x\right)\,\mathrm{d}x}_{b(v)}$$

Slabým řešením okrajové úlohy je funkce u, pro kterou platí:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in U_D = \{w \in U : w\left(K\right) = 4 \wedge w\left(L\right) = 5\} \\ a\left(u, v\right) = b\left(v\right) \quad \forall v \in V \end{array} \right. .$$

Úloha 2. Uvažujme Neumannovu okrajovou úlohu

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -u''\left(x\right) + u\left(x\right) & = & 0 & \text{v } \Omega = (3, 8) \\ -u'\left(3\right) & = & 5 & \\ u\left(8\right) & = & 0 & \end{array} \right. .$$

Odvoďte variační formulaci.

Řešení 2. Uvažujme prostor $U = H^1\left(\Omega\right)$, viz [1, Definice 3.15].

Pro všechny testovací funkce $v \in V = \{w \in U : w(8) = 0\}$ platí:

$$\underbrace{\int_3^8 -u''(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{\downarrow \text{per partes} \uparrow} + \int_3^8 u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^8 0 \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overbrace{\int_3^8 u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x - [u'(x) \cdot v(x)]_3^8} + \int_3^8 u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_3^8 u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x - \left(u'(8) \cdot \underbrace{v(8)}_{=0} \underbrace{-u'(3)}_{=5} \cdot v(3) \right) + \int_3^8 u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\underbrace{\int_3^8 u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^8 u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{5 \cdot v(3)}_{b(v)}$$

Slabým řešením okrajové úlohy je funkce u, pro kterou platí:

$$\begin{cases} u \in U_D = V \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases}.$$

Úloha 3. Uvažujme Newtonovu okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -3 \cdot u''(x) &= f(x) & \text{v } \Omega = (0, L) \\ u(0) &= 1 & \\ -3 \cdot u'(L) &= \alpha(u(L) - 7) & \end{cases},$$

kde $L \in \mathbb{R}^+$ a $f \in L_2(\Omega)$, viz [1, Definice 3.14]. Odvoďte variační formulaci.

Řešení 3. Uvažujme prostor $U = H^1(\Omega)$, viz [1, Definice 3.15].

Pro všechny testovací funkce $v \in V = \{w \in U : w(0) = 0\}$ platí:

$$\underbrace{\int_0^L -3 \cdot u''(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{\downarrow \text{per partes} \uparrow} = \int_0^L f(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overbrace{\int_0^L 3 \cdot u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x - [3u'(x) \cdot v(x)]_0^L} = \int_0^L f(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^L 3 \cdot u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x - \left(\underbrace{3 \cdot u'(L)}_{=-\alpha(u(L)-7)} \cdot v(L) - u'(0) \cdot \underbrace{v(0)}_{=0} \right) = \int_0^L f(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^L 3 \cdot u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x + (\alpha(u(L) - 7) \cdot v(L)) = \int_0^L f(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underbrace{\int_0^L 3 \cdot u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha \cdot u(L) \cdot v(L)}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^L f(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x + 7\alpha \cdot v(L)}_{b(v)}$$

Slabým řešením okrajové úlohy je funkce u, pro kterou platí:

$$\begin{cases} u \in U_D = \{w \in U : w(0) = 1\} \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases}.$$

2 Metoda konečných prvků v 1d

Úloha 4 (Pokračování úlohy 1)**.** Uvažujme prostor $U = H^1(\Omega)$, kde $\Omega = (K, L)$, prostor testovacích funkcí $V = \{w \in U : w(K) = w(L) = 0\}$ a variační formulaci

$$\left\{\begin{array}{l} u \in U_D = \{w \in U : w(K) = 4 \wedge w(L) = 5\} \\ \underbrace{\int\limits_K^L (2+\sin x)\cdot u'(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_K^L 3\cdot u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int\limits_K^L x^2\cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{b(v)} \quad \forall v \in V \end{array}\right. .$$

Určete lokální MKP matici A_E a lokální pravou stranu $\mathbf{b}_E$ pro element $E = \langle \pi, 2\pi \rangle$. Použijte lineární konečné prvky. Předpokládejte, že $K < \pi$ a $L > 2\pi$.

Řešení 4. Snadno odvodíme, že lineární konečné prvky mají na E následující předpisy a derivace (tj. uvažujeme pouze restrikci těchto funkcí na E, mimo E je předpis jiný):

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{x-2\pi}{-\pi},\ \phi_1'(x) = -\frac{1}{\pi} \\ \phi_2(x) &= \frac{x-\pi}{\pi},\ \phi_2'(x) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Lokální matice má tvar

$$A_E = \begin{bmatrix} a_E(\phi_1,\phi_1) & a_E(\phi_2,\phi_1) \\ a_E(\phi_1,\phi_2) & a_E(\phi_2,\phi_2) \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} a_E(\phi_1,\phi_1) &= \int\limits_\pi^{2\pi} (2+\sin x)\cdot(\phi_1'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_\pi^{2\pi} 3\cdot\phi_1'(x)\cdot\phi_1(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_\pi^{2\pi}(2+\sin x)\,\mathrm{d}x - \frac{3}{\pi}\underbrace{\int\limits_\pi^{2\pi}\phi_1(x)\,\mathrm{d}x}_{=\pi/2\,(\text{obsah }\triangle)} = \frac{1}{\pi^2}\left[2x-\cos x\right]_\pi^{2\pi} - \frac{3}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi^2}\underbrace{(4\pi - \cos(2\pi) - 2\pi + \cos(\pi))}_{=2\pi-2} - \frac{3}{2} \\ a_E(\phi_1,\phi_2) &= \int\limits_\pi^{2\pi} (2+\sin x)\cdot\phi_1'(x)\cdot\phi_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\pi^{2\pi} 3\cdot\phi_1'(x)\cdot\phi_2(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{\pi^2}(2\pi-2) - \frac{3}{2} \\ a_E(\phi_2,\phi_1) &= \int\limits_\pi^{2\pi} (2+\sin x)\cdot\phi_2'(x)\cdot\phi_1'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\pi^{2\pi} 3\cdot\phi_2'(x)\cdot\phi_1(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{\pi^2}(2\pi-2) + \frac{3}{2} \\ a_E(\phi_2,\phi_2) &= \int\limits_\pi^{2\pi} (2+\sin x)\cdot(\phi_2'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_\pi^{2\pi} 3\cdot\phi_2'(x)\cdot\phi_2(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi^2}(2\pi-2) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Lokální pravá strana má tvar

$$\mathbf{b}_E = \begin{bmatrix} b_E(\phi_1) \\ b_E(\phi_2) \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} b_E(\phi_1) &= \int_\pi^{2\pi} x^2 \cdot \phi_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} x^2 \cdot \left(\frac{x-2\pi}{-\pi}\right)\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} -\frac{x^3}{\pi} + 2x^2 \mathrm{d}x = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4\pi} + 2\frac{x^3}{3}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{16\pi^4}{4\pi} + \frac{16\pi^3}{3} + \frac{\pi^4}{4\pi} - \frac{2\pi^3}{3} = \frac{11}{12}\pi^3 \\ b_E(\phi_2) &= \int_\pi^{2\pi} x^2 \cdot \phi_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} x^2 \cdot \left(\frac{x-\pi}{\pi}\right)\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} \frac{x^3}{\pi} - x^2 \mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^4}{4\pi} - \frac{x^3}{3}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{16\pi^4}{4\pi} - \frac{8\pi^3}{3} - \frac{\pi^4}{4\pi} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{17}{12}\pi^3 \end{aligned}$$

Úloha 5 (Pokračování úlohy 2)**.** Uvažujme prostor $U = H^1(\Omega)$, kde $\Omega = (3,8)$, prostor testovacích funkcí $V = \{w \in U : w(8) = 0\}$ a variační formulaci

$$\begin{cases} u \in V \\ \underbrace{\int_3^8 u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^8 u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{5 \cdot v(3)}_{b(v)} \quad \forall v \in V \end{cases} .$$

Určete rozšířenou MKP matici A a rozšířený vektor pravé strany $\mathbf{b}$ odpovídající diskretizaci $\mathcal{T} = \{\langle 3,5\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 6,8\rangle\}$. Použijte lineární konečné prvky.

Řešení 5. Nejprve vyjádříme $a_E(\phi_i, \phi_j)$ pro obecný element E. Všimneme si, že v případě této bilineární formy lze použít substituci na element $E = \langle 0, h\rangle$ (viz geometrický význam integrálu). Na tomto elementu mají lineární konečné prvky následující předpisy a derivace:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{h},\ \phi_1'(x) = -\frac{1}{h} \\ \phi_2(x) &= \frac{x}{h},\ \phi_2'(x) = \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Výpočet si dále zjednodušíme díky povšimnutí, že $a_E(\phi_1, \phi_1) = a_E(\phi_2, \phi_2)$ (opět viz geometrický význam integrálu).

$$\begin{aligned} a_E(\phi_1,\phi_1) = a_E(\phi_2,\phi_2) &= \int_0^h (\phi_2'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^h (\phi_2(x))^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^h \frac{1}{h^2}\mathrm{d}x + \int_0^h \frac{x^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{h} + \left[\frac{x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \\ a_E(\phi_1,\phi_2) = a_E(\phi_2,\phi_1) &= \int_0^h \phi_1'(x) \cdot \phi_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^h \phi_1(x) \cdot \phi_2(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^h -\frac{1}{h^2}\mathrm{d}x + \int_0^h \frac{x}{h} - \frac{x^2}{h^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{h} + \left[\frac{x^2}{2h} - \frac{x^3}{3h^2}\right]_0^h = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \end{aligned}$$

Jednotlivé lokální matice získáme dosazením délek příslušných elementů:

$$\begin{aligned} A_{\langle 3,5\rangle} = A_{\langle 6,8\rangle} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} + \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{2}{6} & \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \\ A_{\langle 5,6\rangle} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{1} + \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{1} + \frac{1}{6} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Globální MKP matici sestavíme z lokálních matic:

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 7+8 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 8+7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Sestavení lokálních vektorů pravé strany je v tomto případě snadné (jediný nenulový příspěvek je dán hodnotou Neumannovy podmínky):

$$\mathbf{b}_{\langle 3,5\rangle} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_{\langle 5,6\rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_{\langle 6,8\rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Globálním vektorem pravé strany je tedy

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Úloha 6 (Pokračování úlohy 3)**.** Uvažujme bilineární formu

$$a(u,v) = \int_0^L 3 \cdot u'(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha \cdot u(L) \cdot v(L),$$

kde $u, v \in H^1((0,L))$. Určete lokální MKP matici A_E pro element $E = \langle K, L\rangle$, $0 < K < L$. Použijte lineární konečné prvky.

Řešení 6. Snadno odvodíme, že lineární konečné prvky mají na E následující předpisy a derivace:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{x-L}{K-L},\ \phi_1'(x) = \frac{1}{K-L} \\ \phi_2(x) &= \frac{x-K}{L-K},\ \phi_2'(x) = \frac{1}{L-K} \end{aligned}$$

Lokální matice má tvar

$$A_E = \begin{bmatrix} a_E(\phi_1,\phi_1) & a_E(\phi_2,\phi_1) \\ a_E(\phi_1,\phi_2) & a_E(\phi_2,\phi_2) \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} a_E(\phi_1,\phi_1) &= \int_K^L 3 \cdot (\phi_1'(x))^2\,\mathrm{d}x + \alpha \cdot \underbrace{(\phi_1(L))^2}_{=0} = 3\left(\frac{1}{K-L}\right)^2 (L-K) = \frac{3}{L-K} \\ a_E(\phi_1,\phi_2) = a_E(\phi_2,\phi_1) &= \int_K^L 3 \cdot \phi_1'(x) \cdot \phi_2'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha \cdot \underbrace{\phi_1(L)}_{=0} \cdot \underbrace{\phi_2(L)}_{=1} = \frac{3}{K-L} \\ a_E(\phi_2,\phi_2) &= \int_K^L 3 \cdot (\phi_2'(x))^2\,\mathrm{d}x + \alpha \cdot (\phi_2(L))^2 = \frac{3}{L-K} + \alpha \end{aligned}$$

Úloha 7 (Pokračování úlohy 3)**.** Uvažujme lineární funkcionál

$$b(v) = \int_0^L f(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x + 7\alpha \cdot v(L),$$

kde $v \in H^1((0,L))$ a $f(x) = \cos(x)$. Určete lokální vektor pravé strany $\mathbf{b}_E$ pro element $E = \langle 0, K\rangle$, $0 < K < L$. Použijte lineární konečné prvky.

Řešení 7. Snadno odvodíme, že lineární konečné prvky mají na E následující předpisy a derivace:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= -\frac{x}{K}+1,\ \phi_1'(x)=-\frac{1}{K}\\ \phi_2(x) &= \frac{x}{K},\ \phi_2'(x)=\frac{1}{K}\end{aligned}$$

Lokální pravá strana má tvar

$$\mathbf{b}_E = \begin{bmatrix} b_E(\phi_1) \\ b_E(\phi_2) \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}
b_E(\phi_1) &= \int_0^K \cos(x)\cdot\phi_1(x)\,\mathrm{d}x + 7\alpha\cdot\overbrace{\phi_1(L)}^{=0\,(L\notin E)} = -\frac{1}{K}\overbrace{\int_0^K x\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x}^{[x\cdot\sin(x)]_0^K-\int_0^K 1\cdot\sin(x)\mathrm{d}x} + \int_0^K \cos(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{K}[x\cdot\sin(x)]_0^K + \frac{1}{K}[-\cos(x)]_0^K + [\sin(x)]_0^K = -\frac{\cos(K)}{K}+\frac{1}{K}\\
b_E(\phi_2) &= \int_0^K \cos(x)\cdot\phi_2(x)\,\mathrm{d}x + 7\alpha\cdot\overbrace{\phi_2(L)}^{=0\,(L\notin E)} = \frac{1}{K}\int_0^K x\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{K}[x\cdot\sin(x)]_0^K - \frac{1}{K}[-\cos(x)]_0^K = \sin(K)+\frac{\cos(K)}{K}-\frac{1}{K}
\end{aligned}$$

Reference

[1] Blaheta, R. Matematické modelování a metoda konečných prvků. 2012. URL: http://mi21.vsb.cz/modul/matematicke-modelovani-metoda-konecnych-prvku-numericke-metody-2