Geometria

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Dobos Sándor, Hraskó András, Kiss Géza, Surányi László

2024. június 9.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2024

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Geometriai szerkeszthetőség

1.1. A geometriai szerkeszthetőségről

Ismeretes, hogy régóta (lásd „már az ókori görögök is”) gondolkodtak azon, hogy ha adott egy kocka, hogyan lehetne megkétszerezni a térfogatát, azaz megszerkeszteni egy olyan kocka élét, amelynek térfogata kétszerese az eredetinek. Van olyan elképzelés is, hogy a kérdés egy „produktív félreértés” következménye: a szentély, amelyhez jóslatért fordultak, egy kocka alakú oltár kétszeresre nagyítására szólított föl, de ezen az alapél kétszeresre nagyítását értette.

De térjünk vissza a „produktívan félreértett” feladathoz. A fenti formájában még korántsem egyértelmű: nem mondja meg, hogy milyen eszközöket használhatunk a szerkesztéshez. Ennek megfelelően az immár megnehezített geometriai feladat megoldására a legkülönbözőbb segédeszközöket találták ki.

Első dolgunk tehát annak a tisztázása, hogy milyen eszközöket és azokkal milyen lépéseket engedünk meg a szerkesztés folyamán. Végig síkbeli szerkesztésekkel foglalkozunk. „Euklideszi” szerkesztésnek azokat a szerkesztéseket nevezzük, amelyekhez csak egy egyélű vonalzót és körzőt használunk. (A vonalzó egyélű, ebből következik, hogy párhuzamosok szerkesztéséhez nem illeszthető össze egy másikkal a szokott módon. De ismeretes általános iskolai tanulmányainkból, hogy az euklideszi síkon az így leszűkített eszközökkel is szerkeszthető adott egyenessel párhuzamos egyenes adott ponton keresztül.)

Tisztáznunk kell még, hogy mit tekintünk megengedett lépésnek:

1) Felvehetünk a síkon egy tetszőleges pontot.

2) Két pontra illeszthetünk egy egyenest.

3) Egy adott szakaszt „körzőnyílásba vehetünk", azaz egy már megszerkesztett pont körül egy már megszerkesztett szakaszhosszúsággal mint sugárral kört húzhatunk.

Ezen kívül megszerkeszthetjük

4a) két egyenes,

4b) egy egyenes és egy kör,

4c) két kör

metszéspontját. Euklideszi szerkesztésnek azokat az eljárásokat nevezzzük, amelyek *véges sok* ilyen lépésből állnak.

Tekintsük most a „kockakettőzési" feladatot. Ebben az esetben adott még egy szakasz is. Ennek hosszát nyugodtan vehetjük egységnek. A kérdés most az, hogy szerkeszthető-e véges sok, a fent leírt lépéssel egy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakasz.

A válasz nyitja az, hogy a *geometriai* kérdést *algebria* kérdéssé alakítjuk át. (Itt érdemes megjegyezni, hogy általában is sokszor segít az, ha egy problémát arról a nyelvről, amelyen megfogalmazódott, „lefordítunk" egy másik nyelvre, ahogyan itt az eredetileg geometriai problémát algebrai problémára fordítjuk le.)

Első, még nem egészen pontos megfogalmazással: azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen algebrai műveleteket kell elvégeznünk ahhoz, hogy egy-egy szerkesztési művelet eredményét algebrailag leírhassuk. A pontosabb megfogalmazáshoz szükségünk lesz a *számtest* definíciójára. Ez a fent említett „fordítás" kulcspontja, ez a definíció teszi lehetővé, hogy algebrai problémaként „nézzünk rá" a szerkeszthetőség kérdésére.

Definíció. A valós számok egy részhalmazát *számtestnek* nevezzük, ha tartalmazza az 1-et, továbbá zárt az összeadásra, kivonásra, szorzásra és a nulla kivételével az osztásra.

Ilyen számtest például a racionális számok halmaza. Valójában könnyen belátható, hogy ez a legszűkebb számtest, amely tartalmazza az 1-et. Ugyanis korlátlanul lehet benne összeadni, kivonni és bármely nullától különböző számmal osztani, ezért minden számtest, amely tartalmazza az 1-et, tartalmazza az összes racionális számot. (Megjegyzendő, hogy ha a számtest a nullán kívül is tartalmaz elemet, akkor tartalmazza az 1-et is, hiszen tartalmazza ennek a számnak önmagával vett hányadosát is.)

Ezek után már egy fokkal pontosabban fogalmazhatunk. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy melyik az a legszűkebb számtest, amelyet egy-egy szerkesztési lépéssel „elértünk". Ezen a következőt értjük. Először is felveszünk egy koordinátarendszert, amelynek egysége az adott kocka élének hossza. A későbbiekben azt nézzük, hogy az éppen megszerkesztett alakzatot (vagy pontot) milyen számtestből vett számokkal tudjuk jellemezni. Egy pontot a koordinátáival, egy egyenest vagy kört az egyenletével, egy szakaszt a hosszával jellemzünk. Mindig a lehető legszűkebb számtestre gondolunk, amelynek elemeivel az illető alakzat jellemezhető. A $\sqrt{2}x+3\sqrt{8}=0$ egyenletü egyenes például ilyen alakban is jellemezhető: $x+6y=0$, tehát ennek megszerkesztésével még nem léptünk ki a racionális számok Q testéből.

A kiindulásnál tehát adott egy egységnyi hosszúságú szakasz. Ezzel a racionális számok számtestét „értük el". Nézzük most az 1) lépést: felveszünk egy tetszőleges pontot a síkon. Mivel a felvett pont tetszőleges, a szerkesztésnek „működnie" kell akkor is, ha ennek a pontnak a koordinátái racionális számok. Ez a későbbiekben is igaz, amikor ezt a lépést használjuk. (Itt kihasználjuk, hogy a sík bármely kis részén van olyan pont, amelynek mindkét koordinátája racionális.) Ezzel a lépéssel tehát nem bővül a szerkesztéssel elérhető számtest.

Nem bővül a számtest a 2) lépésnél sem: ha két pontot összekötünk egy egyenessel, a kapott egyenes egyenlete felírható úgy, hogy a két pont koordinátáival csak alapműveleteket végzünk: összeadást, kivonást és szorzást (valójában még osztani sem kell).

A 3) lépéshez szükségünk van egy már megszerkesztett szakasz hosszának a kiszámítására. Szerencsére egy kör egyenletének a felírásához csak a hossz négyzetére van szükség, így most sem lépünk túl az alapműveleteken. Most egy olyan kör egyenletét kell felírnunk, amelyik középpontjának mindkét koordinátája a már „elért" számtestbe tartozik, és ugyanez igaz a sugár hosszára is. Itt sem lépünk túl az alapműveleteken.

4a)-nál két egyenes metszéspontjának a koordinátáit kell kiszámítanunk, a két egyenes egyenletének ismeretében. Ez ismét csak a négy alapműveletet követeli meg.

Marad még 4b) és 4c). Az itt megszerkesztett metszéspont koordinátáit mindkét esetben úgy számíthatjuk ki, hogy a két alakzat egyenletében szereplő számokkal alapműveleteket végzünk, majd egy ezekből kapott másodfokú egyenletet oldunk meg. (L.) Ez az első olyan pont, ahol túllépünk az alapműveleteken és szükségünk van négyzetgyökvonásra is. Fontos megjegyeznünk, hogy olyan számból vonunk négyzetgyököt, amely a „már elért" számtestben van.

Mivel a szerkesztés eredményeként egy szakasz hosszát akarjuk megkapni, ezért szükségünk van egy szakaszhossz kiszámolására is. Ehhez ismét egy, a már elért számtestből vett számból kell négyzetgyököt vonnunk.

Ezért bevezetjük a következő

Jelölést: Ha T egy számtest, t e számtest egy pozitív eleme, akkor azt a legszűkebb számtestet, amely tartalmazza T-t és t négyzetgyökét, $T(\sqrt{t})$-vel jelöljük. Ilyenkor azt mondjuk, hogy T-t *bővítettük* $\sqrt{t}$-vel, a $T(\sqrt{t})$ számtestet pedig a T számtest $\sqrt{t}$-vel való *bővítésének* nevezzük. Az ilyen testbővítéseket röviden *másodfokú testbővítésnek* fogjuk nevezni.

Megjegyezzük, hogy nem engedtük meg, hogy t negatív szám legyen. Ezt a megkötést azért tettük, mert az ilyen bővítésekkel nem fogunk foglalkozni. Valójában a negatív t-k esetében is másodfokú bővítésről van szó, így például a komplex számok teste a valós számok testének az i

képzetes egységgel való másodfokú bővítése.

általában is használni fogjuk a $T(u)$ jelölést, ez azt a legszűkebb számtestet jelenti, amely tartalmazza T minden elemét és u-t is. Ilyenkor általában megköveteljük, hogy u ne legyen benne T-ben. és még általánosabban $T(u_1, ..., u_k)$ jelöli azt a legszűkebb számtestet, amely tartalmazza T minden elemét, tovább tartalmazza az összes felsorolt u_i-t.

összefoglalva eddigi eredményeinket a következőt kapjuk:

Tétel. Ha azt a legszűkebb T számtestet nézzük, amelyből vett számokkal egy adott szerkesztéssel megszerkesztett alakzat (pont, egyenes, kör vagy szakasz) jellemezhető, ezt a számtestet a racionális számtestből véges sok másodfokú bővítéssel kapjuk. Tehát T-t egy olyan $Q = Q_1, Q_2, ..., Q_m = T$ sorozat utolsó elemeként kapjuk, ahol minden Q_i-t ($i > 1$-re) úgy kapunk, hogy Q_{i-1}-t bővítjük egy pozitív t_{i-1} elemének a négyzetgyökével. (Belátható, hogy $T = Q(t_1, ..., t_{m-1})$, de erre nincs szükségünk.)

Nem nehéz belátni, hogy ha egy T számtest elemeit (mint szakaszhosszakat) meg tudjuk szerkeszteni, akkor e test minden pozitív elemének a négyzetgyökét is meg tudjuk szerkeszteni (mint szakaszhosszt) és az 1.2 feladat d) részének megoldása mutatja, hogy a $T(\sqrt{t})$ test bármely elemét meg tudjuk szerkeszteni. Igaz tehát a következő

Tétel: Egy t hosszúságú szakasz az egységből pontosan akkor szerkeszthető, ha t eleme egy olyan számtestnek, amelyet a racionális számok testéből véges sok másodfokú bővítéssel kapunk.

Első lépésként célszerű tehát azt tisztáznunk, hogy hogyan kapjuk T elemeiből $T(\sqrt{t})$-t (ahol t a T számtest pozitív eleme).

1.2. Amit tudni kell a másodfokú testbővítésekről

1.1. (S) **Kutató munka:**

Jellemezni akarjuk $Q(\sqrt{2})$, tehát a $\sqrt{2}$-t tartalmazó legszűkebb számtest elemeit, a lehető legegyszerűbb módon. Ennek a számtestnek nyilván tartalmaznia kell az $a + b\sqrt{2}$ alakú számot, ahol a és b racionális. Másrészt tartalmaznia kell két ilyen szám hányadosát is, tehát az összes $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$ alakú számot is, ahol a, b, c, d racionális számok, és c és d közül legalább az egyik nem nulla.

a) Igaz-e, hogy az ilyen alakú számok már kiadják a keresett számtest minden elemét. Azaz igaz-e, hogy az ilyen alakú számok zártak a négy alapműveletre (a nullával való osztás kivételével)?

b) Hogyan lehet a legegyszerűbben leírni $Q(\sqrt{2})$ elemeit?

1.2. Kutató munka:

a) Jellemezzük $Q(\sqrt{\frac{1}{2}})$ elemeit az 1.1 feladatban látotthoz hasonló módon!

b) Jellemezzük lehetőleg egyszerűen $Q(\sqrt{3})$ elemeit!

c) Jellemezzük lehetőleg egyszerűen $Q(\sqrt{t})$ elemeit, ahol t egy pozitív racionális szám.

d) Legyen T tetszőleges számtest, legyen t egy pozitív eleme, amelynek négyzetgyöke nincs benne T-ben. Jellemezzük lehetőleg egyszerűen a $T(\sqrt{t})$ számtest elemeit!

1.3. (S) **Kutató munka:**

a) Eleme-e $\sqrt{5}$ $Q(\sqrt{2})$-nek?

b) Létezik-e olyan u szám, amelyre igaz, hogy $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = Q(u)$? Vagyis: bővítjük a racionális számok számtestét $\sqrt{2}$-vel és $\sqrt{3}$-mal. Megkapható-e az így kapott számtest Q-ból egyetlen elemmel való bővítéssel is?

c) Jellemezzük a b) részben szereplő számtest elemeit a lehető legegyszerűbben!

Az 1.3 feladat kérdése tovább általánosítható, de erre itt most nincs szükségünk. Meg kell azonban említenünk még a következőt. Valójában egy T test másodfokú bővítésének neveznek minden olyan u számmal való bővítését, amely gyöke egy olyan másodfokú polinomnak, amelynek együtthatói T-ből valók. Az eddigiek során lényegében beláttuk, hogy a mi látszatra szűkebb definíciónk - legalábbis valós számmal való bővítés esetén - ugyanerre a fogalomra vezet.

Az érdekesség kedvéért még megemlítjük a következőt feladatot:

1.4. (S) Bizonyítsuk be, hogy Q minden másodfokú bővítése megkapható $Q(\sqrt{n})$ alakban, ahol n egy négyzetmentes egész szám.

(Négyzetmentesnek azokat a számokat hívjuk, amelyek prímtényezős felbontásában minden prímszám első hatványon szerepel, azaz amelyek nem oszthatóak egynél nagyobb négyzetszámmal.)

1.3. Gyöktelenítések

1.1. (S) Bizonyítsuk be, hogy ha $u = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ alakú (ahol a, b, c, d racionális), akkor az u nevezőjű törtek gyökteleníthetőek, vagyis az $\frac{1}{u}$ tört bővíthető úgy, hogy egy ugyanilyen alakú számot kapjunk. (Vagy még másképp fogalmazva: az u nevezőjű törtek bővíthetők úgy, hogy a számlálóban ugyanilyen alakú szám van, a nevező pedig racionális.)

1.2. (S) Gyöktelenítsük az alábbi kifejezéseket:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{11}+\sqrt{15}+\sqrt{19}}$.

1.3. (MS) Gyöktelenítsük az alábbi kifejezéseket:

a) $\frac{1}{\sqrt{1{,}5}+\sqrt{2}+3\sqrt{6}-1{,}6\sqrt{8}+\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}-0{,}5\sqrt{12}+2\sqrt{21}-3\sqrt{7}}$

c) $\frac{1}{4\sqrt{5}+3\sqrt{21}-2\sqrt{35}+\sqrt{12}+5\sqrt{7}+1}$

1.4. (MS) Gyöktelenítsük az alábbi kifejezést:

$\frac{1}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}-\sqrt{11}}$.

1.5. (S) Bizonyítsuk be, hogy ha

$u = q_1\sqrt{a_1} + q_2\sqrt{a_2} + ... + q_n\sqrt{a_n}$

alakú, ahol az a_i és q_i számok racionális számok, akkor az $\frac{1}{u}$ tört „gyökteleníthető", vagyis bővítéssel ugyanilyen alakúra hozható.

1.4. érdekes feladatok másodfokú testbővítésekről

1.1. Kutató munka:

Milyen pozitív egész n kitevőkre lesz egész szám az $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$ kifejezés?

1.2. (S) Bizonyítsuk be, hogy az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok „mindenütt sűrűen" helyezkednek el a számegyenesen, azaz igaz a következő: bármely (c, d) nem-üres nyílt intervallumban van $a + b\sqrt{2}$ alakú szám, ahol a és b egész számok.

1.3. Kutató munka:

Mit mondhatunk általában az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok pozitív egész kitevős hatványairól, ahol a és b egész számok?

Mit mondhatunk az $a - b\sqrt{2}$ alakú számok pozitív egész kitevős hatványairól?

Hogyan általánosítható a feladat?

1.4. (S) (Kürschák verseny, 1966/2)

Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $(5+\sqrt{26})^n$ tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő.

1.5. Szerkeszthetőség I. A kocka kettőzéséről

1.1. (M) Van-e olyan racionális együtthatós másodfokú polinom, amelynek gyöke $\sqrt[3]{2}$?

1.2. Kutató munka:

Be akarjuk bizonyítani, hogy „a kocka nem kettőzhető", vagyis ha adott az egység, nem szerkeszthető euklideszi szerkesztéssel olyan szakasz, amelynek hossza $\sqrt[3]{2}$.

a) Fogalmazzuk meg algebrailag, hogy mit kell ehhez bizonyítanunk.

b) Bizonyítsuk be a megfogalmazott állítást.

1.6. Polinomok gyökpárjairól

1.1. (MS) Az $Ax^2 + Bx + C = 0$ egyenlet együtthatói egészek. Tudjuk továbbá, hogy az egyenletnek megoldása a $2 + \sqrt{3}$. Mi a másik megoldása?

1.2. (S) **Kutató munka:**

Szabhatunk-e kevésbé erős feltételeket az 1.1 feladatbeli együtthatókra?

1.3. Kutató munka:

Hogyan alakul az 1.1 feladat állítása, ha a $2 + \sqrt{3}$ helyett

a) $2 + \sqrt{5}$-öt,

b) $-2 + \sqrt{3}$-at,

c) $\frac{2}{3} + \sqrt{3}$-at

írunk?

Milyen jellegű számokra működik a bizonyításunk?

1.4. (M) Az 1972. évi Arany Dániel versenyen szerepelt a következő feladat.

Az $x^3 + px + q = 0$ harmadfokú egyenlet együtthatói, p és q egész számok, az egyenlet egyik megoldása $x_1 = 2 + \sqrt{7}$. Bizonyítsuk be, hogy $2 - \sqrt{7}$ is megoldása az egyenletnek.

Mi hiányzik az alábbi megoldásból:

Helyettesítsük be az egyenletbe x_1-et. A műveletek elvégzése után az alábbi egyenletet kapjuk p-re és q-ra:

$50 + 2p + q + (19 + p)\sqrt{7} = 0.$

Itt mind $19 + p$ ($\sqrt{7}$ együtthatója), mind $50 + 2p + q$ ("a racionális rész") egész. Ezért $\sqrt{7}$ együtthatója nulla (különben azt kapnánk, hogy $\sqrt{7}$ racionális). Vagyis $p = -19$. Ugyanakkor $50 + 2p + q$ is nulla, amiből azt kapjuk, hogy $q = -12$. Az egyenlet tehát

$x^3 - 19x - 12 = 0.$

Ennek az egyenletnek megoldása $x_2 = -4$. Másrészt a bal oldalon álló harmadfokú polinom gyökeinek összege a gyökök és együtthatók összefüggése alapján nulla, ami csak úgy lehet, hogy a harmadik megoldás $x_3 = 2 - \sqrt{7}$.

Egészítsük ki teljessé ezt a megoldást!

1.5. Az $x^3 + 6x^2 - 69x + 36 = 0$ egyenlet egy megoldása $x_1 = 3 - \sqrt{6}$. Bizonyítsuk be, hogy az egyenletnek van két másik megoldása és adjuk is meg a másik két megoldást!

1.6. Kutató munka:

Az $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ egyenlet együtthatói egészek. Tudjuk továbbá, hogy az egyenletnek megoldása a $2+\sqrt{7}$. Milyen következtetések vonhatók le ebből az egyenlet többi megoldására vonatkozóan?

1.7. (M) Az $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ egyenletben A, B, C egész. Tudjuk továbbá, hogy az egyenletnek van egy $U+\sqrt{V}$ alakú megoldása, ahol U és V is egész. Következik-e ebből, hogy az egyenletnek van egész megoldása is?

1.8. (S) **Kutató munka:**

Mit mondhatunk, ha az 1.7 feladatban A-ról, B-ről és C-ről csak azt tudjuk, hogy racionális számok?

1.9. (S) Legyen p egy egészegyütthatós polinom, u egész szám, de nem négyzetszám.

a) Mit mondhatunk $p(a+b\sqrt{u})$-ról, ahol a, b egészek?

b) Mit mondhatunk $p(a-b\sqrt{u})$-ról?

c) Mit mondhatunk $p(a-b\sqrt{u})$-ról, ha tudjuk, hogy $p(a+b\sqrt{u})$ egész?

Mi a helyzet, ha p-ről csak azt tudjuk, hogy együtthatói racionálisak, továbbá a, b-ről is csak annyit tudunk, hogy racionálisak?

1.10. (S) Bizonyítsuk be, hogy ha u eleme a $T(\sqrt{t})$ testnek (ahol $t>0$ és négyzetgyöke nincs T-ben), akkor minden olyan polinomja, amelynek együtthatói

a) racionális számok,

b) T-beli számok,

szintén $T(\sqrt{t})$-beli.

1.7. Szerkeszhetőség és racionális gyökök

1.1. (MS) **Kutató munka:**

Az 1.8 feladat átfogalmazható a következő alakra:

Ha egy racionális együtthatós harmadfokú egyenletnek nincs racionális gyöke, akkor nincs gyöke a racionális számok Q testének semmilyen másodfokú bővítésében sem.

Hogyan általánosítható ez az állítás?

1.2. (S) Igaz marad-e az 1.1 feladat megoldásában belátott tétel, ha a polinom együtthatóiról csak annyit teszünk fel, hogy T-ben vannak?

1.3. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy racionális (egész) együtthatós harmadfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor gyöke(i) euklideszi szerkesztéssel nem szerkeszthető(k). (Pontosabban: ha z gyöke a polinomnak, akkor nincs olyan euklideszi szerkesztés, amellyel az egység ismeretében z hosszú szakaszt szerkeszthető.

Megjegyzés. Ez talán a legegyszerűbb átfogó elégséges feltétel a nem-szerkeszthetőségre. Ennél általánosabb feltétel, szükséges és elégséges feltétel is adható, de ahhoz mélyebb algebrai ismeretekre van szükség.

Igaz-e az állítás harmadfokú helyett negyedfokú polinomokra is?

1.4. (MS) írjunk fel olyan egész együtthatós polinomot, amelynek fokszáma nagyobb, mint 2, nincsen racionális gyöke, sőt, nem bontható fel alacsonyabb fokú racionális együtthatós polinomok szorzatára, de mind a négy gyöke szerkeszthető.

1.5. (S) Az 1.3 feladat szerint szükségünk lesz bizonyos egyenletek esetében annak a bizonyítására, hogy nincsen racionális megoldásuk. íme néhány:

a) $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$,

b) $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

c) $px^3 - px^2 - px + 1 = 0$,

ahol p prímszám.

d) A $4cx^3 - 2x^2 - 3cx + 1 = 0$

egyenletben válasszuk meg c értékét olyan pozitív egésznek, hogy ne legyen racionális megoldás!

e) Bizonyítsuk be, hogy az

$x^3 - cx^2 + x + c = 0$

egyenletben c értéke választható olyan egynél nagyobb egész számnak, hogy ne legyen racionális megoldás.

1.8. Szerkeszthetőség II. Szögharmadolás

1.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy 20° nem szerkeszthető euklideszi szerkesztéssel.

1.2. (MS) Milyen egész n számokra szerkeszthető $n°$-os szög?

1.3. (MS) Adható-e euklideszi szerkesztési eljárás (az oldalhossz ismeretében) szabályos kilencszög szerkesztésére?

1.4. (MS) Tudjuk, hogy szabályos háromszög, négyszög, hatszög és nyolcszög szerkeszthető az oldalhossz ismeretében. Láttuk, hogy szabályos kilencszög nem szerkeszthető. Mi a helyzet a szabályos

a) ötszög,

b) hétszög,

c) tízszög

szerkesztésével?

1.9. Szerkeszthetőség III. Háromszögszerkesztések.

1.1. (M) Adott a háromszög két oldalának és egy (belső) szögfelezőjének a hossza. Szerkeszthető-e a háromszög?

(Hány feladatról van szó?)

A feladat megoldásához tisztázni kell, hogy mit is kérdezünk, amikor ezt kérdezzük, és milyen választ várunk. Ha pozitív a válasz, akkor olyan általános szerkesztési eljárást kell adnunk (diszkusszióval és a helyesség ellenőrzésével), amely minden adathármas esetén vagy megszerkeszti a háromszöget vagy megmutatja, hogy ilyen háromszög nincsen.

De elképzelhető az az eset, hogy ilyen eljárás nincsen. Ebben az esetben viszont elég *egyetlen olyan adathármast* mutatni, amikor a háromszög *létezik*, de az adatokból a háromszög *bizonyíthatóan* nem szerkeszthető. Például azért - és mi más esettel nem fogunk foglalkozni -, mert a háromszög valamelyik adatáról megmutatható, hogy gyöke egy olyan harmadfokú egész együtthatós egyenletnek, amelynek nincsen racionális gyöke.

1.2. (S) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy oldalának a hosszából és az oldal két végpontjából induló belső szögfelező hosszából (a, f_α, f_β) nem szerkeszthető háromszög.

1.3. (MS) Egy háromszög két oldalának hosszából és körülírt körének sugarából szerkeszthető háromszög. De szerkeszthető-e háromszög két oldalának hosszából és beírt körének sugarából?

1.4. (MS) Szerkeszthető-e háromszög (adható-e általános szerkesztési eljárás), ha adott
a) a három (belső) szögfelezőjének a hossza;
b) két (belső) szögfelejezőjének és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonalának a hossza;
c) két (belső) szögfelezőjének és a harmadik oldalhoz tartozó magasságának a hossza;
d) egy (belső) szögfelezőjének és a másik két oldalhoz tartozó magasságának a hossza?

1.5. (MS) Adott egy háromszögben az BC oldal hossza, a szemközti csúcsból induló (belső) szögfelező hossza, továbbá
a) a B csúcsnál,
b) az A csúcsnál levő szög.
Van-e általános szerkesztési eljárás a háromszög megszerkesztésére?

1.6. (S) Adott az ABC háromszögben az A csúcsból induló (belső) szögfelező hossza, f, a B csúcsból induló magasság hossza, m és
a) a C csúcsnál fekvő szög,
b) az A csúcsnál fekvő szög.
Adható-e általános eljárás a háromszög szerkesztésére?

1.7. (MS) Adható-e általános szerkesztési eljárás az ABC háromszög szerkesztésére, ha adott
a) az A-nál fekvő szög, a B-ből induló belső szögfelező, valamint az AB oldal hossza;
b) a BC oldal hossza, a körülírt kör R sugara, valamint a B-ből induló belső szögfelező hossza?

1.8. (MS) Szerkeszthető-e a háromszög, ha adott
a) az egyik csúcsból induló magasság és súlyvonal hossza, és egy másik csúcsból induló szögfelező hossza;
b) az egyik csúcsból induló magasság és szögfelező hossza és egy másik csúcsból induló súlyvonal hossza?

2. FEJEZET
Tömegközéppont

A témában alapvető a [13] könyv, amelynek számos példáját felhasználtuk ebben a fejezetben. Az elméleti alapok tisztázásában segíthet [7] megfelelő fejezete.

ALAPELVEK

A fizikában gyakran érdemes helyettesíteni egy tömegpontrendszert a tömegpontok tömegközéppontjába helyezett egyetlen, a tagok tömegének összegével megegyező tömeggel. Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni az alábbi alapelveket:

I. alapelv A tömegközéppont megkaphatjuk úgy is, hogy a tömegpontrendszert részekre osztjuk, kiszámoljuk a részek tömegközéppontját és helyettesítő tömegét, majd meghatározzuk az így kapott rendszer tömegközéppontját. Bármely részekre osztásnál végül ugyanahhoz a tömegközépponthoz jutunk.

II. alapelv Ha a C pontban γ kg, a B pontban β kg tömeg van, akkor tömegközéppontjuk a CB szakasznak az az A_1 pontja, amelyre $CA_1/A_1B = \beta/\gamma$ (másképp: az γCA_1, βBA_1 forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást).

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a pontrendszer tömegközéppontja nem változik, ha benne minden egyes súly nagyságát megszorozzuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.

Megfogalmazhatjuk az I., II. alapelvek egy olyan következményét, amelyet később széleskörűen alkalmazunk: *ha a rendszert két részre osztjuk, az egyik tömegközéppontja* S_1, *a másiké* S_2, *míg a teljes rendszer tömegközéppontja* S, *akkor* S_1, S *és* S_2 *egy egyenesen vannak.*

A II. alapelv vektorgeometriai analogonja az osztópont helyvektorára vonatkozó nevezetes tétel:

Osztópont helyvektora Ha a C pont helyvektora $\overrightarrow{C}$, a B ponté $\overrightarrow{B}$ és A_1 a BC egyenesen úgy helyezkedik el, hogy $CA_1/A_1B = \beta/\gamma$, akkor A helyvektora:

$$\overrightarrow{A_1} = \frac{\beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}}{\beta + \gamma}.$$

Itt tehát az $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ vektorok „súlyozásával” kapjuk az $\overrightarrow{A_1}$ vektort. Fontos, hogy itt az CA_1/A_1B arányt és vele együtt β/γ arányt is előjelesen értelmezzük, tehát CA_1/A_1B pozitív ha C-től A_1 ugyanabban az irányban van, mint A_1-től B – azaz A_1 a BC *szakaszon* van –, míg arány negatív ez a két irány különböző.

Az I. alapelv az alábbi vektoralgebrai azonossággal analóg:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i}{\sum_{i=1}^{I}\beta_i} + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)\cdot\frac{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j}{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j}}{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)},$$

ahol tehát $\overrightarrow{S}$ a bal oldalon feltüntetett vektor, míg

$$\overrightarrow{S}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{I} \beta_i \overrightarrow{B}_i}{\sum_{i=1}^{I} \beta_i} \qquad \overrightarrow{S}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{J} \gamma_j \overrightarrow{C}_j}{\sum_{j=1}^{J} \gamma_j}.$$

Negatív tömeget nem szokás értelmezni, de a vektorok együtthatói nyugodtan lehetnek negatív számok. Mivel az I., II. alapelvek vektorokkal is értelmezhetők így a későbbiekban negatív tömegekkel is számolni fogunk.

Ekkor előfordulhat az is, hogy néhány tömeg összege zérus. Ha például fent $\beta + \gamma = 0$, akkor nem létezik olyan A_1 pont a BC egyenesen, amelyre $CA_1/A_1B = \beta/\gamma = -1$, de a CA_1/A_1B arány határértéke épp (-1), ha A_1 tart a végtelenbe az egyenesen bármelyik irányban. A vektoros megközelítésben is hasonlót látunk: a $\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$ vektor párhuzamos a BC egyenessel, tehát annak „végtelen távoli pontja” felé mutat.

III. alapelv A tömegpontrendszernek a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka zérus.

IV. alapelv A tömegpontrendszernek a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_t = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2, \tag{1}$$

ahol n a tömegpontok számát, m_i az i-edik tömegpont tömegét, d_i pedig a tengelytől való távolságát jelöli.

V. alapelv *Steiner tétel*

Ha a t tengely átmegy a tömegpontrendszer súlypontján, az u tengely pedig párhuzamos t-vel és tőle d távolságban van, akkor

$$\Theta_u = \Theta_t + md^2,$$

ahol $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a pontrendszer teljes tömegét jelöli.

Síkbeli pontrendszer esetén beszélhetünk a pontrendszernek egy adott pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékáról. Ezen a nyomatékon az adott pontban az adott síkra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot értjük.

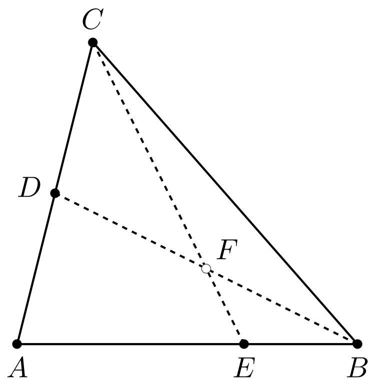
VI. alapelv A síkbeli pontrendszernek a súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka így is számítható:

$$\Theta_S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j r_{ij}^2,$$

ahol n a tömegpontok számát, m_i az i-edik pont tömegét, m az össztömeget, r_{ij} az i-edik és j-edik tömegpont távolságát jelöli.

Megjegyezzük, hogy a síkbeli pontrendszer pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az átlagos négyzetes eltéréshez rendkívül hasonló mennyiség. a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a szórásnégyzettel rokon mennyiség. A fenti V., VI. alapelvek bizonyítása analóg a statisztika hasonló összefüggéseinek bizonyításával.

2.1. (M) Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban (lásd az 1. ábrát)! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?



2.1.1. ábra.

2.2. (M) *Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 2007*

Az ABC háromszög belsejében felveszünk egy P pontot, majd összekötjük a három csúccsal. Az AP egyenes messe a szemközti (BC) oldalt az A_1 pontban. Hasonlóan legyenek B_1, C_1 a BM, CM egyenesek és a megfelelő csúcsokkal szemközti oldalak metszéspontjai. Tudjuk, hogy P felezi az AA_1 szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = 1!$$

2.3. (M) Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja F, a CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja E, az EF egyenes az AC átlót a P, a BD átló meghosszabbítását a Q pontban metszi. Határozzuk meg az

$$EP/PF, \qquad AP/PC, \qquad EQ/QF, \qquad DQ/QB$$

arányok értékét!

2.4. (M) Adott az ABC háromszög és a P pont. Az AP, BC egyenesek metszéspontja A_1 és ehhez hasonlóan $B_1 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$. Ismeretes, hogy

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{b_1}{b_2}, \qquad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Határozzuk meg a $\frac{BC_1}{C_1A}$ arányt!

2.5. (M) Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AF_A súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$!

2.6. (M) (*Kömal*)

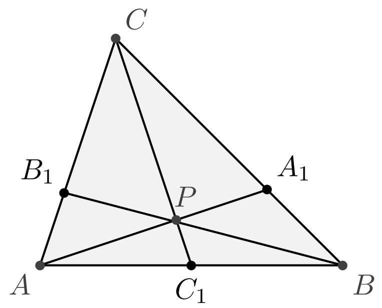
Adott az ABC háromszög. A háromszög belsejében elhelyezkedő tetszőleges P pont esetén képezhetjük az

$$AP \cap BC = A_1, \qquad BP \cap CA = B_1, \qquad CP \cap BA = C_1$$

pontokat. Mely P pontra lesz az

$$\frac{A_1P}{A_1A} + \frac{B_1P}{B_1B} + \frac{C_1P}{C_1C}$$

összeg értéke maximális?



2.6.1. ábra.

2.7. (M) Mutassuk meg, hogy a súlyozás területekkel is megadható! Nevezetesen, ha $A^\alpha B^\beta C^\gamma = P^{\alpha+\beta+\gamma}$, akkor

$$\alpha : \beta : \gamma = T_{BPC} : T_{CPA} : T_{APB}.$$

(Ahogy a súlyok is kaphatnak különböző előjelet, úgy a háromszögek területe is a háromszög körüljárásának megfelelő előjellel értendő.)

2.8. (M) A háromszög AB, BC, CA oldalain úgy helyezkednek el a C_1, A_1, B_1 pontok, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy közös P ponton mennek át. Adott az AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 háromszögek területe: T_A, T_B, T_C. Határozzuk meg az $A_1B_1C_1$ háromszög t területét!

2.9. (M) Adott egy háromszög és egy egyenes. Hogyan súlyozzuk a háromszög csúcsait, hogy tömegközéppontjuk az egyenesre essen?

2.10. (M) *Menelaosz tétel*

Az ABC háromszög AB, BC, CA oildalegyenesein adott egy-egy pont: C_1, A_1 és B_1. Fejezzük ki az

$$AB_1, \qquad B_1C, \qquad CA_1, \qquad A_1B, \qquad BC_1, \qquad C_1A,$$

hosszakkal annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre esnek.

2.11. (M) Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alapja az $ABCD$ négyzet. Egy sík az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi el a gúla EA, EB, EC, ED oldaléleit. Határozzuk meg az ED_1/D_1D arányt, ha

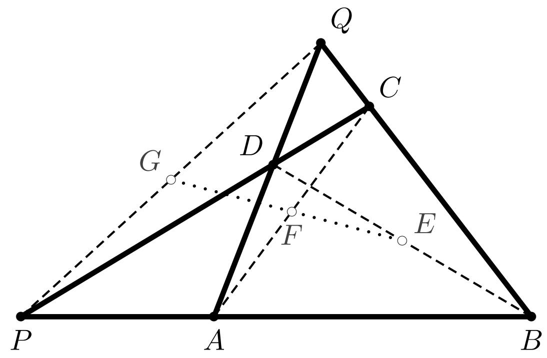
$$\frac{EA_1}{A_1A} = 1, \qquad \frac{EB_1}{B_1B} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{EC_1}{C_1C} = \frac{2}{1}.$$

2.12. (M) [13]

Jelölje az ABC háromszög BC oldalához hozzáírt körnek az AB oldal meghosszabbítására, a BC oldalra illetve az AC oldal meghosszabbítására eső érintési pontját rendre T_B, T és T_C. Mutassuk meg, hogy a BT_C, CT_B egyenesek D metszéspontja illeszkedik az AT egyenesre!

2.13. (M) Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszög AB, CD oldalegyenesei a P, a BC, DA oldalegyenesei a Q pontban metszik egymást, akkor a PQ szakasz felezőpontja illeszkedik az AC, BD átlók felezőpontjait összekötő egyenesre (lásd az 1. ábrát)!

2.14. (M) Fejezzük ki a háromszög körülírt és beírt köreinek sugaraival (R és r) a két kör középpontjának távolságát (d-t)!



2.13.1. ábra.

2.15. (M) Fejezzük ki a háromszög súlyvonalának hosszát az oldalakkal!

2.16. (M) (*Stewart tétel*)
Jelölje a háromszög AB oldalát $\frac{p}{q}$ arányban osztó pontját F – azaz

$$\frac{AF}{FQ} = \frac{p}{q}.$$

Fejezzük ki az FC szakasz hosszát a háromszög oldalaival és a p, q mennyiségekkel!

2.17. (M) (*Németh Gergely diák javaslata*)
Messe az ABC nem egyenlő szárú háromszög A-nál illetve B-nél fekvő belső szögének szögfelező egyenese a szemköztes – BC, ill AC – oldalt az A_1, ill. B_1 pontban.
a) Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög C csúcshoz tartozó külső szögfelezője és az A_1B_1 egyenes az AB oldalegyenesen metszik egymást!
b) Messe az A, B, C csúcshoz tartozó külső szögfelező a háromszög szemköztes oldalegyenesét – tehát rendre a BC, CA, AB egyenest – az A_2, B_2, C_2 pontban. Mutassuk meg, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen vannak!

2.18. (M) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. A háromszöghöz rögzített $(x_A; x_B; x_C)$ baricentrikus koordinátarendszerben az ℓ egyenes egyenlete

$$\xi_A x_A + \xi_B x_B + \xi_C x_C = 0. \tag{1}$$

Honnan ismerhető fel, hogy ez az egyenes érinti a háromszög beírt körét? Írjunk fel egy olyan

$$P(\xi_A; \xi_B; \xi_C) = 0 \tag{2}$$

összefüggést, amely pontosan akkor teljesül, ha az (1) egyenes érinti a beírt kört!

2.19. (M) [12][A. 568., 2012. szept.]
Adott az ABC háromszög, és a beírt körének középpontján átmenő ℓ egyenes. Jelölje A_1, B_1, illetve C_1 az A, a B, illetve a C pont ℓ-re vonatkozó tükörképét. Legyen az A_1, B_1 és C_1 pontokon át ℓ-lel húzott párhuzamosok metszéspontja a BC, CA és AB egyenesekkel rendre A_2, B_2, illetve C_2. Bizonyítsuk be, hogy
a) az A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen vannak, és
b) ez az egyenes érinti a beírt kört!

2.20. [10][M1062. feladat, 1988/1., 25-26.o]

a) Az ABC háromszög AB, AC oldalain adottak a B_1, C_1 pontok. A BC_1, CB_1 egyenesek az M pontban metszik egymást, míg az AM egyenes a BC, B_1C_1 szakaszokat rendre a P, P_1 pontokban metszi. Igazoljuk, hogy

$$\frac{PP_1}{P_1A} = 2\frac{PM}{MA}.$$

b) Az $ABCD$ tetraéder AB, AC, AD élein vettük fel a B_1, C_1, D_1 pontokat. A BCD_1, CDB_1, CAB_1 síkok az M pontban metszik egymást, míg az AM egyenes a BCD, $B_1C_1D_1$ síkokat rendre a P, P_1 pontokban metszi. Igazoljuk, hogy

$$\frac{PP_1}{P_1A} = 3\frac{PM}{MA}.$$

2.21. (M) [8]

a) Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszög oldalai $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, körülírt körének középpontja O, sugara r, akkor a sík tetszőleges P pontjára teljesül az

$$r^2 - OP^2 = \frac{t_a t_b c^2 + t_b t_c a^2 + t_c t_a b^2}{t^2}$$

összefüggés, ahol t_a, t_b, t_c és t rendre a PBC, PCA, PAB, ABC háromszög *előjeles* területét jelöli!

b) *Ptolameiosz tétele*

Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, akkor $AC{\cdot}BD = AB{\cdot}CD + DA{\cdot}BC$.

2.22. (M) [8]

a) Jelölje az ABC háromszög előjeles területét t, körülírt körének középpontját O, sugarát r, a sík tetszőleges P pontjának a háromszög AB, BC, CA oldalegyeneseire való merőleges vetületét rendre P_c, P_a és P_b. Mutassuk meg, hogy a $P_aP_bP_c$ általános talpponti háromszög előjeles területe

$$t_P = \frac{t}{4}\left(1 - \frac{OP^2}{r^2}\right).$$

b) Mutassuk meg, hogy a sík P pontjának az ABC háromszög oldalegyeneseire vonatkozó merőleges vetületei akkor és csakis akkor illeszkednek egy egyenesre, ha P illeszkedik a háromszög körülírt körére!

2.23. (M) [8]

Az P_1, P_2 pontok baricentrikus koordinátái az ABC háromszög csúcsaira vonatkozólag $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ illetve $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$, ahol

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1.$$

Fejezzük ki az P_1P_2 szakasz hosszát a baricentrikus koordináták és az ABC alapháromszög $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ oldalainak hossza segítségével!

3. FEJEZET

Inverzió

Adott a sík (tér) O pontja és egy zérustól különböző λ szám. *Inverzió*nak nevezzük a sík (tér) azon leképezését, amely az O-tól különböző P ponthoz, az OP irányított egyenes azon P' pontját rendeli, amelyre – előjelesen számolva –

$$OP \cdot OP' = \lambda.$$

Az inverzió az O ponton, az inverzió *centrum*-án nem értelmezett, a sík (tér) centrumtól különböző pontjainak halmazát önmagára képezi le kölcsönösen egyértelmű módon.

Ha $\lambda > 0$, akkor megfelelő pozitív r-rel $\lambda = r^2$. Ebben az esetben az inverziónak vannak fixpontjai, nevezetesen az O középpontú r sugarú i kör (gömb) pontjai. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az i körre (gömbre) invertálunk. A negatív paraméterű inverzió némileg kézzelfoghatóbbá válik a 3.5. feladat megoldása révén.

Az inverziót Jacob Steiner svájci származású matematikus vezette be a XIX. század első felében.

A feladatgyűjteményben a körök és egyenesek halmazát helyenként egyben kezeljük és *kögyenes*nek nevezünk egy alakzatot, amely kör és egyenes is lehet.

3.1. Az inverzió szerkesztése

3.1. (M) Adott egy kör a középpontjával, és még egy további pont. Szerkesszük meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét!

3.2. (MS) Adott egy kör a középpontjával, és még egy további pont. Szerkesszük meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét csak körzővel!

3.3. (MS) Adott két pont. Szerkesszük meg a

a) felezőpontjukat; **b)** harmadolópontjaikat

csak körzővel!

3.2. Kögyenesek képe

3.1. (M) Mutassuk meg, hogy ha az O centrumú inverziónál az A, B pontok képe A' és B', akkor

a) az AOB, $B'OA'$ háromszögek hasonlóak;

b) az A B, A', B' pontok egy körön vagy egyenesen vannak.

3.2. (M) Adott az O középpontú, r sugarú i kör és az i-t érintő e egyenes.

a) Invertáljuk az e egyenes hat pontját i-re!

b) Fogalmazzunk meg sejtést az e egyenes inverz képére vonatkozólag!

c) Igazoljuk a sejtést!

d) Mi lesz e képe egy olyan körre vonatkozó inverziónál, amely koncentrikus i-vel, de sugara csak harmadakkora, mint i sugara?

e) Mi lesz e képe az O középpontú $\lambda = -r^2$ paraméterű inverziónál ($OP \cdot OP' = \lambda < 0$)?

3.3. (M) Milyen egyszerűbb geometriai transzformációval kapható meg egy alakzat i_1 körre vonatkozó invertáltjából az eredeti alakzat i_1-gyel koncentrikus, de háromszor akkora sugarú i_2 körre vonatkozó invertáltja?

3.4. (MS) Az adott O pont a $\lambda \neq 0$ valós paraméter meghatározta i inverziót vizsgáljuk. Milyen alakzatot kapunk, ha valamely e egyenes minden pontját invertáljuk?

3.5. (S) Adott az O középpontú i kör, rajta az A pont és az OA szakasz k Thalesz köre.
a) Invertáljuk a k kör hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést a k kör inverz képére vonatkozólag!
c) Igazoljuk a sejtést!
d) Mi lesz egy tetszőleges, O ponton áthaladó kör képe az i körre vonatkozó inverziónál?

3.6. Adott az O középpontú i kör, valamint a k kör, amely nem megy át O-n.
a) Invertáljuk a k kör hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést a k kör inverz képére vonatkozólag!

3.7. (S) Adott az O középpontú i kör, rajta az A pont, valamint az OA egyenest A-ban érintő k kör.
a) Invertáljuk a k kör hat pontját i-re!
b) Fogalmazzunk meg sejtést a k kör inverz képére vonatkozólag!
c) Igazoljuk a sejtést!
d) Milyen alakzat lesz egy tetszőleges, de O-t nem tartalmazó kör képe az i-re vonatkozó inverziónál?
e) És egy negatív paraméterű ($OP \cdot OP' = \lambda < 0$) inverziónál?

3.8. Mutassuk meg, hogy az inverzió „kögyenestartó”, azaz ha egy alakzat kör vagy egyenes, akkor az inverziónál származó képe is kör vagy egyenes!

3.9. (M) A koordinátarendszerben dolgozunk. Inverziónk centruma az origó, paramétere a $\lambda \neq 0$ szám (tehát $OP \cdot OP' = \lambda$)
a) Határozzuk meg a $P(x; y)$ pont inverziónál származó képének koordinátáit!
b) Határozzuk meg, hogy az inverziónál a $P(x; y)$ pont mely pontnak a képe!
c) Határozzuk meg az

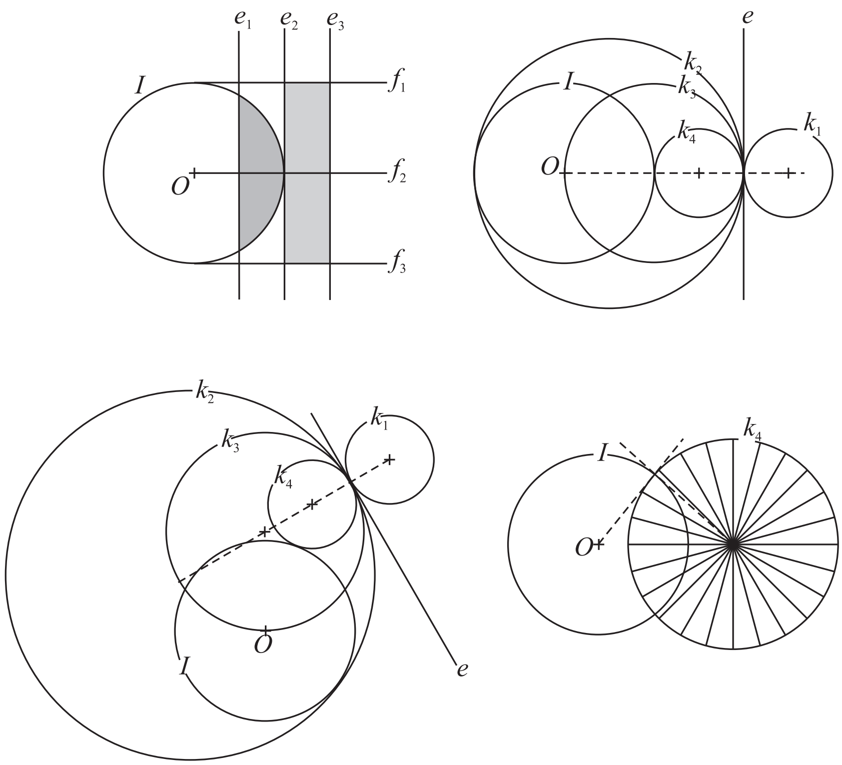
$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

egyenletű alakzat képének egyenletét!
d) Ennek alapján adjunk új bizonyítást arra, hogy az inverzió önmagára képezi a körök és egyenesek halmazát!

3.10. (M) Egy R sugarú kört invertálunk egy r sugarú körre. A két középpont távolsága d. Határozzuk meg a kör képének sugarát és középpontjának távolságát az inverzió centrumától!

3.11. Készítsünk vázlatot az 1. ábrák I körre vonatkozó inverz képéről!

3.12. (M) Adott az O centrumú i inverzió és két egymástól – és O-tól – különböző pont, A és B. Keressük annak szükséges és elégséges feltételét, hogy i kicseréli egymással A-t és B-t. Mutassuk meg, hogy az alábbi két feltétel bármelyike megfelelő!
I. O, A és B egy egyenes három különböző pontja és az i inverziónál A és B nem fixpont, de i önmagára képezi az A-n és B-n is átmenő egyik k kört.
II. Az i inverziónál A és B nem fixpont, de i önmagára képez az A-n és B-n is átmenő *két* kögyenest.



3.11.1. ábra.

3.13. (M) Adott a síkon három különböző pont: A, A' és B. Határozzuk meg a sík összes olyan B' pontját, amelyhez van olyan inverzió, amely A-t A'-be, B-t pedig B'-be viszi.

3.14. (M) Adott a síkon három különböző pont: A, A' és C. Szerkesszünk olyan kört, amely átmegy C-n és amelyre A-t invertálva A'-t kapjuk.

3.15. (M) **a)** Legyen A és A' egy pont és a képe a K körre vonatkozó inverziónál. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió alapkörén ($M \in K$) az $AM/A'M$ arány értéke állandó!

b) Bizonyítsuk be, hogy az A, B pontpár Apollóniusz-körei pontosan azok a körök, amelyekre vonatkozó inverziók A-t és B-t egymásra képezik!

3.16. (M) Adott a K és az L kör. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek (körök merőlegessége)!

A) K és L metszi egymást, és bármelyik metszéspontban a körök érintői merőlegesek egymásra.

B) K középpontjából az L-hez húzott érintő érintési pontja a K körön van.

B') L középpontjából a K-hoz húzott érintő érintési pontja az L körön van.

C) A körök R_K, R_L sugaraira és középpontjaik d távolságára $R_K^2 + R_L^2 - d^2 = 0$.

D) A K, L körök különbözőek és a K-ra vonatkozó inverziónál L fix.

D') A K, L körök különbözőek és az L-re vonatkozó inverziónál K fix.

E) L-nek van két olyan (egymástól különböző) pontja, amelyek a K-ra vonatkozó inverziónál kicserélődnek.

E') K-nak van két olyan (egymástól különböző) pontja, amelyek az L-re vonatkozó inverziónál kicserélődnek.

F) A K, L körök

$$\begin{aligned} a_K(x^2+y^2) + b_K x + c_K y + d_K &= 0; \\ a_L(x^2+y^2) + b_L x + c_L y + d_L &= 0, \end{aligned}$$

egyenletében

$$2a_K d_L - b_K b_L - c_K c_L + 2d_K a_L = 0.$$

3.17. (M) Adott a síkon három különböző, nem kollineáris pont: A, B, C. Legyen k_A az A-n átmenő B-t a C-be vivő, k_b a B-n átmenő C-t az A-ba vivő, k_c a C-n átmenő A-t a B-be vivő inverzió alapköre. Mutassuk meg, hogy van két pont, amelyeken a három kör mindegyike átmegy.

3.18. (MS) Adott a síkon három különböző, nem kollineáris pont: A, B, C. Jellemezzük azokat a centrumokat, amelyekre invertálva az adott pontokat, a kapott A', B', C' pontokra $A'C' = B'C'$ teljesül.

3.3. Szerkesztések csak körzővel

3.1. (MS) **a)** Adott egy kör a középpontjával, és adott még egy egyenes is. Szerkesszük meg az egyenes körre vonatkozó inverz képét csak körzővel! Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, amikor az egyenes csak két pontjával van megadva (és nem megy át az inverzió centrumán).

b) Adott két egyenes két-két pontjával. Szerkesszük meg a metszéspontjukat csak körzővel!

c) Bizonyítsuk be, hogy bármely szerkesztés, ami körzővel és vonalzóval elvégezhető, az elvégezhető csak körzővel is!

3.4. Merőlegesség, fix kör, fixfix kör

3.1. (M) **a)** Igaz-e, hogy bármely két körhöz található egy harmadik kör, mely mind a kettőre merőleges?

b) Igaz-e, hogy bármely két kögyeneshez található olyan kögyenes, amelyik mind a kettőre merőleges! (kögyenes: kör vagy egyenes.)

3.2. (M)

Az 1. a)-d) ábrákon három-három kör látható. Melyik esetben van olyan kör, amelyik mind a háromra merőleges?

e) Adott három kör. Szerkesszünk olyan kört, amelyik mind a háromra merőleges, ha van egyáltalán ilyen!

f) Adott három kör. Van-e mindig olyan inverzió vagy tengelyes tükrözés, amely mind a hármat önmagára képezi?

3.3. (M) Adott két különböző kör. Adjuk meg az összes olyan inverziót, amely

a) kicseréli a két kört egymással;

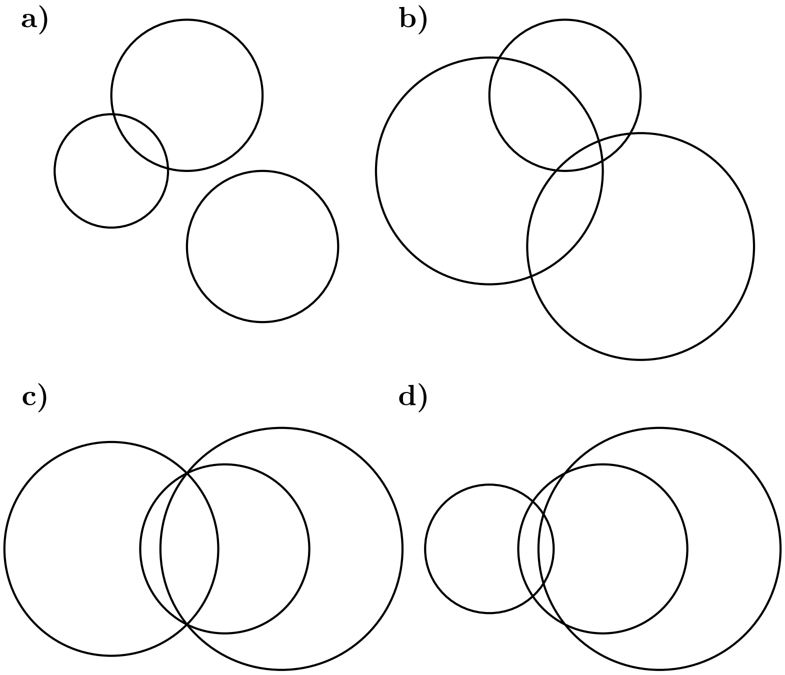
b) önmagára képezi mindkét kört!

3.4. (M) Adott egy háromszög.

a) Szerkesszük meg annak a körnek a középpontját, amely merőleges a háromszög mindhárom hozzáírt körére!

b) Ez máskülönben milyen nevezetes pont?

3.5. (M) Tekintsük azt a három kört, amelyek érintik egy háromszög három hozzáírt körét, méghozzá egyet önmagukon belül, kettőt pedig kívül. Bizonyítsuk be, hogy ennek a három körnek van közös pontja!



3.2.1. ábra.

3.5. Érintkező körök

3.1. (MS) Az $AB = d$ átmérőjű L félkörbe írt $r = d/4$ sugarú K_1 kör érinti a félkörívet és az AB átmérőt is. Határozzuk meg annak a K_2 körnek a sugarát, amely érinti a félkörívet, az átmérőt és a K_1 kört is, és B-hez közelebb van, mint A-hoz!

3.2. (M) Az ABC derékszögű háromszögben $ACB\angle = 90°$, $AC = \sqrt{20}$, $BC = 5$ A k_A kör középpontja A, sugara 2, a k_B kör középpontja B, sugara 3. Szerkesztendők mindazok a C-n átmenő körök, amelyek érintik a k_A, k_B köröket!

3.3. (M) *Apollóniuszi probléma*

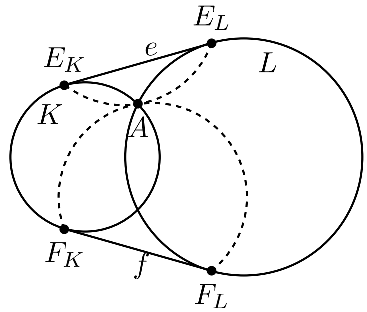
a) Adott egy pont és két kör (a körök bármelyike, akár mindkettő lehet egyenes is). Szerkesszünk kört, amely átmegy a ponton és érinti a két adott alakzatot!

b) Adott három kör (a körök bármelyike, akár mindhárom lehet egyenes is). Szerkesszünk kört, amely érinti mindhárom adott alakzatot!

(Lásd még a G.II.10.1-G.II.10.8. feladatokat!)

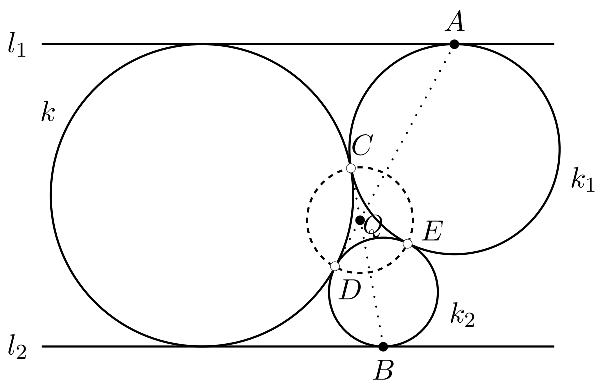
3.4. (MS) Adott egy kör és rajta az A és a B pont. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, amelyek egyike A-ban, másika B-ben érinti az adott kört, egymást pedig (egy előre nem adott) M pontban érintik. Határozzuk meg az így adódó M pontok mértani helyét!

3.5. (MS) A K és az L kör egyik metszéspontja A. A két kör e és f közös érintőin az érintési pontok E_K és E_L, illetve F_K és F_L (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy az E_KE_LA és az F_KF_LA háromszög körülírt köre érinti egymást!



3.5.1. ábra.

3.6. (M) A k kör érinti az egymással párhuzamos l_1, l_2 egyeneseket. A k_1 kör érinti l_1-et A-ban és kívülről érinti k-t C-ben. A k_2 kör érinti l_2-t B-ben, kívülről érinti k_1-et E-ben és k-t D-ben. Az AD, BC egyenesek metszéspontja Q (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy Q a CDE háromszög köré írt körének középpontja.



3.6.1. ábra.

3.7. (M) Adott a k kör és annak e átmérő egyenese. Képzeljük el mindazokat a köröket, amelyek érintik e-t és k-t is és az általuk meghatározott egyik félkörlemezen helyezkednek el (lásd az 1. ábrát).

a) Mi a mértani helye ezen körök középpontjainak?

b) Mutassuk meg, hogy a síkon van egy olyan pont, amely illeszkedik bármelyik ilyen körnek az e-vel és k-val való érintési pontját egymással összekötő egyenesre!

c) Ezen körök közül ketten egymást is érinthetik. Hol lehet az érintési pontjuk?

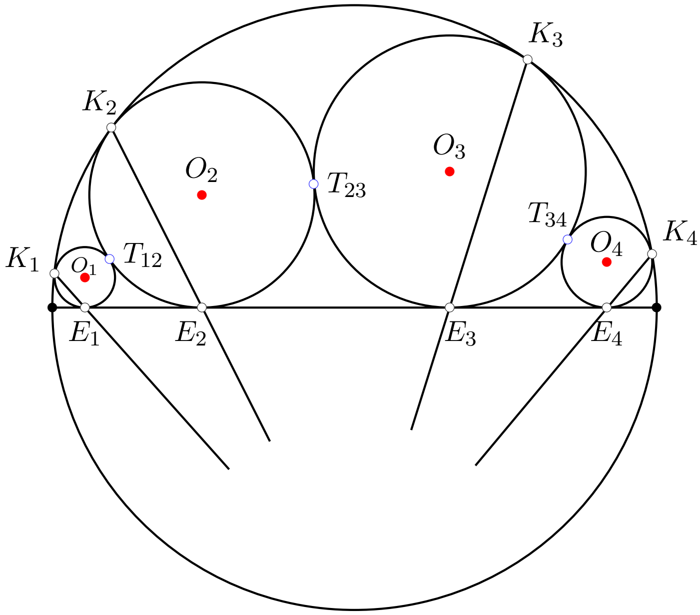
3.8. (MS) **a)** Adott két érintkező kör. Egy harmadik kör az egyik adott kört az A pontban, a másik adott kört a B pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az így adódó AB egyenesek mind átmennek egy bizonyos ponton, vagy mind párhuzamosak!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör érinti egymást?

3.9. **a)** Adott két egymást metsző kör. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, amelyek mindkét kört érintik és egymást is érintik (egy előre nem adott) M pontban. Határozzuk meg az így adódó M pontok mértani helyét!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör metszi egymást?

3.10. (M) **a)**Adottak az egymást metsző nem azonos sugarú K, L körök a síkon (K és L egyike lehet egyenes is). Tekintsük a K és L által határolt négy síkbeli tartomány egyikében az összes



3.7.1. ábra.

olyan kört, amely érinti K-t és L-t. Mutassuk meg, hogy a síkon van olyan pont, amelynek e körök bármelyikére (nem K-ra és L-re!) vonatkozó hatványa egyenlő!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör metszi egymást?

3.6. Az inverzió szögtartó

3.1. (S) Tekintsünk két egyenest érintkezőnek, ha párhuzamosak. Két kör illetve egy kör és egy egyenes érintkezése ismert fogalom.

Bizonyítsuk be, hogy két kör, két egyenes vagy egy kör és egy egyenes pontosan akkor érintkező, ha az inverziónál származó képeik is azok!

3.2. Mutassuk meg, hogy az egymást két pontban – A-ban és B-ben – metsző k, l körök A-beli érintőinek egymással bezárt szöge abszolút értékben megegyezik a B-beli érintőik szögével, de a két szög irányítás szerint egymással ellentétes.

3.3. (M) **a)** Bizonyítsuk be, hogy két egyenes szöge megegyezik az inverziónál származó képeik szögével!

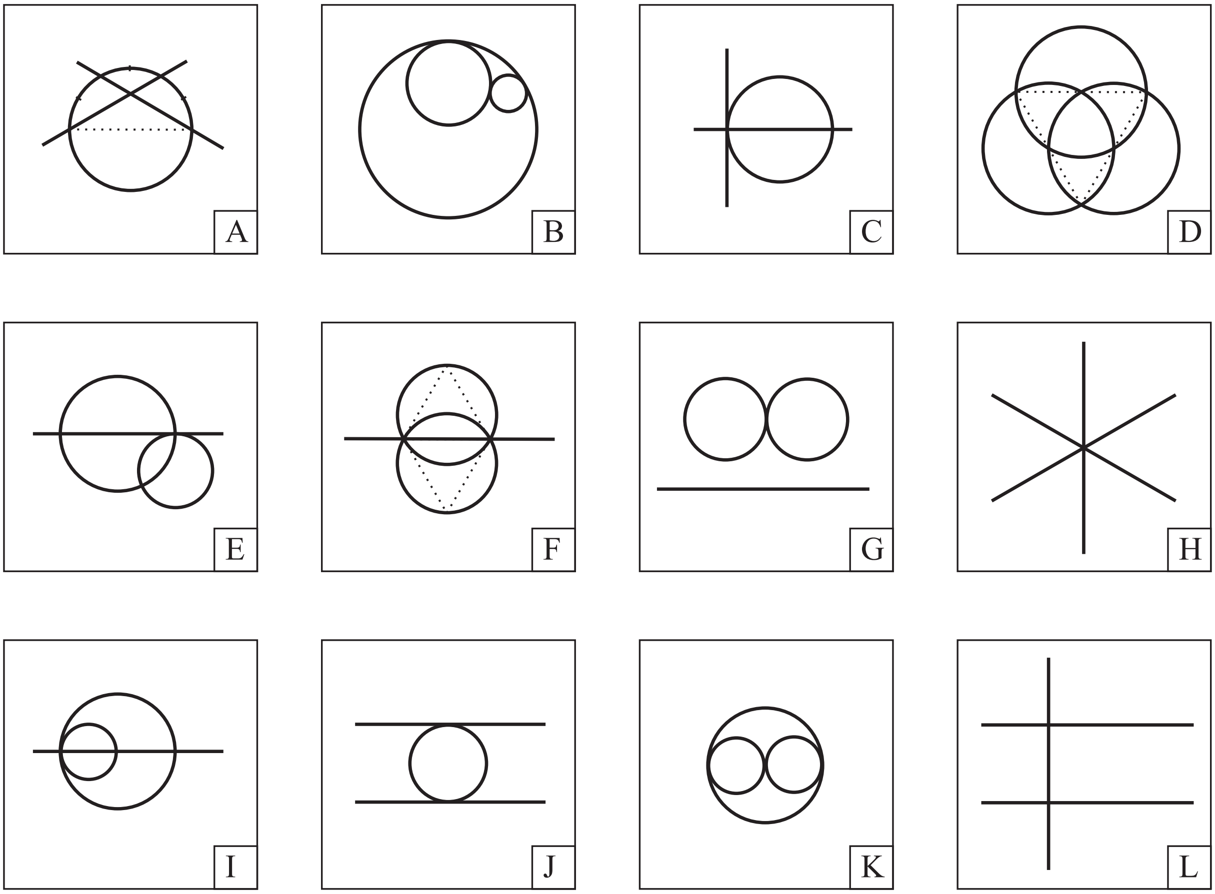
b) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió szögtartó, azaz bármely két kör vagy egyenes szögének abszolút értéke megegyezik képeik szögének abszolút értékével!

c) Mutassuk meg, hogy az inverzió lokálisan szögfordító, azaz bármely pontban az ott találkozó kögyenesek irányított szöge ellentétes a pont képénél a két kögyenes képének irányított szögével!

3.4. (M) Kössük össze az 1. ábrán azokat a részábrákat, amelyek megkaphatók egymásból egy inverzió és egy egybevágóság alkalmazásával! (A pöttyözött vonalak csak segédvonalak)

3.7. Körök speciális elrendezései

3.1. (MS) A k_1, k_2, k_3, k_4 körök ciklikus sorrendben érintik egymást: k_1 és k_2 érintési pontja



3.4.1. ábra.

P_{12}, k_2-é és k_3-é P_{23}, k_3-é és k_4-é P_{34}, végül k_4 és k_1 érintési pontja P_{41}. Bizonyítsuk be, hogy a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vannak!

3.2. (M) A k_1, k_2, k_3, k_4 körök ciklikus sorrendben páronként két pontban metszik egymást: $k_1 \cap k_2 = \{P_{12}, Q_{12}\}$, $k_2 \cap k_3 = \{P_{23}, Q_{23}\}$, $k_3 \cap k_4 = \{P_{34}, Q_{34}\}$, $k_4 \cap k_1 = \{P_{41}, Q_{41}\}$. Mutassuk meg, hogy ha a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} metszéspontok egy kögyenesen vannak, akkor a Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{41} pontok is egy kögyenesre illeszkednek!

3.3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy érintőnégyszög csúcsait invertáljuk a beírt körre, akkor az érintési pontok alkotta sokszög oldalfelezőpontjait kapjuk!

3.4. (M) **a)** Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben

$$R^2 - d^2 = 2 \cdot R \cdot r,$$

ahol R a körülírt kör, r a beírt kör sugarát, d pedig a középpontok távolságát jelöli!

b) Írjunk fel hasonló összefüggést a háromszög körülírt, az egyik oldalához hozzáírt körének sugara és középpontjaik távolsága között!

c)* Hasonló összefüggés állítható fel azoknál a négyszögeknél, amelyek egyszerre húr- és érintőnégyszögek is. Keressük meg az összefüggést és igazoljuk is!

3.5. (MS) Adott az A pont és a K kör. Mutassuk meg, hogy mindazok a körök, amelyek átmennek A-n és K-t egy átmérő két végpontjában metszik tartalmaznak még egy közös pontot!

3.6. (M) (*Az inverzió inverziótartó?*)

Az I, K, K' körök és az A, B, A', B' pontok elrendezése olyan, hogy az I körre vonatkozó inverziónál K képe K', A képe A', míg B képe B', a K-ra vonatkozó inverzió pedig A-t B-nek felelteti meg. Igaz-e, hogy a K'-re vonatkozó inverziónál A' és B' egymás képei?

3.7. (M) Állítsuk elő a tengelyes tükrözést inverziók kompozíciójaként!

3.8. (M) Ha adott a sík tetszőleges A_1 és A_1' pontja, akkor létezik olyan egybevágósági transzformáció, amely A_1-et A_1'-re képezi. Nem nehéz megadni olyan A_1, A_2 és A_1', A_2' pontpárokat, amelyekhez nincs olyan egybevágóság, amely A_1-et A_1'-re, és egyúttal A_2-t A_2' -re képezi.

Bárhogy is adottak a síkon az A_1, A_2, A_1', A_2' pontok, mindig van olyan hasonlósági transzformáció, amely A_1-et A_1'-re, és egyúttal A_2-t A_2'-re képezi. Nem nehéz megadni olyan A_1, A_2, A_3 és A_1', A_2', A_3' ponthármasokat, amelyekhez nincs olyan hasonlóság, amely A_1-et A_1'-re, A_2-t A_2'-re és egyúttal A_3-at A_3' -ra képezi.

Határozzuk meg azt a maximális n pozitív egészt, amelyre bárhogyan is adottak a síkon az A_1, A_2, …, A_n, A_1', A_2', …, A_n' pontok, mindig van inverzióknak olyan kompozíciója, amely A_1-et A_1'-re, A_2-t A_2'-re, …, és egyúttal A_n-et A_n'-re képezi!

3.9. (MS) Adott két kör. Szerkesszünk két olyan pontot, amelyek mindkét körre vonatkozó inverziónál kicserélődnek!

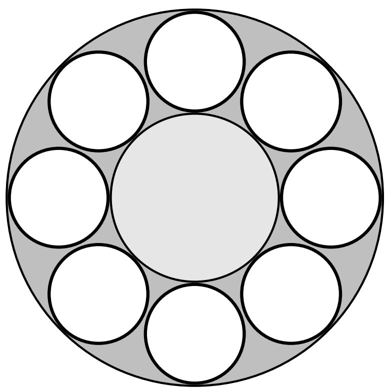
3.10. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely két közös pont nélküli kör koncentrikus körökbe invertálható!

3.11. (M) A k_1, k_2 koncenrikus körök közé 8 egyenlő sugarú kört helyeztünk, amelyek ciklikusan érintik egymást és mindegyik érinti k_1-et és k_2-t (lásd az 1. ábrát).

a) Határozzuk meg a két koncentrikus kör sugarának arányát!

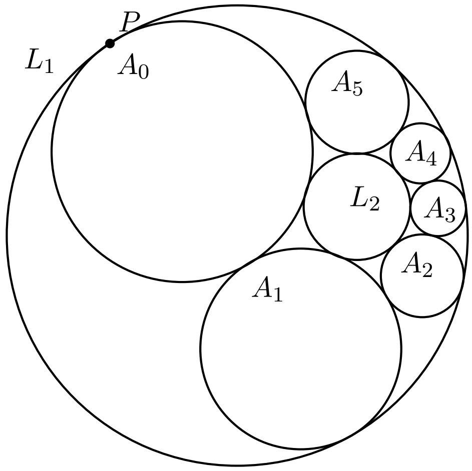
b) A körlánc tagjai egymást olyan pontokban érintik, amelyek mind egy l körön vannak. Fejezzük ki a k_1-gyel és k_2-vel koncentrikus l kör sugarát a k_1, k_2 körök sugaraival!

c) Oldjuk meg az a), b) feladatokat, ha a az eredeti két kör közé n ciklikusan egymást érintő kör lánca írható!



3.11.1. ábra.

3.12. (M) Szerkesszünk két *nem* koncentrikus kört k_1-et és k_2-t, amelyek egyike a másik belsejében, és 8 további kört, amelyek k_1 és k_2 között vannak, mindkettőt érintik és egymást is ciklikusan: k_1 a k_2-t, k_2 még a k_3-at, k_3 még a k_4-at, … k_8 még a k_1-et is.



3.13.1. ábra.

3.13. (S) Steiner Poriszmája néven ismeretes az alábbi tétel: Adott két kör, L_1 és L_2, amelyek nem érintik egymást. Egy L_1-et is L_2-t is érintő A körből kiindulva képezhető köröknek egy sorozata:

– A_0 legyen maga A;

– az A_1 kör érintse L_1-t, is L_2-t is, és A_0-t is;

– általában, A_{k+1} érintse L_1-et, L_2-t és A_k-t.

Állítjuk, hogy ha valamely n-re $A_n = A_0$ – azaz visszaérünk –, akkor bármely A körből kiindulva n lépésben visszaérünk.

3.14. Adott két koncentrikus kör, k_1 és k_2, sugaraik R_1 és R_2. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, l_1-et és l_2-t, amelyek mindkét előre adott kört érintik, egymást is érintik (egy előre nem adott) M pontban, és a két adott kör közti körgyűrűben helyezkednek el. Láttuk (lásd a 3.9. feladatot), hogy az így adódó M pontok mértani helye egy m kör.

a) Bizonyítsuk be, hogy az m-re vonatkozó inverzió egymásba képezi k_1-et és k_2-t!

b) Határozzuk meg m sugarát!

3.15. Bizonyítsuk be, hogy Steiner Poriszmájában (lásd a 3.13. feladatot) az A_i körök középpontjai egy ellipszisen, az A_i, A_{i+1} körök érintési pontjai egy k körön helyezkednek el, és az A_i, A_{i+1} körök középpontjait összekötő egyenes érinti k-t!

3.16. Adott egy pont és véges sok a pontra illeszkedő különböző sugarú kör. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor van olyan kör, amely az összes előre adott kört érinti, ha az előre adott körök külső hasonlósági pontjai egy egyenesre illeszkednek!

3.8. Komplex számok és inverziók

3.1. a) Bizonyítsuk be, hogy a z komplex szám képe az origó középpontú egységsugarú körre vonatkozó inverziónál az $1/\overline{z}$ komplex szám!

b) Adjuk meg a ξ középpontú (ξ tetszőleges komplex szám) R sugarú körre vonatkozó inverzió képletét!

3.2. A sík egybevágóságai megőrzik az A és a B pont közötti AB távolságot. A hasonlóságok megőrzik az A, B, C ponthármas $(ABC) = AC/CB$ osztóviszonyát és az $ACB\angle$ nagyságát. Komplex számokkal ez a két mennyiség egyszerre is leírható. Ha a három pontnak megfelelő három komplex szám z_1, z_2 és z_3, akkor irányítástartó hasonlósági transzformációnál megmaradó mennyiség az

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$$

komplex osztóviszony. Hogyan kell a sík négy pontjához olyan mértéket rendelni, amely invariáns az inverziókra?

3.3. (M) **a)** Mutassuk meg, hogy három komplex szám osztóviszonya (lásd a 3.2. feladatot) pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre illeszkednek!

b) A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok kettősviszonya a

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

komplex szám. Bizonyítsuk be, hogy a kettősviszony a hasonlósági transzformációkra invariáns!

c) Igazoljuk, hogy négy komplex szám kettősviszonya és inverziónál származó képeik kettősviszonya egymás konjugáltja!

d) Mutassuk meg, hogy négy komplex szám kettősviszonya pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre vagy körre illeszkednek!

3.4. Ha adott a síkon az A_1, A_2 és az A_1', A_2' pontpár úgy, hogy $A_1A_2 = A_1'A_2' \neq 0$, akkor pontosan két olyan egybevágósági transzformáció van, amely A_1-et A_1'-re, és egyúttal A_2-t A_2'-re képezi. Ezek egyike irányítástartó, a másik megfordítja az irányítást.

Ha adottak a síkon az A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3' pontok úgy, hogy

$$(A_1A_2A_3) = (A_1'A_2'A_3') \notin \{0, \infty\} \qquad \text{és} \qquad A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle,$$

akkor mindig van olyan hasonlósági transzformáció, amely A_1-et A_1'-re, A_2-t A_2'-re és egyúttal A_3-at A_3'-re képezi.

Ha

$$A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle \notin \{0, \pi\},$$

akkor pontosan egy, ha

$$A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3' \in \{0, \pi\},$$

akkor pontosan két ilyen transzformáció van: a kettő egyike irányítástartó, a másik megfordítja az irányítást. Dolgozzunk ki hasonló elméletet inverziók kompozíciójával kapcsolatban!

3.9. A gömb vetítései és az inverziók

3.1. (*Gömbre vonatkozó inverzió*)

Mi lesz egy

a) sík; **b)** gömb; **c)** kör

képe a tér egy O pontjára vonatkozó λ arányú inverziónál?

3.2. Adott a síkon a k kör és egy P pont. Felveszünk egy G_x gömböt, amely (felületén) tartalmazza a k kört és a P pontból érintőkúpot rajzolunk G_x-hez. A kúp egy k_x körvonalon érinti G_x-et. Jelölje k_x középpontját P_x. Képzeljük el G_x összes lehetséges helyzetét és határozzuk meg P_x mértani helyét a térben!

3.3. (M) (*Gömb vetítése egy pontból önmagára*)

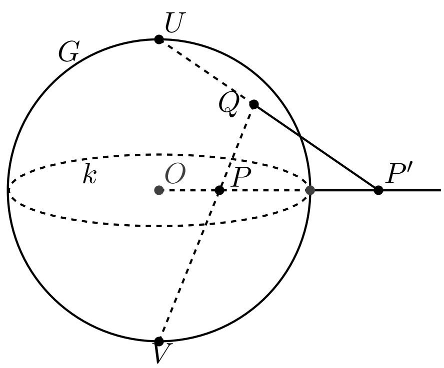
Adott egy g gömb, rajta egy k kör és adott még egy G-re nem illeszkedő P pont is. Vegyünk fel egy C pontot a k körön és képezzük a PC egyenes és a g gömb C-től különböző C' metszéspontját, illetve legyen $C' = C$, ha PC érinti g-t. Határozzuk meg a C' pontok mértani helyét, ha C befutja k-t!

3.4. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió a sztereografikus vetítésből az alábbi módon származtatható.

Tekintsük azt a G gömböt, amelynek k a főköre, legyen ennek a gömbnek a két k-tól legtávolabbi pontja V és U. Vetítsük síkunkat először V-n át G-re, majd G-t az U ponton át vissza a síkra. E két leképezés kompozíciója a síkot önmagára képezi és éppen a k-ra vonatkozó inverziót adja.

3.5. Legyen adva az I tetszőleges kör vagy egyenes, továbbá az A és a B pont. Vegyünk fel egy tetszőleges olyan K kört vagy egyenest, amely merőleges I-re. Jelölje K és I metszéspontjait (amelyek közül az egyik lehet a „végtelen távoli” pont) X és Y. Bizonyítsuk be, hogy A és B pontosan akkor egymás képei az I-re vonatkozó inverziónál, ha $(XYAB) = -1$!

3.6. Értelmezzük a gömbön az inverziót a 3.5. feladat állítása alapján! Azaz az S gömb A és B pontja akkor legyen egymás képe az S gömbre illeszkedő k körre vonatkozólag, ha az AB főkör merőleges k-ra, és X, Y metszéspontjaikkal $(XYAB) = -1$. Legyen az S gömb két tetszőleges átellenes pontja U és V (lásd az 1. ábrát), felezőmerőleges síkjuk Σ . Jelölje k, A és B képét az S-t Σ-ra képező U centrumú sztereografikus projekciónál k', A' és B'. Bizonyítsuk be, hogy A és B pontosan akkor egymás képei a k-ra vonatkozó gömbi inverziónál, ha A' és B' egymás képei a k'-re vonatkozó inverziónál (tükrözésnél)!



3.6.1. ábra.

3.10. Versenyfeladatok

3.1. (M) [9] Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. A beírt kör az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti, középpontja O_1. $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja M_1. Igazoljuk, hogy az O, O_1, M_1 pontok egy egyenesen vannak.

3.2. (M) Adott az i kör és az A pont, amely a körön kívül helyezkedik el.

a) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan B, C pontpár van, amelyre az ABC háromszög beírt köre i.

b) Jelölje egy ilyen ABC háromszög körülírt körét ω és jelölje még c_A azt az ω belsejében elhelyezkedő, azt belülről érintő kört, amely érinti az AB, AC oldalegyeneseket is. Mutassuk meg, hogy a c_A kör mindig ugyanaz, tehát független B és C választásától!

3.3. [9] Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.

3.4. (S) Legyen ABC szabályostól különböző háromszög. Határozzuk meg az összes olyan centrumot, amelyből az A, B, C ponthármas egy szabályos háromszög három csúcsába invertálható.

3.5. Legyen adva a K kör és az A, B pontpár. Az f transzformáció a K kör AB egyenesre nem illeszkedő pontjainak halmazát képezi le önmagára a következőképpen: ha $P \in (K - AB)$ és az AP egyenes és K másik metszéspontja P^*, akkor a P^*B egyenes és K másik metszéspontja $f(P)$. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely n pozitív egész számra f^n-nek van fixpontja, akkor f^n identikus!

3.6. Adott egy kör és három pont. Szerkesszünk olyan háromszöget, amelynek körülírt köre az adott kör, oldalegyenesei pedig az adott pontokon mennek át! Általánosítsuk a problémát n pontra és húr-n-szögre!

3.7. (M) [11] Adott a síkon egy c egyenes az egyik oldalán (nem rajta) az A és B pontok, továbbá egy ψ szög. Szerkesztendő olyan $ABCD$ húrnégyszög, amelynek C és D csúcsa c-n vannak, és amelyre a $DAC\angle$ szög egyenlő ψ-vel.

3.8. (M) [11] Az AB szakasz felezőpontja C, az AB egyenes egyik oldalán az AC és BC szakaszokra, mint átmérőkre félkört rajzolunk, továbbá A és B körül AB sugárral körívet húzunk, az utóbbiak metszéspontja D. Szerkesszünk érintő kört az $ABCD$ ívnégyszögbe!

3.9. (M) [11] Adott (a síkon) egy e egyenes és az A, B pontok. Szerkesszük meg e-nek azt a P pontját, amelyre a PA/PB arány értéke maximális, illetve amelyre minimális.

3.10. (M) [11] **a)** Adott a síkban három kör. Megválasztható-e az inverzió alapköre úgy, hogy ezek képei is körök legyenek és a körök középpontjai egy egyenesre essenek?

b) Elérhető-e emellet az is, hogy a képek közül kettőnek a sugara egyenlő legyen?

3.11. (M) [11] Egy $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú, oldalait jelöljük a_1, a_2, a_3-mal (a_i fekszik A_i-vel szemben). Minden i-re ($i = 1, 2, 3$) M_i az a_i oldal felezőpontja, T_i az a pont, amelyben a beírt kör érinti a_i-t és S_i a T_i pont tükörképe az A_i-hez tartozó belső szögfelezőre nézve. Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek át.

3.12. (M) [11] Egy szabályos háromszög csúcsai köré egyenlő sugárral k_1, k_2, k_3 kört írunk. Egy P pont inverz képe k_1-re P_1, P_1 inverz képe k_2-re P_2, míg P_2 képe k_3-ra P_3. Szerkesszünk olyan P pontot, amelyre P_3 egybeesik P-vel.

3.13. (M) [11] Adott a P pont, az e, f egyenesek és az ϵ, ψ szögek. Szerkesztendők azok a körök, amelyek átmennek P-n és e-t ϵ, f-et ψ szögben metszik. (Kör és egyenes szögén a kör metszéspontbeli érintőjének az egyenessel bezárt szögét értjük.)

3.14. [5] Milyen felületet kell az egységkörre építeni ahhoz, hogy magasról ránézve épp a kör külsejének inverz képét lássuk rajta?

4. FEJEZET
Komplex számok a geometriában

A komplex számok bevezetésével kapcsolatban lásd az A.III.1. fejezetet!

4.1. Komplex számok, mint vektorok

4.1. (M) Az a, b, c, d csúcsokkal megadott húrnégyszöget átlói két-két háromszögre bontják. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett $(abc), (bcd), (cda)$ és (dab) háromszögek magasságpontjai az eredetivel egybevágó négyszög csúcsai.

4.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy a Feuerbach-kör valamely oldalfelező pontot tartalmazó átmérője párhuzamos és egyenlő a körülírt körnek azzal a sugarával, amely a szemköztes csúcshoz tartozik.

4.3. (M) A húrnégyszög csúcsaiból négy háromszög alkotható. Szerkesszük meg e négy háromszög Feuerbach-köreit. Igazoljuk, hogy

a) a körök középpontjai ismét egy körön vannak; (Ezt hívják a húrnégyszög Feuerbach-körének.)

b) a szóbanforgó háromszögek Feuerbach-körei egy ponton mennek át; (Lásd még a 4.4. feladatot!)

c) a húrnégyszög köré írt kör O középpontja, S súlypontja és Feuerbach-körének O' középpontja egy egyenesen vannak és az S pont felezi az OO' szakaszt.

4.4. (M) A 4.3. feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be, hogy a körbe írt ötszög csúcsaiból képzett húrnégyszögek Feuerbach-köreinek középpontjai egy körön vannak. (Ez a húrötszög Feuerbach-köre.) Általánosan is fogalamzzuk meg az állítást körbe írható n-szögekre.

4.2. Komplex osztópont és egyenes

4.1. (M) *„Osztópont”*

A komplex számsíkon adott A, B pontokhoz (komplex számokhoz) képest a C komplex szám úgy helyezkedik el, hogy az oldalak

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{x}{y}$$

aránya is adott (itt x és y is komplex számok). Mutassuk meg, hogy

$$C = \frac{xA + yB}{x+y}.$$

4.2. (M) Adjuk meg az a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 változók olyan polinomiális kifejezését, amelynek értéke pontosan akkor 0, ha a komplex változók értékeinek megfelelő pontok alkotta $a_0a_1a_2$, $b_0b_1b_2$ háromszögek (ponthármasok) hasonlóak és azonos körüljárásúak!

4.3. (M) Alább az egyenes egyenletét írjuk fel komplex számokkal. Az ϵ komplex szám játssza az *irányvektor* szerepét.

a) Mutassuk meg, hogy a z komplex számnak megfelelő pont akkor és csakis akkor illeszkedik a komplex számsík origóját az $\epsilon \neq 0$ komplex számnak megfelelő ponttal összekötő egyenesre, ha

$$\epsilon\overline{z} - \overline{\epsilon}z = 0.$$

b) Igazoljuk, hogy az előző egyenessel párhuzamos, a z_0 komplex számnak megfelelő ponton áthaladó egyenes egyenlete

$$\epsilon\overline{z} - \overline{\epsilon}z = \epsilon\overline{z_0} - \overline{\epsilon}z_0.$$

4.4. (MS) Adjuk meg az a, b, c változók olyan polinomiális kifejezését, amelynek értéke pontosan akkor zérus, ha a komplex számsíkon az a, b, c komplex számoknak megfelelő pontok egy szabályos háromszög csúcsai!

4.5. (M) Mutassuk meg, hogy a $z_0z_1z_2$ háromszög pontosan akkor pozitív körüljárású szabályos háromszög, ha

$$z_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 = 0,$$

ahol $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ az első harmadik egységgyök.

4.6. (M) [6] Tekintsük a komplex számsíkon az 0 középpontú k kört és jelölje a és b e kör egy-egy pontját, illetve a pontnak megfelelő komplex számot. Írjuk fel a k kör a-beli és b-beli érintőinek x metszéspontját az a és b komplex számok algebrai kifejezéseként.

4.7. (M) Adott a komplex számsík O origója és egy O középpontú kör a, b komplex számoknak megfelelő pontjai. Szerkesszük meg az a, b számtani, harmonikus és mértani közepeit, tehát az

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad H = \frac{2ab}{a+b}, \qquad G_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$$

komplex számoknak megfelelő pontokat!

4.3. Forgatás, forgatva nyújtás, mint szorzás

4.1. (M) [14] Az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlójára az egymáshoz hasonló ACE és BDF egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk. (E és F a szárak metszéspontjai.) Mutassuk meg, hogy EF merőleges a paralelogramma egyik oldalpárjára.

4.2. (M) Egy négyzet két szomszédos csúcsa a z_0 és a z_1 komplex szám. Fejezzük ki algebrai műveletekkel a négyzet további két csúcsának megfelelő komplex számot!

4.3. (M) Egy szabályos háromszög két csúcsa a z_0 és a z_1 komplex szám. Fejezzük ki algebrai műveletekkel a szabályos háromszög harmadik csúcsának megfelelő komplex számot!

4.4. (M) [6] Az $ABCD$ és $AB'C'D'$ négyzeteknek A közös csúcsa; a két négyzetre még azt kötjük ki, hogy körüljárási irányuk különböző legyen. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetek középpontjai, valamint a BB' és DD' szakaszok felezőpontjai egy négyzetnek a csúcsai. a 4.1M1

4.5. (M) Tetszőleges négyszög oldalaira szerkesszünk négyzeteket. (Vagy mind kifelé, vagy mind befelé.) Bizonyítsuk be, hogy a szemköztes négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlők és merőlegesek.

4.6. (M) [14] Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög AC és BC oldalaira kifelé rajzolt azonos oldalszámú szabályos sokszögek középpontjait összekötő szakasz felezőpontja egybeesik az AC és BC oldalak felezőpontjait összekötő szakaszra (a C irányában) emelt ugyanakkora oldalszámú szabályos sokszög középpontjával.

4.7. (M) [16] A nem egyenlő szárú ABC háromszög BC, CA és AB oldalaira kifelé szabályos n-szögeket írunk, ezek középpontjai A_1, B_1 és C_1. Mely n esetén lesz az $A_1B_1C_1$ háromszög mindig szabályos?

4.8. (M) [14] Az ABC háromszög oldalaira kifelé megszerkesztjük az ABD, BCE és CAF szabályos háromszögeket. Legyen ezek középpontja rendre J, K és L. Jelölje továbbá a DE, EF, FD szakaszok felezőpontjait rendre G, H és I, az AD, DB, BE, EC, CF, FA szakaszok felezőpontját pedig rendre F_{AD}, F_{DB}, F_{BE}, F_{EC}, F_{CF} és F_{FA} (lásd az 1. ábrát).

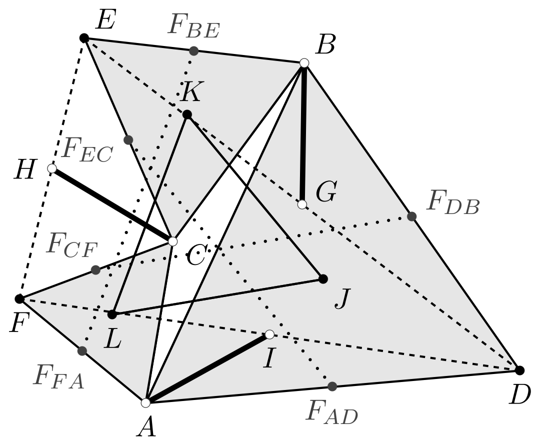
a) Mutassuk meg, hogy JKL szabályos háromszög!

b) Igaz-e, hogy a JKL, ABC háromszögek súlypontja egybeesik?

c) Igazoljuk, hogy $BG = CH = IA$.

d) Bizonyítsuk be, hogy CD merőleges KL-re!

e) Mutassuk meg, hogy az $F_{AD}F_{EC}$, $F_{DB}F_{CF}$, $F_{BE}F_{FA}$ szakaszok páronként 60°-os szöget zárnak be egymással! Igaz-e, hogy ezek a szakaszok egyenlő hosszúak is?



4.8.1. ábra.

f) Igazoljuk, hogy az AF_{BE}, CF_{DB}, BL egyenesek egy ponton mennek át!

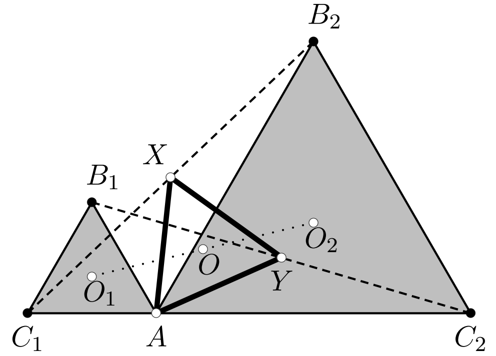
g) Mutassuk meg, hogy az F_{DB}, F_{BE} pontok az AC oldal F_{AC} felezőpontjával szabályos háromszöget alkotnak.

4.9. (M) [6] Az OAB és $OA'B'$ ellentétes körüljárású szabályos háromszögek O csúcsa közös. Bizonyítsuk be, hogy egyrészt az AA', OB, OB'; másrészt a BB', OA, OA' szakaszok felezőpontjai szabályos háromszögek csúcsai.

4.10. (M) Az r sugarú körbe írt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 oldalainak hossza r. Mutassuk meg, hogy az A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1 oldalak felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai.

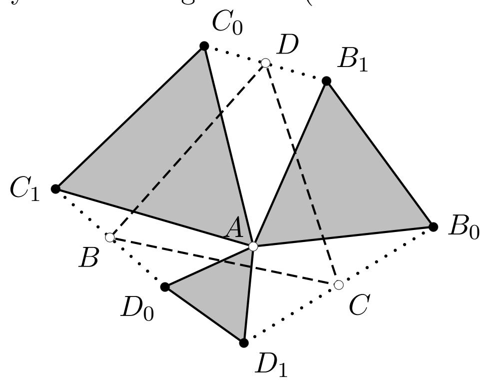
4.11. (M) Adva van a C_1C_2 szakasz és ennek A belső pontja. Állítsuk elő a C_1C_2 egyenes által határolt egyik félsíkban a C_1AB_1 és C_2AB_2 szabályos háromszögeket. Legyen a C_1B_2 szakasz felezőpontja X, a B_1C_2 szakaszé Y, továbbá a két szabályos háromszög és az AXY háromszög körülírt körének középpontja O_1, O_2, illetve O (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy

a) az AXY háromszög szabályos,
b) az O_1, O_2, O pontok egy egyenesen vannak,
c) O felezi az O_1O_2 szakaszt.



4.11.1. ábra.

4.12. (M) [6]
a) Az AB_0B_1, AC_0C_1, AD_0D_1 háromszögek szabályosak, pozitív körüljárásúak és közös csúcsuk az A pont. Mutassuk meg, hogy a B_1C_0, C_1D_0, D_1B_0 szakaszok D, B, C felezőpontjai is egy pozitív körüljárású szabályos háromszög csúcsai (lásd az 1. ábrát).



4.12.1. ábra.

b) Mutassuk meg, hogy ha az $A_BB_0B_1$, $A_CC_0C_1$, $A_DD_0D_1$ háromszögek szabályosak, pozitív körüljárásúak és az $A_BA_CA_D$ háromszög is szabályos és pozitív körüljárású, akkor a B_1C_0, C_1D_0, D_1B_0 szakaszok D, B, C felezőpontjai is egy pozitív körüljárású szabályos háromszög csúcsai.

c) Mutassuk meg, hogy ha b)-ben az $A_BA_CA_D$ háromszög nem szabályos és pozitív körüljárású, (de a többi feltétel ugyanúgy teljesül) akkor a DBC háromszög sem az.

4.4. Körök és húrjaik

4.1. (M) [6] Tekintsük a komplex számsíkon az 0 középpontú k kört és jelölje a_1, a_2, b_1, b_2 e kör egy-egy pontját, illetve a pontnak megfelelő komplex számot. Írjuk fel annak algebrai feltételét, hogy az a_1a_2, b_1b_2 húrok

a) párhuzamosak, **b)** merőlegesek.

4.2. (M) [6] Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög magasságvonalait a körülírt körig, és az így kapott pontokat jelölje A', B' és C'. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög magasságvonalai felezik az $A'B'C'$ háromszög szögeit!

4.3. (M) [6] Tekintsük a komplex számsíkon az 0 középpontú k kört és jelölje a, b és c kör egy-egy pontját, illetve a pontnak megfelelő komplex számot. Írjuk fel az abc háromszög

a) magasságpontját
b) a magasságvonalak talppontjait
c) a magasságpontnak az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképeit
d) a csúcsoknak az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképeit

az a, b, c komplex számok algebrai kifejezéseként!

4.4. (M) Igazoljuk, hogy a háromszög talpponti háromszögének oldalai merőlegesek a háromszög köré írt kör csúcsokhoz tartozó sugaraira.

4.5. (M) [14] Az ABC háromszög A-ból induló magasságvonalának felezőpontja D, hasonlóan a B-ből induó magasságvonal felezőpontja E, továbbá a C-ből induló magasság talppontja T. Igazoljuk, hogy $DTE\angle = ACB\angle$.

4.6. (M) Legyen az O középpontú kör egy húrjának két végpontja a és b. Mutassuk meg, hogy a húr felezőmerőlegesének a körrel való metszéspontjai a $\pm\sqrt{ab}$ komplex számoknak megfelelő pontok.

4.7. (M) Mi az algebrai feltétele (lásd pld a 4.1. feladatot), hogy a kör két húrja α szöget zárjon be?

4.8. (M) [4] Tekintsük a komplex számsík origó középpontú k körén az a_1, a_2, b_1, b_2 pontokat. Fejezzük ki az a_1, a_2, b_1, b_2 komplex számokkal az a_1a_2, b_1b_2 húregyenesek metszéspontját

a) ha ezek a húrok merőlegesek egymásra;
b) az általános esetben.

4.9. (M) Mutassuk meg, hogy ha a_1, a_2, b_1, b_2 az origó középpontú egységsugarú kör pontjai, akkor az a_1, a_2 pontokat összekötő szelőegyenes a b_1, b_2 pontokat összekötő szelőegyenest abban a z pontban metszi, amelyre

$$\overline{z} = \frac{a_1 + a_2 - b_1 - b_2}{a_1a_2 - b_1b_2}.$$

4.10. (M) Mutassuk meg, hogy a háromszög magasságpontjának oldalakra vonatkozó tükörképei a köré írt körön vannak.

4.11. (M) [6] Mutassuk meg, hogy ha a háromszög körülírt körének bármely P pontját

a) merőlegesen vetítjük; **b)** tükrözzük

a háromszög oldalaira, akkor a három képpont egy egyenesen van és ez az egyenes a b) esetben átmegy az eredeti háromszög magasságponján! Az a) esetben a kapott egyenest az ABC háromszög P ponthoz tartozó Simson (Wallace) egyenesének nevezzük.

4.12. (M) Mutassuk meg, hogy tetszőleges háromszögben

a) az átellenes köri pontokhoz tartozó Simson-egyenesek merőlegesek egymásra.
b) az egymásra merőleges Simson-egyenesek a Feuerbach-körön metszik egymást.

4.13. (M) [6] Az ABC háromszög minden csúcsából szerkesszünk olyan egyenest, amely a szemközti oldalt α szögben metszi úgy, hogy minden oldalegyenest ugyanolyan irányú α forgással lehessen a metszőkbe vinni. A metsző egyenesek a háromszög köré írt kört A^*, B^*, C^* pontokban metszik ismét. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is választjuk α-t, az $A^*B^*C^*$ háromszögek mindig egybevágók.

4.14. (M) Ajunk meg a síkon n tetszőleges egyenesből álló E egyeneshalmazt és egy O pontot. O-ból az egyenesekre állított merőlegesek talppontjai legyenek A_1, A_2, $\dots$, A_n. Forgassuk el az OA_1, OA_2, $\dots$, OA_n egyeneseket O körül egy tetszőleges φ szöggel; az elforgatott egyenesek az adott egyeneseket most az A_i pontok helyett rendre $B_1, B_2, \dots, B_n$ pontokban metszik. Ezt a ponthalmazt az E egyeneshalmaz egyik talpponti alakzatának nevezzük. Mutassuk meg, hogy az E egyeneshalmaz O pontra vonatkozó mindegyik talpponti alakzata hasonló.

4.5. Komplex kettősviszony alkalmazása

4.1. (M) [6] Igazoljuk a komplex számsíkon felvett $abcd$ négyszög oldal- és átlóvektoraira, mint komplex számokra vonatkozó alábbi azonosságot!

$$(a-c)\cdot(b-d)=(a-d)\cdot(b-c)+(d-c)\cdot(b-a).$$

4.2. (MS) [6] Igazoljuk a Ptolemaiosz tételt (lásd a G.II.12.7. feladatot) a komplex számok segítségével!

4.3. (MS) [14] Az ABC háromszög AB és AC oldalára kifelé rajzolt négyzetek középpontja K és L, az A-ból induló magasságvonal talppontja T, a BC oldal felezőpontja F. Mutassuk meg, hogy $KTFL$ húrnégyszög.

4.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög csúcsaiból képzett háromszögek Feuerbach-körei egy ponton mennek át.

4.5. (M) [6] (*Newton tétele*)
Mutassuk meg, hogy bármely érintőnégyszögben a beírt kör középpontja és a két átló felezőpontja egy egyenesen helyezkedik el.

4.6. Diszkrét Fourier transzformáció

4.1. [2] Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert! A z_0, z_1, z_2-re kapott kifejezéseket vonjuk össze és egyszerűsítsük!

$$\left.\begin{aligned} z_0+z_1+z_2 &= A_0\\ z_0+\omega z_1+\omega^2 z_2 &= A_1\\ z_0+\omega^2 z_1+\omega z_2 &= A_2 \end{aligned}\right\}$$

4.2. (M) Vessük össze a 4.1., 4.5. feladatokat!

a) Írjunk fel a 4.1. feladat megfelelőjét négy ismeretlennel, tehát oldjuk meg a

$$\left.\begin{aligned} z_0+z_1+z_2+z_3 &= A_0\\ z_0+iz_1+i^2z_2+i^3z_3 &= A_1\\ z_0+i^2z_1+i^4z_2+i^6z_3 &= A_2\\ z_0+i^3z_1+i^6z_2+i^9z_3 &= A_3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert!

b) Mit mond a $z_0z_1z_2z_3$ négyszög geometriájáról az $A_0=0$ feltétel? Milyen négyszögekre lesz $A_1=0$? És $A_2=0$; $A_3=0$?

4.7. Vegyes feladatok

4.1. (M) Tetszőleges háromszög oldalai fölé szerkesszünk hasonló egyenlő szárú háromszögeket. Mutassuk meg, hogy ezek csúcsait a szemközti háromszögcsúcsokkal összekötő egyenesek egy ponton mennek át.

4.2. (M) Az $(ab_1c_1), (ab_2c_2), (ab_3c_3)$ egy közös csúccsal rendelkező, egyező körüljárású hasonló háromszögek. Tudjuk, hogy a b_1, b_2, b_3 pontok egy egyenesen vannak. Igazoljuk, hogy akkor a c_1, c_2, c_3 pontok is kollineárisak.

4.3. (M) Szerkesszünk egy körbe két egybevágó, azonos körüljárású háromszöget. Mutassuk meg, hogy

a) az egymáshoz tartozó oldalegyenesek metszéspontjai az eredetihez hasonló háromszög csúcsai;

b) ennek a háromszögnek a magasságpontja a kör középpontja.

4.4. (M) Forgassuk el az $ABCD$ húrnégyszöget a köré írt kör középpontja körül. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti négyszög oldalegyenesei az elforgatott négyszög megfelelő oldalegyeneseit egy paralelogramma csúcsaiban metszik.

4.5. (M) Egy 60°-os szög egyik szárán elhelyezkedő A, illetve A_1 pontnak a szög csúcsától mért távolsága p, illetve $2q$; a másik száron elhelyezkedő B, illetve B_1 pontnak a csúcstól mért távolsága pedig q, illetve $2p$. Az A_1B_1 szakasz felezőpontja C. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög szabályos.

4.6. (M) Milyennek kell lennie az ABC háromszögnek ahhoz, hogy az oldalai fölé szerkesztett négyzetek középpontjai szabályos háromszöget alkossanak?

4.7. (M) Három hasonló és azonos körüljárású háromszög egy-egy csúcsát összekapcsoljuk egy negyedik - az előző háromhoz hasonló és azonos körüljárású - háromszög megfelelő csúcsaival. A szabadon maradt csúcsok közül a szomszédo-sakat (,az azonos szöggel rendelkezőket,) összekötjük. Bizonyítsuk be, hogy az összekötő szakaszok felezőpontjai az eredeti háromszögekhez hasonló és megegyző körüljárású háromszöget határoznak meg.

4.8. (M) [15] Igazoljuk a háromszögek területére vonatkozó Heron-képletet a komplex számok felhasználásával.

4.9. (M) Adott négy kör C_1, C_2, C_3, C_4 a komplex síkon úgy, hogy C_1 és C_2 metszéspontjai z_1, w_1; C_2 és C_3 metszéspontjai z_2, w_2; C_3 és C_4 metszéspontjai z_3, w_3 és végül C_4 és C_1 metszéspontjai z_4, w_4. Mutassuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3 és z_4 pontok akkor és csak akkor helyezkednek el egy körön, ha w_1, w_2, w_3 és w_4 pontok is egy körön vannak.

4.10. (M) *A síkon n darab egyenest általános helyzetűnek nevezünk, ha semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három közülük nem metszi egymást egy pontban. Két általános helyzetű egyenes metszéspontját nevezhetjük a két egyenes Clifford-féle pontjának. Három általános helyzetű egyenesnek három Clifford-féle pontja van és ezek körülírt köre, a három egyenes Clifford-köre.*

a) Vegyünk négy általános helyzetű egyenest a síkon. Ezek közül bármely háromnak van Clifford-köre. Igazoljuk, hogy a négy kör egy pontban metszi egymást. *Ez a négy egyenes Clifford-féle pontja.*

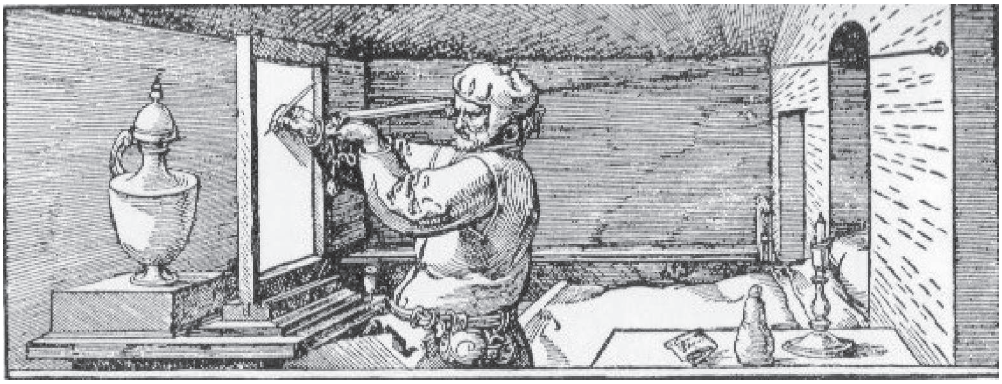
b) Most vegyünk öt általános helyzetű egyenest. Bármelyik négynek van Clifford-féle pontja. Lássuk be, hogy az így nyerhető öt Clifford-féle pont egy körön van. Sőt! Hat általános helyzetű egyenesnek hat Clifford-féle köre van. Ezek úgy keletkeznek, hogy egy-egy pontot elhagyunk és a maradék öt pontnak vesszük a Clifford-körét. Belátható, hogy ez a hat kör egy pontban metszi egymást, stb... Kapunk egy végtelen tételláncolatot, az ún. Clifford-féle tételláncot.

5. FEJEZET

Projektív geometria

5.1. Perspektivitás

5.1. Figyeljük meg Dürer „A művész kannát rajzol” című metszetét (1. ábra)! A rajzoló ábrázolja a kanna alapját alkotó négyzetlapot, párhuzamosok lesznek-e annak oldalai a képén?

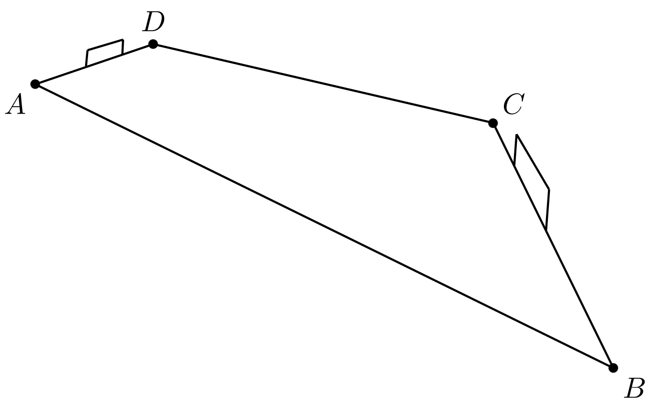


5.1.1. ábra.

5.2. (M) [11] Az 1. ábrán egy focipálya fényképe látható. Szerkesszük meg a

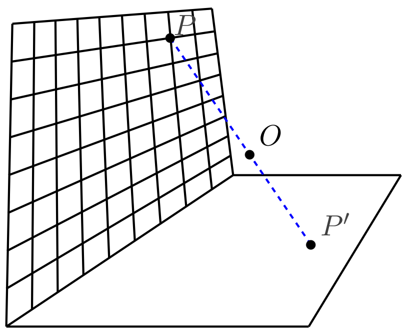
a) pálya középvonalát;

b) az alapvonalakkal párhuzamos, azok távolságát harmadoló egyeneseket!



5.2.1. ábra.

5.3. Nyissuk ki derékszögben a füzetünket (lásd az 1. ábrát) és az egyik oldalon található (vagy az oldal mellé helyezett) négyzethálót vetítsük át a tér egy pontjából a másik lapra (a mindkét lapot képzeljük teljes síknak).

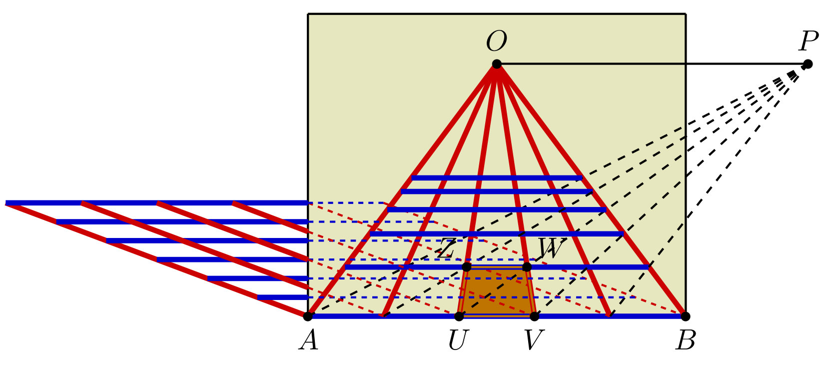


5.3.1. ábra.

a) Rajzoljuk meg a hálóvonalak képét!
b) Mely pontoknak nem lesz képe a füzetlap síkjában?
c) Párhuzamosak-e az eredetileg párhuzamos rácsvonalak képei?

5.4. (M) (*Ábramagyarázat Leon Battista Alberti (1404–1472) „De pictura" című könyvéhez*)
A festő a terem padlóját jeleníti meg vásznán. A padló negyzetrácsos elrendezésű parketta („pavimenti"). A vászon a padlóig ér, alja, az 1. ábrán az AB szakasz, épp egybeesik az egyik parkettasor kezdetével, a parkettalapok szélei tehát AB-vel párhuzamosak illetve merőlegesek rá. A festő a terem szimmetriatengelyében áll, egynem egy parkettalap oldalaira merőleges szimmetriasíkjában. A festőhöz legközelebbi parketta (a festő egyik szeméből vetített) képe a vásznon az $UVWZ$ szimmetrikus trapéz, melynek alapjai $UV = c > a = ZW$, magassága pedig m. A trapéz szárainak meghosszabbításai az O pontban metszik egymást.
Fejezzük ki a, c és m segítségével a
a) festő szemmagasságát;
b) festő és a vászon távolságát!

Az 1. ábrán megrajzoltuk a parkettalapok egymással párhuzamos átlóinak képét is. Ezek egy P pontban metszik egymást.
c) Mutassuk meg, hogy OP és AB párhuzamosak.
d) Bizonyítsuk be, hogy az OP távolság megegyezik a festő és a vászon távolságával.



5.4.1. ábra.

5.5. Tekintsük a térbeli koordinátarendszerben az O origót, a $z = 1$ egyenletű Σ síkot és az $x = 1$ egyenletű Π síkot. Vetítsük át a Σ síkot O-ból a Π síkra.

a) A Σ sík mely pontjainak nem lesz képe a vetítésnél?

b) A Π sík mely pontjai nem állnak elő a Σ sík egyik pontjának képeként sem?

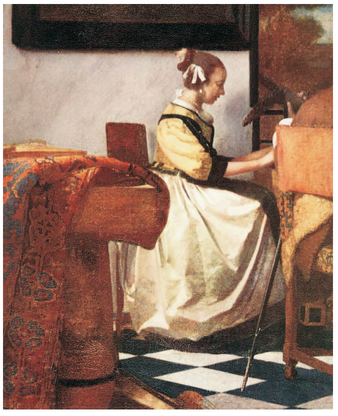
Tekintsük a Σ sík $P_0(0{,}0{,}1)$, $P_1(0{,}1{,}1)$, $P_2(0{,}2{,}1)$ pontjait és az azokon áthaladó egymással párhuzamos $\underline{e}(1{,}0{,}0)$ irányvektorú e_0, e_1, e_2 egyeneseket valamint a P_0, P_1 pontokon átmenő $\underline{f}(1{,}1{,}0)$ irányvektorú f_0, f_1 egyeneseket.

c) Határozzuk meg az $e_1 \cap f_0$, $e_2 \cap f_0$, $e_2 \cap f_1$ metszéspontok és vetítésnél származó képeik koordinátáit!

d) Hol metszik egymást az e_0, e_1, e_2 egyenesek képei?

e) Hol metszik egymást az f_0, f_1 egyenesek képei?

5.6. Adott egy konvex négyszög, egy négyzetalakú parkettákból álló padló egyetlen négyzetének képe egy festményen vagy fényképen (lásd pl Vermeer „Koncert” című festményének az 1. ábrán látható részletét). Szerkesszük tovább a képet, rajzoljuk meg a szomszédos parkettalapokat!



5.6.1. ábra.

5.7. (M) Adott egy négyszög.

a) Mutassuk meg, hogy átvetíthető egy másik síkba, hogy képe paralelogramma legyen!

b) Átvihető-e vetítések egymás utáni alkalmazásával négyzetbe?

c) Átvihető-e egyetlen megfelelő vetítéssel négyzetbe?

5.2. A kettősviszony fogalma (pontok és egyenesek)

5.1. Ha A, B, C három pont, amelyek egy egyenesen vannak, akkor hozzájuk rendelhető egy valós szám, a három pont osztóviszonya. Ehhez az egyenesen felveszünk egy irányítást és rajta a PQ távolságot irányítottan értelmezzük: ha P-től Q az egyenes felvett irányításának megfelelő irányban van, akkor PQ előjeles távolságot pozitívnak, egyébként negatívnak tekintjük. Az osztóviszonyt az $(ABC) = AC/CB$ hányados értéke adja meg.

a) Mutassuk meg, hogy az osztóviszony értéke nem változik meg, ha az egyenes irányítását megfordítjuk!

b) Adott az A és a B pont. Az (ABC) osztóviszony értéke mely C pontokra lesz negatív, illetve mikor lesz pozitív?

c) Az $A = B$, $B = C$, $C = A$, $A = B = C$ speciális elrendeződések melyike esetén értelmezhető az osztóviszony és mennyi az értéke?

d) Adott az A és a B pont. Keressük meg az összes olyan C pontot, amelyre (ABC) értéke 1, 2, -1, -2!

e) Melyek azok a valós értékek, amelyet (ABC) nem vesz fel? Van-e olyan érték amelyet, rögzített A, B esetén, több C pontnál is felvesz?

f) Mutassuk meg, hogy (ABC) értéke nem változik meg a sík hasonlósági transzformációinál!

g) Változhat-e (ABC) értéke ha az egyenes a sík egy pontjából egy másik egyenesre vetítjük?

5.2. Ha A, B, C, D négy pont, amelyek egy egyenesen vannak, akkor hozzájuk rendelhető egy szám, a négy pont *kettősviszonya*, az osztóviszonyok hányadosa: $(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{AC}{CB}/\frac{AD}{DB} = \frac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD}$.

a) Adott az egymástól különböző A, a B és a C pont. Az $(ABCD)$ kettősviszony értéke mely D pontokra lesz negatív, illetve mikor lesz pozitív?

b) Ha az A, B, C, D pontok között azonosak is vannak, akkor mely esetekben hogyan értelmezhető a kettősviszonyuk?

c) Adott az A, a B és a C pont. Szerkesszük meg az összes olyan D pontot, amelyre $(ABCD)$ értéke 1, 2, -1, -2!

d) Melyek azok a valós értékek, amelyet $(ABCD)$ nem vesz fel? Van-e olyan érték amelyet, rögzített A, B, C esetén, több D pontnál is felvesz?

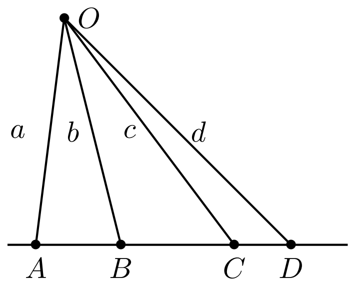
e) Mutassuk meg, hogy $(ABCD)$ értéke nem változik meg a sík hasonlósági transzformációinál!

5.3. (MS) (*Egyenesek kettősviszonya*)

Jelölje az a és b egyenesek szögét (ab), ezt irányítva értjük. A metszéspontjuk körül a-t (ab) szöggel az óra járásával ellentétes irányba elforgatva éppen b-t kapjuk. Az (ab) szög csak modulo 180° definiált.

Ha a, b, c, d négy egyenes, melyek egy ponton haladnak át, akkor kettősviszonyukat jelölje $(abcd)$. Ez egy szám, melyet így definiálunk:

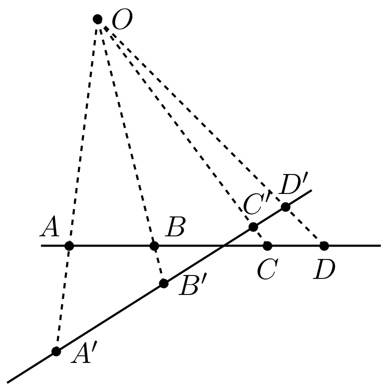
$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}.$$



5.3.1. ábra.

Mutassuk meg, hogy ha A, B, C és D egy egyenesen elhelyezkedő pontok és O erre az egyenesre nem illeszkedő pont, akkor az $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$ egyenesekre $(abcd) = (ABCD)$!

5.4. (S) (*A kettősviszony invarianciája vetítésnél*)
Mutassuk meg, hogy a vetítés megtartja a kettősviszonyt, azaz ha az egy egyenere illeszkedő A, B, C, D pontok képei az egyenesnek egy másik egyenesre való vetítésénél A', B', C' és D', akkor $(ABCD) = (A'B'C'D')$.



5.4.1. ábra.

5.5. (M) A számegyenesen az A pont a 0-nál, a B az 1-nél, a C a 3-nál van. Hol van a D pont, ha $(ABCD) = 4$?

5.6. (M) Az A, B, C, D, pontok a számegyenesen rendre -3, 1, 7, 10-nél vannak, a számegyenes ideális pontját jelölje E. Mekkora a következő kettősviszonyok értéke:
a) $(ABCD)$; **b)** $(DCBA)$; **c)** $(ABCE)$?

5.7. (*A kettősviszony előjele*) Határozzuk meg fejben az $(ABCD)$ kettősviszony előjelét, ha A, B, C, D rendre a számegyenes alább megadott pontjainak felelnek meg:
a) 1, 4, 5, 10; **b)** (-1), 4, 5, 10; **c)** 1, 4, (-5), 10; **d)** 1, 4, 10, 5;
e) 1, 4, 5, 3; **f)** 1, 4, 2, 3; **g)** 1, 4, 2, (-3); **h)** 1, 4, (-2), (-3).

5.8. Adott egy sugársor három eleme a, b, c. Szerkesszük meg a sugársor d elemét úgy hogy $(abcd)$ értéke
a) 2; **b)** -2
legyen.

5.9. (MS)
a) Mutassuk meg vetítésekkel, hogy $(ABCD) = (BADC)$, azaz vetítések sorozatával vigyük át az A, B, C, D pontnégyest a B, A, D, C pontnégyesbe!
b) Ehhez hasonlóan igazoljuk, hogy $(ABCD) = (DCBA)$.

5.10. Igazoljuk, hogy egy egyenes tetszőleges öt pontjára teljesül, hogy $(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$.

5.11. Adott egy egyenesen hét pont: A, B, C, D, A', B', és C'. Szerkesszünk olyan D' pontot, amelyre $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

5.12. **a)** Mutassuk meg, hogy ha adott λ valós szám és egy egyenes három pontja, A, B és C, akkor az egyenesen egy és csakis egy olyan D pont van, amelyre $(ABCD) = \lambda$.
b) Igazoljuk, hogy ha fent λ komplex szám és A, B, C a komplex számsík pontjai, akkor is egyértelműen létezik a D pont, melyre $(ABCD) = \lambda$.

5.13. a) Mutassuk meg, hogy ha adott egy egyenes három különböző pontja, A, B és C, valamint három további, az előzőekkel esetleg egyező, de egymástól különböző pontja, A', B' és C', akkor van vetítéseknek olyan φ kompozíciója, amely az egyenest önmagára képezi és $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$.

b) Igazoljuk, hogy ha a fenti φ transzformáció hatását tekintve egyértelmű, tehát az egyenes bármely D pontjára a $\varphi(D)$ pont egyértelműen meghatározott.

5.14. a) Az alábbi $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvények közül melyek tartják meg a valós számnégyesek kettősviszonyát (a függvényeket a végtelenben ottani határértékükkel értelmezzük)?

$f(x) = x + 3$, $\quad g(x) = x^2$, $\quad h(x) = 4x$, $\quad j(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f(x) = x^3 - 1$.

b) A fenti függvények $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hozzárendeléseknek is felfoghatók. Melyek tartják meg közülük a komplex kettősviszonyt?

5.15. Adjuk meg az összes olyan $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt, amely megtartja a valós számnégyesek kettősviszonyát (a függvényeket a végtelenben ottani határértékükkel értelmezzük)!

5.16. (MS) (*A kettősviszony permutációi*)

Legyen $(ABCD) = x$. Tekintsük az A, B, C, D betűk 24 permutációját. Mindegyik π permutációhoz tartozik egy $(\pi(A)\pi(B)\pi(C)\pi(D))$ kettősviszony. Ennek hányféle értéke van? Fejezzük ki a lehetséges értékeket x-szel!

5.17. (MS) (*Kettősviszony vektorokkal*)

Adott az e egyenes, rajta az A, B, C, D pontok, továbbá az e-re nem illeszkedő O pont. Tekintsük az OA, OB, OC, OD egyenesek $\underline{a}$, $\underline{b}$,$\underline{c}$, $\underline{d}$ irányvektorait és legyen

$$\underline{c} = \alpha_1 \underline{a} + \beta_1 \underline{b}, \qquad \underline{d} = \alpha_2 \underline{a} + \beta_2 \underline{b}. \tag{1}$$

Fejezzük ki az $(ABCD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$ kettősviszonyt az α_1, β_1, α_2, β_2 változókkal!

5.3. A kettősviszony fogalma (köri pontok, komplex számok)

5.1. (M) (*Komplex osztóviszony és kettősviszony*)

a) A z_1, z_2, z_3 komplex számok kettősviszonya a

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$$

komplex szám. Mutassuk meg, hogy három komplex szám osztóviszonya pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre illeszkednek!

b) Bizonyítsuk be, hogy az osztóviszony irányítástartó hasonlósági transzformációkra invariáns!

c) A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok kettősviszonya a

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

komplex szám. Igazoljuk, hogy négy komplex szám kettősviszonya és inverziónál származó képeik kettősviszonya egymás konjugáltja!

d) Mutassuk meg, hogy négy komplex szám kettősviszony pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre vagy körre illeszkednek!

e) Mutassuk meg, hogy négy komplex szám kettősviszony pontosan akkor negatív, ha egy egyenesre vagy körre illeszkednek és azon az AB pontpár elválasztja a CD pontpárt!

5.2. (*Köri pontok kettősviszonya I.*)

Legyen egy kör 6 pontja A, B, C, D, P, Q. Jelölje PA, PB, PC, PD egyenesét a, b, c, d. Jelölje QA, QB, QC, QD egyenesét a',b', c', d'.

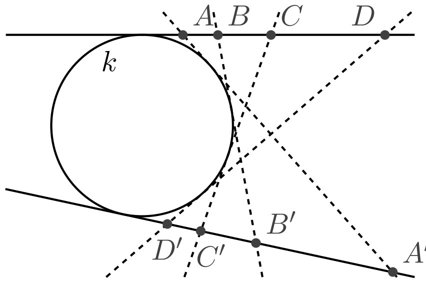
a) Igazoljuk, hogy $(abcd) = (a'b'c'd')$.

b) Mutassuk meg, hogy ez az összefüggés akkor is fennáll, ha P megegyezik az A, B, C, D pontok egyikével, ha ilyenkor az egybeeső pontok összekötő egyenesének a kör adott pontbeli érintőjét tekintjük!

5.3. (MS) (*A komplex és a projektív kettősviszony azonossága*)

Adott a k körön az A, B, C, D és a P. Mutassuk meg, hogy a $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$ sugárnégyes $(abcd)$ kettősviszonya egyenlő az A, B, C, D pontnégyes, mint négy komplex szám, kettősviszonyával (lásd a 3.3. feladatot)!

5.4. A k kört érintik az a, b, c, d, p, q egyenesek. Jelölje p egyenesnek az a, b, c, d egyenesekkel való metszéspontjait rendre A, B, C, D. Jelölje q egyenesnek az a, b, c, d egyenesekkel való metszéspontjait rendre A', B', C', D' (lásd az 1. ábrát). Igazoljuk, hogy $(ABCD) = (A'B'C'D')$.



5.4.1. ábra.

5.5. (*Steiner-tengely*)

Adott a k kör hat pontja: A, B, C és A', B', C'. Az A, B, C pontok különböznek egymástól és A', B', C' is három különböző pont.

a) Mutassuk meg, hogy a k körnek legfeljebb egy olyan önmagára való kettősviszonytartó leképezése van, amelynél A, B és C képei rendre A', B' és C'!

b) Mutassuk meg, hogy van ilyen önmagára való leképezése a körnek!

c) Az 1. ábrán M és N az

$$\beta = AB' \cap A'B, \qquad \gamma = AC' \cap A'C$$

pontokon át húzott $\beta\gamma$ egyenes és a k kör metszéspontjai. Mutassuk meg, hogy M és N az a)-b) feladatrészek szerint egyértelműen létező transzformáció fixpontjai!

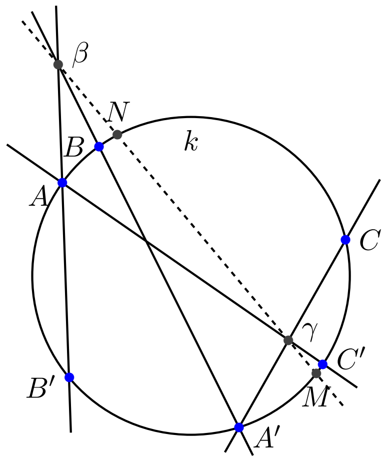
5.4. Harmonikus elválasztás

5.1. (*Speciális elrendezések*)

a) Mennyi lehet a számegyenes A, B, C, D pontjainak kettősviszonya, ha a pontok 24 permutációjánál a kettősviszony értékére hatnál kevesebb különböző értéket kapunk?

b) A komplex számsíkon komplex kettősviszonnyal számolva kaphatunk-e az a) részben feltett kérdésre más értéket is?

5.2. Adott egy egyenesen négy pont A, B, C, D. Lehetséges-e, hogy $(ABCD) = (ABDC)$? Mekkora lehet $(ABCD)$ értéke? Ilyen helyzetben azt is mondhatjuk, hogy A és B-re vonatkozóan C harmonikus társa D.



5.5.1. ábra.

5.3. Igazoljuk, hogy ha A és B-re vonatkozóan C és D harmonikus társak, akkor C és D-re vonatkozóan A és B is harmonikus társak.

5.4. Adott egy egyenesen három pont A, B, C. Szerkesszük meg az egyenesen D-t úgy, hogy $(ABCD)$ értéke -1 legyen. Ez a szerkesztés elvégezhető csak vonalzóval is. Hogyan?

5.5. Egy sugársor négy eleme a, b, c, d. $(abcd)$ értéke -1. Hogyan helyezkedik el

a) d, ha c az a és b egyik szögfelezője?

b) c és d, ha a és b merőlegesek?

5.6. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain vannak rendre a C', A', B' pontok. Az AA', BB', CC' egyenesek egy sugársorhoz tartoznak. Az $A'B'$ egyenes D-ben metszi az AB egyenest. Igazoljuk, hogy $(ABC'D)$ értéke -1.

5.7. Jelölje az $ABCD$ trapéz AC, BD átlóinak metszéspontját U, az AD, BC szárak meghosszabbításának metszépontját V, az AB, CD alapok felezőpontjait F és G. Mutassuk meg, hogy

a) az U, V, F,G pontok egy egyenesen vannak;

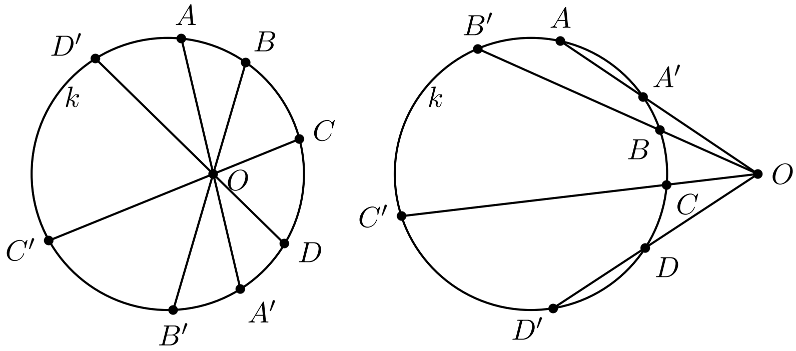
b) $(UVFG) = -1$.

5.8. A k körhöz a D külső pontból érintőket húzunk. Az érintési pontok S és T. Egy D-n áthaladó szelő A és B pontokban metszi k-t C-ben pedig ST-t. Igazoljuk, hogy $(ABCD)$ értéke -1.

5.9. Tekintsük a k kört és a rá nem illeszkedő O pontot. Az O pontból a kört önmagára vetíthetjük, azaz tekintjük azt a $\varphi : k \longrightarrow k$ leképezést, amelyre $\varphi(P)$ az OP egyenes és a k kör P-től különböző metszéspontja, illetve $\varphi(P) = P$, ha OP érinti k-t (lásd az 1. ábrát).

a) Mutassuk meg, hogy φ kettősviszonytartó leképezés!

b) Mutassuk meg, hogy ha φ a k körnek önmagára való kettősviszonytartó leképezése, amelynek a négyzete az identitás (azaz $P \in k$ esetén $\varphi(\varphi(P)) = P$, tehát φ *involúció*), akkor létezik olyan O pont a síkon, amely bármely $P \in k$ pont esetén illeszkedik a P, $\varphi(P)$ pontok összekötő egyenesére, illetve a k kör P-beli érintőjére, ha $P = \varphi(P)$.



5.9.1. ábra.

5.5. Kúpszeletek, kör vetítése

5.1. (MS) [17] (*Kúpszeletek a pergéi Apollóniosz „Kónika” című könyvsorozatából*)

Ha adott valamely Σ síkban egy k kör és a Σ síkon kívül a térben egy A pont, akkor az A pontot tartalmazó és k egy-egy pontján átmenő egyenesek uniójaként létrejövő ponthalmazt *körkúp*nak nevezzük. A k kör a kúp *vezérköre* az A pont pedig a kúp *csúcsa.* A körkúp *egyenes körkúp* vagy *forgáskúp*, ha a kúp A csúcsa illeszkedik a k kör forgástengelyére, a Σ síkra merőleges, k középpontján áthaladó egyenesre. Ellenkező esetben a kúp *ferde.*

Mutassuk meg, hogy a körkúp A csúcsát nem tartalmazó síkmetszete kör, ellipszis, hiperbola vagy parabola.

5.2. (M) (*Különböző körmetszetek*)

a) Mutassuk meg, hogy a ferde körkúpnak van olyan a vezérkör síkjával nem párhuzamos síkmeteszete, ami kör!

b) Igazoljuk, hogy ha a körkúpnak két nem párhuzamos síkban található síkmetszete kör, akkor ez a két kör egy gömbön van!

5.3. (MS) (*Kör vetítése körbe I., egyenes a végtelenbe*)

Adott egy Σ sík k köre és egy attól diszjunkt t egyenese.

a) Mutassuk meg, hogy van olyan A pont a térben, amelyre az A csúcsú, k vezérkörű kúpnak az A pont és a t egyenes $\Pi_{A,t}$ síkjával párhuzamos síkmetszetei körök.

b) Határozzuk meg az ilyen tulajdonságú A pontok halmazát a térben!

c) Mutassuk meg, hogy a Σ sík átvetíthető egy másik síkba úgy, hogy k képe kör legyen, és t az új sík ideális egyenesébe képződjön!

5.4. (*Kör vetítése körbe II., pont a középpontba*)

Adott egy Σ sík k köre és a k kör egy P belső pontja. Mutassuk meg, hogy a Σ sík átvetíthető egy másik síkba úgy, hogy k képe kör legyen, P képe a k képének középpontja legyen!

5.5. (*Kör középpontja csak vonalzóval nem szerkeszthető*)

Adott a síkban egy körvonal. Igazoljuk, hogy euklideszi szerkesztési módszerekkel, de körző használata nélkül nem szerkeszthető meg a kör középpontja!

5.6. Vetítések és a kettősviszony alkalmazása

5.1. (M) (*A teljes négyoldal tétele*)

Négy egyenesről, amelyek közül semelyik három sem megy át ugyanazon a ponton, azt mondjuk, hogy *teljes négyoldal*t alkot. A négy egyenes metszéspontjai, összesen hat pont, a négyoldal *csúcspontjai.* A csúcspontokat egymással összekötve három új egyenest kapunk, ezek a négyoldal *átlói*. Az átlókon két-két csúcspont található és az eredeti oldalak még két-két pontot, a négyoldal *átlóspontjait* metszenek ki az átlókból. Mutassuk meg, hogy a teljes négyoldal átlóin a csúcsok az átlóspontokat harmonikusan választják el!

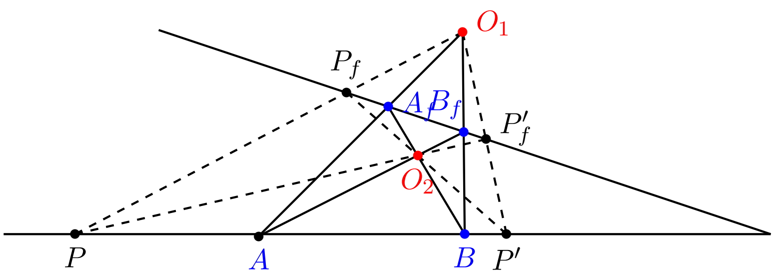
Tehát ha e_1, e_2, e_3, e_4 egyenesek és $e_i \cap e_j = P_{ij}$,

$$P_{12}P_{34} \cap P_{14}P_{23} = U, \quad \text{és} \quad P_{12}P_{34} \cap P_{13}P_{24} = V \qquad \Rightarrow \qquad (P_{12}P_{34}UV) = (-1).$$

5.2. (*A teljes négyszög tétele*)

Négy pontról, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, azt mondjuk, hogy *teljes négyszög*et alkot. Mutassuk meg, hogy ha az E_1, E_2, E_3, E_4 pontok teljes négyszöget alkotnak és $E_iE_j = p_{ij}$, $(p_{12} \cap p_{34})(p_{14} \cap p_{23}) = v$, és $(p_{12} \cap p_{34})(p_{13} \cap p_{24}) = v$. akkor $(p_{12}p_{34}uv) = (-1)$.

5.3. (MS) Tekintsük az e egyenest, rajta az A, B pontokat, egy e-től különböző f egyenest és egy O_1 pontot, amely e-re és f-re sem illeszkedik. Vetítsük át e-t f-re O_1-en át, legyen A és B képe A' és B'. Tekintsük az $A'B$, $B'A$ egyenesek O_2 metszéspontját és vetítsük vissza f-et e-re O_2-n át (lásd az 1. ábrát). A két vetítés π kompozíciója az e egyenest önmagára képezi. Mutassuk meg, hogy ha P az e tetszőleges pontja, akkor $\pi(\pi(P)) = P$.



5.3.1. ábra.

5.4. (MS) Vetítések egy ϕ kompozíciója az e egyenest önmagára képezi és az $A \in e$ pontra $\phi(A) \neq A$, de $\phi(\phi(A)) = A$. mutassuk meg, hogy az e egyenes tetszőleges X pontjára $\phi(\phi(X)) = X$.

5.5. (MS) [17] (*Desargues II. tétele*)

Adott az a egyenes és rajta öt különböző pont: A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24} (az egyik, bármelyik, lehet ideális is).

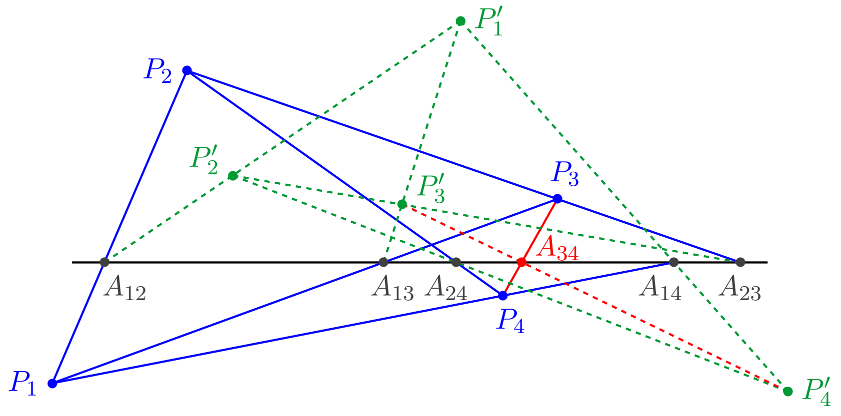
a) Szerkesszünk a síkon négy pontot, P_1-et, P_2-t, P_3-at, P_4-et, úgy hogy a közöttük futó egyenesek a-ból az adott pontokat messék ki: $a \cap P_1P_2 = a_{12}$, $a \cap P_1P_2 = a_{13}$, $a \cap P_1P_4 = a_{14}$, $a \cap P_2P_3 = a_{23}$, $a \cap P_2P_4 = a_{24}$.

b) Mutassuk meg, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög sokféleképpen felvehető az a) feladatrésznek megfelelően, pl P_1 és P_2 tetszőlegesen előre felvehető, csak arra kell ügyelni, hogy ne essenek egybe, egyik se illeszkedjen a-ra, de a P_1P_2 egyenes átmenjen A_{12}-n.

c) Bizonyítsuk be, hogy az A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24} pontok meghatározzák az A_{34} pontot, tehát a b), c) feladatrészekben kapott bármelyik $P_1P_2P_3P_4$ négyszögnél az $a \cap P_3P_4$ pont mindig ugyanaz a pont (lásd az 1. ábrát) vagy P_3P_4 mindig párhuzamos a-val.

5.6. (M) [17] (*Papposz feladata*)

Adott az a egyenes és rajta három különböző pont: A_{12}, A_{13}, A_{23} valamint két egyenes a_{14} és a_{24}.



5.5.1. ábra.

a) Mutassuk meg, hogy végtelen sokféleképpen megválaszthatók a sík P_1, P_2, P_3, P_4 pontjai úgy, hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

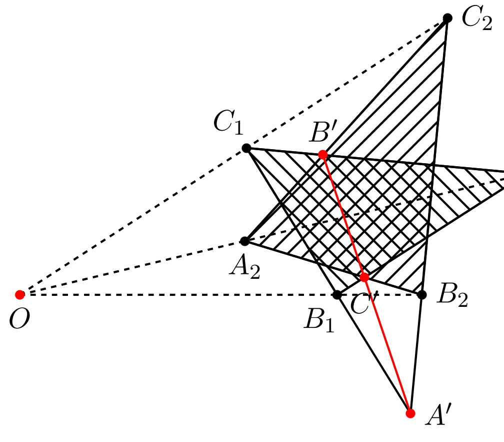
$$P_1P_4 = a_{14}, \qquad P_2P_4 = a_{24}, \qquad A_{ij} \in P_iP_j \qquad (1 \le i < j \le 4). \tag{1}$$

b) Mutassuk meg, hogy a)-ban a lehetséges P_3 pontok egy egyenesen helyezkednek el!

5.7. (MS) (*Desargues I. tétele*)

Azt mondjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ háromszög *pontra nézve perspektív*, ha az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

Azt mondjuk, hogy az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ háromszögek *egyenesre nézve perspektív*ek, ha az $A_1B_1 \cap A_2B_2$, $B_1C_1 \cap B_2C_2$, $C_1A_1 \cap C_2A_2$ pontok egyenesre illeszkednek (lásd az 1. ábrát).

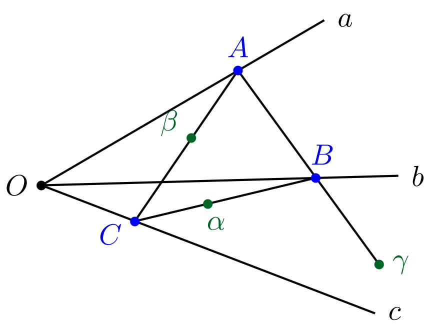


5.7.1. ábra.

Mutassuk meg, hogy két háromszög pontosan akkor perspektív pontra nézve, ha perspektív egyenesre nézve!

5.8. (S)

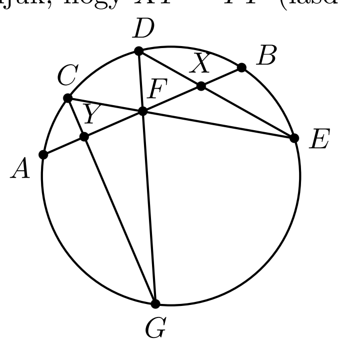
Adott három egyenes, a, b és c, melyek egy közös O ponton mennek át. Adott még három pont is: α, β és γ. Szerkesztendő ABC háromszög, melynek A, B, C csúcsai rendre illeszkednek az a, b, c egyenesekre, míg az α, β, γ pontok rendre illeszkednek a háromszög BC, CA, AB oldalegyeneseire.



5.8.1. ábra.

5.9. (M) (*MEMO 2008*)
Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. A háromszög beírt köre az AB oldalt D-ben, BC-t E-ben érinti. Egy AE-től különböző, de A-n átmenő egyenes a beírt kört az F, G pontokban metszi. Az AB egyenes EF-et és EG-t rendre K-ban és L-ben metszi. Igazoljuk, hogy $DK = DL$.

5.10. (*Pillangó tétel*)
Egy kör AB húrjának felezőpontja F. Az egyik AB íven van két további pont C és D. A CF és DF egyenesek második metszéspontja a körrel rendre E és G. DE és GC húrok az AB húrt rendre X és Y-ban metszik. Igazoljuk, hogy $XF = YF$ (lásd az 1. ábrát).



5.10.1. ábra.

5.11. (*Pascal tétel*)
Egy kör hat pontja A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Igazoljuk, hogy az

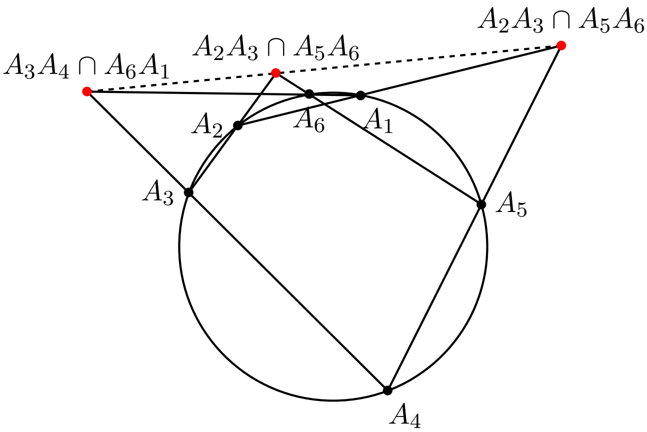
$$A_1A_2 \cap A_4A_5, \qquad A_2A_3 \cap A_5A_6, \qquad A_3A_4 \cap A_6A_1$$

metszéspontok egy egyenesen vannak (lásd az 1. ábrát)!

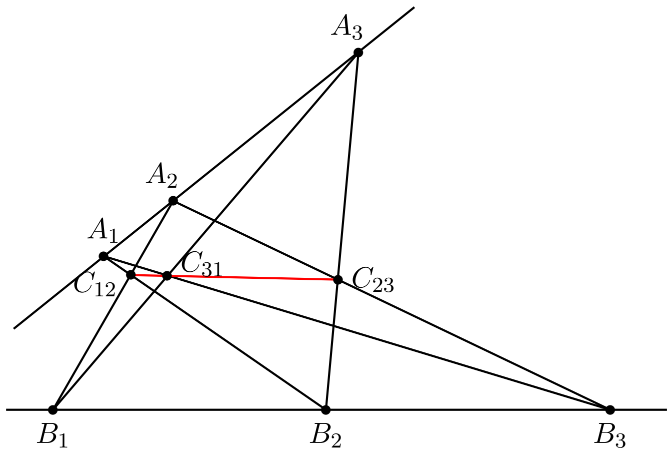
5.12. (*Pappos-Pascal tétel*)
Adott a síkon két egyenes a és b. Az a egyenes három pontja A_1, A_2, A_3, a b egyenes három pontja B_1, B_2, B_3. Igazoljuk, hogy az

$$C_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1, \qquad C_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2, \qquad C_{31} = A_3B_1 \cap A_1B_3$$

metszéspontok egy egyenesen vannak(lásd az 1. ábrát)!



5.11.1. ábra.



5.12.1. ábra.

5.7. Polaritás

5.1. Adjunk meg a valós projektív sík pontjai és egyenesei közötti olyan bijekciót, amelynél egy pont és egy egyenes pontosan akkor illeszkedik egymásra, ha bijektív megfelelőik illeszkednek egymásra!

5.2. Adott az e és f egyenes valamint a rájuk nem illeszkedő P pont. Jelölje a P-n átmenő p egyenesen a $p \cap e$, $p \cap f$ metszéspontokat E és F, és legyen P harmonikus társa az E, F párra H. Határozzuk meg a H pontok mértani helyét, ha p felveszi összes lehetséges helyzetét!

5.3. Adott a p egyenes és a k kör. Legyen P a p egyenes tetszőleges, de k külsejében elhelyezkedő pontja, és jelölje a P-ből a k-hoz húzott érintők érintési pontját U_P és V_P. Vizsgáljuk az U_PV_P egyenesek rendszerét, ha P befutja a p egyenest!

5.4. Adott a k kör és a rá nem illeszkedő P pont. Legyen p tetszőleges egyenes P-n át, amely az U_p, V_p pontokban metszi k-t és legyen k-nak az U_p, V_p pontokban húzott érintőinek metszéspontja H. Határozzuk meg a H pontok mértani helyét, ha p felveszi összes lehetséges helyzetét!

5.5. Adott a k kör (nemelfajuló kúpszelet) és a rá nem illeszkedő P pont. Jelölje a P-n átmenő p egyenes és k metszéspontjait E és F, és legyen P harmonikus társa az E, F párra H. Határozzuk meg a H pontok mértani helyét, ha p felveszi összes lehetséges helyzetét!

5.6. Bergengóciában az $\underline{u}(u_1;u_2;u_3)$, $\underline{v}(v_1;v_2;v_3)$ vektorok szorzatának a

$$< \underline{u},\underline{v} >_M = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$$

valós értékű kifejezést tekintik.

Igaz-e, hogy az $< \underline{u},\underline{v} >_M$ szorzat

a) kommutatív?

b) asszociatív?

c) a vektorösszeadással disztributív $< \underline{u},\underline{v}+\underline{w} >_M =< \underline{u},\underline{v} >_M + < \underline{u},\underline{w} >_M$?

d) a skalárral való szorzással felcserélhető $< \underline{u},\lambda\underline{v} >_M = \lambda < \underline{u},\underline{v} >_M$?

e) Melyek azok a vektorok, amelyek önmagukra merőlegesek, azaz $< \underline{u},\underline{u} >_M = 0$?

f) Hogy helyezkednek el egy adott vektorra merőleges vektorok, azaz adott $\underline{v}$ esetén hol helyezdkednek el azok az $\underline{u}$ vektorok, melyekre $< \underline{u},\underline{v} >_M = 0$?

g) Igaz-e a paralelogramma tétel:

$$< \underline{u}+\underline{v},\underline{u}+\underline{v} >_M + < \underline{u}-\underline{v},\underline{u}-\underline{v} >_M = 2 < \underline{u},\underline{u} >_M + 2 < \underline{u},\underline{u} >_M?$$

5.8. Véges struktúrák

5.1. (S) [1]

A salakmotor-versenyek kedvelői jól tudják, hogy ha egy pályán egyszerre 4 versenyző fér el, és összesen 16 versenyző akarja összemérni az erejét egymással, akkor „szerencsére” éppen be lehet őket osztani négyes futamokba úgy, hogy mindenki mindenkivel egyszer találkozzon.

Próbáljunk meg elkészíteni ilyen futam-beosztást!

5.2. (M) [11] Egy város autóbuszjáratairól a következőket tudjuk:

- Mindegyik járaton 3 megálló van.
- Mindegyik járatról át lehet szállni bármelyik másikra, de csak egy megállónál.
- Bármelyik megállóból eljuthatunk bármelyik másik megállóba, de csak egy járattal.

Hány autóbuszjárat van ebben a városban?

5.3. (M)

a)[1] Válasszunk ki minél többet egy szabályos 13-szög csúcsai közül úgy, hogy a közöttük fellépő távolságok mind különbözőek legyenek (teljesen szabálytalan részsokszög)!

b) Kiválasztható-e a szabályos 13 csúcsai közül három-három, hogy az így adódó két háromszög összesen hat oldala mind különböző hosszúságú legyen?

5.4. (*Véges affin sík*)

A $(H,\mathcal{E})$ párt, ahol H tetszőleges halmaz és $\mathcal{E}$ a H részhalmazainak egy rendszere, *affin sík*nak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi axiómák (H elemeit *pont*oknak, a pontok $\mathcal{E}$-ben található részhalmazait *egyenes*eknek nevezzük, két egyenest *párhuzamos*nak nevezünk, ha nincs közös pontjuk):

A1: Bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes található, amelyben mindkét pont benne van;

A2: Bármely ponton át bármely azt nem tartalmazó egyeneshez pontosan egy vele párhuzamos egyenes húzható;

A3: Van három nem egy egyenesen lévő pont.

Tegyük fel, hogy $(H,\mathcal{E})$ affin sík és van olyan egyenese, amelyen véges sok, n, pont van.

a) Mutassuk meg, hogy minden egyenese n pont van!

b) Hány egyenes megy át egy ponton?

c) Határozzuk meg a pontok és az egyenesek számát!

5.5. (*Véges projektív sík*)

A $(H, \mathcal{E})$ párt, ahol H tetszőleges halmaz és $\mathcal{E}$ a H részhalmazainak egy rendszere, *projektív sík*nak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi axiómák (H elemeit *pont*oknak, a pontok $\mathcal{E}$-ben található részhalmazait *egyenes*eknek nevezzük):

P1: Bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes található, amelyben mindkét pont benne van;

P2: Bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

P3: Bármely egyenesnek legalább három pontja van;

P4: Bármely pontot legalább három egyenes tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $(H, \mathcal{E})$ projektív sík és van olyan egyenese, amelyen véges sok pont, $(n+1)$ pont van.

a) Mutassuk meg, hogy minden egyenesen $(n+1)$ pont van és minden ponton át $(n+1)$ egyenes halad.

b) Határozzuk meg a pontok és az egyenesek számát!

5.6. (M) (*Blokkrendszer*)

Egy (v, k, λ)-blokkrendszer egy V alaphalmazból (elemei a pontok) és annak részhalmazainak egy B részhalmazából (elemei a blokkok) álló (V, B) halmazrendszer, ha

VB1. $|V| = v$,

VB2. Minden blokk k elemű,

VB3. minden két különböző pontból álló pár pontosan λ blokkban van egyszerre benne.

a) Fejezzük ki v, k és λ segítségével a blokkok $|B| = b$ számát!

b) Fejezzük ki v, k és λ segítségével egy adott pontot tartalmazó blokkok r számát! (Ez miért független a ponttól?)

c) Mutassuk meg, hogy ha létezik $(n^2+n+1, n+1, 1)$ blokkrendszer $(n \geq 2)$, akkor az projektív sík!

d) Mutassuk meg, hogy ha létezik $(v, k, 1)$ blokkrendszer $(v > k \geq 3)$, akkor $v \geq k^2 - k + 1$ és egyenlőség esetén a blokkrendszer projektív sík!

e) Igaz-e, hogy ha létezik $(n^2, n, 1)$ blokkrendszer $(n \geq 2)$, akkor az affin sík?

f) Próbáljuk meg eldönteni, hogy mely $2 < k < v \leq 31$ esetén van $(v, k, 1)$ blokkrendszer!

5.7. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $(13, 3, 1)$ blokkrendszerek (lásd az 5.6. feladatot), amelyek egymással nem izomorfak (tehát az alaphalmaznak nincs olyan bijektív leképezése önmagára, amely az egyik blokkrendszert a másikba viszi).

5.8. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor van $(v, 3, 1)$ blokkrendszer (lásd az 5.6. feladatot), ha $v \equiv 1 \pmod 6$ vagy $v \equiv 3 \pmod 6$.

5.9. Vegyes feladatok

5.1. $ABCD$ konvex négyszög. Az A csúcson át párhuzamost húzunk BD-vel, ez lesz az e egyenes. A B csúcson át párhuzamost húzunk AC-vel, ez lesz az f egyenes. Legyen e és f metszéspontja E. Igazoljuk, hogy EC ugyanolyan arányban osztja BD-t, mint ED AC-t.

5.2. Egy körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok B és C. A B ponton keresztül párhuzamost húzunk AC-vel, ez D-ben metszi a kört. DA a kört E-ben metszi. BE és AC metszéspontja F. Mutassuk meg, hogy F felezi AC-t.

5.3. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD, $AC = BC$. AB felezőpontja F. Az F-en át húzott egyenes AD-t P-ben a DB átló B-n túli meghosszabbítását Q-ban metszi. Igazoljuk, $ACP\angle = QCB\angle$.

5.4. Az ABC háromszögben $AB = AC$. A háromszög oldalaira kifele rajzoljuk az azonos körüljárású, egymáshoz hasonló ABC', BCA', CAB' háromszögeket. $AB : BC : CA = AC' : : BA' : CB' = BC' : CA' : AB'$. Bizonyítsuk be, hogy AA', BC' és CB' egy ponton mennek át.

5.5. Az ABC háromszög beírt köre a megfelelő oldalakat rendre az A', B', C' pontokban érinti. Az A' pont merőleges vetülete a $B'C'$ egyenesre T. Igazoljuk, hogy $BTA'\angle = A'TC\angle$.

5.6. Az ABC háromszög szögfelezője A'-ben metszi a BC oldalt. Legyen X egy tetszőleges belső pontja az AA' szakasznak. $BX \cap AC = B'$, $CX \cap AB = C'$, $A'B' \cap CC' = P$, $A'C' \cap BB' = Q$. Igazoljuk, hogy $PAC\angle = QAB\angle$

5.7. [18] A *síkbeli konfiguráció* olyan p számú pont és g számú egyenes rendszere, amelyek egy síkban fekszenek oly módon, hogy a rendszer bármely pontja a rendszernek γ számú egyenesére illeszkedik és ugyanígy a rendszer bármely egyenese a rendszer π számú pontján megy át. Az ilyen konfigurációt a $(p_\gamma g_\pi)$ jellel jelöljük.

a) Mutassuk meg, hogy minden konfigurációra érvényes a $p\gamma = g\pi$ összefüggés!

A $(p_\gamma p_\gamma)$ konfigurációt a (p_γ) jellel rövidítjük.Az alábbi konfigurációk közül melyek léteznek?

b) (3_2); **c)** $(6_2 4_3)$; **d)** (7_2); **e)** (7_3); **f)** (8_3);

g) (9_3).

5.8. Adott a (projektív) térben az egymással páronként kitérő e_1, e_2 és e_3 egyenes.

a) Van-e a tér minden pontján át olyan egyenes, amely mind a három adott egyenest metszi?

b) Mutassuk meg, hogy az e_1, e_2, e_3 egyenesek bármelyikének bármelyik pontján át pontosan egy olyan egyenes van, amely metszi a másik két egyenest!

c) Tekintsük azt a $\varphi : e_2 \longrightarrow e_3$ leképezést, amelynél

$$\varphi(P) = Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad PQ \quad \text{metszi} \quad e_1\text{-et.}$$

Igazoljuk, hogy φ kettősviszonytartó bijektív leképezés.

A továbbiakban b) pontban szerkesztett összes egyenes által súrolt $\mathcal{F}$ felületet vizsgáljuk.

d) Legyenek f, g h és j olyan egyenesek, amelyek az e_1, e_2, e_3 egyenesek mindegyikét metszik, a megfelelő metszéspontokat jelölje F_1, F_2, F_3, G_1, G_2, G_3 és H_1, H_2, H_3 illetve J_1, J_2, J_3. Mutassuk meg, hogy

$$(F_1G_1H_1J_1) = (F_2G_2H_2J_2) = (F_3G_3H_3J_3).$$

e) Legyen λ tetszőleges valós szám és jelölje F_λ, G_λ, H_λ az f, g, illetve h egyenesnek azt a pontját, amelyre

$$(F_1F_2F_3F_\lambda) = (G_1G_2G_3G_\lambda) = (H_1H_2H_3H_\lambda) = \lambda.$$

Igazoljuk, hogy a F_λ, G_λ, H_λ egy egyenesre illeszkednek.

f) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}$ bármely pontján két olyan egyenes halad át, amelynek minden pontja $\mathcal{F}$-hez tartozik és a $\mathcal{F}$-hez tartozó egyenesek két csoportba oszthatók úgy, hogy két egyenes pontosan akkormesse egymást, ha különböző csoportba tartoznak.

6. FEJEZET
A gömb geometriája

Ehhez a fejezethez Bartha Zsolt diák készített megoldásokat.

6.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely gömbháromszögben a szokásos jelölések mellett teljesül a következő összefüggés (gömbi szinusztétel):

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

6.2. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely gömbháromszögben a szokásos jelölések mellett teljesül a következő összefüggés (gömbi koszinusztétel az oldalakra):

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

6.3. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy a gömbháromszögekre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
b) Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög kerülete kisebb, mint egy főkör hossza (2π).

6.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög poláris gömbháromszögének poláris gömbháromszöge az eredeti gömbháromszög.

6.5. (MS) Mutassuk meg, hogy egy gömbháromszög poláris gömbháromszögének oldalai az eredeti gömbháromszög megfelelő szögeit π-re egészítik ki. Igaz-e, hogy a poláris gömbháromszög szögeit az eredeti gömbháromszög megfelelő oldalaival összeadva szintén π-t kapunk?

6.6. (MS) Bizonyítsuk be, hogy bármely gömbháromszögben a szokásos jelölések mellett teljesül a következő összefüggés (gömbi koszinusztétel a szögekre):

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

6.7. (MS) Számítsuk ki Budapest és New York távolságát a Föld felszínén mérve! A két város földrajzi koordinátái:
Budapest: északi szélesség 47,5°, keleti hosszúság 19°,
New York: északi szélesség 41°, nyugati hosszúság 74°.
A Föld sugara: 6378 km. (A Földet tekintsük tökéletes gömbnek.)

6.8. (MS) Egy repülő elindul Oslóból (északi szélesség 60°, keleti hosszúság 11°) nyugati irányban. Végig egyenesen (vagyis a Föld egy főköre mentén) halad, majd az Egyenlítőt elérve leszáll. Melyik városban ér földet?

6.9. (MS) Milyen irányban kell elindulnia egy repülőnek Budapestről (északi szélesség 47,5°, keleti hosszúság 19°) London (északi szélesség 51,5°, hosszúság 0°) felé? Feltételezzük, hogy a repülő végig egyenesen (a Föld egy főköre mentén) halad.

6.10. (MS) Bizonyítsuk be, hogy minden gömbháromszögben a súlyvonalak egy pontban metszik egymást.

6.11. (MS) a) Mekkora az α szögű gömbkétszög területe?
b) Egy gömbháromszög szögei α, β és γ. Mekkora a területe? (Egységsugarú gömbbel dolgozunk, melynek felszíne 4π.)

6.12. (MS) Adottak a gömbön az A és a B (nem átellenes) pontok. Mi azon C pontok mértani helye a gömbfelületen, amelyekre az ABC gömbháromszög területe állandó?

7. FEJEZET

A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

Tekintsünk egy K kört. Modellünk pontjai e körlap belső pontjai (ezek nevezzük ezentúl a hiperbolikus sík pontjainak). Modellünk egyenesei (a hiperbolikus egyenesek) a K körre merőleges körök és egyeneseknek a körlapon belüli részei. A hiperbolikus egyenesekre való hiperbolikus tengelyes tükrözések a hiperbolikus egyenesnek megfelelő körre (egyenesre) vonatkozó inverzió (ill. szokásos tengelyes tükrözés).

7.1. (MS) Mutassuk meg, hogy a hiperbolikus tükrözés valóban önmagára képezi a modell ponthalmazát!

7.2. (MS) Mutassuk meg, hogy bármely két hiperbolikus ponton át pontosan egy hiperbolikus egyenes húzható. Adjunk szerkesztési eljárást is! Igazoljuk az állítást arra az esetre is, amikor a két pont bármelyike, akár mind a kettő, K határvonalán van!

7.3. (MS) Mutassuk meg, hogy bármely ponton át, bármely azt nem tartalmazó egyeneshez több (a hiperbolikus síkon) diszjunkt hiperbolikus egyenes is húzható! Mutassuk meg, hogy mindig két „elpattanó" hiperbolikus egyenes van, azaz olyan hiperbolikus egyenes, amely átmegy az adott ponton és csak K határvonalán van közös pontja az adott hiperbolikus egyenessel!

7.4. (MS) Adott két közös pont nélküli hiperbolikus egyenes. Szerkesszünk olyan hiperbolikus egyenest, amelyre való tengelyes tükrözésnél mindkét adott egyenes fix (közös merőleges)!

7.5. (MS) Adott két hiperbolikus egyenes. Szerkesszünk olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó tükrözés egymásra képezi a két egyenest (*s*zögfelező)!

7.6. (MS) Adott két hiperbolikus pont. Szerkesszünk olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó hiperbolikus tükrözés felcseréli a két pontot (*f*elezőmerőleges)!

7.7. (MS) Adott egy pont és egy hiperbolikus egyenes. Szerkesszünk az adott ponton át olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó tükrözésre az adott egyenes fix (*m*agasságvonal)!

7.8. (MS) Szerkesszünk hiperbolikus háromszöget, amelynek szögei $60°$, $45°$, $45°$! Parkettázzuk ki a modell jelentős részét ilyen háromszögekkel! Az ábrát vessük össze M.C. Escher „Angyalok és ördögök II." (Kreislimit IV.) rajzával!

7.9. (MS) Adott a K kört az A és B pontban metsző L kör, továbbá az A és B pontokon átmenő K-ra merőleges H kör. Mutassuk meg, hogy bármely olyan hiperbolikus tengelyes tükrözés, amely egymásra képezi L két pontját, az önmagára képezi L-et is és H-t is (tehát L pontjainak a H egyenestől való távolsága állandó, azaz L *e*kvidisztáns görbe)!

7.10. (MS) Adott a K kört az A pontban belülről érintő L kör és legyen H tetszőleges olyan hiperbolikus egyenes, amelynek egyik határpontja A. Mutassuk meg, hogy a H-ra vonatkozó hiperbolikus tükrözésnél L fix (tehát L *p*araciklus, azaz egymáshoz elpattanó egyenessereg minden egyes elemén kijelölt egy-egy pont halmaza, amelyek az egyenessereg tagjaira vonatkozó tükrözésekkor egymásba mennek át.)

7.11. (MS) Adott a K kör belsejében egy L kör. Mutassuk meg, hogy L belsejében van egy olyan O pont, amelyen átmenő bármely hiperbolikus egyenesre vonatkozó hiperbolikus tükrözésnél L önmagára képződik! Igazoljuk, hogy L bármely két pontjának hiperbolikus felezőmerőlegese átmegy O-n! Lássuk be, hogy O a K és L körök generálta körsor pontköre! (Azaz L hiperbolikus $k$ör, melynek középpontja O)

7.12. (MS) Adott két hiperbolikus kör (a hiperbolikus középpontjuk nélkül). Szerkesztendő a hiperbolikus centrális.

7.13. (MS) Bizonyítssuk be, hogy bármely hiperbolikus háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át!

7.14. (MS) Bizonyítssuk be, hogy bármely hiperbolikus háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át!

8. FEJEZET
Speciális görbék

8.1. Egy szív titkai

8.1. Jelölje a k, l körök metszéspontjait A és B. Forgassuk az A ponton átmenő a egyenest A körül és képezzük a k, l körökkel vett második metszéspontjait, a $K \in k$, $L \in l$ pontokat.

a) Határozzuk meg a k kör K-beli és az l kör L-beli e_K, e_L érintői metszéspontjának mértani helyét!

b) Vizsgáljuk a KLB háromszög körülírt körét! Szerkesszünk dinamikus geometriai szoftverrel, tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést és bizonyítsuk be!

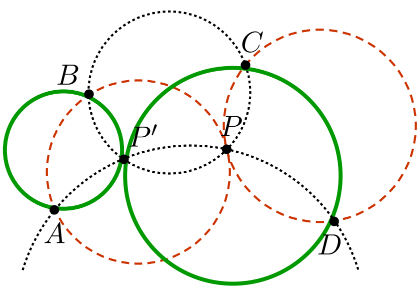
9. FEJEZET

Vegyes feladatok

9.1. [11] Adjunk meg a síkon végtelen sok pontot úgy, hogy közülük bármely kettőnek a távolsága (egy előre megadott egységhez viszonyítva) racionális legyen, és a pontok ne legyenek mind egy egyenesen! Megadhatók-e a pontok úgy hogy ne legyen olyan egyenes, amelyik közülük hármon megy át?

9.2. (MS) Az alábbiakban k_{XYZ}-vel jelöljük az X, Y, Z pontokon átmenő kört.

Legyen adva a síkon négy tetszőleges pont, A, B, C és D. Ha P olyan pont, amelyre a k_{ABP}, k_{CDP} körök érintik egymást és a k_{ADP}, k_{BCP} körök P-n kívül még P'-ben metszik egymást, akkor $k_{ABP'}$ és $k_{CDP'}$ érintik egymást.



9.2.1. ábra.

9.3. (M) Nemzetközi Diákolimpia 2012/5

Legyen az ABC háromszögben $BCA\angle = 90^o$, és legyen D a C-ből induló magasság talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

9.4. (M) [3] *Casey szerint Hart megközelítése Malfatti tételéhez*

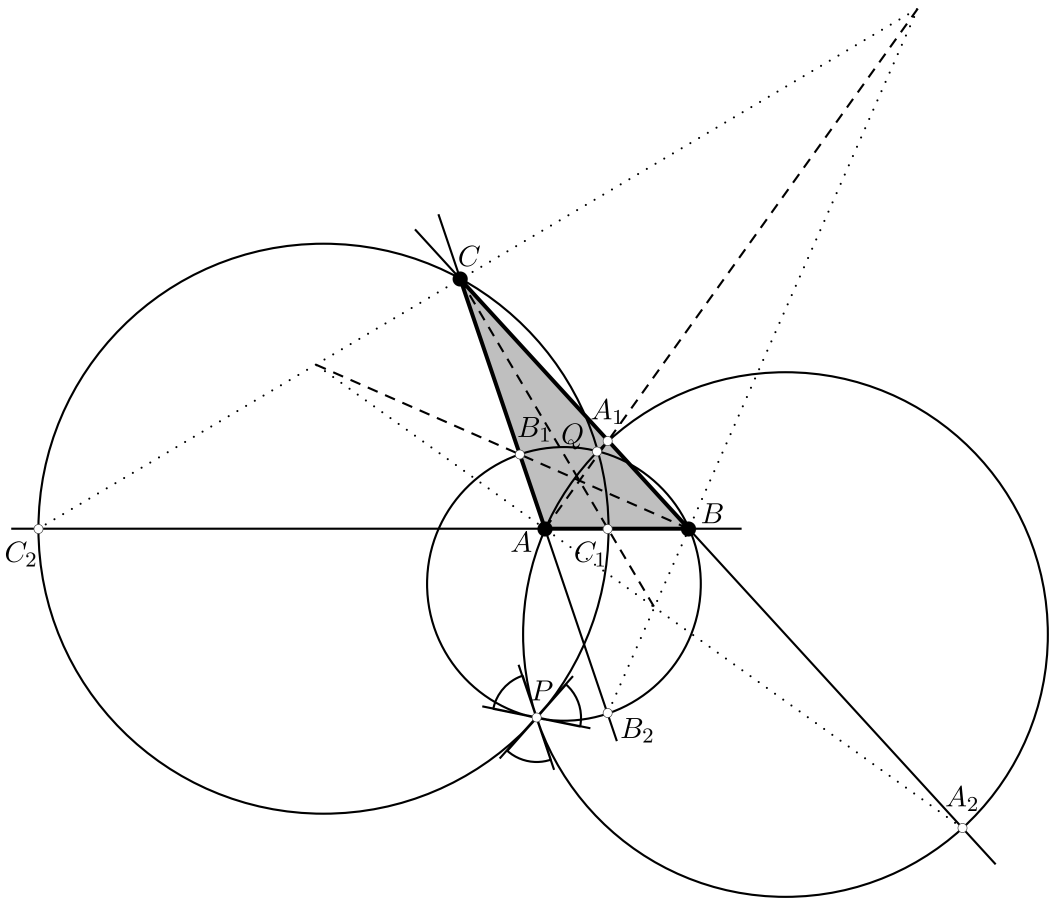
Adott három irányított kör: k_1, k_2, k_3. Az e_3, f_3 irányított egyenesek k_1-et érintik, k_2-t antiérintik. Az e_2, f_2 egyenesek k_3-at érintik, k_1-et antiérintik, míg e_1 és f_1 érintik k_2-t, míg k_3-at antiérintik. Mutassuk meg, hogy e_1, e_2 és e_3 pontosan akkor mennek át egy közös ponton, ha f_1, f_2 és f_3 átmennek egy közös ponton.

9.5. (M) Tekintsük az $ABCD$ érintőnégyszöget, és annak A csúcsán át az e egyenest, mely a BC oldalt M-ben, a CD oldal meghosszabbítását pedig N-ben metszi. Jelölje az ABM, MCN, NDA háromszögek beírt körének középpontját rendre I_1, I_2 és I_3. Mutassuk meg, hogy az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontja az e egyenesen van!

9.6. (M) Messe az ABC háromszög A csúcshoz tartozó belső illetve külső szögfelezője a BC oldalegyenest az A_1 illetve az A_2 pontban és tekintsük az A_1A_2 szakasz k_A Thalesz körét. Képezzük ehhez hasonlóan a B_1, B_2, C_1, C_2 pontokat illetve azok segítségével a k_B, k_C köröket! Mutassuk meg, hogy a k_A, k_B, k_C körök (lásd az 1. ábrát)

a) egymást két pontban metszik,

b) és egymással páronként egyenlő – 60°-os – szöget zárnak be.



9.6.1. ábra.

9.7. [12] Adott az $y = kx^2$ parabola. Határozzuk meg az $x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0$ egyenletű kör középpontját úgy, hogy az adott parabolával való metszéspontjainak abszcisszái az $x^3 + ax + b = 0$ egyenlet gyökeit adják. (Az egyik metszéspont mindig az origó, a másik hármat keressük.)

Segítség, útmutatás

1. Geometriai szerkeszthetőség

1.1. a) Az állítás igaz, de közvetlen belátása fáradságosabb, mint egyszerűbb leírást keresni.

b) Ehhez használjuk a „gyöktelenítést"!

1.3. a) A kérdés az, hogy van-e olyan racionális a és b, amelyre $\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$. Emeljünk négyzetre, majd használjuk, hogy $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ és $\sqrt{\frac{5}{2}}$ irracionális.

b) Van ilyen u szám.

c) A számtest tartalmazza az összes $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ alakú számot, ahol a, b, c racionális. Bizonyítsuk be, hogy a számtestben szintén szereplő $\sqrt{6}$ nem áll elő ilyen alakban. Ezután bizonyítsuk be, hogy az $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ alakú számok már számtestet alkotnak.

1.4. Legyen a másodfokú bővítés $Q(t)$, ahol $t = \frac{p}{q}$ és p, q pozitív egészek. Lássuk be, hogy $Q(t) = Q(\sqrt{pq})$. Ezután írjuk fel $pq = m^2 n$ alakban, ahol m egész, n négyzetmentes. (Ez a felírás egyértelmű.) Mivel $\sqrt{t}$ nem racionális, így $\sqrt{pq}$ sem, tehát n nagyobb egynél. Bizonyítsuk be, hogy $Q(\sqrt{pq}) = Q(\sqrt{n})$.

1.1. A feladat nem mond mást, mint hogy ha az u szám a $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ számtestben van, akkor a reciproka is.

De az állítás belátható „kézimunkával is: $u = a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})\sqrt{3}$, így az $a + b\sqrt{2} - (c + d\sqrt{2})\sqrt{3}$ számmal szorozva $(a + b\sqrt{2})^2 - 3(c + d\sqrt{2})^2$ számot kapjuk, ami már $s + t\sqrt{2}$ alakú, tehát gyökteleníthető.

1.2. a) Két lépésben gyökteleníthető; az első lépésben elérhető, hogy csak egy négyzetgyök maradjon.

b) Az első lépésben elérhető, hogy csak két négyzetgyök maradjon (és egy egész szám), innen a) szerint haladhatunk.

1.3. a) Vegyük észre, hogy a nevező $a\sqrt{2} + b\sqrt{6} + c\sqrt{7}$ alakban írható alkalmas a, b, c racionális számokkal.

b) Ez a nevező $a + b\sqrt{3} + d\sqrt{7} + \sqrt{21}$ alakban írható. Ezt gyökteleníthetjük az 1.2 feladat b) részéhez hasonló módon.

c) Itt már nem tudunk úgy összevonni, mint b)-ben, tehát több „tényleges" négyzetgyök van, mint eddig. Figyeljük meg, milyen számtestből való a nevező és írjuk át ilyen alakba:

$(1 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}) + (5 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})\sqrt{7})$

Mivel segít ez a megfigyelés és ez a felírás?

1.4. Itt ismét az segít, ha követjük, hogy milyen testbővítésből való a nevező.

1.5. A feladat azt mondja ki, hogy ha egy szám két olyan szám hányadosa, amelyek elemei egy Q-ból véges sok bővítéssel előállítható számtestnek, akkor maga a szám is ebből a bHovített számtestből való. Ez pedig egyszerű következménye a számtest fogalmának. Az eddigi feladatokban ezt „kézimunkával" konkrét példákon „ellenőriztük".

1.2. Nyilván elég belátnunk, hogy van akármilyen kis, pozitív $a+b\sqrt{2}$ alakú szám, ahol a és b egész.

Itt az az észrevétel segít, hogy $\sqrt{2}-1$ egynél kisebb pozitív szám, tehát (pozitív egész kitevős) hatványai tetszőlegesen kis pozitív értéket felvesznek.

Megjegyzés: bármilyen t egész számra ugyanígy igazolható, hogy az $a+b\sqrt{t}$ alakú számok mindenütt sűrűen helyezkednek el a számegyenesen, feltéve, hogy t nem négyzetszám.

A tétel négyzetgyök helyett bármilyen irracionális számra is igaz, ennek a nevezetes tételnek a bizonyítása azonban más gondolaton (a skatulyaelven) alapszik.

1.4. A megoldás kulcsa az az észrevétel, hogy az 1.3 szerint $(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n)$ egész szám.

Ezután már csak azt kell észrevennünk, hogy $\sqrt{26}-5$ pozitív, de kisebb 0,1-nél.

1.1. Két megoldási lehetőség:

a) Használjuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggést. (Miért használhatjuk?)

b) Helyettesítsük be az ismert megoldást a másodfokú polinomba!

De a feladat kijön az 1.10 feladatból is.

1.2. A megoldás ugyanígy működik, ha az együtthatók racionálisak.

1.8. Ugyanaz a gondolatmenet most azt adja, hogy van racionális gyök.

1.9. $p(a+b\sqrt{u})=A+B\sqrt{u}$, ahol A is, B is egész, $p(a-b\sqrt{u})=A-B\sqrt{u}$ ugyanazzal az A-val és B-vel. $A+B\sqrt{u}$ csak úgy lehet egész, ha $B=0$, s ekkor $p(a+b\sqrt{u})=p(a-b\sqrt{u})$.

Ha p együtthatói racionálisak, akkor A és B racionális, de az továbbra is igaz, hogy ha $p(a+$ $+b\sqrt{u}$ racionális, akkor $p(a+b\sqrt{u})=p(a-b\sqrt{u})$.

1.10. Egy polinom értékének a kiszámolásához csak alapműveleteket kell végezni.

Valójában u minden, T-beli együtthatókkal felírt algebrai kifejezése is $T(\sqrt{t}$-beli, feltéve, hogy a nevezőben álló polinomnak nem gyöke $\sqrt{t}$.

1.1. Q helyébe tetszőleges számtestet írhatunk:

Tétel. Ha egy harmadfokú racionális együtthatós polinomnak nincs gyöke a T testben, akkor T semelyik másodfokú bővítésében sincs gyöke.

1.2. Igen.

1.4. írjunk fel olyan egészegyütthatós polinomot, amelynek gyöke $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (A negatív hosszúságú szakaszokat is megengedjük.)

1.5. a) Racionális gyökök csak $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, vagy ezek ellentettje lehet. Gyorsabban jutunk célhoz, ha bevezetjük az $y=2x$ változót.

b) Itt is érdemes bevezetni az $y=2x$ változót.

c) Négy lehetséges racionális megoldás van, $1, -1, \frac{1}{p}, -\frac{1}{p}$. Behelyettesítéssel kijön, hogy egyik sem megoldás.

d) Ha c-t prímszámnak választjuk, aránylag kevés lehetséges megoldást kell ellenőriznünk. Szorozzuk végig az egyenletet kettővel, ekkor a $y=2x$ változót bevezetve az

$cy^3-y^2-3cy+2=0$

egyenlethez jutunk. Ha $c=p$ prímszám, akkor a lehetséges megoldások $1, -1, 1/p, -1/p, 2, -$ $-2, 2/p, -2/p$. Ezeket rendre behelyettesítve a bal oldalon elég nagy p-kre nem kaphatunk nullát.

e) Ha c egész, akkor az egyenletnek csak egész megoldása lehet, mégpedig csak olyan megoldása, amely osztója c-nek. Nyilván érdemes először prímszám c-vel próbálkozni, mert ekkor kell a legkevesebb lehetséges gyököt „kilőni". S valóban, ha c prímszám, akkor a lehetséges megoldások

$c = 1, -1, c, -c$. Az $x = 1$ esetben a bal oldal értéke kettő, $x = c$ esetben $2c$, $x = -1$-re a bal oldal értéke -2, végül $x = -c$ esetén $-2c^3$, ezek egyike sem nulla.

1.1. Használjuk a $\cos 3\alpha$-ra vonatkozó addíciós tételt és azt, hogy $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Ennek alapján felírható egy harmadfokú egész együtthatós polinom, amelynek gyöke $\cos 20°$, másrészt nincsen racionális gyöke.

1.2. A megoldás: $n = 3k$, ahol k egész.

1.3. Mekkora a szabályos kilencszög külső szöge?

1.4. a) Ha a szerkesztendő szabályos ötszög csúcsai rendre $ABCDE$, akkor például az ADB háromszög egy nevezetes háromszög.

b) A szabályos hétszög külső szöge $360°/7$. Keressünk egyszerű trigonometikus összefüggést e szög felére!

c) Bizonyítsuk be, hogy ha a szabályos n-szög szerkesztésére van euklideszi eljárás, akkor a szabályos $2n$ szög szerkesztésére is van.

1.2. Lásd az 1.1 feladat második és harmadik megoldását.

1.3. Itt is érdemes az 1.1 feladat második megoldásának ötletére gondolnunk.

1.4. a), b), c): Próbáljunk olyan megoldást találni, amely egyszerre „intézi el" mindhárom kérdést!

De vigyázzunk: d) esetben a háromszög szerkeszthető!

1.5. Az a) esetben nincs, a b) esetben van ilyen szerkesztési eljárás.

a) Most is érdemes valamilyen speciálisabb esetre megmutatni, hogy már ott sem adható általános eljárás. (Mint látjuk, ilyenkor könnyebben kezelhető a feladat egy paraméterrel.) Az egyenlőszárú háromszög most nyilván nem segít, érdemes a szöget jól választani.

b) Használjuk ki, hogy BC és α ismeretében ismerjük a körülírt kör sugarát. Vegyük fel a kört és benne a BC oldalt, ekkor megszerkeszthető az AD szögfelező egyenesének a körrel való második metszéspontja, F. Mit tudunk mondani a DF szakasz hosszáról?

1.6. a) visszavezethető az 1.5 feladat a) részére.

b) ismert szerkesztési feladat. BA szakasz és BC egyenes azonnal felvehető, ezután a szögfelező is behúzható és ennek alapján a C csúcs is szerkeszthető. Ha a szög hegyessszög és a szögfelező nem túl hosszú, akkor létezik a háromszög és meg is szerkeszthető ezzel az eljárással.

1.7. A kerületi szögek tétele szerint a feladat két része ugyanazt kérdezi. Ha az oldal- és a szögfelezőhossz arányát hól vaálasztjuk, akkor a feladat redukáalható egy olyan háromszög megszerkesztésére, amelynek szögei 40, 60 és 80 fokosak. Ilyen háromszöget az 1.1 feladat szerint nem tudunk szerkeszteni.

1.8. a) Egy korábbi feladat megoldása itt is segít.

b) A háromszög szerkeszthető, ha az a oldallal szemközti magasság és szögfelező adott, akkor szerkeszthető az ezen az oldalon fekvő két szög különbsége, valamint az a szög is, amelyet ez az oldal és az adott súlyvonal zár be. Ezután az a oldallal szemközti szögre egyszerű egyenletet nyerhetünk.

2. Tömegközéppont

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Inverzió

3.2. Próbálkozzunk először külső pont képének szerkesztésével! A körzővel elég összesen három ívet rajzolni, már meg is van az inverz kép.

3.3. Osztás helyett többszörözzünk! Lásd még a 3.2. feladatot.

3.4. Lásd a 3.2-3.3. feladatokat!

3.5. Lásd a 3.2-3.4. feladatokat!

3.7. **c)** Alkalmazzuk a szelőtételt (pont körre vonatkozó hatványa)!
d)-e) Használjuk a 3.3. feladat eredményét!

3.18. Az inverziónál a hossz nem marad meg. Próbáljuk meg az inverziónál invariáns mennyiségek nyelvén megfogalmazni az $A'C' = B'C'$ összefüggést!

3.1. **a)** Készítsünk vázlatot az egyenesről és a képéről. A kép középpontja melyik pont képe? Szerkesszük meg először azt a pontot!
b) Invertáljuk az egyeneseket körökké, azok metszéspontját szerkesszük meg!
c) Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy „szerkesztés” (euklideszi szerkesztés)!

3.1. Vizsgáljunk egy L félkört alkotó körre való invertálást!

3.4. Invertáljuk az ábrát egy A középpontú körre!

3.5.

1. segítség, útmutatás. Oldjuk meg először a 9.2. feladatot!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzunk A centrumú inverziót!

3.8. Alkalmazzunk inverziót, melynek centruma a két adott kör érintési pontja!

3.1. Számoljuk le a metszéspontokat!

3.1.

1. segítség, útmutatás. Vigyázat, a tétel teljes általánosságban nem igaz! Egymáson kívül elhelyezkedő köröknél keressünk egyenlő szögeket és igazoljuk, hogy a $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ négyszög egymással szemközti szögeinek összege egyenlő.

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzunk P_{12} centrumú inverziót!

3. segítség, útmutatás. Először oldjuk meg a 3.10. feladatot!

3.5.

1. segítség, útmutatás. Invertáljuk az ábrát egy A centrumú inverzióval!

2. segítség, útmutatás. Invertáljuk az ábrát K-ra!

3. segítség, útmutatás. Sejtsük meg melyik az a pont!

3.9. Lásd a 3.16-3.1. feladatokat!

3.10. Két kör pontosan akkor koncentrikus, ha egynél több olyan egyenes van, amelyre mindkett? mer?leges.

3.13. Lásd a 3.10. feladatot!

3.4. Lásd a 3.18. feladatot majd a 3.17., 9.6. példákat!

4. Komplex számok a geometriában

4.4. Lásd a 4.5. feladatot!
a 4.1M1

4.2. Használjuk a 4.1. feladatban említett azonosságot!

4.3. Alkalmazzuk a 3.3. feladatban tanultakat!

5. Projektív geometria

5.3. A távolságok és szögek közti közvetítésre használjuk a területet!

5.4. Lásd az 5.3. feladat állítását!

5.9. Az $ABCD$ egyenesre nem illeszkedő öt további megfelelő pont felvételével megoldható az a), öt másikkal a b) feladat is.

5.16. Fejezzük ki $(ABDC)$, $(BACD)$, $(ACBD)$ értékeket x-szel,a többit próbáljuk ezekből kifejezni.

5.17. 1. Legyen először $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$. Mutassuk meg, hogy ha $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ akkor $(ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{\beta}{\alpha}$.
2. Sejtsük meg az $(ABCD)$ kettősviszonyra vonatkozó képletet!
3. Mutassuk meg 1.1. alapján, hogy a képlet $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\underline{d} = \overrightarrow{OD}$ esetén teljesül és vizsgáljuk a α_1, β_1, α_2, β_2 értékek változását, amint az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokat számszorosaikra cseréljük!

5.3. Igazoltuk, hogy a köri pontnégyes komplex kettősviszonya valós értékű, így elég annak abszolút értékét meghatározni. Használjuk a Nagy Szinusz Tételt!

5.1. Használjuk a görbék egyenletének kétabszcisszás alakját! Legyen adva a HK egyenes és az azzal nem párhuzamos e egyenes. Messe a görbe P pontján átmenő, e-vel párhuzamos egyenes a HK egyenest a Q pontban. Ha valamely μ^2 konstanssal

$$\mu^2 \cdot MH \cdot MK = MP^2, \tag{1}$$

és M mindig a HK szakaszon fekszik, akkor a **??**. összefüggésnek eleget tevő P pontok halmaza ellipszis, míg ha M a H, K pontokban vagy a HK szakaszon kívül helyezkedik el, akkor hiperbola a mértani hely, míg az

$$\mu^2 \cdot MK = MP^2, \tag{2}$$

egyenletnek eleget tevő P pontok halmaza parabola.

5.3. Legyen a kúp csúcsa A és az alapkör t-re merőleges BC átmérőegyenese messe t-t T-ben. Az 5.1., 5.2. feladatok megoldásának alapján mutassuk meg, hogy $TB \cdot TC = TA^2$.

5.3.

1. segítség, útmutatás. Keressük meg a π leképezés fixpontjait! Számoljunk kettősviszonyokkal!

2. segítség, útmutatás. Vetítsük át a síkot úgy, hogy kényelmesebb legyen az ábra!

5.4. Használjuk fel, hogy a kettősviszony változatlan marad.

5.5. **c)** Dolgozzunk vetítésekkel és kettősviszonyokkal! Mutassuk meg például, hogy $(A_{23}A_{14}A_{12}A_{24}) = (A_{23}A_{14}A_{13}A_{34})$!

5.7.

1. segítség, útmutatás. Tekintsük Papposz feladatát (5.6. feladat), két lehetséges $P_1P_2P_3$ háromszöget.

2. segítség, útmutatás. Lépjünk ki a térbe!

5.8. Vetítsük át az a egyenest γ-n át a b egyenesre, majd a b egyenest α-n át c-re és tekintsük e két vetítés kompozícióját!

5.1. Részletesebben, lásd Montágh Balázs cikkét[1].

1. Szervezzünk meg először 9 versenyző közt hármas futamokkal bajnokságot! Most lehetőségünk van geometriai megoldást találni. Azonosítsuk a versenyzőket a sík (x, y) pontjainak, ahol x és y egész számok és modulo 3 tekintjük őket (azaz a versenyzőket a kilenc elemű $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ halmaz elemeinek feleltetjük meg). A futamok a sík egész együtthatós egyeneseinek felelnek meg az alábbi módon.

12 futamot szervezünk. A c számnak háromféle „értéke” lehet modulo 3, az (a, b) számpárnak pedig összesen kilencféle. Egyenesnek tekintjük az

$$y \equiv c \pmod 3 \qquad y \equiv ax + b \pmod 3 \tag{1}$$

kongruenciák megoldáshalmazait (azaz $\mathbb{F}_3$-ban az $y = c$, $c = ax + b$ egyenletek megoldáshalmazait).

Mutassuk meg, hogy a (1) kongruenciák közül bármelyik kettőnek pontosan egy közös megoldása van.

2. Adjunk meg négyelemű testet!

3. Szervezzük meg a beosztást a négyelemű test segítségével!

6. A gömb geometriája

6.1. Bocsássunk merőlegest például az A csúcsból az OBC síkra, majd ebből a pontból az OB és az OC egyenesekre. A létrejövő derékszögű háromszögek megfelelő szögének szinuszát felírva adódik az állítás.

6.2. Legyenek a gömb O középpontjából a háromszög A, B, C csúcsaiba mutató vektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Legyen továbbá $\mathbf{v_b}$ az az egységvektort, mely a gömbháromszög AB oldalszakaszának A-beli érintőfélegyenese irányába mutat. Hasonlóan vegyük fel az AC oldalszakaszt A-ban érintő $\mathbf{v_c}$ egységvektort is. Írjuk fel a $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorokat $\mathbf{a}, \mathbf{v_b}$, illetve $\mathbf{v_c}$ segítségével. Akapott egyenletekből előállítható a bizonyítandó tétel.

6.3. Használjuk az oldalakra vonatkozó koszinusztételt! Csináljunk belőle egyenlőtlenséget!

6.5. Az A csúcsnál lévő teljes gömbi szöget az AB, AC, AB^*, AC^* szakaszok négy részre osztják. Számoljuk ki az egyes részek nagyságát! Mit mondhatunk az AB^*C^*, az AC^*B, illetve az AB^*C gömbháromszögekről?

6.6. Alkalmazzuk a poláris gömbháromszögre az eddig megismert (oldalakra vonatkozó) koszinusztételt, és nézzük meg, hogy ez mit jelent az eredeti háromszögre vonatkozóan.

6.7. Keressünk a Földön egy harmadik pontot úgy, hogy a három pont alkotta gömbháromszögnek ismerjük három adatát (oldalak, szögek)! Ezekből az ismert tételek segítségével kiszámítható a kérdéses oldal hossza.

6.8. Keressünk a Földön egy harmadik pontot úgy, hogy a három pont alkotta gömbháromszögnek ismerjük három adatát (oldalak, szögek)! Ezekből az ismert tételek segítségével kiszámítható a kérdéses csúcs helyzete.

6.9. Keressünk a Földön egy harmadik pontot úgy, hogy a három pont alkotta gömbháromszögnek ismerjük három adatát (oldalak, szögek)! Ezekből az ismert tételek segítségével kiszámítható a kérdéses szög nagysága.

6.10. Vizsgáljuk meg, milyen viszonyban vannak a gömbháromszög súlyvonalai a gömbháromszög csúcsai alkotta síkháromszög súlyvonalaival.

6.11. b) Rajzoljuk meg a gömbháromszög oldalegyeneseit! Ezek a gömbfelületet egymást fedő gömbkétszögekre osztják. Ezek, illetve a teljes gömbfelszín területének ismeretében adódik a gömbháromszög területe.

6.12. Nyílvánvaló, hogy a keresett mértani hely szimmetrikus az AB gömbi egyenesre, ezért vizsgáljuk csak az egyik félgömböt! A keresett mértani helynek mindig tartalmaznia kell az A és a B pontok átellenes pontját (A' és B'), hiszen az AA', illetve a BB' gömbi egyenesek tetszőleges szögben hajolhatnak AB-hez, így az ABA' és az ABB' gömbháromszögek területe tetszőleges lehet. Innen megsejthető, hogy a megfelelő C pontok mértani helye az egyik félgömbön egy, az A' és B' pontokon átmenő körív.

7. A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

8. Speciális görbék

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. Vegyes feladatok

9.2.

1. segítség, útmutatás. Lásd a G.II.6.5. feladatot!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzunk P centrumú inverziót!

Megoldások

1. Geometriai szerkeszthetőség

1.3. a) Miután a nevezőt $a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c\sqrt{7}$ alakban írtuk, bővítsünk például az $a\sqrt{2}+b\sqrt{6}-c\sqrt{7}$ számmal.

b) Ha a nevezőt $a+b\sqrt{3}+d\sqrt{7}+\sqrt{21}$ alakba írtuk, akkor bővíthetünk az $a+b\sqrt{3}-(d\sqrt{7}+\sqrt{21})$ számmal és így rögtön egy $u+v\sqrt{3}$ alakú számot kapunk.

c) A nevezőben eredetileg egy $Q(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$-beli szám áll. Az

$(1+2\sqrt{3}+4\sqrt{5})+(5+3\sqrt{3}-2\sqrt{5})\sqrt{7})$

alakba átírt nevezőben mindkét zárójelben egy-egy, a $Q(\sqrt{3},\sqrt{5})$ számtestből való szám áll. Ha tehát bővítünk az

$(1+2\sqrt{3}+4\sqrt{5})-(5+3\sqrt{3}-2\sqrt{5})\sqrt{7})$

számmal, akkor a nevezőben már egy $Q(\sqrt{3},\sqrt{5})$-beli számot kapunk.

1.4. Itt a nevező a $Q(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{7},\sqrt{11})$ számtestből való. Ha most megváltoztatjuk például $\sqrt{11}$ előjelét és az így kapott számmal beszorozzuk a számlálót és a nevezőt, akkor a nevezőben nőni fog ugyan a négyzetgyökjelek száma, mégis redukciót hajtottunk végre. Ugyanis az így kapott szám már a $Q(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{7})$ számtestben is benne van. Most azt kell észrevennünk, hogy a kapott szám felírható

$(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})+(a'+b'\sqrt{2}+c'\sqrt{3})\sqrt{7}$

alakban. Ha most a számlálót és a nevezőt is beszorozzuk

$(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})-(a'+b'\sqrt{2}+c'\sqrt{3})\sqrt{7}$

számmal, akkor a nevezőben egy olyan számot kapunk, amely már a $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ számtestben is benne van. Ezt már a) alapján gyökteleníteni tudjuk.

1.1.

1. megoldás. Ha volna ilyen polinom, akkor volnának olyan a,b,t racionális számok, amelyekre $\sqrt[3]{2}=a+b\sqrt{t}$ teljesülne. $\sqrt{t}$ nem lehet racionális, mert akkor $\sqrt[3]{2}$ is az volna.

Emeljük köbre az egyenlőséget:

$a^3+3ab^2t+(3a^2+b^2t)b\sqrt{t}=2$

Mivel $\sqrt{t}$ nem racionális, ezért ez csak úgy lehet nulla, ha vagy $b=0$, vagy $3a^2+tb^2=0$. Előbbiből ismét az következne, hogy $\sqrt[3]{2}$ racionális. Utóbbi viszont lehetetlen, mert a bal oldalon pozitív szám áll. ($t>0$ és b nem nulla.)

2. megoldás. Beírhatjuk $\sqrt[3]{2}$-t a másodfokú polinomba, amelynek gyöke. Ekkor egy ilyen egyenlőséget kapunk: $\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}$, ahol a és b racionális. Emeljük köbre mindkét oldalt:

$4=a^3+2b^3+3ab(a+b\sqrt[3]{2})$.

Jobb oldalon a zárójelben éppen $\sqrt[3]{2}$ áll, ami irracionális. Ebből következik, hogy vagy $a=0$, vagy $b=0$, az elsőből az következne, hogy $\sqrt[3]{2}$ racionális, a másodikból, hogy $\sqrt[3]{4}$ racionális.

1.1. Kijön a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján. Van megoldás, tehát kettő is van. A két gyök összege racionális, ami csak úgy lehet, ha a másik gyök $a-\sqrt{3}$ alakú. A szorzat is racionális, ami pedig csak úgy lehet, ha $a=2$.

Van azonban gyorsabb, és általánosabban is jól használható megoldás is. Helyettesítsük be a megadott megoldást a polinomba.

Behelyettesítéssel egy $E + D\sqrt{3} = 0$ alakú egyenletet kapunk, ahol E és D egészek. Ebből következik, hogy mindkettő nulla. Tehát $E - D\sqrt{3} = 0$ is igaz, amiből következik, hogy $2 - \sqrt{3}$ is megoldása az egyenletnek.

1.4. A megoldás MAJDNEM teljes, de az utolsó lépésnél felhasználja, hogy VAN három megoldás, a gyökök és együtthatók összefüggése csak ekkor „működik".

A gyöktényezők kiemelésével azonban könnyen teljessé tehetjük a bizonyítást. Tudjuk, hogy a polinomból kiemelhető a két kapott megoldáshoz tartozó gyöktényező, azaz $(x+4)(x-2-\sqrt{7})$, és a maradó polinom (hányados) elsőfokú lesz. Az elsőfokú polinomnak pedig van valós gyöke.

1.7. Az egyenletbe behelyettesítve a megoldást egy $D + E\sqrt{V} = 0$ alakú kifejezést kapunk. Két eset van. Ha $\sqrt{V}$ egész, akkor már maga az $U + \sqrt{V}$ szám egész szám. Ellenkező esetben $\sqrt{V}$ irracionális, tehát $D = E = 0$, és azt kapjuk, hogy $D - E\sqrt{V}$ is nulla, tehát $U - \sqrt{V}$ is megoldása az egyenletünknek. Most akár a gyöktényezők kiemelésével, akár a gyökök és együtthatók közötti összefüggéssel azt kapjuk, hogy a harmadik megoldás egész szám. (Utóbbi esetben azt használjuk, hogy van három megoldás - l. az 1.4 megoldását - és a gyökök összege, $-A$ egész szám.)

1.1. Az állítást abban a formában látjuk be, hogy ha egy racionális együtthatós polinomnak van gyöke T valamely másodfokú bővítésében, akkor van gyöke T-ben is.

Tegyük fel tehát, hogy az Ax^3+Bx^2+Cx+D racionális együtthatós polinomnak van egy $U+$ $+V\sqrt{t}$ alakú gyöke, ahol U, V, t eleme a T testnek és $\sqrt{t}$ nem eleme T-nek. $U+V\sqrt{t}$ a polinomba helyettesítve egy $P+Q\sqrt{t}$ alakú kifejezést kapunk, ahol P és Q eleme T-nek. Minthogy $\sqrt{t}$ nem eleme T-nek, így ez a kifejezés csak úgy lehet nulla, ha $P = Q = 0$. De akkor $P - Q\sqrt{t}$ is nulla, tehát $U - V\sqrt{t}$ is gyöke a polinomnak. Kiemelhető tehát a két gyöktényező szorzata, azaz a $(x-$ $-U)^2 - tV^2$ polinom. Ennek együtthatói T-beli elemek, tehát a kiemelés után maradó elsőfokú polinom együtthatói is T-beliek. (MIéRT?!)

Ha egy elsőfokú polinom mindkét együtthatója T-beli, akkor a gyöke is T-ben van. Ezzel beláttuk, hogy ha egy racionális együtthatós polinomnak van gyöke T valamely másodfokú bővítésében, akkor van gyöke T-ben is.

1.3. Ha egy z hosszú szakasz szerkeszthető, akkor z-t a racionális számok testéből véges sok másodfokú bővítésével kapjuk. Ha a harmadfokú egyenletnek nincs racionális gyöke, akkor az 1.1 feladat szerint egyik ilyen bővítésnél sem kaphatjuk meg a polinom valamelyik gyökét.

Negyedfokú polinomokra az állítás nem igaz, mert nem igaz az 1.1 feladat megoldásában bizonyított állítás sem. Ehhez elég két másodfokú, egészegyütthatós polinomot összerszorozni, amelynek nincs racionális gyöke. Valójában ennél több is igaz, ezt az 1.4 feladat mutatja.

1.4. Tekintsük a $p(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 3$ polinomot. Ennek gyöke $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, de még nem egészegyütthatós. Ha ezt a polinomot megszorozzuk a $p_1(x) = (x + \sqrt{2})^2 - 3$ polinommal, akkor már az egészegyütthatós $q(x) = (x^2 - 2)^2 + 9 - 3(2x^2 + 4) = x^4 - 10x^2 + 1$ polinomhoz jutunk. Ennek gyökei $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ előjeles összegei. (Ha a negatív hosszúsáagú szakaszokat nem akarjuk megengedni, akkor x helyett írjunk mindenütt $x-5$-öt.) Bárhogy is párosítjuk a gyökeit, semelyik két gyök ök összege nem racionális, tehát nem bontható alacsonyabbfokú racionális együtthatós polinomok szorzatára.

Megjegyezzük még, hogy ennek a polinomnak nincsen gyöke $Q(\sqrt{2})$-ben, de annak $\sqrt{3}$-mal való b ővítésében van. Nem igaz tehát rá az 1.1 feladat megoldásában belátott állítás sem. (Ezt persze két jólválasztott racionális együtthatós másodfokú polinom szorzata is „tudja", itt azonban többet mutattunk meg.)

1.1.

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Mivel $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, ebből azt kapjuk, hogy $\cos 20^\circ$ kielégíti a $8x^3-6x-1=0$ egyenletet. Az 1.5 feladat szerint ennek az egyenletnek nincs racionális megoldása, tehát $\cos 20^\circ$, és így maga a 20° sem szerkeszthető euklideszi szerkesztéssel.

1.2. $n = 1{,}2$ esetén nyilván nem szerkeszthető n°-os szög, hiszen abból szerkeszthető volna 20°-os szög is.

3°-os szög viszont szerkeszthető, mert szerkeszthető 15°-os szög és szerkeszthető 18°-os is (HOGYAN?).

Ebből már következik, hogy $n = 3k$ (k egész) esetén szerkeszthető n°-os szög, $n = 3k+1$ vagy $n = 3k-1$ esetén viszont nem.

1.3. A szabályos kilencszög külső szöge 40°. Erről tudjuk az 1.1 feladat alapján, hogy nem szerkeszthető, tehát a szabályos kilencszög sem szerkeszthető.

1.4. a) Ha az $ABCDE$ szabályos ötszöget akarjuk megszerkeszteni, akkor az ADB egyenlőszárú háromszög alapján 72°-os szögek vannak, a szárszöge 36°-os. Ismeretes, hogy ennek a háromszögnek a szára és alapja között az aranymetszés aránya van, ami szerkeszthető. A szabályos ötszög belső szöge az így megszerkesztett 36°-os szög háromszorosa, tehát szerkeszthető.

c) A szabályos ötszög megszerkesztése után a szabályos tízszöget már nem nehéz megszerkeszteni. Megszerkesztjük a szabályos ötszög köré írható kört és az oldalhoz tartozó középponti szöget megfelezzük. Ezek a szögfelező sugarak a körből kimetszik a „másik öt" csúcsot is.

b) A szabályos hétszög külső szöge $360^\circ/7$. Jelöljük ennek a szögnek a felét α-val; teljesül rá, hogy $\sin 4\alpha = \sin 3\alpha$. Itt az addíciós tételeket alkalmazva

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\cos\alpha$$

és

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1.$$

A pozitív $\sin\alpha$-val leosztva tehát $x = \cos\alpha$-ra a

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Az 1.5 feladat a) része szerint ennek az egyenletnek nicns racionális megoldása (amit egyébként az $y = 2x$ változó bevezetésével azonnal láthatunk). Ebből az 1.3 feladat szerint következik, hogy a szabályos hétszög euklideszi szerkesztéssel nem szerkeszthető.

1.1.

1. megoldás. Két feladatról van szó, annak megfelelően, hogy a szögfelező

a) a két oldal közös csúcsából indul,

b) nem a közös csúcsból indul.

Az a) esetben legyen adott az AB, AC oldal és az AD (belső) szögfelező hossza. Koszinusztétellel az A-nál levő szög felével mint ismeretlennel kifejezhető BD és CD szakasz négyzetének hossza, a kettő aránya pedig a szögfelező tétel szerint szintén ismert. így egy elsőfokú egyenletet kapunk az A-nál levő szög felére, ami szerkeszthető.

Megoldható a feladat számolás nélkül is: az AB oldal A-n túli meghosszabbítására felmérjük az AC szakaszt, ennek végpontja legyen E. A CE szakasz párhuzamos az AD szögfelezővel, ezért az $AB : AE = AD : CE$ arány alapján CE hossza szerkeszthető. Az ECA egyenlőszárú háromszög három oldala ismert, így szerkeszthető. Ennek E-nél levő szöge az ABC háromszög A-nál levő szögének a fele, így az ABC háromszögben is ismert két oldal és a közbezárt szög, tehát szerkeszthető. (A szerkesztés helyességének az igazolása és a diszkusszió mindkét esetben könnyű.)

Egy harmadik megoldás, ha felvesszük az AD szögfelezőt, az A középpontú AB, valamint AC sugarú kört, majd az előbbi kört D-ből $-AC : AB$ arányban nagyítjuk (vagy kicsinyítjük). A kapott kör és az eredetileg megrajzolt második kör metszéspontja adja a C csúcsot. (Ha két metszéspont van, két szimmetrikus megoldást kapunk. Ha nincs metszéspont, a háromszög nem létezik.)

Most megmutatjuk, hogy a b) esetben a három adatból nem szerkeszthető háromszög.

Legyen tehát adva az AB és a BC oldal, valamint az AD belső szögfelező hossza. Felhasználjuk a következő ismert összefüggést (vesd össze a 2.16 Stewart tételt és a szögfelező tételt):

$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC.$

Válasszuk $AC = b$-t ismeretlennek és $AB = 1$-et egységnek. $BC = a$ és $AD = f$ ismert. Másrészt $BD = \frac{a}{b+1}$ és $DC = \frac{ab}{b+1}$. Ezt a fenti egyenlőségbe beírva, majd $(b+1)^2$-tel végigszorozva az

$b(b+1)^2 = f^2(b+1)^2 + a^2 b$

egyenlethez jutunk, ami harmadfokú egyenlet b-ben. átrendezés után:

$b^3 + (2 - f^2)b^2 + (1 - 2f^2 - a^2)b - f^2 = 0.$

Válasszuk itt a szögfelező hosszát, f-et is egységnek és legyen a is egész. Akkor az egyenlet egész együtthatós, főegyütthatója 1:

$b^3 + b^2 - (1 + a^2)b - 1 = 0.$

Tehát minden racionális gyöke egész. Ráadásul osztója a konstans tagnak, ami -1, tehát csak 1 vagy -1 lehet racionális megoldás. Az egyenlet $(b+1)(b^2-1) - a^2 b = 0$ alakba írható, ezért ha a nem nulla (márpedig nem nulla), akkor sem 1, sem -1 nem megoldása az egyenletnek.

Ebből viszont az 1.3 feladatban kimondott tétel szerint következik, hogy a megadott adatokból nem szerkeszthető háromszög. Márpedig ilyen háromszög *létezik* valamilyen a egész hosszúságra. Valóban, ha egy háromszögben az AB oldal és az AD szögfelező egységnyi, akkor az BC oldala a $(0, \infty)$ intervallumban bármi lehet.

érdemes megjegyezni a következőt. Az természetesen rögtön látszik, hogy a b oldal nem lehet egységnyi, és nem lehet -1 sem, de ez nem elég a befejezéshez. Szükség van annak belátására, hogy a harmadfokú egyenletnek sem megoldása egyik sem.

2. megoldás. A b) részre adhatunk egy másik megoldást is. Megmutatjuk, hogy a háromszög már akkor sem mindig szerkeszthető, ha a két megadott oldal egyenlő hosszú. Röviden: nem szerkeszthető egyenlőszárú háromszög a szár hosszából és a szárhoz tartozó (belső) szögfelező hosszából.

Legyen $AB = AC$ a két szár és a BD szögfelező. Jelölje β az ABD szöget (az alapon nyugvó szög felét). Ekkor BDA szög 3β, BAD szög pedig $180° - 4\beta$. Adott az

$AB : BD = \sin 3\beta : \sin 4\beta = (4\cos^2\beta - 1) : (4\cos^3\beta - 2\cos\beta)$

arány. Ha ezt az arányt például kettőnek választjuk, akkor a

$8\cos^3\beta - 4\cos^2\beta - 4\cos\beta + 1 = 0$

egyenletet kapjuk. Annyit kell még belátnunk, hogy a $8x^3 - 4x^2 - 4x - 1$ polinomnak nincs racionális gyöke. éppen ezt mondja az 1.3 feladat.

Most is ellenőzitnünk kell, hogy *létezik-e* olyan egyenlőszárú háromszög, amelyben a szár és a szárhoz tartozó szögfelező aránya $1 : 2$. Valójában elég azt ellenőriznünk, hogy a fenti egyenletnek van-e 45°-nál kisebb (pozitív) szögű megoldása. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\beta = 0°$ esetén a bal oldal pozitív, $\beta = 45°$ esetén negatív, tehát a kettő között van gyöke.

3. megoldás. A feladat b) részére adott előző megoldásban nem véletlenül kaptuk ugyanazt az egyenletet, mint az 1.4 feladatban. A feladatot ugyanis arra az esetre egyszerűsítettük, hogy egy egyenlőszárú háromszöget kell szerkesztenünk, amelynek a szárhoz tartozó szögfelezője ugyanolyan hosszú, mint a szára. Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek a háromszögnek az alapon nyugvó szögei $360°/7$-osak (a szárszöge pedig ennek másfélszerese), vagyis éppen a szabályos hétszög egyik külső szögéről van szó. Az 1.4 feladatban beláttuk, hogy a szabályos hétszög nem szerkeszthető, tehát ez a háromszög sem szerkeszthető

1.3. Belátjuk, hogy már akkor sem szerkeszthető a háromszög, ha a megadott két oldal egyenlő hosszú, tehát egyenlőszárú háromszög szárából és beírt körének sugarából sem szerkeszthető általában háromszög.

Jelölje a az egyenlőszárú háromszög alapjának felét, m az alaphoz tartozó magasságot, a szárszög felét β. Ekkor $\tan\beta = \frac{a}{m}$. Másrészt r-rel jelölve a beírt kör sugarát, b-vel a szár hosszát $\tan\beta = \frac{r}{s-2a} = \frac{r}{b-a}$. A két eredményt összehasonlítva azt kapjuk, hogy $rm = (b-a)a$.

Emeljük négyzetre ezt az egyenlőséget, írjuk be a Pitagorasz-tételt: $m^2 = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$. Leosztva $b-a$-val a rendezés után az

$$a^3 - ba^2 + ra + rb = 0$$

egyenletet kapjuk. Válasszuk r-et egységnek. Egyenletünk ekkor

$$a^3 - ba^2 + a + b = 0$$

alakra egyszerűsödik. Az 1.5 feladat megoldásánál láttuk, hogy ha itt b-t prímszámnak választjuk, akkor az egyenletnek nincsen racionális megoldása. Meg kell még gondolnunk, hogy van olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek beírt köre egységnyi és szárhossza valamilyen prímszám. De könnyen látható, hogy egy egységsugarú kör köré minden elég nagy szárhosszal írható egyenlőszárú háromszög.

1.4. Először a feladat d) részét intézzük el. Megmutatjuk, hogy ha két magasság és a harmadik oldalhoz tartozó szögfelező hossza van adva, akkor ez utóbbi csúcsnál levő szög szerkeszthető. A magasságok ismeretében ismerjük e szöget közrefogó oldalak arányát is, tehát tudunk a keresetthez hasonló háromszöget szerkeszteni. Ezt a szögfelező ismeretében megfelelő nagyságúra tudjuk nagyítani.

Tegyük fel tehát, hogy ismerjük az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjének f hosszát, ismerjük továbbá a másik két csúcsból induló magasságok hosszát, m_b-t és m_c-t. Ekkor $b = m_c/\sin\alpha$, $c = m_b/\sin\alpha$, a háromszög kétszeres területe

$$2T_{ABC} = \left(\frac{m_b m_c}{\sin\alpha}\right)$$

.

Másrészt a szögfelező két részre vágja a háromszöget, ezek területét ugyanígy a két oldalból és a közbezárt szögből kiszámolva

$$2T_{ABC} = \left(\frac{f(m_b + m_c)}{\sin\alpha}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

.

A területre kapott két képletet egyenlővé téve a nevezők kiesnek és $\sin\frac{\alpha}{2}$-re a következő szerkeszthető kifejezést kapjuk:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{m_b m_c}{f(m_b + m_c)}\right).$$

a), b), c): Ismét azt a trükköt használjuk, hogy egyenlőszárú háromszögre szűkítjük a feladatot. Azt bizonyítjuk be, hogy egy egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magasságából (szögfelezőjéből, súlyvonalából, a három ugyanaz) és a szárhoz tartozó szögfelezőjéből alkalmasan választott adatok mellett nem szerkeszthető háromszög. Legyen tehát az alaphoz tartozó magasság hossza $AT = m$, a szárhoz tartozó szögfelezőjé $BD = f$ és az alapon nyugvó szög 2β. Tekintsük az alap és a szögfelező által meghatározott BCD háromszöget. Ennek BD-vel szemközti szöge 2β, BC-vel szemközti szöge $180° - 3\beta$, így a színusz-tétel szerint $f : BC = \sin 2\beta : \sin 3\beta$. El kell tüntetnünk BC-t, mert nem ismerjük és „be kell csempésznünk" az ismert m-et. Mi sem könnyebb, hiszen $BC = 2m \cot 2\beta$. Ezt beírva az előző összefüggésbe a rendezés után azt kapjuk, hogy

$$f \sin 3\beta = 2m \cos 2\beta$$

,

vagyis

$$4f \sin^3 \beta - 4m \sin^2 \beta - 3f \sin \beta + 2m = 0$$

.

Az 1.5 feladat d) részében láttuk, hogy ha itt $2m$-et választjuk egységnek, f-et pedig elég nagy prímszámnak vesszük, akkor nincs racionális megoldása az egyenletnek. Annyit kell még meggondolnunk, hogy mivel van „akármilyen lapos" egyenlőszárú háromszög, ezért van olyan is, ahol az alaphoz tartozó magasság és a szárhoz tartozó szögfelező aránya tetszőlegesen kicsi lesz.

1.5. b) A körülírt kör szerkeszthető, a BC oldal is. Messe az A-ból induló szögfelező a BC oldalt D-ben, a körülírt kört másodszor F-ben. Az F pont szerkeszthető, hiszen ismert, hogy $BF = FC$. A kerületi szögek tételét és a szögfelezés tényét felhasználva könnyen látható, hogy a BDF háromszög hasonló az ABF háromszöghöz. Ebből $BF : DF = AF : BF$, tehát x-szel jelölve a DF szakasz hosszát átrendezés után az

$$x^2 + ADx - BF^2 = 0$$

egyenlethez jutunk. Itt AD és BF ismert, az egyenletnek van egy (hamis) negatív megoldása, és egy pozitív megoldása, utóbbi szerkeszthető és megadja x hosszát, amiből a D pont, majd FD egyenest meghosszabbítva az A pont is szerkeszthető. (A diszkussziót és a szerkesztés helyességének igazlását az olvasóra hagyjuk.)

a) Itt nincs általános szerkesztési eljárás. Válasszuk a B csúcsnál levő szöget derékszögnek. Jelöljük f-fel az AD szögfelező hosszát és jelöljük BC hosszát a-val, továbbá jelölje α az A-nál fekvő szög *felét*. Ekkor

$BD = f \sin \alpha$, $DC : f = \sin \alpha : \sin BCA = \sin \alpha : \cos 2\alpha$,

ahonnan $DC = f \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha}$. A BD-re és DC-re kapott kifejezést összeadva átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$BC \cos 2\alpha = f \sin \alpha (1 + \cos 2\alpha).$$

Nyilván van olyan derékszögű háromszög, amelyben $f = BC$, és ebben az esetben a fenti egyenlet $\cos 2\alpha$ addíciós tételét használva a

$$2 \sin^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 = 0$$

alakot ölti. Az 1.5 feladatban láttuk, hogy a $2y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$ egyenletnek nincs racionális megoldása, tehát $\sin \alpha$ nem szerkeszthető.

1.7. Ha $AB = f_\beta$, ez ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a háromszög C-nél, B-nél, A-nál fekvő szöge rendre γ, $360° - 4\gamma$, $3\gamma - 180°$. A feladat szerint ez utóbbi szög van megadva. Válasszuk ezt a szöget 60 fokosnak. Ekkor a másik két szög 40, illetve 80 fokos. Ha most volna a feladatra általános szerkesztési eljárás, akkor annak jónak kell lennie akkor is, ha az A-nál fekvő szöget 60 fokosnak vesszük föl és az AB oldalt egyenlőnek vesszük fel a szögfelezővel. Ebben az esetben eljárásunkkal megszerkesztenénk egy 40 fokos szöget, amiről tudjuk, hogy lehetetlen. Ilyen szerkesztési eljárás tehát nincsen.

1.8. a) Az 1.4 feladat megoldásánál láttuk, hogy már egyenlőszárú háromszög sem szerkeszthető, az alaphoz tartozó magasság és a szárhoz tartozó szögfelező hosszának az ismeretében, ha ezek arányát alkalmasan választjuk. Mivel ebben a háromszögben az alaphoz tartozó súlyvonal és magasság egyenlő, a mostani feladat a) része sem szerkeszhető ebben az esetben.

b) Ez a feladat viszont szerkeszthető. Az A csúcsból induló $AT = m_a$ magasság és és $AD = f_a$ szögfelező, valamint a B csúcsból induló $BF = s_b$ súlyvonal hossza legyen adva. Az ADF derékszögű háromszög szerkeszthető, és az FAD szög a BC oldalon nyugvó szögek különbségének a fele. Másrészt legyen F oldalfelzőpont merőleges vetülete a BC oldalon G, ekkor a BFG derékszögű háromszög is szerkeszthető, hiszen FG hossza épp az adott magasság hosszának a fele. Ezzel megszerkesztettük a $\phi = FBG$ szöget is.

Ezután kis számolással az A-val szemben fekvő szögre kaphatunk egy aránylag egyszerű egyenletet, amelyből ez a szög szerkeszthető. Fejezzük ki az FG és BG szakaszok hosszát a háromszög szögeivel. A szokásos jelölésekkel. $FG = b\sin\gamma$ és $AG = AT + TG$ (itt előjeles szakaszokkal számolunk). Másrészt

$$AT = c\cos\beta = 2Rsin\gamma\cos\beta = R(\sin(\beta+\gamma) + sin(\gamma-\beta) = R(sin\alpha + sin(\gamma-\beta)$$

és

$$2TG = b\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma = R(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma)) = R(\sin\alpha + \sin(\beta-\gamma).$$

Ebből azt kapjuk, hogy $AG = AT + TG = 1{,}5R\sin\alpha + 0{,}5R\sin(\gamma-\beta)$. Másrészt ismeretes (vagy ugyanígy kiszámolható), hogy $AT = R(\cos(\beta-\gamma) + cos\alpha)$. Ismerjük $\cot\phi = TG/AG$-t, másrészt ez a hányados

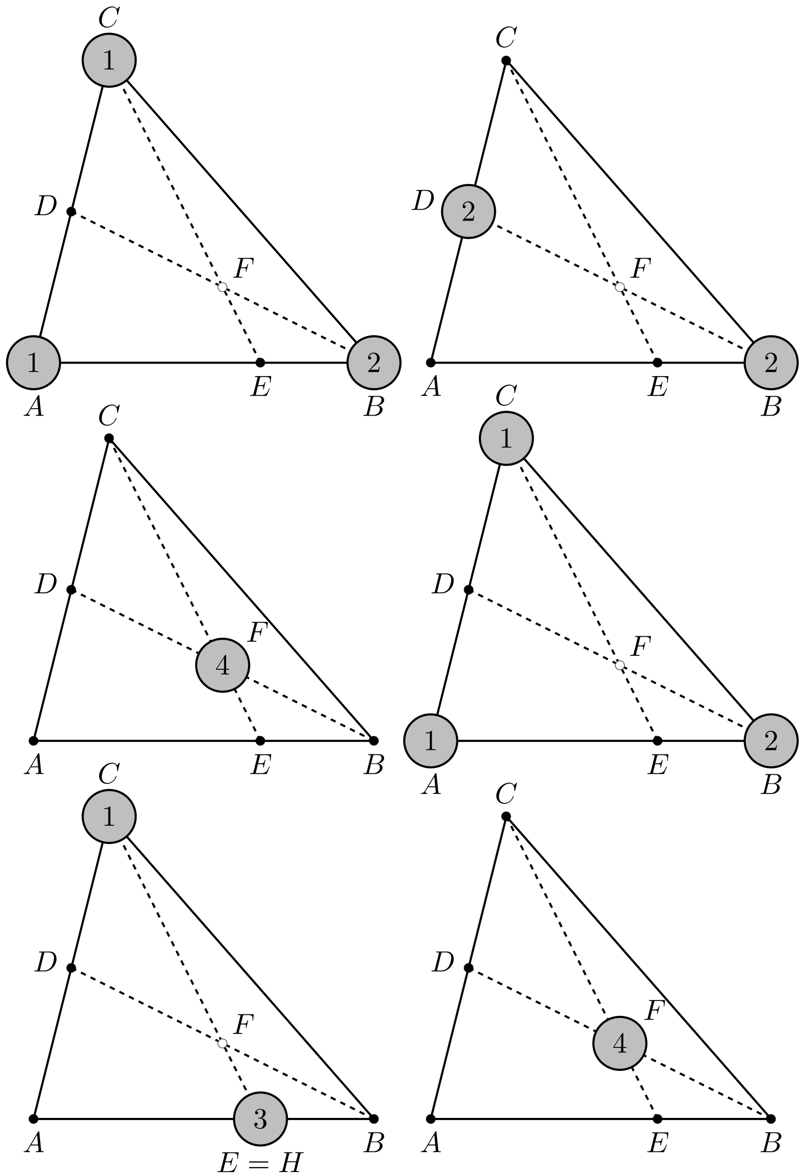
$$\left(\frac{1{,}5\sin\alpha + 0{,}5\sin(\gamma-\beta)}{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma}\right).$$

Mivel itt $\beta - \gamma$ ismert, ebből egy $x\sin\alpha + y\cos\alpha = z$ alakú egyenletet kapunk, ahol az x, y, z együtthatók szerkeszthetők. Ebből viszont az ismert módon megszerkeszthető az α szög is, az ATD háromszögből pedig ezután a háromszög két hiányzó csúcsa is.

2. Tömegközéppont

2.1. Tekintsük az $(A^1; C^1; B^2)$ tömegpontrendszert (az alábbi gondolatmenet követhető a 2. ábrasorozaton)! Mivel $(A^1; C^1) \equiv D^2$ és $(D^2; B^2) \equiv F^4$, így vizsgált rendszerünk tömegközéppontja F. Másrészt $(A^1; B^2) \equiv H^3$, ahol H az AB oldal B-felőli harmadolópontja. Így $(H^3; C^1) = F^4$, azaz F illeszkedik a CH egyenesre, azaz H is a CF egyenesre, tehát $H = E$. A kérdezett arány: $AE/EB = 2/1$.

2.2. Azt szeretnénk elérni, hogy az a háromszög csúcsaiba helyezett tömegekből álló rendszer tömegközéppontja a P pont legyen. Legyen $BA_1/A_1C = \gamma/\beta$. Ha a B pontba β, a C pontba γ kg tömeget teszünk, akkor ezt a rendszert az A_1 pontba helyezett $(\beta+\gamma)$ tömegű tömegpont



2.1M.2. ábra.

helyettesítheti. Rakjunk az A pontba egy $(\beta+\gamma)$ kg-os tömeget! Így a három tömegpontból – $A(\beta+\gamma)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ – álló rendszer tömegközéppontja P lesz.

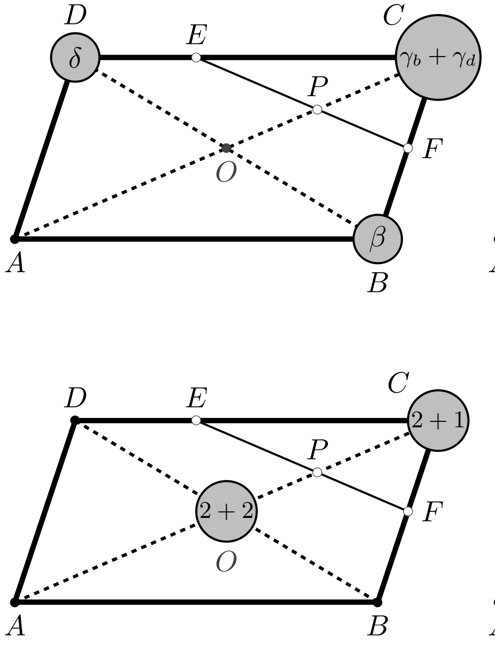
Alkalmazzuk az I. alapelvet, számoljuk ki másképp a tömegközéppontot! A két pontból álló $A(\beta+\gamma)$, $B(\beta)$ rendszer tömegközéppontja az AB oldalnak az a C' pontja, amelyre $AC'/C'B = \beta/(\beta+\gamma)$. Mivel a teljes rendszer P tömegközéppontja a 2. alapelv szerint a $C'C$ szakaszon kell legyen, így a C' pont megegyezik a C_1 ponttal. Hasonló összefüggésre juthatunk az AC oldalon is. Így tehát:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \qquad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = 1.$$

2.3. Először a P ponttal foglalkozunk, súlyokat helyezünk a B, C, D pontokba úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja a P pontban legyen. Jelölje ezeket a tömegeket rendre β, γ és δ! A B, D csúcsokba egyenlő tömegeket helyezünk ($\beta=\delta$), hogy tömegközéppontjuk a paralelogramma O középpontjában legyen és így a teljes rendszer tömegközéppontja az OC átlóra essen. A C csúcsba helyezett tömeg két részből áll (lásd az 1. ábrasorozatot): $\gamma = \gamma_b + \gamma_d$. Az egyik rész

(γ_b)egyenlő a B-be helyezett súllyal (β), így ezek tömegközéppntja F lesz, a másik rész (γ_d) fele akkora súlyú, mint a D-be helyezett tömeg (δ), hogy tömegközéppontjuk E legyen. A kívánt $\beta = \delta = \gamma_b = 2\gamma_d$ feltételnek tehát megfelel a (B^2, C^3, D^2) tömegpontrendszer, azaz

$$(B^2, C^3, D^2) \equiv P^7.$$



2.3M.1. ábra.

Mivel $(B^2, C^2) \equiv F^4$ és $(D^2, C^1) \equiv E^3$, így $EP/PF = \frac{4}{3}$. Másrészt $(B^2, D^2) \equiv O^4 \equiv (A^2, C^2)$, így $P^7 \equiv (B^2, C^3, D^2) \equiv (A^2, C^5)$, azaz $AP/PC = 5/2$.

Most vizsgáljuk Q-t! Szeretnénk, hogy Q legyen a $(B^\beta, C^{\gamma_b+\gamma_d}, D^\delta)$ rendszer tömegközéppontja (lásd a 2-4. ábrasorozatot). Szeretnénk, hogy a tömegközéppont az EF egyenesen legyen, azaz $(B^\beta, C^{\gamma_b}) \equiv F^{\beta+\gamma_b})$ $(D^\delta, C^{\gamma_d}) \equiv E^{\delta+\gamma_d})$, tehát az ezekkel analóg $\beta = \gamma_b$, $\delta = 2\gamma_d$ feltételeket továbbra is meg akarjuk tartani. Most még azt szeretnénk, hogy a tömegközéppont az BD átlóra is illeszkedjék, azaz C-ben összesen nulla súly legyen ($\gamma_b = -\gamma_d$). Megfelelő lesz a (B^{-1}, C^0, D^2) tömegpontrendszer, azaz

$$(B^{-1}, C^0, D^2) \equiv Q^1.$$

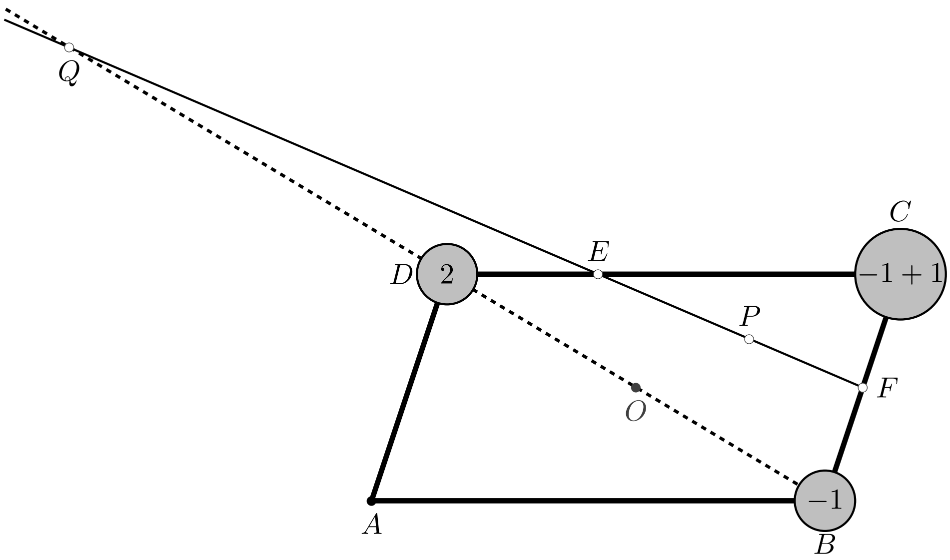
Mivel $(B^{-1}, C^{-1}) \equiv F^{-2}$ és $(D^2, C^1) \equiv E^3$, így $(F^{-2}, E^3) \equiv Q^1$, tehát $EQ/QF = -\frac{2}{3}$, ahol az előjel azt fejezi ki, hogy az $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{QF}$ vektorok ellenkező irányításúak. Másrészt $(B^{-1}, D^2) \equiv Q^1$, így $DQ/QB = -\frac{1}{2}$ az előzőhöz hasonló értelmű előjellel.

2.4. Feltehetjük, hogy $AB_1 = b_1$,$B_1C = b_2$, $CA_1 = a_1$, $A_1B = a_2$ és legyen $BC_1 = c_1$, $C_1A = {}$ $= c_2$. Szeretnénk súlyokat helyezni a háromszög csúcsaiba úgy, hogy az $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$ rednszer tömegközéppontja P legyen. Ha az A-ba és C-be helyezett súlyokat úgy választjuk meg, hogy arányuk

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{b_2}{b_1} \tag{1}$$

legyen, akkor tömegközéppontjuk B_1 lesz, így a teljes rendszer tömegközéppontja a BB_1 egyenesen lesz. Ha még azt is elérjük, hogy a C-be és A-ba kerülő tömegek aránya

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_2}{a_1} \tag{2}$$



2.3M.2. ábra.

legyen, akkor e kettő tömegközéppontja A_1-ben lesz, így a teljes rendszeré az AA_1 egyenesen, az előzőeket is figyelembe véve tehát P-ben.

A (1), (2) arányoknak egyszerre felelnek meg az

$$\alpha = b_2a_2, \qquad \beta = b_1a_1, \qquad \gamma = b_1a_2 \tag{3}$$

súlyok.

Kezdjük most a tömegközéppont szerkesztését az A, B csúcsokba helyezett tömegekkel. Ezek tömegközéppontja az AB egyenes azon C_0 pontjában lesz, amelyre

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c_2}{c_1}, \tag{4}$$

azaz

$$\frac{b_1a_1}{b_2a_2} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{5}$$

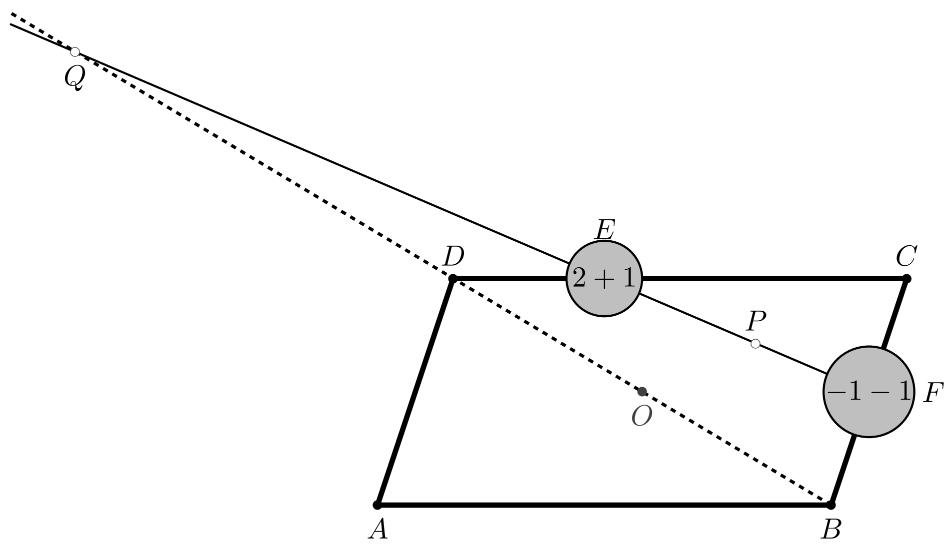
A teljes rendszer tömegközéppontja, azaz P a CC_0 egyenesre illeszkedik, ami csak úgy lehetséges, hogy $C_0 = C_1$, azaz a keresett aráyn értéke

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_2a_2}{b_1a_1}. \tag{6}$$

A (5), (6) összefüggések az $a_1b_1c_1 = a_2b_2b_2$ alakba írhatók át. A feladat megoldása során lényegében bizonyítottuk az alábbi nevezetes összefüggést:

Ceva tétel Ha A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesének tetszőleges pontjai, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek akkor és csakis akkor mennek át egy ponton, ha

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$



2.3M.3. ábra.

2.5. Helyezzünk az A, B, C csúcsokba α, $\beta = \beta_a + \beta_c$, γ tömegeket úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja T-ben legyen!

Ha elérjük, hogy az (A^α, B^{β_a}) alrendszer tömegközéppontja P, a (C^γ, B^{β_c}) alrendszer tömegközéppontja pedig K legyen, akkor a teljes rendszer tömegközéppontja a PK egyenesre kerül. Mivel $PK \| AC$, így valamely x valós számra

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BK}{KC} = x, \tag{1}$$

azaz $\alpha = x\beta_a$, $\gamma = x\beta_c$. Szükséges még, hogy a tömegközéppont az A-ból induló súlyvonalra kerüljön, aminek $\gamma = \beta$, azaz $\beta_a + \beta_c = x\beta_c$, röviden

$$\frac{\beta_a}{\beta_c} = x - 1 \tag{2}$$

az algebrai feltétele. Így

$$(A^\alpha, B^{\beta_a}, C^\gamma) \equiv (P^{\beta_a(1+x)}, K^{\beta_c(1+x)}),$$

tehát a $\frac{KT}{TP} = \frac{5}{3}$ feltétel megfelelője a

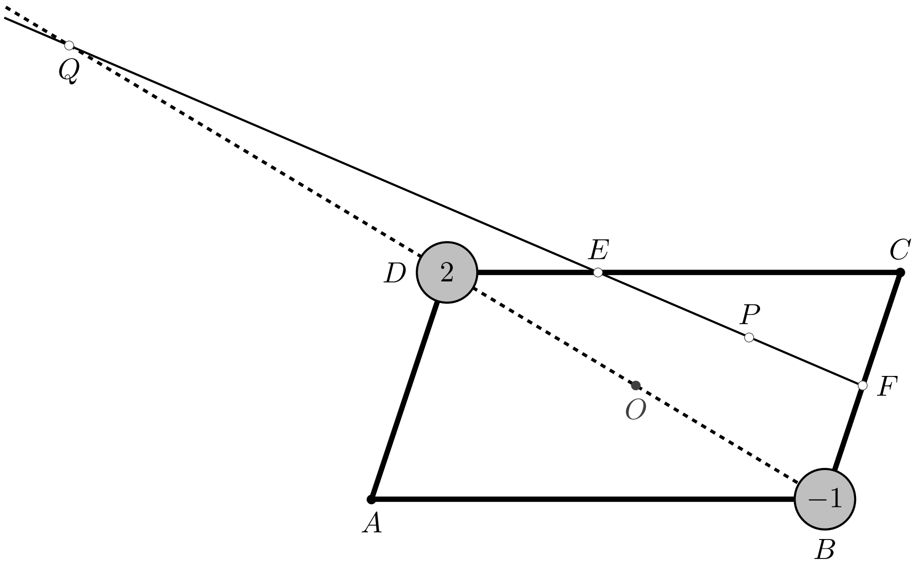
$$\frac{\beta_a}{\beta_c} = \frac{5}{3} \tag{3}$$

reláció. A (2) összefüggést figyelembe véve kapjuk, hogy $x = \frac{8}{3}$, azaz az ACB, PKB háromszögek hasonlóságából (1) alapján

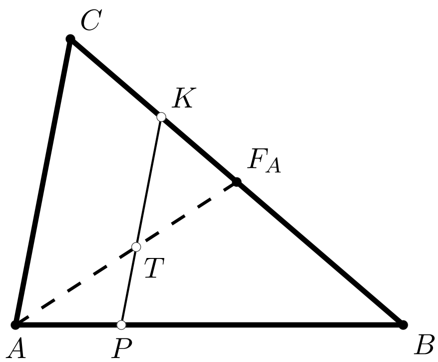
$$AC = \frac{AB}{PB}KP = KP\frac{AP + PB}{PB} = KP \cdot \left(1 + \frac{AP}{PB}\right) =$$

$$= KP\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 8\left(1 + \frac{3}{8}\right) = 11.$$

A teljes megoldáshoz szükséges annak igazolása, hogy a megadott konfiguráció létezik. Ha $AC = 11$ és B tetszőleges, az AC egyenesre nem illeszkedő pont a síkon, és P az AB, K a CB oldalt osztja fel $3 : 8$ arányban, akkor a PK szakasz hossza 8 és a fenti súlyozás mutatja, hogy az AF_A súlyvonal $3 : 5$ arányban, tehát 3 és 5 egység hosszúságú részekre osztja fel.



2.3M.4. ábra.



2.5M.1. ábra.

2.6. Ha P az $\left(A^{\alpha}; B^{\beta}; C^{\gamma}\right)$ súlyozott pontrendszer tömegközéppontja, akkor

$$\left(A^{\alpha}; B^{\beta}\right) \equiv C_1^{\alpha+\beta}, \qquad \text{így} \qquad \frac{A_1P}{AP} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma},$$

tehát

$$\frac{A_1P}{AA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{B_1P}{BB_1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \frac{C_1P}{CC_1} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

amiből azonnal következik, hogy a vizsgált arány értéke konstans, mindig 1.

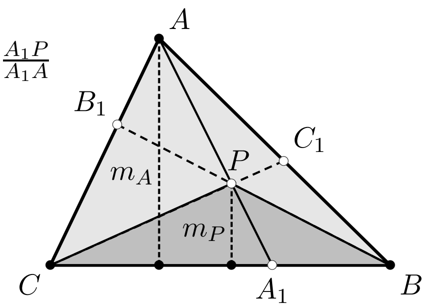
2.7. Ha (lásd az 1. ábrát) $AP \cap BC = A_1$, akkor

$$\frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} = \frac{A_1P}{A_1A} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},$$

így

$$T_{BPC} : T_{CPA} : T_{APB} = \frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} : \frac{T_{CPA}}{T_{CBA}} : \frac{T_{APB}}{T_{ACB}} = \alpha : \beta : \gamma.$$

$$\frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} = \frac{m_P}{m_A} = \frac{A_1P}{A_1A}$$



2.7M.1. ábra.

Megjegyezzük, hogy az A_1 pont mindig létrejön, ha $\beta+\gamma \neq 0$, ellenben ha $\beta+\gamma \neq 0$, akkor nem jöhet létre, AP párhuzamos a BC egyenessel. Ha pedig $\alpha+\beta+\gamma = 0$ – és csak ekkor – a P pont nem lesz valódi pont, az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek ilyenkor párhuzamosak.

2.8. Ha P, az $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ tömegpontrendszer súlypontja és T az ABC háromszög területe, akkor a 7. feladat eredménye szerint az APB, BPC, CPA háromszögek területe rendre

$$\gamma\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}, \alpha\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}, \beta\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Vizsgáljuk az A_1PB_1, B_1PC_1, C_1PA_1 háromszögek t_C, t_A, t_B területét is!

$$\frac{t_C}{T_{APB}} = \frac{PA_1 \cdot PB_1}{PA \cdot PB} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)},$$

tehát

$$t_C = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)},$$

és ehhez hasonlóan

$$t_B = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)},$$

$$t_A = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Vegyük észre, hogy $t = t_a + t_b + t_c$, azaz közös nevezőre hozás és egyszerűsítés után

$$t = 2T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\gamma+\beta)(\beta+\alpha)}. \tag{1}$$

Másrészt

$$\frac{T_C}{T} = \frac{CB_1 \cdot CA_1}{CA \cdot CB} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)},$$

és ehhez hasonlóan adódik $\frac{T_B}{T}$ valamint $\frac{T_A}{T}$, tehát

$$T_AT_BT_C = T^3\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\right)^2. \tag{2}$$

A (1), (2) egyenletek összevetéséből

$$t^2T = 4T_AT_BT_C. \tag{3}$$

Mivel $T = t + T_A + T_B + T_C$, így (3)-ből

$$t^2(t + T_A + T_B + T_C) = 4T_AT_BT_C,$$

azaz

$$t^3 + t^2(T_A + T_B + T_C) - 4T_AT_BT_C = 0. \tag{4}$$

Ha például T_A, T_B, T_C pozitív mennyiségek, akkor (4) gyökeinek szorzata – a $4T_AT_BT_C$ mennyiség – pozitív, így a gyökök közül egy vagy három pozitív. Másrészt a gyökök kéttényezős szorzatainak összege (4)-ben zérus, tehát nem lehet három pozitív gyök. Ezek szerint (4) egyetlen pozitív gyöke megadja az egyetlen lehetséges eredményt t-re.

2.9. Egy súlyozáshoz tartozó tömegközéppont pontosan akkor esik az adott egyenesre, ha a súlyozott pontrendszernek az adott egyenesre vonatkozó forgatónyomatéka zérus. Ennek számbavételéhez jelöljük ki az egyenes egyik normálvektorát (elég egy az egyenesre merőleges irányítás rögzítése is) és jelölje d_A, d_B és d_C a háromszög egyes csúcsainak az adott egyenestől mért irányított távolságait! Az $(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ súlyozás akkor és csakis akkor megfelelő, ha

$$d_A \cdot \alpha + d_B \cdot \beta + d_C \cdot \gamma = 0. \tag{1}$$

2.10. Feltesszük, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egymástól különbözők és rendre az

$$(A^0, B^{\alpha_1}, C^{\alpha_2}), \qquad (A^{\beta_2}, B^0, C^{\beta_1}), \qquad (A^{\gamma_1}, B^{\gamma_2}, C^0)$$

súlyozáshoz tartozó tömegközéppontok.

Vizsgáljuk azt az esetet, hogy a pontok egy egyenesen vannak, melynek egyenlete:

$$d_A \cdot \alpha + d_B \cdot \beta + d_C \cdot \gamma = 0, \tag{1}$$

tehát

$$\begin{array}{ccccccccc}
d_A \cdot 0 & + & d_B \cdot \alpha_1 & + & d_C \cdot \alpha_2 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{d_B}{d_C}; \\
d_A \cdot \beta_2 & + & d_B \cdot 0 & + & d_C \cdot \beta_1 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{d_C}{d_A}; \\
d_A \cdot \gamma_1 & + & d_B \cdot \gamma_2 & + & d_C \cdot 0 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{d_A}{d_B}.
\end{array}$$

Mivel

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{AB_1}{B_1C}, \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{CA_1}{A_1B}, \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{BC_1}{C_1A},$$

így a fenti három jobb oldali összefüggés szorzata:

$$\left(-\frac{d_C}{d_A}\right) \cdot \left(-\frac{d_B}{d_C}\right) \cdot \left(-\frac{d_A}{d_B}\right) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

azaz

$$-1 = \frac{AB_1}{B_1C}\frac{CA_1}{A_1B}\frac{BC_1}{C_1A}. \tag{2}$$

A (2) feltétel tehát szükséges ahhoz, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre essenek. Az Olvasóra hagyjuk annak igazolását, hogy elégséges is.

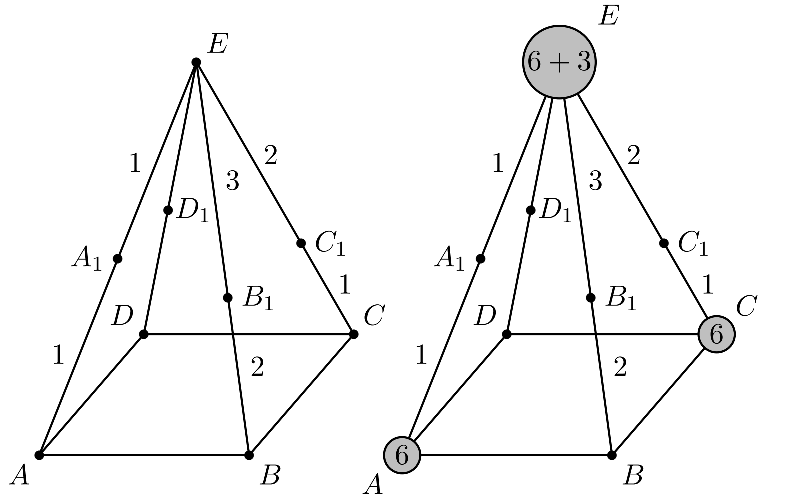
2.11. Tekintsük az $(A^6; C^6; E^9)$ tömegpontrendszert (lásd az 1-3. ábrasorozatot)! Mivel

$$(A^6; E^6) \equiv A_1^{12} \quad \text{és} \quad (C^6; E^3) \equiv C_1^9,$$

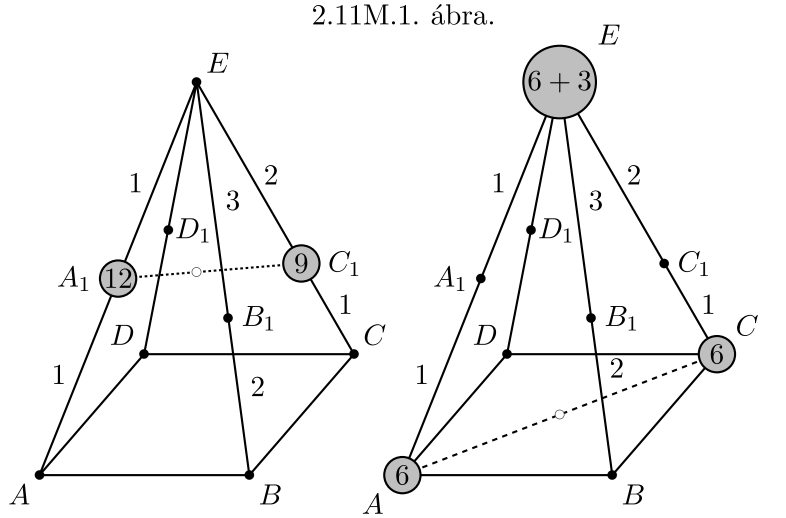
így $(A^6; C^6, E^9)$ tömegközéppontja az A_1C_1 szakaszon van. Másrészt

$$(A^6; C^6) \equiv (B^6; D^6), \quad \text{így} \quad (A^6; C^6, E^9) \equiv (B^6; D^6; E^9).$$

A $(B^6; D^6, E^9)$ pontrendszert szétbontjuk a $(B^6; E^4)$, $(D^6; E^5)$ tömegpontrendszerekre. Tudjuk, hogy $(B^6; E^4) \equiv B_1^{10}$. Tekintsük azt a D_2 pontot, amelyre $(D^6; E^5) \equiv D_2^{11}$. Az eredeti tömegpontrendszer súlypontja a B_1D_2 szakaszra is illeszkedik, tehát a B_1D_2, A_1C_1 szakaszok metszők, azaz D_2 az $A_1B_1C_1$ pontokon átmenő síknak és az ED egyenesnek is pontja, tehát $D_2 = D_1$. A D_2 pont definíciója szerint $\frac{ED_1}{D_1D} = \frac{6}{5}$.



2.11M.1. ábra.



2.11M.2. ábra.

2.12.

1. megoldás. Felhasználjuk az alábbi összefüggéseket:

$$AT_B = AT_C = s, \qquad BT_B = BT = s - c, \qquad CT_C = CT = s - b,$$

ahol s a háromszög félkerületét jelöli (lásd az 1. ábrát).

Helyezzünk rendre

$$-(s-b)(s-c), \qquad s(s-b), \qquad s(s-c)$$

előjeles súlyokat az A, B, C pontokba! Az így kapott súlyozott pontrendszer D tömegközéppontja az AT egyenesen van, hiszen

$$\left(B^{s(s-b)}; C^{s(s-c)}\right) \equiv T^{as}.$$

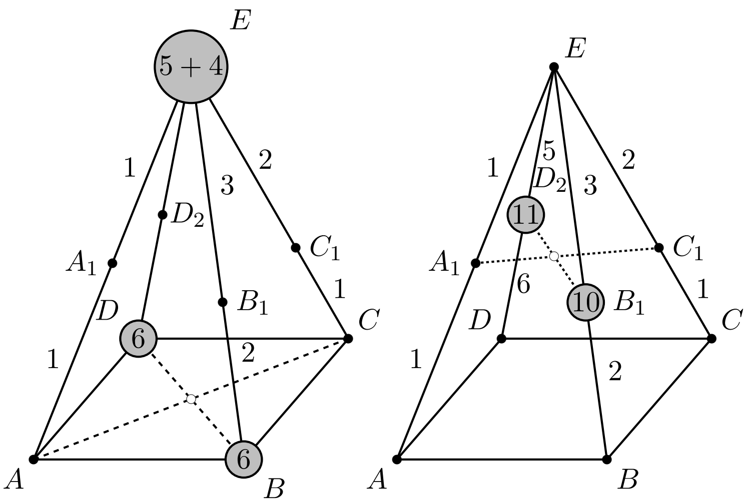
Másrészt

$$\left(A^{-(s-b)(s-c)}; B^{s(s-b)}\right) \equiv T_B^{c(s-b)},$$

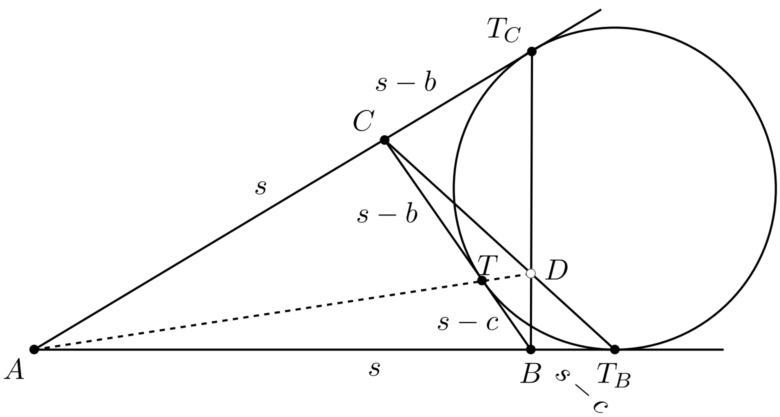
azaz D illeszkedik a CT_B egyenesre és

$$\left(A^{-(s-b)(s-c)}; C^{s(s-c)}\right) \equiv T_C^{b(s-c)}$$

miatt a BT_C egyenesre is. Az AT, CT_B, BT_C egyenesek tehát egy pontban metszik egymást, épp ezt kellett igazolnunk.



2.11M.3. ábra.



2.12M1.1. ábra.

2. megoldás. Azt kell igazolni, hogy az AT, BT_C, CT_B egyenesek egy ponton mennek át. A Ceva-tétel pont erről a szituációról szól, csak kissé szokatlan, hogy a P pont a háromszögön kívül helyezkedik el. Mivel

$$\frac{AT_B}{T_BB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CT_C}{T_CA}=\frac{s}{-(s-c)}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-b}{-s}=1,$$

így a Ceva-tétel szerint valóban egy ponton megy át az említett három egyenes.

3. megoldás. Egy körről és érintőiről szól a feladat. Alkalmazzuk az alábbi nevezetes tételt!

Brianchon tétel *Ha egy hatszögbe kúpszelet írható, akkor a hatszög szemköztes csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át.*

Mostani hatszögünk kissé elfajult. Oldalegyenesei:

$$AC,\quad AC,\quad CB,\quad CB,\quad BA,\quad BA.$$

Ha egy érintő hatszög két szomszédos oldala egybeesik, akkor metszéspontjuknak azaz közös csúcsuknak az érintési pont tekintendő, ugyanis ha kissé elmozdítjuk az egyik éritőt, hogy egy közeli pontban érintsen, akkor a létrejövő metszéspont az érintési pontok közelében lesz. Így a csúcsok:

$$AC\cap AC=T_C,\quad AC\cap CB=C,$$

$$CB \cap CB = T, \quad CB \cap AB = B,$$
$$AB \cap AB = T_B, \quad AB \cap AC = A,$$

a szemköztes csúcsokat összekötő egyenesek pedig:

$$T_C B, \qquad CT_B, \qquad TA,$$

amelyek tehát így a tétel értelmében egy ponton mennek át.

2.13. Először helyezzünk tömegeket a P, B, Q pontokba úgy, hogy tömegközéppontjuk D-ben legyen! Ha $BA = \alpha_1$, $AP = \alpha_2$, $BC = \gamma_1$, $CQ = \gamma_2$, akkor a

$$(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{\alpha_2\gamma_2}, Q^{\gamma_1\alpha_2}) \tag{1}$$

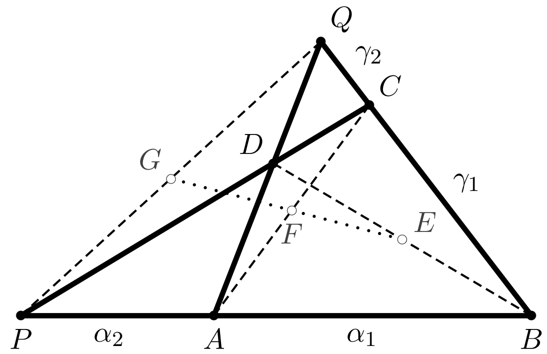
tömegpontrendszer megfelelő (lásd a 2. ábrát), hiszen

$$\frac{BA}{AP} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\gamma_2},$$

így a $(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{\alpha_2\gamma_2})$ alrendszer helyettesíthető egy A-ra helyezett tömeggel, tehát a teljes rendszer tömegközéppontja az AQ egyenesen lesz, míg

$$\frac{BC}{CQ} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_2\gamma_2},$$

így a $(Q^{\gamma_1\alpha_2}, B^{\alpha_2\gamma_2})$ alrendszer helyettesíthető egy C-re helyezett tömeggel, tehát a teljes rendszer tömegközéppontja egyúttal a CP egyenesen is rajta lesz.



2.13M.2. ábra.

Ha át akarjuk helyezni a rendszer tömegközéppontját a BD átló E felezőpontjába, akkor a B csúcsba még ugyanannyi tömeget teszünk, mint eddig összesen:

$$(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{2\alpha_2\gamma_2+\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2}, Q^{\gamma_1\alpha_2}) \equiv E^x. \tag{2}$$

Most súlyozzuk úgy a P, B, Q pontokat, hogy tömegközéppontjuk az AC szakasz F felezőpontjára essen! A

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}, Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \tag{3}$$

súlyozás megfelelő, hiszen

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)}\right) \equiv A^{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)},$$

míg

$$\left(Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}, B^{\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \equiv C^{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)},$$

így
$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}, Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \equiv F^y.$$

Ha most a (2) tömegpontrendszerben minden csúcsnál levesszük az ottani súlyból a (3) tömegpontrendszerben feltüntetett súlyt, akkor az (E^x, F^{-y}) súlyozással ekvivalens súlyozáshoz jutok, amelynek tömegközéppontja az EF egyenesen van. Ez a súlyozás konkrétan
$$\left(P^{\alpha_1\gamma_1}, B^0, Q^{\gamma_1\alpha_1}\right), \tag{4}$$
tehát tömegközéppontja a PQ szakasz G felezőpontja. Ezzel beláttuk, hogy E, F és G egy egyenesen vannak.

2.14. Jelölje az ABC háromszög AB, BC, CA oldalainak hosszát szokásosan c, a és b! Tekintsük az (A^a, B^b, C^c) tömegpontrendszert! A szögfelező tétel szerint ennek a pontrendszernek a tömegközéppontja a háromszög beírt körének I középpontja! A tömegpontrendszernek a saját súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:
$$\Theta_I = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + bca^2 + cab^2) = abc, \tag{1}$$
míg a körülírt kör O középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka
$$\Theta_O = a \cdot OA^2 + b \cdot OB^2 + c \cdot OC^2 = (a+b+c)R^2. \tag{2}$$
Steiner tétele alapján a két tehetetlenségi nyomaték között az
$$\Theta_O = \Theta_I + (a+b+c)OI^2 \tag{3}$$
összefüggés áll fenn. Mivel $OI = d$, $abc = 2Rab\sin\gamma = 4RT$ és $(a+b+c) = 2T/r$, ahol T az ABC háromszög területe, így (1)-et és (2)-at (3)-ba írva kapjuk, hogy
$$(a+b+c)R^2 = abc + (a+b+c)d^2,$$
azaz
$$R^2 = \frac{abc}{(a+b+c)} + d^2,$$
így
$$R^2 - 2Rr = d^2. \tag{4}$$

2.15. Tegyünk a háromszög mindhárom csúcsába egységnyi tömeget és számoljuk ki a rendszer súlypontra, majd az AB oldal F felezőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

A VI. alapelv szerint
$$\Theta_S = \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$
míg a IV. alapelv szerint
$$\Theta_F = FC^2 + FA^2 + FB^2 = s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$
a Steiner-tétel szerint (V. alapelv) pedig
$$\Theta_F = \Theta_S + 3FS^2 = \Theta_S + 3\left(\frac{s_c}{3}\right)^2,$$
azaz
$$s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 3\left(\frac{s_c}{3}\right)^2,$$
és ebből
$$s_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

2.16. Tekintsük az

$$\left(A^q, B^p, C^{p+q}\right)$$

súlyozott pontrendszert. Mivel a II. alapelv miatt $(A^q, B^p) = F^{p+q}$, így az I. alapelv miatt $\left(A^q, B^p, C^{p+q}\right) = S^{2p+2q}$, ahol S az FC szakasz felezőpontja.

Számoljuk ki a rendszer saját súlypontjára, majd az F pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

A VI. alapelv szerint

$$\Theta_S = \frac{p(p+q)a^2 + q(p+q)b^2 + pqc^2}{2(p+q)} = \frac{p}{2}a^2 + \frac{q}{2}b^2 + \frac{pq}{2(p+q)}c^2,$$

míg a IV. alapelv szerint

$$\Theta_F = (p+q)FC^2 + qFA^2 + pFB^2 = (p+q)FC^2 + q\left(\frac{pc}{p+q}\right)^2 + p\left(\frac{qc}{p+q}\right)^2 =$$

$$= (p+q)FC^2 + \frac{pq}{p+q}c^2,$$

a Steiner-tétel szerint (V. alapelv) pedig

$$\Theta_F = \Theta_S + 2(p+q)FS^2 = \Theta_S + 2(p+q)\left(\frac{FC}{2}\right)^2 = \Theta_S + \frac{p+q}{2}FC^2,$$

azaz

$$(p+q)FC^2 + \frac{pq}{p+q}c^2 = \frac{p}{2}a^2 + \frac{q}{2}b^2 + \frac{pq}{2(p+q)}c^2 + \frac{p+q}{2}FC^2,$$

és ebből

$$FC^2 = \frac{p}{p+q}a^2 + \frac{q}{p+q}b^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}c^2.$$

2.17. a) Legyen $C_2 = A_1B_1 \cap AB$. Helyezzünk súlyokat az A, B, C pontokba úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja C_2-ben legyen! Mivel $C_2 \in AB$, így a C csúcsra összességében nulla tömeget kell tenni. A szögfelező tétel szerint $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}$, míg $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$, így $A^aC^c = B_1^{a+c}$ és $B^bC^c = A_1^{b+c}$. Ennek alapján megfelelő lesz a A^aB^{-b} tömegpontrendszer, hiszen

$$A^aB^{-b} = A^aB^{-b}C^{c-c} = A^aC^cB^{-b}C^{-c} = B_1^{a+c}A_1^{-b-c},$$

és így a tömegközéppont valóban az AB, A_1B_1 egyenesek C_2 metszéspontjában lesz.

Tekintsük még az A pontnak a C-ből induló külső szögfelezőre vonatkozó tükörképét, az A_3 pontot, valamint az AA_3 szakasz A_F felezőpontját, amely az említett külső szögfelezőre esik. Mivel $A_3C = b$ és $CB = a$, így

$$A^aB^{-b} = A^aA_3^{a-a}B^{-b} = A^aA_3^aB^{-b}A_3^{-a} = A_F^{2a}C^{-b-a},$$

tehát a pontrendszer C_2 tömegközéppontja valóban illeszkedik a C csúcshoz tartozó külső szögfelezőre.

b) Általánosan kezeljük a kérdést. Az is igaz, hogy ha AA_1, BB_1, CC_1 tetszőleges Ceva szakaszok – azaz $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ és AA_1, BB_1, CC_1 egy közös P pontban metszik egymást – és

$$C_2 = A_1B_1 \cap AB, \qquad B_2 = C_1A_1 \cap CA, \qquad A_2 = B_1C_1 \cap BC,$$

akkor A_2, B_2 és C_2 egy egyenesen vannak.

Ha $A^\alpha B^\beta C^\gamma = P^{\alpha+\beta+\gamma}$, akkor

$$A^\alpha B^\beta = C_1^{\alpha+\beta}, \qquad B^\beta C^\gamma = A_1^{\beta+\gamma}, \qquad C^\gamma A^\alpha = B_1^{\alpha+\gamma},$$

és így

$$A^\alpha B^{-\beta} = A^\alpha B^{-\beta} C^0 = A^\alpha C^\gamma B^{-\beta} C^{-\gamma} = B_1^{\alpha+\gamma} A_1^{-\beta-\gamma},$$

tehát a tömegközéppont az $AB \cap A_1B_1 = C_2$ pont: $A^\alpha B^{-\beta} = C_2^{\alpha-\beta}$. Ehhez hasonlóan juthatunk el a B_2, A_2 pontokhoz, az alábbi táblázat mutatja, hová mennyi súlyt tegyünk:

	A	B	C
A_2:	0	β	$-\gamma$
B_2:	$-\alpha$	0	γ
C_2:	α	$-\beta$	0

Látható, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok mindegyike rajta van az

$$\frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\beta}y + \frac{1}{\gamma}z = 0 \tag{1}$$

egyenletű egyenesen, tehát mindegyikük olyan $A^x B^y C^z$ súlyozással kapható meg, amelyre fennáll a (1) reláció.

2.18. A k beírt kört érintő egyenes olyan háromszögeket alkot az eredeti háromszög két-két oldalával, amelynek beírt vagy hozzáírt köre a k kör. Ezért többször is szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Lemma Az ABC háromszöghöz rögzített $(x_A; x_B; x_C)$ baricentrikus koordinátarendszerben az $I(i_A; i_B; i_C)$ pont akkor és csakis akkor középpontja az ABC háromszög beírt vagy valamelyik hozzáírt körének, ha

$$\frac{i_A^2}{i_B^2} = \frac{BC^2}{CA^2}, \qquad \frac{i_B^2}{i_C^2} = \frac{CA^2}{AB^2}, \qquad \frac{i_C^2}{i_A^2} = \frac{AB^2}{BC^2}. \tag{3}$$

Valóban, a beírt kör középpontjának koordinátái a szokásos jelölésekkel $(a; b; c)$, míg a BC, CA, AB oldalakhoz hozzáírt körök középpontjai rendre

$$(-a; b; c), \qquad (a; -b; c), \qquad (a; b; -c),$$

és pont az ezekkel arányos számhármasok elégítik ki a (3) összefüggést.

Messe az ℓ egyenes a háromszög AC oldalegyenesét a $B_2(a; 0; c_a)$, a BC oldalegyenest az $A_2(0; b; c_b)$ pontban, ahol (1)-nek megfelelően

$$\xi_a a + \xi_c c_a = 0, \qquad \xi_b b + \xi_c c_b = 0. \tag{4}$$

Mivel

$$I^{a+b+c} = A^a B^b C^c = B_2^{a+c_a} A_2^{b+c_b} C^{c-c_a-c_b}, \tag{5}$$

így a Lemma szerint csak azt kell ellenőrizni, hogy

$$\frac{(a+c_a)^2}{(b+c_b)^2} = \frac{A_2C^2}{CB_2^2}, \qquad \frac{(b+c_b)^2}{(c-c_a-c_b)^2} = \frac{CB_2^2}{B_2A_2^2}, \qquad \frac{(c-c_a-c_b)^2}{(a+c_a)^2} = \frac{B_2A_2^2}{A_2C^2}. \tag{6}$$

Mivel

$$\frac{CB_2}{CA} = \frac{a}{c_a+a}, \qquad \frac{CA_2}{CB} = \frac{b}{c_b+b},$$

így
$$CB_2 = \frac{ab}{c_a + a}, \qquad CA_2 = \frac{ab}{c_b + b}, \tag{7}$$
tehát (6) első egyenlete teljesül.

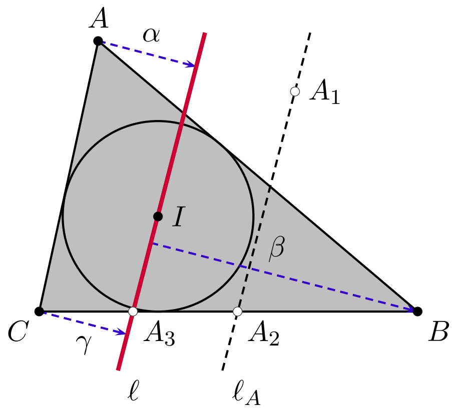
Az ABC háromszögre vonatkozó koszinusz tételből az $ACB\angle = \gamma$ szögre
$$2\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}, \tag{8}$$
és így az A_2B_2C háromszögre vonatkozó
$$A_2B_2^2 = CB_2^2 + CA_2^2 - 2CB_2CA_2\cos\gamma$$
koszinusztételből
$$\left(\frac{(c_a + a)(c_b + b)}{ab}\right)^2 A_2B_2^2 = (c_b + b)^2 + (c_a + a)^2 - (c_b + b)(c_a + a)\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}. \tag{9}$$
A (6) egyenletek szorzata azonosan teljesül, így elég közülük kettőt ellenőrizni. Mivel az elsőt igazoltuk, alább csak a harmadikra, a
$$(c - c_a - c_b)^2 = \frac{B_2A_2^2}{A_2C^2}(a + c_a)^2$$
relációra koncentrálunk. A (7) (9) összefüggéseket felhasználva a
$$(c - c_a - c_b)^2 = (c_b + b)^2 + (c_a + a)^2 - (c_b + b)(c_a + a)\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$$
összefüggéshez jutunk. Ebben felbontjuk a zárójelek és átrendezzük a c_a, c_b változók polinomjaként és leosztunk a mindenütt megjelenő $(a + b + c)$ tényezővel:
$$c_ac_b(a + b - c) - c_ab(a - b + c) - c_ba(-a + b + c) = 0. \tag{10}$$
A (4) relációk segítenek, hogy megkapjuk az ℓ egyenes együtthatóira vonatkozó összefüggést:
$$ab(a + b - c)\frac{\xi_a\xi_b}{\xi_c^2} + ab(a - b + c)\frac{\xi_a}{\xi_c} + ab(-a + b + c)\frac{\xi_b}{\xi_c} = 0,$$
azaz
$$(s - c)\xi_a\xi_b + (s - b)\xi_a\xi_c + (s - a)\xi_b\xi_c = 0, \tag{11}$$
vagy a kívánt összefüggés még egyszerűbben:
$$\frac{s - c}{\xi_c} + \frac{s - b}{\xi_b} + \frac{s - a}{\xi_a} = 0. \tag{12}$$

2.19. Jelölje az ℓ egyenes előjeles távolságát az A, B, C pontoktól rendre α, β és γ, azaz legyen ℓ egyenlete az A, B, C pontokhoz rögzített baricentrikus koordinátarendszerben
$$\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C = 0. \tag{1}$$
Tehát a (1) egyenes pontjai azok a pontok, amelyek olyan $A^{x_A}B^{x_B}C^{x_C}$ súlyozással adhatók meg, amely súlyokra teljesül a (1) reláció. A beírt kör I középpontja is illeszkedik ℓ-re, és I az $A^aB^bC^c$ tömegpontrendszer súlypontja, így
$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0. \tag{2}$$

I-ből kiindulva most cseréljük ki az A^a tömegpontot az A_1^{-a} tömegpontra! A tömegpontrendszernek az ℓ egyenesre vonatkozó forgatónyomatéka nem változott, tehát továbbra is zérus, az új tömegközéppont is ℓ-en van.

Cseréljük ki most az A_1^{-a} tömegpontot az A_2^{-a} tömegpontra! Ezzel sem változtattunk a ℓ-re vonatkozó forgatónyomatékon, de most már mindegyik tömegpontunk az AB egyenesen van, tehát a tömegközéppont az $A_3 = \ell \cap AB$ pont,

$$A_2^{-a} B^b C^c = A_3^{-a+b+c} \tag{3}$$



2.19M.1. ábra.

Szeretnénk kitalálni, hogy az A_2 pont hol helyezkedik el a BC egyenesen, tehát szeretnénk súlyokat tenni a B, C pontokra, hogy tömegközéppontjuk A_3 legyen. Először tegyünk úgy súlyokat B-re és C-re, hogy a tömegközéppont A_3-ban legyen és az össztömeg annyi legyen, mint az előbb: $(-a+b+c)$! A (1) egyenletből ismertek a B, C pontokból az ℓ tengelyhez tartozó erőkarok arányai $\frac{-\beta}{\gamma} = \frac{BA_3}{A_3C}$, így

$$B^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(-a+b+c)} C^{\frac{-\beta}{\gamma-\beta}(-a+b+c)} = A_3^{-a+b+c} \tag{4}$$

A (3), (4) tömegpontrendszerek összevetéséből kapjuk, hogy

$$B^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(-a+b+c)-b} C^{\frac{-\beta}{\gamma-\beta}(-a+b+c)-c} = A_2^{-a} \tag{5}$$

A $(\gamma - \beta)$ mennyiséggel átszorozva, a (2) összefüggést felhasználva, egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$B^{-\alpha-\gamma} C^{\alpha+\beta} = A_2^{\beta-\gamma} \tag{6}$$

Ehhez hasonlóan kaphatjuk az A, B, C pontok azon súlyozásait, amelyek tömegközéppontja a B_2 illetve a C_2 pont. Az eredményeket táblázatba foglaljuk össze:

	A	B	C
A_2:	0	$-\alpha-\gamma$	$\alpha+\beta$
B_2:	$\beta+\gamma$	0	$-\beta-\alpha$
C_2:	$-\gamma-\beta$	$\gamma+\alpha$	0

Látható, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok mindegyike rajta van az

$$\frac{1}{\beta+\gamma}x + \frac{1}{\gamma+\alpha}y + \frac{1}{\alpha+\beta}z = 0 \tag{7}$$

egyenletű egyenesen, tehát mindegyikük olyan $A^x B^y C^z$ súlyozással kapható meg, amelyre fennáll a (7) reláció.

b) A (7) egyenesről a 18. feladat eredménye alapján eldönthető, hogy érinti-e a beírt kört.

$$(s-a)(\beta+\gamma)+(s-b)(\gamma+\alpha)+(s-c)(\alpha+\beta)=$$

$$=\alpha(s-b+s-c)+\beta(s-c+s-a)+\gamma(s-a+s-b)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

tehát a (2) összefüggés szerint az egyenes tényleg érinti a beírt kört.

2.21. a) Számítsuk ki a $A^{t_a}B^{t_b}C^{t_c} \equiv P^t$ tömegpont tehetetlenségi nyomatékát az O ponton átmenő az ABC síkra merőleges tengelyre vonatkozólag. (Alkalmazzuk az V., VI., alapelveket!)

b) Alkalmazzuk az a) feladatrész eredményét a $D=P$ pontra! Mivel $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}==2r$, így az ABD, BCD, CDA háromszögek területének abszolút értéke rendre $\frac{c}{4r}DA\cdot DB$, $\frac{a}{4r}DB\cdot DC$, $\frac{b}{4r}DC\cdot DA$, amiből a területek előjelét is figyelembe véve adódik az állítás.

2.22. Alkalmazzuk a 2.21 feladat állítását!

2.23.

$$P_1P_2^2=-\Big((\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)a^2+(\gamma_1-\gamma_2)(\alpha_1-\alpha_2)b^2+(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)c^2\Big).$$

3. Inverzió

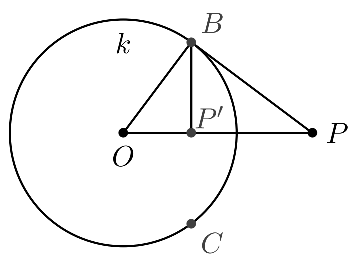
3.1. Legyen az inverzió alapköre k, középpontja O, az invertálandó pont P.

Három esetre bontjuk a feladatot.

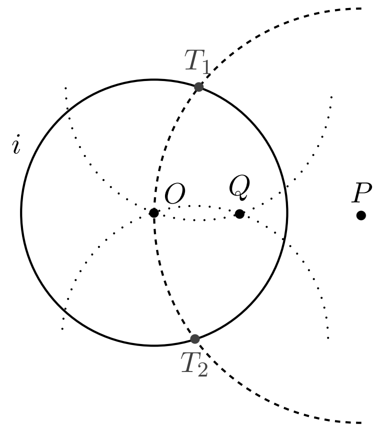
I. eset: P illeszkedik a k körre. Ekkor $P'=P$.

II. eset: P a k kör külső pontja (lásd az 1. ábrát). Legyenek P-ből a k körhöz húzott érintők érintési pontjai B és C. Állítjuk, hogy B-nek és C-nek az OP egyenesre vonatkozó közös merőleges vetülete – tehát a BC szakasz felezőpontja – P'. Valóban, az OBP derékszögű háromszögre vonatkozó befogó-tétel (másképp: az OBP', OPB háromszögek hasonlósága) szerint erre a P' pontra $OP'\cdot OP=OB^2$, ahol OB a k kör sugara, így P' a P inverze.

III. eset: P a kör belső pontja. Az az 1. ábrát most fordítva szerkesztjük meg. A P-ben az OP egyenesre állított merőleges a k körből kimetszi a B, C pontokat, és az azokban k-hoz húzott érintők egymást P invertáltjában metszik. Ennek igazolása a II. esetével analóg.



3.1M.1. ábra.



3.2M.1. ábra.

3.2. Jelölje az inverzió alapkörét i, középpontját O, az invertálandó pontot P.

Tegyük fel először, hogy a P középpontú PO sugarú kör metszi az i kört, legyenek a metszéspontok T_1 és T_2. A T_1 illetve T_2 középpontú T_1O $(= T_2O)$ sugarú körök O-n kívül még egy pontban metszik egymást, legyen ez Q. Könnyen igazolható, hogy Q a P inverz képe i-re, ha figyelembe vesszük, hogy az OT_1P, OQT_1 háromszögek hasonlóak.

Ha a P középpontú PO sugarú kör nem metszi az i kört, akkor az alábbi előkészítő eljárást hajtjuk végre. Az OP szakaszból kiindulva szabályos háromszögrácsot szerkeszthetünk a körző segítségével és így megszerkeszthetjük az OP félegyenes P_2, P_3, $\ldots$ pontjait, melyekre $OP_2 = 2OP$, $OP_3 = 3OP$, $\ldots$. Valamely n-re a P_n pont P_n' inverze már szerkeszthető lesz. Ezek után az OP_n' szakaszra alapuló szabályos háromszögráccsal megszerkesztjük az OP_n' félegyenes azon Q pontját, amelyre $OQ = nOP_n'$. Ez a Q pont a P invertáltja, hiszen

$$\frac{r^2}{OP} = n\frac{r^2}{nOP} = n\frac{r^2}{OP_n} = nOP_n' = OQ.$$

3.3. Jelölje az adott pontokat O és P. Két szabályos háromszög szerkesztésével „duplázható”, hárommal triplázható az OP szakasz, azaz megszerkeszthető az a P_2 és az a P_3 pont, amelyre az OP_2 szakasz felezőpontja P, illetve az OP_3 szakasz O felőli harmadolópontja P. A P_2, P_3 pontok képe az O középpontú P ponton átmenő körre vonatkozó inverziónál az OP szakasz P_2' felezőpontja illetve P_3' harmadolópontja. Ezeket a 3.2. feladat megoldása alapján szerkeszthetjük.

3.1. a) $AOB\angle = A'OB'\angle$ hiszen pozitív paraméterű inverziónál az OA, OA' félegyenesek megegyeznek egymással csakúgy, mint az OB, OB' félegyenesek, míg negatív paraméterű inverziónál OA és OA' illetve OB és OB' is egymással ellentétes (ugyanazon az egyenesen ellenkező irányú) félegyenesek.

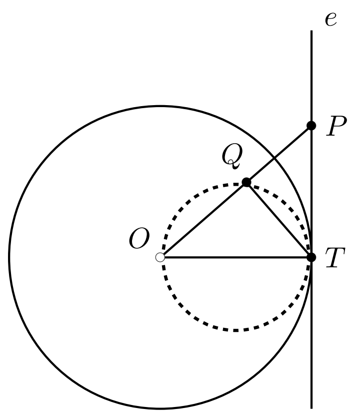
Az inverzió definiciója szerint

$$\lambda = OA \cdot OA' = OB \cdot OB', \tag{1}$$

amiből $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, tehát az egyenlő szög melletti oldalak aránya egyenlő, a két háromszög valóban hasonló.

b) Ha a négy pont nincs egy egyenesen a G.II.11.5. feladat állítása szerint (1)-ből következik, hogy egy körön vannak. (Az O pont hatványa az ABA' körre λ, így B' is rajta van ezen a körön.)

3.2. b) A kép az OT szakasz Thalesz köre – kivéve magát az O pontot –, ahol T az e egyenes és a T kör érintési pontja.



3.2M.1. ábra.

c) A T pont képe önmaga a rajta átmenő k körre vonatkozó inverziónál.

Legyen P az e egyenes tetszőleges T-től különböző pontja és Q az OP félegyenes és OT Thalesz körének O-tól különböző metszéspontja. Az PTO háromszög derékszögű, az OP átfogóhoz tartozó magasság épp QT, hiszen a Thalesz-tétel értelmében $TQO\angle$ derékszög. A Befogó-tétel szerint $OQ \cdot OP = OT^2$, ami épp azt jelenti, hogy P és Q egymás képei az OT sugarú körre vonatkozó inverziónál. Tehát e pontjai a Thalesz körre kerülnek.

Megfordítva, ha Q az OT szakasz Thalesz körének O-tól és T-től különböző pontja, akkor az OQ félegyenes és az e egyenes P metszéspontjára elmondható az előző bekezdés gondolatmenete, P és Q egymás képei az inverziónál. Tehát a Thalesz kör bármelyik O-tól különböző pontja előáll képként.

3.3. Kilencszeres nagyítással.

Tekintsünk általában egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű O centrumú inverziót. A P pont két képe – P_1 és P_2 – az OP irányított egyenesen helyezkedik el az $OP \cdot OP_1 = \lambda_1$, $OP \cdot OP_2 = \lambda_2$ relációknak megfelelően. A két összefüggés hányadosa: $\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, tehát a P_2 pont a P_1 pont képe az O centrumú $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ arányú nagyításnál.

A konkrét esetben $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 9$.

3.4. Ha e átmegy az inverzió O centrumán, akkor képe lényegében önmaga, csak magának az O pontnak nincs képe a síkon, illetve O nem képe a sík semelyik pontjának sem.

Ha e nem megy át az inverzió centrumán, akkor képe egy O-n átmenő kör. Ha az O-ból e-re állított merőleges talppontja T, és T képe az inverziónál T', akkor e képe az OT' szakasz Thalesz köre az O pont nélkül. Ez a 3.2-3.3. feladatok mintájára igazolható.

3.9. a) A P pont P' képe az OP egyenesen van, tehát valamely α valós számmal $\overrightarrow{OP'} = \alpha\overrightarrow{OP}$. Az inverzió definíciója szerint az $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP'}$ vektorok előjeles hosszának szorzata λ, azaz $\alpha\overrightarrow{OP}^2 = \lambda$, tehát $\alpha = \frac{\lambda}{x^2+y^2}$, $P'\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}; \frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)$.

b) Az inverzió inverze ugyanaz az inverzió, tehát a $P(x;y)$ pont a $P'\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}; \frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)$ pont képe.

c) A $P(x,y)$ pont akkor és csakis akkor van rajta a megadott egyenletű alakzat képén, ha a P pont őse rajta van az eredeti alakzaton, tehát ha a P pont ősének koordinátái kielégítik az alakzat egyenletét:

$$A\left(\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)^2\right)+B\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}\right)+C\left(\frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)+D=0.$$

Mivel

$$\left(\frac{\lambda x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{\lambda y}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\lambda^2}{x^2+y^2},$$

így (x^2+y^2)-tel való átszorzás után a

$$\lambda^2 D(x^2+y^2)+\lambda Bx+\lambda Cy+A=0 \tag{1}$$

egyenlethez jutunk.

d) Az

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \tag{2}$$

A-tól függően kör vagy egyenes egyenlete és D-től függően átmegy az origón, ami az inverzió centruma, vagy nem megy át rajta. Részletesen:

paraméterek	alakzat
$A=0$, de $B\neq 0$ vagy $C\neq 0$	egyenes
$A\neq 0$	kör (pontkör, képzetes kör)
$D=0$	átmegy az inverzió centrumán
$D\neq 0$	nem megy át az inv. centrumán

Az 1., 2. egyenletek összevetéséből látható, hogy az inverziónál
a centrumon átmenő egyenes képe a centrumon átmenő egyenes;
a centrumon átmenő kör képe a centrumon át nem menő egyenes;
a centrumon át nem menő egyenes képe a centrumon átmenő kör;
a centrumon át nem menő kör képe a centrumon át nem menő kör.

3.10. Az inverzió O_i centrumát a vizsgált k kör O_k középpontjával összekötő e egyenesen számolunk. Kissé általánosabban dolgozunk, az i inverzió paramétere legyen λ, a feladatban $\lambda=r^2$.

Legyen $e\cap k=\{A,B\}$. Tekintsük az e egyenest olyan számegyenesnek, amelynek origója O_i és O_k felé van irányítva. Az O_k, A, B pontoknak feleljenek meg rendre a $\delta=d$, a, b számok, ahol tehát $\frac{|a-b|}{2}=R$, $\frac{a+b}{2}=d$. Ezekből

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{|a-b|}{2}\right)^2=d^2-R^2.$$

Az A, B pontok i inverziónál származó A', B' képeinek megfelelő számok $\frac{\lambda}{a}$, $\frac{\lambda}{b}$, tehát a k kör k' képének középpontjának a

$$\delta'=\frac{\frac{\lambda}{a}+\frac{\lambda}{b}}{2}=\frac{a+b}{2}\frac{\lambda}{ab}=\frac{\lambda d}{d^2-R^2}$$

szám felel meg, míg k' sugara

$$r'=\left|\frac{\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda}{b}}{2}\right|=\left|\frac{b-a}{2}\frac{\lambda}{ab}\right|=\left|\frac{\lambda R}{d^2-R^2}\right|.$$

A képkör sugara tehát $\frac{r^2R}{|d^2-R^2|}$, míg a képkör középpontjának az inverzió centrumától mért távolsága $d'=\frac{r^2d}{|d^2-R^2|}$.

3.12. Vegyük észre, hogy az I. eset a II. eset speciális esete, amelyben az egyik A-n és B-n átmenő kögyenes egy egyenes. Ezek után csak a II. esetet vizsgáljuk.

Tegyük fel először, hogy i kicseréli egymással A-t és B-t és tekintsünk az A, B pontokon átmenő *tetszőleges* k kört. Az inverzió paramétere, a $\lambda = OA \cdot OB$ mennyiség egyben az O pont k körre vonatkozó hatványa. Legyen C a k kör egy tetszőleges további pontja és az OC egyenes még D-be messe k-t – illetve legyen $D = C$, ha OC érintő. Az O pont k körre vonatkozó hatványa ezen a szelőn is leolvasható: $\lambda = OC \cdot OD$, azaz i kicseréli C-t és D-t is, tehát k-t önmagára képezi.

Megfordítva, tegyük most fel, hogy két különböző A-n és B-n átmenő kögyenes is önmagára képződik az i inverziónál. Két kögyenes legfeljebb két pontban metszi egymást, tehát az adott esetben épp kettőben, A-ban és B-ben. Az A pont rajta van mindkét kögyenesen, amelyek fixek i-nél, tehát A képe is rajta van mindkét kögyenesen, azaz A képe A vagy B. Mivel A nem fixpont, így képe B, egyúttal B képe A, ahogy állítottuk.

3.13. Tekintsük az $AA' = a$ egyenest. Az A-t és A'-t kicserélő O inverzió centruma az inverzió definíciója szerint az AA' egyenesen van és különbözik az A, A' pontoktól. Megfordítva, ha O az a egyenes A-tól és A'-től különböző tetszőleges pontja, akkor az O centrumú $OA \cdot OA'$ paraméterű inverzió kicseréli egymással az A, A' pontokat (ha O az AA' szakasz belső pontja, akkor az $OA \cdot OA'$ szorzat értékét tekintsük negatívnak).

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy B illeszkedik-e a-ra vagy nem illeszkedik rá.

Ha B nem illeszkedik a-ra, akkor tekintsük az $AA'B$ háromszög k körülírt körét. A 3.12 feladat eredménye szerint az A-t és A' egymással kicserélő inverzió önmagára képezi a k kört, tehát B-t a k valamely A-tól és A'-től különböző pontjába viszi. Másrészt ha B' a k kör tetszőleges A-tól és A'-től különböző pontja és a $BB' = b$ egyenes – illetve $B = B'$ esetén a k kör B–beli b érintője – az O pontban metszi a-t, akkor O különbözik az A, A' pontoktól és az O centrumú, $\lambda = OA \cdot OA'$ paraméterű inverzió k-t önmagára, B-t B'-re képezi. Előfordulhat, hogy az a, b egyenesek párhuzamosak egymással, ekkor nincs inverzió, szerepét az AA' szakasz t felezőmerőlegesére való tengelyes tükrözés veszi át, az cseréli ki egymással A-t és A'-t, illetve B-t és B'-t. A keresett mértani hely tehát a k kör kivéve három pontot: A-t, A'-t és B t-re vonatkozó tükörképét.

Ha B illeszkedik a-ra, akkor tekintsük ezt az egyenest számegyenesnek. Az A, A', B pontokhoz illetve a keresett B' ponthoz rendelt valós számok legyenek rendre α, α', β illetve β'. Az O pont akkor és csakis akkor megfelelő inverziós centrum, ha az O-nak megfeleltetett x valós számra

$$(\alpha - x)(\alpha' - x) = (\beta - x)(\beta' - x) \neq 0. \tag{1}$$

A zárójelek felbontása után x-re lineáris egyenletet kapunk, mely rendezéssel a

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' = x\left((\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')\right) \tag{2}$$

alakra hozható. A (2) reláció jobb oldalán az x együtthatója pontosan akkor zérus, ha $\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\beta+\beta'}{2}$, azaz ha az AA', BB' szakaszok felezőpontja egybeesik. Ebben az esetben a $\lambda = -1$ arányhoz tartozó speciális inverzióról, a középpontos tükrözésről van szó, de alkalmas tengelyes tükrözés is kicseréli A-t A'-vel és B-t B'-vel.

Minden más esetben a (2) egyenletből egyértelműen meghatározható x értéke és az (1) szorzat megadja az inverzió paraméterét. Ez csak akkor lehet zérus, ha az (1) reláció egyszerre mindkét oldalán nulla áll, tehát csak akkor, ha az A, A' pontok egyike megegyezik a B, B' pontok egyikével. Ilyenkor tényleg nincs megfelelő inverzió, vagy triviális az állítás ($A = B$ és $A' = B'$ ill. $A = B'$ és $A' = B$). Tehát B' az a egyenes tetszőleges pontja lehet, kivéve három pontot: A-t és A'-t, valamint a B pont AA' felezőpontjára vonatkozó tükörképét.

3.14. Az inverzió centruma az AA' egyenes egy olyan O pontja amelyre

$$OA \cdot OA' = OC^2. \tag{1}$$

Ha A, A' és C nem kollineáris, akkor a fenti összefüggés a szelőtétel alapján úgy is értelmezhető, hogy az $AA'C$ háromszög körülírt körét érinti az OC egyenes, azaz O a ponthármas körülírt köre C-beli érintőjének az AA' egyenessel való metszéspontja.

Az A, A', C pontok kollineárisak is lehetnek. Erre az esetre térjünk vissza a 3.15. feladat megoldása után!

3.15.

1. megoldás. Legyen a K kör középpontja O, sugara r, míg M a K kör tetszőleges, de az $AA' = OA$ egyenesre nem illeszkedő pontja. Állítjuk, hogy az MOA, $A'OM$ háromszögek hasonlóak. Valóban, e két háromszög O-nál fekvő szöge közös, míg az inverzió definíciója szerint $\frac{r}{OA} = \frac{OA'}{r}$ és ez már elég a hasonlósághoz. Az aránypárt most írjuk fel mind a három oldalra:

$$\frac{MA'}{AM} = \frac{r}{OA} = \frac{OA'}{r}.$$

Az adott szituációban az utóbbi két arány értéke állandó, tehát az első arány értéke is változatlan.

Külön számolással vagy a folytonosságra való hivatkozással igazolhatjuk, hogy az arány értéke a teljes K körön (az OA egyenessel való metszéspontokban) is ugyanaz az érték.

2. megoldás. Induljunk ki az inverzi szerkesztésének 3.1M. megoldásban leírt módszeréből. Ha A és B kicserélődik egymással a K körre vonatkozó inverziónál, akkor A és B egyike (az alábbiakban A) a K külső pontja és a belőle K-hoz húzott érintők U, V érintési pontjai közti szakasz felezőpontja a másik pont (B).

Messe az $OA = OB$ egyenes a K kört a T_1, T_2 pontokban. Az OA egyenesre való tengelyes szimmetria miatt a K kör UT_1, T_1V ívei egymással egyenlőek, csakúgy mint az UT_2, T_2V ívek. Az azonos ívekhez azonos kerületi illetve érintő szárú kerületi szögek tartoznak, tehát

$$BUT_1\sphericalangle \equiv T_1UA\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

és

$$BUT_2\sphericalangle \equiv T_2UA\sphericalangle \pmod{180^\circ}.$$

A Szögfelező-tétel és annak külső szögfeleőre vonatkozó variánsa értelmében tehát

$$\frac{BU}{UA} = \frac{BT_1}{T_1A} = \frac{BT_2}{T_2A}. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy azok a pontok, amelyeknek két adott ponttól való távolságának aránya rögzített érték, egy körön (ill. ha az arány 1, akkor a két pont felez?mer?legesén) helyezkednek el. A (1) összefüggés szerint a K kör T_1, T_2, U pontjainak az A, B pontoktól való távolságainak aránya azonos, tehát K minden pontjára azonos ez az arány. Ezt kellett igazolnunk.

A fordított állítást, miszerint *ha a K kör pontjainak az A, B pontoktól való távolságának aránya egy rögzített λ érték, akkor a K-ra vonatkozó inverzió kicseréli A-t és B-t* az Olvasóra hagyjuk.

3. megoldás. a)-b) Egyszerre kezeljük a két feladatrészt. A példának akkor van értelme, ha az A és a B pont – illetve A és A' – egymástól különböző.

Messe az AB egyenes a K kört a T_1, T_2 pontokban. Ha T_1T_2 nem átmérője K-nak, akkor A és B nem egymás képe a K körre vonatkozó inverziónál és K nem is Apollóniusz köre az A, B pontpárnak.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy T_1T_2 a K kör átmérője és T_1 elválasztja az A, B pontokat. Tekintsük a K kör T_1-től és T_2-től különböző C pontját és képezzük az $ACB\angle$ szög belső szögfelezőjének AB egyenessel vett H metszéspontját. A szögfelező-tétel értelmében C akkor és csakis akkor van rajta az A, B pontpár T_1-et is tartalmazó Apollóniusz körén, ha $H = T_1$.

A G.II.6.1. feladat eredményét fogjuk használni. Eszerint, ha az ABC háromszög L körülírt körének C-beli érintője az AB egyenest a P pontban metszi, akkor $PC = PH$, tehát a P középpontú PC sugarú kör átmegy H-n.

Ha A és B egymás képe a K körre vonatkozó inverziónál, akkor az L kör önmagára képződik ennél az inverziónál, így a 3.16. feladat állítása szerint az L kör C-beli érintője átmegy O-n, tehát $P = O$, $H = T_1$, így K valóban Apollóniusz kör.

Megfordítva, ha K az A, B pontpár Apollóniusz köre, akkor $H = T_1$, így a CH szakasz felezőmerőlegese – ami átmegy P-n – egyben a K kör CT_1 húrjának is felezőmerőlegese, így $P = O$. Ekkor OC érinti L-t C-ben tehát a 3.16. feladat állítása szerint L fix a K-ra vonatkozó inverziónál, azaz A és B kicserélődik. Q.E.D.

4. megoldás. A 3.15M3. elején leírtakból indulunk ki, tehát feltesszük, hogy az AB egyenes a K kör egy átmérő T_1, T_2 pontjaiban metszi. Ebben az esetben K pontosan akkor Apollóniusz köre az A, B pontpárnak, ha

$$\left|\frac{AT_1}{T_1B}\right| = \left|\frac{AT_2}{T_2B}\right| \tag{1}$$

és pontosan akkor cseréli ki a K-ra vonatkozó inverzió A-t és B-t, ha

$$OA \cdot OB = OT_1 \cdot OT_2, \tag{2}$$

ahol O a T_1T_2 szakasz felezőpontja, K középpontja. Számoljunk az OT_1 egyenesen irányított távolságokkal, tehát mintha a számegyenesen lennénk:

$$OT_1 = r, \qquad OT_2 = -r, \qquad OA = p, \qquad OB = q,$$

tehát

$$AT_1 = r - p, \qquad T_1B = q - r, \qquad AT_2 = -r - p, \qquad T_2B = q + r.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (1) egyenlet átszorzás után így írható:

$$|(r-p)(q+r)| = |(q-r)(-r-p)|,$$

azaz

$$\left|(r^2 - pq) + r(q-p)\right| = \left|(r^2 - pq) - r(q-p)\right|. \tag{3}$$

Mivel A és B különböző és K valódi kör, így az $r(q-p)$ mennyiség zérustól különböző. Ebben az esetben a (3) összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $r^2 = pq$, azaz ha (2) fennáll. Q.E.D.

5. megoldás. Illesszünk koordinátarendszert az ábrához úgy, hogy K legyen annak origó középpontú egységköre, tehát K egyenlete

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Ha A koordinátái $A(\xi;\eta)$, akkor K-ra vonatkozó A' inverzének koordinátái (lásd a 3.9. feladatot) $A'\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}; \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$. Fontos lesz, hogy A nincs rajta a K körön, tehát $\xi^2+\eta^2-1 \neq 0$. Az olyan C pontok alkotják az A, A' pontpár Apollóniusz körét, amelyekre valamely α^2 számmal

$$PA^2 = \alpha PA'^2. \tag{2}$$

Ezen Apollóniusz kör egyenlete tehát

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\alpha^2\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right). \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy ebből $\alpha^2=\xi^2+\eta^2$ esetén kiesnek a lineáris tagok és rendezés, majd a zérustól különböző $(\xi^2+\eta^2-1)$ mennyiséggel való leosztás után épp a K kör (1)-ben adott egyenletéhez jutunk, tehát K az A, B pontpár Apollóniusz köre.

Másrészt, ha az $A(\xi;\eta)$, $A'(\xi';\eta')$ pontpár (2) szerinti $\alpha\neq\pm1$ paraméterhez tartozó Apollóniusz körének egyenlete

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\alpha^2\left((x-\xi')^2+(y-\eta')^2\right)=0, \tag{4}$$

ami a zárójelek felbontása, rendezés és $(1-\alpha^2)$-tel való leosztás után

$$x^2+y^2-2x\frac{\xi-\alpha^2\xi'}{1-\alpha^2}-2y\frac{\eta-\alpha^2\eta'}{1-\alpha^2}-\frac{\alpha^2\xi'^2-\xi^2+\alpha^2\eta'^2-\eta^2}{1-\alpha^2}=0. \tag{5}$$

Ez az egyenlet pontosan akkor lesz az origó középpontú egységsugarú kör egyenlete, ha

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha^2\xi';\\ \eta &= \alpha^2\eta';\\ 1-\alpha^2 &= \alpha^2\xi'^2-\xi^2+\alpha^2\eta'^2-\eta^2.\end{aligned}$$

Ha az utolsó egyenletben ξ' és η' helyére beírjuk az első egyenletből leolvasható kifejezéseket, majd sorozzuk a két oldalt $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}$-tel, akkor kapjuk, hogy

$$\alpha^2=\xi^2+\eta^2,\quad \xi'=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad \eta'=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

tehát A' az A képe az egységkörre vonatkozó inverziónál. Q.E.D.

3.16. A) $\Longleftrightarrow$ B) illetve **A) $\Longleftrightarrow$ B')**

Legyen a két kör középpontja O_K és O_L, és a körök T metszéspontjában érintőjük e_K illetve e_L. K középpontjából az L-hez húzott érintő érintési pontja természetesen az L körön van, tehát pontosan akkor van a K körön is, ha az egyik ilyen érintési pont épp T.

Minden körben igaz, hogy az érintési ponthoz húzott sugár merőleges az érintőre: $O_KT\perp e_K$, $O_LT\perp e_L$.

Tehát a merőleges szárú szögek miatt

$$e_K\perp e_L \quad \Longleftrightarrow O_KT\perp O_LT. \tag{1}$$

Megfordítva, a kör egy pontján átmenő egyenes pontosan akkor érintő, ha merőleges a kör adott pontjához húzott sugárra. Tehát O_KT pontosan akkor érinti L-t, ha $O_LT\perp O_KT$. Az 1 ekvivalencia igazolja A) és B) illetve A) és B') ekvivalenciáját.

A) $\Longleftrightarrow$ C)

Az R_K, R_L, d mennyiségek az O_KTO_L háromszög oldalai. Tehát a Pitagorasz tétel és megfordítása szerint a $R_K^2+R_L^2-d^2=0$ egyenlet pontosan azt fejezi ki, hogy $O_KTO_L\angle=90°$, azaz azt, hogy az O_KO_L sugarak egymásra merőlegesek. Így újra (1) igazolja az ekvivalenciát.

B) $\Longrightarrow$ D)

Ha P az L kör tetszőleges pontja és az O_KP egyenes még Q-ban metszi L-t, akkor az O_K pont L-re vonatkozó hatványa az érintőn számolva $O_KT^2=R_K^2$, a szelőn számolva $O_KP\cdot O_KQ$ és a kettő egyenlősége épp azt fejezi ki, hogy P és Q kicserélődik a K-ra vonatkozó inverziónál.

D) $\Longrightarrow$ B)

A feltétel szerint van L-nek olyan P pontja, amely nem fix az inverziónál. Ha ezzel a P-vel az $O_K P$ egyenes még Q-ban metszi L-t, akkor szükségképpen P és Q kicserélődik a K-ra vonatkozó inverziónál, tehát

$$O_K P \cdot O_K Q = R_K^2. \tag{2}$$

A fenti összefüggés (és $P \neq Q$) azt is jelenti, hogy P és Q egyike a K körön kívül, a másik a körön belül van, tehát a P-n és Q-n átmenő L kör metszi K. Ha az egyik metszéspont T, akkor annak képe az inverziónál önmaga. Ha $O_K T$ érinti L-t, akkor készen vagyunk B) igazolásával. Ha nem érinti, hanem $O_K T$-nek L-lel van egy T-től T' metszéspontja is, akkor D) miatt T' képe is önmaga lesz a K-ra vonatkozó inverziónál, tehát $TO_K T'$ a K kör egy átmérője. Mivel L valódi kör (nem az átmérő egyenese) és konvex, így O_K az L belsejében van. Ez kizárja, hogy O_K centrumú pozitív (R_K^2) paraméterű inverzió önmagára képezze L-t.

D') $\Longleftrightarrow$ B), mint **D) $\Longleftrightarrow$ B)** fent.

D) $\Longleftrightarrow$ E)

A $P, Q \in L$ pontpár pontosan akkor cserélődik ki a K-ra vonatkozó inverziónál, ha $O_K P \cdot O_K Q = R_K^2$, de a szelőtétel miatt ez egyszerre teljesül az összes O_K-ból L-hez húzott szelőn, tehát pontosan akkor teljesül, ha L fix az inverziónál, de nem fix minden pontja.

D') $\Longleftrightarrow$ E), mint **D) $\Longleftrightarrow$ E)**

C) $\Longleftrightarrow$ F)

Az

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

egyenlet így írható át:

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}\right), \tag{3}$$

tehát ez olyan kör egyenlete, amelynek középpontja valamint sugarának négyzete

$$O\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{c}{2a}\right), \qquad R^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}. \tag{4}$$

Így

$$d^2 = O_1 O_2^2 = \left(\frac{b_K}{2a_K} - \frac{b_L}{2a_L}\right)^2 + \left(\frac{c_K}{2a_K} - \frac{c_L}{2a_L}\right)^2 = \frac{b_K^2}{4a_K^2} + \frac{b_L^2}{4a_L^2} + \frac{c_K^2}{4a_K^2} + \frac{c_L^2}{4a_L^2} - \frac{b_K b_L + c_K c_L}{2a_K a_L}, \tag{5}$$

$$R_K^2 + R_L^2 = \frac{b_K^2}{4a_K^2} + \frac{b_L^2}{4a_L^2} + \frac{c_K^2}{4a_K^2} + \frac{c_L^2}{4a_L^2} - \frac{d_K}{a_K} - \frac{d_L}{a_L}, \tag{6}$$

tehát

$$R_K^2 + R_L^2 - d^2 = \frac{-2a_K d_L + b_K b_L + c_K c_L - 2d_K a_L}{2a_K a_L}, \tag{7}$$

ami igazolja C) és F) ekvivalenciáját.

3.17.

1. megoldás. A k_A, k_B, k_C körök egyértelműségét igazolja a 3.14. feladat. A megoldást a 3.15. feladat állítására építjük.

Először megmutatjuk, hogy a k_A, k_B, k_C körök között van kettő, amelyek egymást két pontban metszik.

Abból, hogy a k_A körre vonatkozó inverzió kicseréli egymással a B, C pontokat következik, hogy B és C közül az egyik – a továbbiakban B – a k_A kör belső pontja, míg a másik – legyen ez C – a k_A körön kívül helyezkedik el. A k_C körre való inverzió kicseréli A-t és B-t, amiből következik, hogy a k_C kör valamely C_1 pontban metszi az AB szakaszt. Az A pont illeszkedik k_A-ra, B pedig k_B belső pontja, így a k_A kör konvexitása miatt C_1 is belső pontja k_A-nak. A C pont viszont külső pontja k_A-nak.

Ha a k_C kör két C_1 és C közti íve a k_A kör egy belső és külső pontját köti össze, így mindkét íven egy külső és belső pontok közti határpont, a k_A kör egy-egy pontja. A k_A, k_C körök tehát két pontban metszik egymást.

Ha P a k_A, k_C körök egyik metszéspontja, akkor a 3.15. feladat állítása szerint $P \in k_A$ miatt

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BA}{CA}, \tag{1}$$

míg $P \in k_C$ miatt

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}. \tag{2}$$

Az előbbi (1), (2) összefüggések szorzata

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BA}{BC}, \tag{3}$$

azaz P illeszkedik az A, C pontok $BA : BC$ arányú Apollóniusz körére, ami a 3.15. b) feladat állítása szerint a k_B kör.

Megmutattuk, hogy a k_A, k_C pontok bármelyik metszéspontjára igaz, hogy illeszkedik a k_B körre, amivel a feladat állítását igazoltuk.

2. megoldás. Példánk kapcsolatos a 9.6. feladattal. Itt lényegében annak állítását – az ottani b) részt is – igazoljuk. Használható annak a feladatnak az ábrája is.

Nem adunk új bizonyítást arra, hogy a k_A, k_B, k_C körök egyértelműek és arra, hogy közülük valamelyik kettő két pontban metszi egymást. Ezeket a 3.17M1. megoldás első részében láthattuk.

Használjuk még fel, hogy „az inverzió inverziótartó” (lásd a 3.6. feladatot)!

Jelölje a k_A, k_B, k_C körökre való invertálást rendre i_A, i_B, i_C. Legyen a k_B kör i_A-nál származó képe k'_B, az erre való inverziót pedig jelölje i'_B. Az inverzió inverziótartó, tehát abból, hogy

$$i_B(B) = B, \qquad i_B(A) = C, \qquad i_B(C) = A,$$

és abból, hogy

$$i_A(B) = C, \qquad i_A(A) = A, \qquad i_A(C) = B$$

következik, hogy

$$i'_B(C) = C, \qquad i'_B(A) = B, \qquad i'_B(B) = A.$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$i_C(C) = C, \qquad i_C(A) = B, \qquad i_C(B) = A,$$

és a 3.14. feladat megoldása szerint ezek az adatok már meghatározzák az inverzió alapkörét, tehát a k'_B kör megegyezik a k_C körrel.

Megmutattuk, hogy a k_A, k_B, k_C körök közül bármelyiket egy másikukra invertálva a harmadik kört kapjuk. Ennek alapján abból,hogy a három kör közül kettő két pontban metszi egymást már következik, hogy a harmadik is átmegy ezeken a pontokon és az inverzió (orientációváltós) szögtartása miatt az is közvetlenül adódik, hogy a körök közti szögek páronként egyenlőek.

3.18. Az $A'C' = B'C'$ reláció pontosan akkor teljesül, ha van olyan C'-n átmenő egyenes, amelyre való tükrözés az A', B' pontokat felcseréli. „Az inverzió inverziótartó" (lásd a 3.6. feladatot), tehát O pontosan akkor megfelelő centrum, ha $O \neq C$, de valamelyik O-n és C-n átmenő kögyenesre való inverzió kicseréli A-t és B-t.

Ezzel visszajutottunk a 3.14. feladathoz A keresett mértani hely az a C ponton átmenő kör (kihagyva belőle C-t), amelyre vonatkozó inverzió az A pontot a B-be viszi.

3.1. a) Legyen az inverzió alapköre i, centruma O, az adott egyenes e, két pontja A és B, az O merőleges vetülete e-n T, az O tükörképe e-re Q, a T, Q pontok valamint az e egyenes képe az i-re vonatkozó inverziónál a T', Q' pontok illetve az e' kör.

Az e' kör az OT' szakasz Thalesz köre, ennek középpontja Q', hiszen $\frac{OQ}{OT} = 2$, így $\frac{OQ'}{OT'} = \frac{1}{2}$.

A Q pont az A ill. B középpontú O-n átmenő körök O-tól különböző metszéspontja, így könnyen szerkeszthető. Ezek után Q' a 3.2. feladat megoldása alapján szerkeszthető és az e' kör is adottnak tekinthető.

3.1. a) Nem igaz. Két koncentrikus körhöz nincs ilyen kör. Minden más esetben van ilyen kör, a két kör hatványvonalán választhatunk olyan pontot, amely mind a két körön kívül esik. Ez a pont a merőleges kör középpontja, sugara az innen az adott körökhöz húzott érintő hossza.

b) Igaz. Két nem koncentrikus kör esetén ezt a)-ban láttuk. Két koncentrikus kör esetén bármelyik egyenes jó, amely átmegy a középponton. Kör és egyenes esetén megfelelő a kör középpontjából az egyenesre bocsájtott merőleges egyenes, de bármely olyan kör is megfelelő, amelynek középpontja az adott egyenesen van, sugara pedig a középpontból az adott körhöz húzott érintő hosszával egyezik meg. Két metsző egyenesre merőlegesek a metszéspontjuk köré, mint középpont köré írt körök. Párhuzamos egyenespárhoz végtelen sok rájuk merőleges egyenest találhatunk.

3.2. e) A szerkesztendő kör középpontjának hatványa a három kör mindegyikére egyenlő. Ez a középpont tehát illeszkedik a körök közül bármelyik kettő hatványvonalára.

Ha két ilyen hatványvonal metszi egymást, akkor a metszéspont megfelelő középpontnak és más középpont nem is lehetséges. A kör sugara a középpontból a három kör bármelyikéhez húzott érintő hossza. (Ha nincs érintő, a hatványpont a körök belső pontja, akkor a szerkesztendő kör sem létezik.)

Ha két ilyen hatványvonal párhuzamos, akkor nem létezik a keresett kör.

Ha két hatványvonal egybeesik, akkor a közös hatványvonal bármelyik olyan pontja megfelelő középpont, amelyik a körök bármelyikének (és így mindegyiknek) határán vagy külsejében van.

a) A hatványvonalak metszéspontja, a három kör hatványpontja a körökön kívül helyezkedik el, tehát van ilyen kör.

b) A hatványpont a körök belső pontja, most nincs megfelelő kör.

c) A körpárok hatványvonalai egybeesnek (a három kör egy körsor három tagja), végtelen sok megfelelő kör van.

d) A hatványvonalak párhuzamosak, nincs hatványpont, merőleges kör sincs. Egyenes viszont van, a közös centrális mindegyik körre merőleges.

f) Ha a körpárok hatványvonalai párhuzamosak egymással, akkor a körök középpontjai egy egyenesen vannak. Ebben az esetben a közös centrálisra való tükrözés önmagára képezi mindhárom kört.

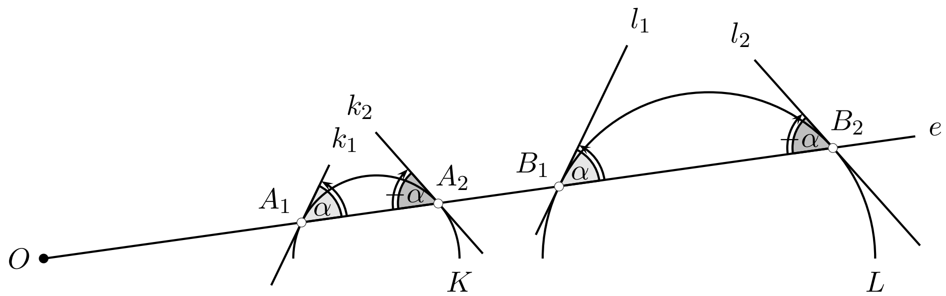
Minden más esetben van olyan pont, amelynek mindegyik körre azonos a hatványa. Ha a három kör középpontja nincs egy egyenesen, akkor egyetlen ilyen pont van. Ha egy egyenesen vannak a középpontok, akkor a páronkénti hatványvonalak vagy párhuzamosak (ezt az előbb vizsgáltuk) vagy egybeesnek a hatványvonalak (a körök egy körsor elemei), ilyenkor végtelen sok megfelelő pont van.

Ha ez – az egyik ilyen – H és H közös hatványa a három körre λ, akkor a H centrumú λ paraméterű inverzió önmagára képezi a három kört. Ha $\lambda > 0$, akkor ez egy körre vonatkozó inverzió, ha $\lambda < 0$, akkor az inverziónak nincs alapköre, azaz pontonként fix köre. Ha a három körnek közös a hatványvonala, akkor ezen van olyan pont is, amelynek pozitív a három körre vonatkozó hatványa.

Ha csak $\lambda = 0$ valósul meg, tehát a három körnek egy közös pontja van, amelyben nem érintik egymást, akkor és csakis akkor nincs megfelelő inverzió, se tükrözés.

3.3. a) Tegyük fel, hogy az O centrumú λ paraméterű i inverzió egymásba képezi az K, L köröket. Ez az O-n átmenő tetszőleges e egyenesen azt jelenti, hogy ha e a K kört az A_1, A_2, az L kört a B_1, B_2 pontokban metszi, akkor i az A_1, A_2 pontokat a B_1, B_2 pontokba képezi.

Alább igazolni fogjuk, hogy O a K, L körök hasonlósági pontja. Ehhez azt fogjuk felhasználni, hogy az inverzió és a középpontos nagyítás is önmagára képezi az e egyenest, és mindkét transzformáció szögtartó, de míg a nagyítás irányítástartó, addig az inverzió megfordítja az irányítást. (Lásd az 1. ábrát)



3.3M.1. ábra.

Tegyük fel, hogy $i(A_1) = B_2$ és $i(A_2) = B_1$ azaz

$$OA_1 \cdot OB_2 = OA_2 \cdot OB_1 = \lambda. \tag{1}$$

Ebből

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1}, \tag{2}$$

tehát egy megfelelő arányú, O centrumú χ középpontos nagyítás az A_1 pontot B_1-be, egyúttal A_2-t B_2-be viszi.

Jelölje a K kör A_1-, ill. A_2-beli érintőjét k_1 ill. k_2, az L kör érintőit B_1-ben ill. B_2-ben l_1 ill. l_2. Az egyenes és a kör metszési tulajdonsága szerint irányított szögekkel számolva

$$ek_1\sphericalangle \equiv -ek_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}; \qquad el_1\sphericalangle \equiv -el_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}. \tag{3}$$

Az inverzió megtartja a szöget, de az irányítását megfordítja, így

$$ek_1\sphericalangle \equiv -el_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}; \qquad ek_2\sphericalangle \equiv -el_1\sphericalangle \pmod{180^{circ}}. \tag{4}$$

A (3), (4) relációk összevetéséből következik, hogy

$$ek_1\sphericalangle \equiv el_1\sphericalangle \pmod{180^{circ}}; \qquad ek_2\sphericalangle \equiv el_2\sphericalangle \pmod{180^{circ}}. \tag{5}$$

A χ középpontos nagyítás a K kör A_1, A_2 pontjait az L kör B_1, B_2 pontjaiba képezi és a K-kör $\chi(K)$ képének érintői B_1-ben és B_2-ben megegyeznek az L kör érintőivel. Ebből következik, hogy $\chi(K) = L$, azaz O a K, L körök hasonlósági pontja.

Megfordítva, ha O a K, L körök hasonlósági pontja, és a hasonlóság arány μ, azaz az O-t tartalmazó e egyenes és a K, L körök $A_1, A_2 \in K$, $B_1, B_2 \in L$ metszéspontjaira $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \mu$, akkor

$$OA_2 \cdot OB_1 = OA_1 \cdot OB_2 = \mu OA_1 \cdot OA_2,$$

tehát ha λ az O pont K körre vonatkozó hatványának μ-szöröse, akkor az O centrumú λ arányú inverzió felcseréli egymással a K, L köröket.

Ha a K, L körök nem koncentrikusak és nem is azonos sugarúak, akkor két különböző pontból nagyítható K az L-be, az egyik nagyítás aránya (külső hasonlósági pont) pozitív a másik aránya negatív (belső hasonlósági pont). Az előbbihez tartozó inverzió egy körre vonatkozó inverzió ($\lambda > 0$), a másik inverziónak nincsenek fixpontjai $\lambda < 0$.

Ha a K, L körök koncentrikusak, akkor közös középpontjukból kétféleképpen invertálhatók egymásba: az egyik paramétere pozitív, a másiké negatív.

Ha a K, L körök nem koncentrikusak, de azonos sugarúak, akkor csak egy negatív paraméterű inverzióval képezhetők egymásra, a pozitív paraméterű inverzió tengelyes tükrözéssé fajul.

b) Pontosan akkor van ilyen O centrumú inverzió, ha O hatványa a két adott körre egyenlő, de nem zérus. Ez azt jelenti, hogy a két adott kör hatványvonalának a körök metszéspontjaitól különböző pontjai a megfelelő centrumok.

Megjegyezzük, hogy – metsző körök esetén – a hatványvonalnak a körök belsejébe eső pontjai olyan – az adott köröket fixen hagyó – inverziók centrumai, amelyek paramétere negatív, ezek tehát nem „körre vonatkozó inverziók”.

3.4. Ez a középpont a három hozzáírt kör hatványpontja (lásd a 3.2. feladatot).

Vizsgáljuk most az AB oldalhoz kifelé írt i_C hozzáírt és az AC oldal külső oldalán található i_B hozzáírt körök h_A hatványvonalát. Ez a hatványvonal merőleges a két kör centrálisára, ami az ABC háromszög A csúcsánál található szögének külső szögfelezője. Tehát h_A párhuzamos a $BAC\angle$ belső szögfelezőjével.

Tekintsük most a BC oldalegyenest, amely a T_C pontban érinti az i_C kört és T_B-ben i_B-t. Ismeretes, hogy $CT_C = BT_B = s$ a háromszög félkerülete. Emiatt $BT_C = CT_B = s - a$, ahol $a = BC$. Ez azt jelenti, hogy a két kör T_BT_C közös érintőjének felezőpontja a BC oldal F_A felezőpontja.

Így $F_A \in h_A$, tehát h_A az F_A ponton át a háromszög A-nál fekvő szögének belső szögfelezőjével párhuzamosan húzott egyenes, azaz az az ABC háromszög $F_BF_AF_C$ középháromszögének szögfelezője. A három hozzáírt kör hatványpontja tehát az ABC háromszög középháromszögében a beírt kör középpontja.

Ez a pont nyilvánvalóan kívül van a hozzáírt körökön, tehát a rájuk vonatkozó egyenlő hatványa pozitív mennyiség. Ha e mennyiség gyökével, mint sugárral kört rajzolunk a hatványpont köré, akkor az adott hozzáírt körök mindegyikére merőleges kört kapunk.

3.5. Általában 8 olyan kögyenes van, amely érint három olyan kört, amelyek közül semelyik kettő sem érinti egymást. Ha ez a három kör kölcsönösen egymás külsejében van, akkor ez a 8 kör így írható le:

(i) 1 olyan kör van, amely mindegyik adott kör külsejében van és mindegyik adott kör is az ő külsejében van (nevezetes, hogy az adott esetben ez épp a háromszög Feuerbach köre);

(ii) 3 olyan kör van, amely az adott körök közül egyet a belsejében, kettőt pedig a külsejében tartalmaz. Ezeket keressük;

(iii) 3 olyan kör van, amely az adott körök közül kettőt a belsejében, egyet pedig a külsejében tartalmaz. Most ezek – vagy az előbbiek, ez még nem látszik – három egyenessé, az adott háromszög oldalegyeneseivé fajul;

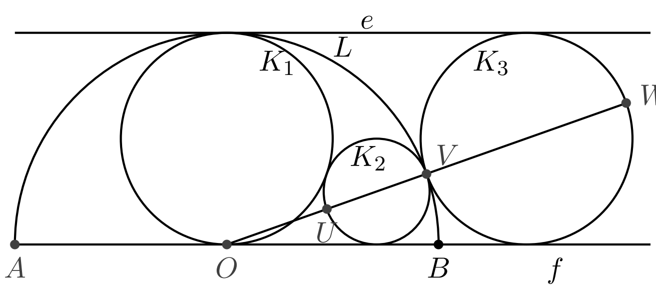
(iv) 1 olyan kör van, amely mindegyik adott kört a belsejében tartalmazza.

Van egy olyan h kör, amely merőleges a háromszög három hozzáírt körére. A 3.4. feladatban láttuk, hogy ennek középpontja az adott ABC háromszög $F_AF_BF_C$ középháromszöge beírt körének H középpontja. A h körre vonatkozó inverzió önmagára képezi az ABC háromszög hozzáírt köreit, így egymásra képezi az azokat érintő (i)-(iv) kögyeneseket.

A BC oldalegyenes egyik oldalán van az AB és a BC oldalhoz hozzáírt i_C és i_B kör és itt van a teljes ABC háromszög is a H ponttal együtt, míg a BC egyenes másik oldalán van a BC oldalhoz hozzáírt i_A kör. A h-ra vonatkozó inverzió ezért a BC egyenest egy olyan m_A körbe képezi, amely belsejében tartalmazza az i_A kört és a külsejében az i_B, i_C köröket. Ráadásul, ez az m_A kör, lévén egy egyenes inverz képe, átmegy a h inverzió H centrumán is. Ugyanígy kaphatók a keresett m_B, m_C körök a háromszög CA, AB egyeneseinek h inverziónál származó képeiként és ugyanezért ők is mind átmennek az inverzió H centrumán.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

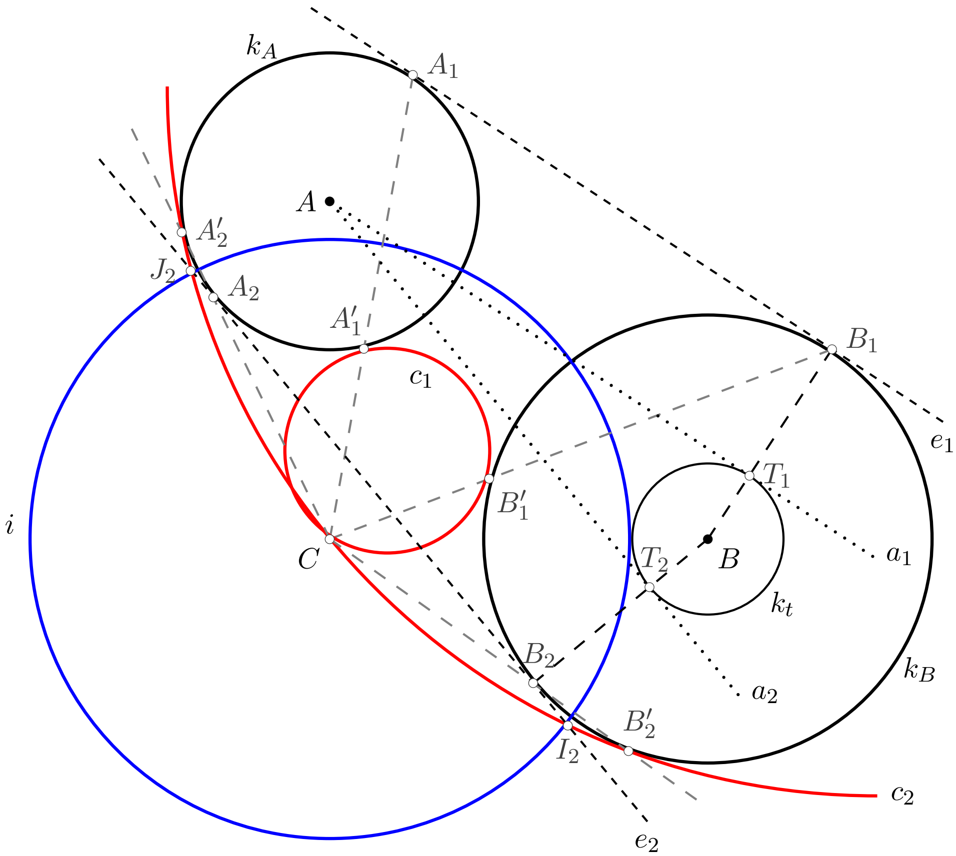
3.1. Legyen O L középpontja, legyen e egyenes az az AB-vel párhuzamos egyenes, mely érinti L-t. Ekkor, ha az érintési pont C, akkor ezen átmegy K_1-is. Legyen K_3 az a K_1-n kívüli kör, mely érinti AB-t, e-t, és L-t is, és B-hez közelebb van, mint A-hoz. Legyen továbbá U, V pontok K_2-nek, ill. az annak középpontján és az O ponton átmenő egyenesnek a metszéspontjai, és legyenek V_1, W pontok K_3-nak, ill. annak középpontján és az O-n átmenő egyenesnek metszéspontja (lásd az 1. ábrát). Vizsgáljuk az L határolókörére való invertálást! Ez az O-n átmenő körökből egyenest csinál, az alapkör pontjait helybenhagyja, és érintő görbékből érintőt csinál. Ezek alapján K_1-ből e lesz, és minden egyéb körből kört csinál, tehát K_2-ből AB-t (mert ez fixegyenes), e-t (K_1 képét), illetve L-t érintő kör lesz. Ilyenből csak kettő van, K_3, és ennek tükörképe AB felezőmerőlgesére, e kettő közül nyilván K_3 lesz. Innen az is kiderül, hogy $V = V_1$, azaz O, U, V, W pontok egy egyenesen vannak. Nyilván UV, ill VW a K_2, ill K_3 körök átmérői, de K_3 átmérője $d/2$, mert ennyi a távolság AB, ill. e egyenesek között, amik közé írtuk K_3-at. Innen $d/2 = OV = VW$, de W inverz képe nyilván U, ezért $OW \cdot OU = OV^2$, de $OW = OV + VW = d$, innen $d \cdot OU = (d/2)^2$ innen $OU = d/4$, és $UV = OV - OU = d/2 - d/4 = d/4$. Tehát K_3 sugara $d/8$.



3.1M.1. ábra.

3.2. Alkalmazzunk egy C centrumú i inverziót! Mivel a C pont hatványa az A középpontú k_A körre és a B középpontú k_B körre egyaránt 16, így érdemes a C középpontú 4 egység sugarú i körre invertálni, ennél k_A és k_B is önmagába megy át. Az inverzió azért hasznos, mert a C-n átmenő körök képei egyenesek. Feladatunk tehát abból áll, hogy megszerkesszük a k_A és k_B körök képét – ezzel készen is vagyunk, $k'_A = k_A$, $k'_B = k_B$ – majd megszerkesszük a képkörök érintőegyeneseit – e_1, e_2 a közös külső érintők lesznek, míg f_1, f_2 a belső érintők – végül invertáljuk a négy érintőt i-re, ezek a képek lesznek a C-n átmenő k_A-t és k_B érintő körök.

A **??**. ábrán követhető a szerkesztés a külső érintőkkel és a **??**. ábrán a belső érintőkkel.



3.2M.1. ábra.

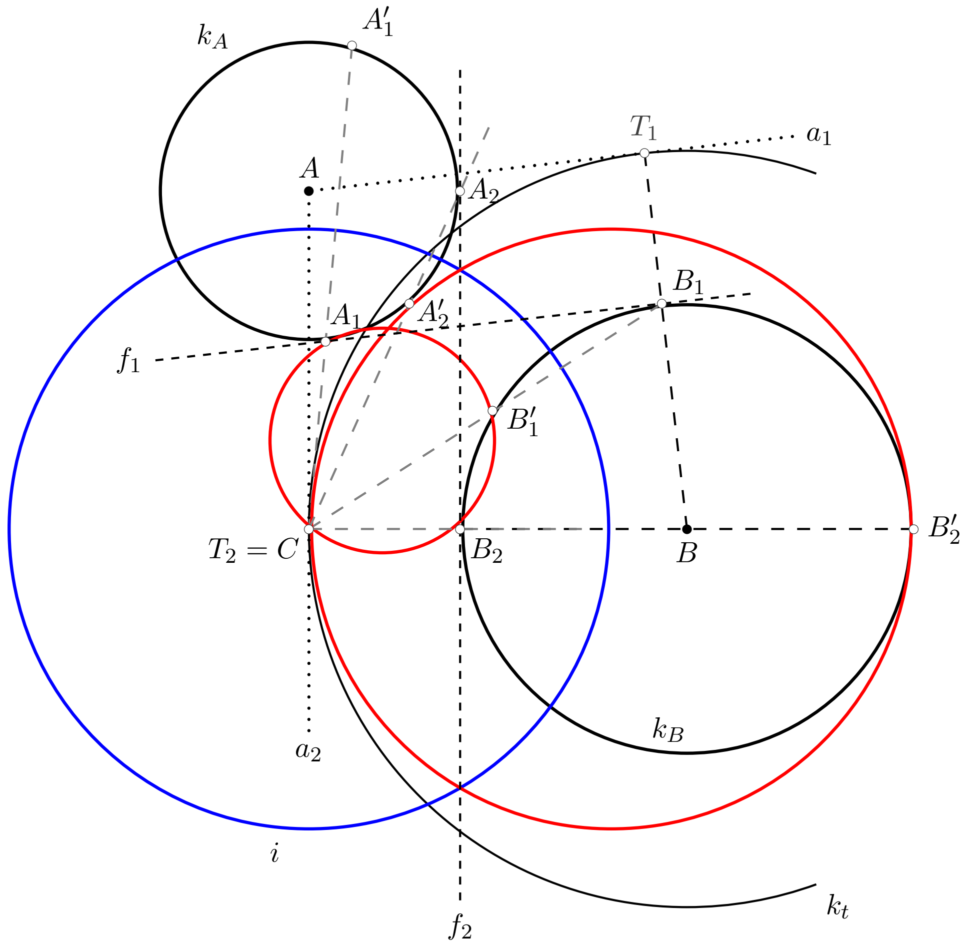
A k_A, K_B körök közös külső érintőinek szerkesztéséhez k_B sugarát csökkentettük k_A sugarával, így kaptuk a k_t kört. Ehhez megszerkesztettük az A pontból az $AT_1 = a_1$, $AT_2 = a_2$ érintőegyeneseket. Az ezekre B-ből merőlegesen állított félegyenesek kimetszették k_B-ből a valódi külső érintők B_1, B_2 érintési pontjait. Az ezeken átmenő a_1-gyel illetve a_2-vel párhuzamos egyenes e_1 és e_2 a két kör közös külső érintője, rajtuk A_1, illetve A_2 a k_A kör érintési pontja.

A CA_1 egyenes és a k_A kör másik metszéspontja A_1' ez a pont az A_1 képe az i inverziónál. Hasonlóan szerkeszthetők az A_2, B_1, B_2 pontok A_2', B_1', B_2' inverz képei. A szerkesztendő körök az e_1, e_2 egyenesek inverz képei, tehát a $CA_1'B_1'$, $CA_2'B_2'$ ponthármasok körülírt körei. Természetesen e_2 képe átmegy az e_2 egyenes és az i kör I_2, J_2 metszéspontjain is.

3.3. a) A 3.2. feladat megoldásának mintájára járhatunk el. Az adott C pont egy i inverzió centruma. A szerkesztendő körök i-nél származó képeit szerkesztjük meg, azaz olyan egyeneseket, amelyek érintik az adott körök i-nél származó képeit.

3.4. Invertáljunk egy A középpontú körre, pl a B-n átmenő i körre (lásd az 1. ábrát)! A k kör képe egy B-n átmenő k' egyenes, a k_A kör képe egy k'-vel párhuzamos k'_A egyenes, míg k_B képe egy k'-t B-ben érintő kör, amely valamely M' pontban érinti k'_A-t. Az M' pont a k'-re B-ben állított merőleges egyenesen, m'-n lehet, és ott bárhol. Az m' egyenes az A-n és B-n is áthaladó k-ra merőleges m kör, ez a keresett mértani hely.

3.5.



3.2M.2. ábra.

1. megoldás. A 9.2M1. megoldás lemmája szerint az E_KE_LA, F_KF_LA háromszögek körülírt körei pontosan akkor érintik egymást A-ban, ha

$$E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle \equiv E_KAF_K\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{1}$$

Az E_KAF_K háromszögben

$$E_KAF_K\sphericalangle \equiv 180^\circ - F_KE_KA\sphericalangle - AF_KE_K\sphericalangle \pmod{180^\circ} \tag{2}$$

és a K körben az F_KA, E_KA húr kerületi szögei egyenlők az érintő szárú kerületi szögekkel, azaz

$$F_KE_KA\sphericalangle \equiv F_LF_KA\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \qquad AF_KE_K\sphericalangle \equiv AE_KE_L\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{3}$$

így

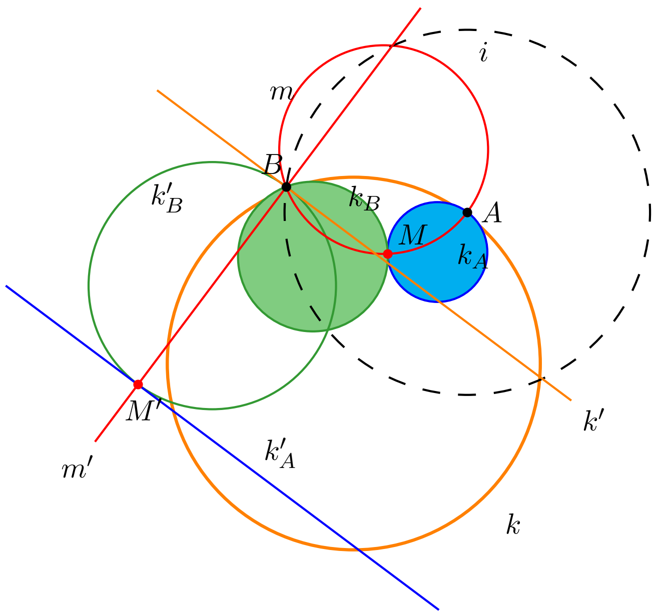
$$E_KAF_K\sphericalangle \equiv 180^\circ - \frac{F_LF_KE_K\sphericalangle + F_KE_KE_L\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}. \tag{4}$$

Ehhez hasonlóan, az L kör AE_L, F_LA húrjainak kerületi és érintő szárú kerületi szögei:

$$E_KE_LA\sphericalangle \equiv E_LF_LA\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \qquad AF_LF_K\sphericalangle \equiv AE_LF_L\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

és így

$$E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle \equiv \frac{E_KE_LF_L\sphericalangle + E_LF_LF_K\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}. \tag{6}$$



3.4M.1. ábra.

$$\begin{aligned} & E_K E_L A\sphericalangle + AF_L F_K\sphericalangle - E_K AF_K\sphericalangle \equiv \\ \equiv\ & \tfrac{E_K E_L F_L\sphericalangle + E_L F_L F_K\sphericalangle + F_L F_K E_K\sphericalangle + F_K E_K E_L\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}, \end{aligned} \tag{7}$$

de itt ajobb oldalon az $E_K E_L F_L F_K$ négyszög belső szögösszegének fele áll, így a 7 egyenlet igazolja az 1 relációt, tehát a két kör érinti egymást A-ban.

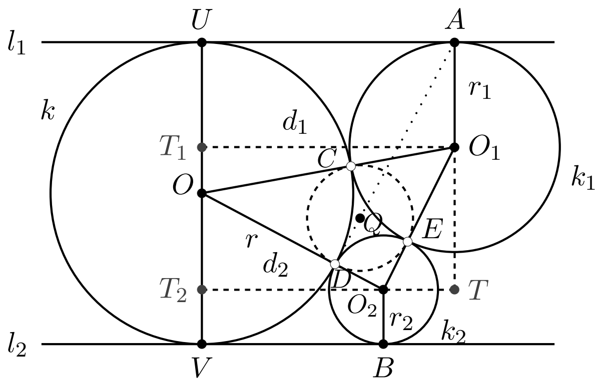
2. megoldás. Alkalmazzunk A centrumú inverziót. A K, L körök képe egy-egy egyenes lesz – K' és L' –, amelyek metszik egymást (a K, L körök másik metszéspontjának képében).

Az e, f közös érintőegyenesek képe a K' és az L' egyenest is érintő e' és f' kör lesz. Ez a két kör a K', L' egyenesek által határolt négy szögtartomány közül ugyanabban lesz, hiszen az e és az f egyenes is a K, L körök által meghatározott négy tartomány közül ugyanabban - a végtelen nagyban van. Az azonos szögtartományban a szögszárakat érintő körök egymásból egy olyan nagyítással kaphatók, amelynek középpontja a szög csúcsa. Így az egyik kör és a két szár érintési pontját összekötő egyenes párhuzamos a másik kör és a két szár érintési pontjait összekötő egyenessel. Ez a két egyenes épp a $E_K E_L A$, $F_K F_L A$ körök inverziónál származó képe, tehát ezek a körök valóban érintik egymást A-ban.

3.6.

1. megoldás. Jelölje a k kör érintési pontját l_1-en ill. l_2-n U ill. V, a k, k_1, k_2 körök középpontjait rendre O, O_1 és O_2, az O_1-ből ill. O_2-ből UV-re bocsájtott merőleges talppontját T_1 ill. T_2, az O_2T_2, AO_1 egyenesek metszéspontját T, az O_1T_1, O_2T_2 szakaszok hosszát d_1 ill. d_2. (Lásd a 2. ábrát!)

A G, D, E érintési pontok rendre az érintkező körpárok O_1O, O_2O, O_1O_2 centrálisaira esnek. A G, D, E pontok úgy osztják fel az O_1O_2O háromszög oldalait, hogy a csúcsok felőli részek egymással egyenlőek: $O_1G = O_1E$, $O_2E = O_2D$, $OD = OG$. Könnyű igazolni, hogy csak egyféleképpen oszthatók fel így a háromszög oldalai és, hogy az O_1O_2O háromszög beírt körének érintési pontjai is így osztják fel az oldalakat. Tehát a GP, D, E pontokon átmenő kör az O_1O_2O háromszög beírt köre. A feladat igazolásához ezek után elég megmutatni, hogy $DA \perp OO_2$ és ezzel analóg módon $CB \perp OO_1$.



3.6M1.2. ábra.

Ha adott két pont, itt O és O_2, akkor kereshetjük azon P pontok halmazát, amelyeknek a két ponttól való távolsága négyzetének különbsége előre adott állandóval egyenlő: $OP^2 - O_2P^2 = OD^2 - O_2D^2$. Ismeretes, hogy ez a mértani hely a két adott pontra merőleges egyenes. Ebből kifolyólag elég igazolnunk, hogy ábránkon

$$OA^2 - O_2A^2 = OD^2 - O_2D^2. \tag{1}$$

A (1) relációban az OA^2, O_2A^2 mennyiségek kiszámolásához az OUA, O_2TA derékszögű háromszögeket használjuk. Pitagorasz tétele szerint:

$$\begin{aligned} OA^2 &= r^2 + d_1^2 \\ O_2A^2 &= (2r - r_2)^2 + (d_1 - d_2)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

így

$$OA^2 - O_2A^2 = 4rr_2 + 2d_1d_2 - 3r^2 - r_2^2 - d_2^2. \tag{3}$$

Az O_1T_1O, O_2T_2O, O_1TO_2 derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$\begin{aligned} (r_1 + r)^2 &= d_1^2 + (r_1 + r)^2 \\ (r_2 + r)^2 &= d_2^2 + (r_2 + r)^2 \\ (r_1 + r_2)^2 &= (d_1 - d_2)^2 + (2r - r_1 - r_2)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Az első két egyenletből

$$\begin{aligned} 4rr_1 &= d_1^2 \\ 4rr_2 &= d_2^2, \end{aligned} \tag{5}$$

míg a harmadikból ezek felhasználásával

$$2r^2 = d_1d_2. \tag{6}$$

Az (5)-(6) összefüggések alapján (3) így írható:

$$OA^2 - O_2A^2 = 4rr_2 + 4r^2 - 3r^2 - r_2^2 - 4rr_2 = r^2 - r_2^2 = OD^2 - O_2D^2. \tag{7}$$

Épp ezt akartuk igazolni.

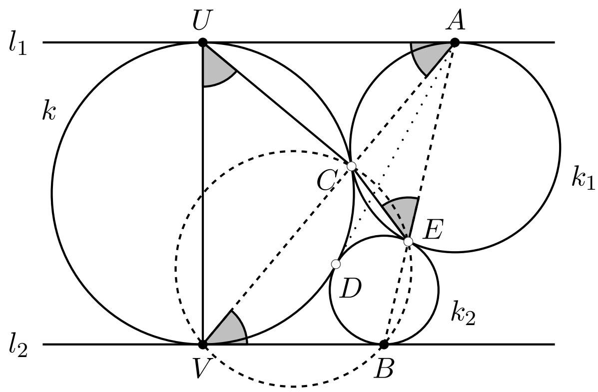
2. megoldás. Lemma L.4.1. Ha a feladat ábráján V az l_2 egyenes és a k kör érintési pontja, míg U az l_1 és k érintési pontja, akkor V, C és A egy egyenesen vannak, U, C és B is egy egyenesen vannak, sőt B, E és A is egy egyenesen vannak.

A lemma igazolása A k_1, k körök belső hasonlósági pontja az érintési pontjuk, C. Ebből a pontból a k_1 kör k-ba nagyítható. Ennél a nagyításnál a k_1 kör l_1 érintőjének képe a k kör egy l_1-gyel párhuzamos érintője lesz, ami épp l_2. Így az A érintési pont képe a V érintési pont, tehát eza két pont egy egyenesen van C-vel. Hasonlóan igazolható a másik két ponthármas kollinearitása. Q.E.D.

Lemma L.4.2. A feladat ábráján az AD egyenes érinti a k, k_2 köröket.

A lemma igazolása

A k, k_2 körök közös pontbeli közös érintője a két kör hatványvonala, tehát mindössze annyit kell belátnunk, hogy az A pontnak a k, k_2 körökre vonatkozó hatványa egyenlő. Lemma L.4.1. szerint a k kör és az l_2 egyenes V érintési pontja az AC egyenesen van. Az A pont k-ra vonatkozó hatványa $AC \cdot AV$ és ehhez hasonlóan A-nak a k_2-re vonatkozó hatványa $AE \cdot AB$, így azt kell igazolnunk, hogy $AC \cdot AV = AE \cdot AB$, tehát azt, hogy a C, V, B, E pontok egy körön vannak.(Lásd a 2. ábrát!)



3.6M2.2. ábra.

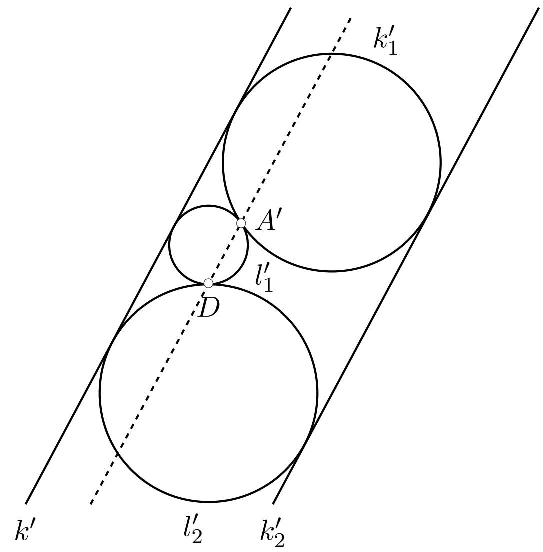
A k_1 körben az AC húr kerületi szöge $\alpha = CEA\angle$, míg a húr érintő szárú kerületi szöge $\alpha = CAU\angle$. A $CAU\angle$ szög váltószöge a $CVB\angle$, így $\alpha = CEA\angle = CVB\angle$ tehát $CEBV$ valóban húrnégyszög, a lemmát igazoltuk. Q.E.D.

A lemmából gyorsan következik a feladat állítása. AD érinti k-t és k_2-t és ehhez hasonlóan BC érinti k-t és k_1-et. Ekkor Q rajta van a k, k_1 és a k, k_2 körök közös érintőjén, azaz hatványvonalán is, így Q a k, k_1, k_2 körök hatványpontja. Így rajta van k_1 és k_2 E-n átmenő közös érintőjén is, azaz QE érinti k_1 és k_2 köröket. Ekkor viszont $QC = QE$ és $QD = QE$, mivel a QC, QE egyenesek a k_1 kör, QD, QE egyenesek pedig a k_2 kör érintői a Q pontból. Így $QC = QD = QE$, tehát a feladat állítását igazoltuk.

3. megoldás. A 3.6M2. megoldásban szerepl? Lemma L.4.2-re adunk új bizonyítást. Invertáljuk az ábrát D-re! Ekkor a k és k_2 érintő körök képei a k' és k_2' párhuzamos egyenesek, l_1 és l_2 képei az l_1' és l_2' egymást D-ben érintő körök, k_1 képe k_1' kör, A képe A'. (Lásd a 2. ábrát!)

Ekkor DA' nyilván párhuzamos k'-vel és k_2'-vel. Ezért DA' invertált képe, a DA egyenes is érinti a k, k_2 köröket, ahogy a lemma is állította. Q.E.D.

4. megoldás. A 3.6M2. megoldásban közölt Lemma L.4.2-re adunk még egy bizonyítást. Tekintsük a k, k_2 körök D-beli közös érintőegyenesének az l_1 egyenessel vett A' metszéspontját. (Azt



3.6M3.2. ábra.

kell igazolnunk, hogy A' megegyezik A-val.) Invertáljuk az ábrát az A' középpontú D-n átmenő i körre!

Ennél az inverziónál az l_1, k, k_2 alakzatok képe önmaga. Az l_2 egyenes érinti az l_1, k, k_2 alakzatokat, tehát l_2 képe olyan B'-n átmenő kör, amely érinti l_1, k, k_2 mindegyikét. Csak egy olyan kör van– ez szemléletesen „nyilvánvaló”, de alább igazoljuk is–, amely érinti a három alakzatot. A k_1 kör egy ilyen kör, $B' = B$.

Lemma L.4.4. Ha a k kör érinti az egymással párhuzamos l_1, l_2 egyeneseket és a k_2 kör érint l_2-t valamint k-t kívülről, akkor egyetlen egy olyan k_1 kör van, amely érinti l_1-et és k-t, valamint k_2-t kívülről.

A Lemma L.4.4. bizonyításának vázlata

A k-t és l_1-et érintő körök középpontjai és a k-t és l_2-t érintő körök középpontjai is egy-egy parabolát alkotnak. Ráadásul ez a két parabola párhuzamos tengelyű, azonos állású és paraméterük (a fókuszuk és a vezéregyenesük távolsága is) egyenlő. Metszéspontjaik számítása egy

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& ax^2 + b_1x + c_1 \\ y &=& ax^2 + b_2x + c_2 \end{array}\right\}$$

alakú egyenletrendszer megoldására vezet, amelynek legfeljebb megoldása van.

3.7.

1. megoldás. Jelölje a k kör e átmérőegyenesére merőleges átmérőt HI, ahol I azon a félkörlapon van, amelybe a köröket írjuk, míg H a másikon. Jelölje továbbá O_k a k kör középpontját r_k pedig a sugarát.

a) Tekintsük a HI átmérőre I-ben állított d merőleges egyenest. Ha O egy olyan r sugarú kör középpontja, amely E-ben érinti e-t és K-ban k-t, akkor a TO egyenes a $T_d = TO \cap d$ pontban merőleges d-re. Mivel

$$O_kO = O_kK - OK = r_k - r \tag{1}$$

és

$$T_dO = T_dT - OT = r_k - r, \tag{2}$$

így $O_kO = T_dO$ azaz O egy olyan parabolán helyezkedik el, amelynek fókusza O_k, vezéregyenese d. Ezen a parabolán vannak a k kör és az e egyenes A, B metszéspontjai is – a k-t és e-t érintő0 sugarú körök középpontjai. A félkörlapon elhelyezkedő körök középpontjai csak a parabola A és B közti ívén helyezkedhetnek el, ott viszont bárhol, hiszen ha ott egy O pontra és e-re, d-re vonatkozó vetületeire teljesülnek az 1, 2 relációk, akkor az érintőkört is könnyen megrajzolhatjuk O köré.

b) Állítjuk, hogy a H pont megfelelő. A k-t és e-t érintő o kör érintse k-t K-ban, e-t E-ben. A K pont az o, k körök hasonlósági pontja, egy K centrumú pozitív arányú nagyítás képezi o-t k-ba. Ennél a nagyításnál az o-kör E-beli érintője, azaz e, a k kör egy olyan érintőjébe megy át, amely e-vel párhuzamos, de e-től nem a K-t tartalmazó félsíkban helyezkedik el, azaz nem d. Az egyetlen ilyen érintő a H-beli érintő, azaz K, E és H valóban egy egyenesen vannak.

c) A k körben a HA húr kerületi szöge 45°:

$$HKA\angle = EKA\angle = 45°,$$

így az AEK háromszög k_{EA} körülírt körében az EA húr kerületi szöge is 45°. Másrészt $HAE\angle = 45°$, tehát AH a k_{EA} kör EA húrjának érintő szárú kerületi szöge, azaz HA érinti ezt a kört. A szelőtétel szerint $HA^2 = HE \cdot H_K$, ahol a HA független az o körtől, tehát H az összes szóbajövőo kör hatványpontja. így bármelyik két érintkező kör közös pontbeli közös érintője (hatványvonala) átmegy H-n is hossza HA. Az érintési pontok a H középpontú A-n átmenő körön helyezkednek el.

Ha T e kör A és B közti rövidebbik ívének tetszőleges pontja, akkor tekintsük a TH és e egyenesek által határolt, de az e egyenes H-val ellentétes oldalán található két szögtartományt. írjunk ezekbe olyan kört, amely érinti k-t és k belsejében van. Az előzőlevezetés szerint ezek a HT szárat egy-egy H-tól HA távolságra levő pontban, tehát T-ben érintik, azaz egymást is T-ben érintik.

2. megoldás. **b)** Jelölje k és e metszéspontjait A és B egy megfelelő k-t és e-t érintő kört o, érintési pontjait K és E. Alkalmazzunk A centrumú inverziót! Ennél e és k képe egy-egy olyan egyenes – $e' = e$ és k'–, amely átmegy B képén, a B' ponton. Az e', k' egyenesek négy szögtartományra osztják a síkot, ezek egyike annak a félkörlapnak a képe, amelybe a köröket írjuk. Az o kör képe az adott szögtartományba írt, a szárakat érintő o' kör, érintési pontjai, E' és K' az E, K pontok képei. Az EK egyenes képe az E, K, A pontokon átmenő kör, azt kell igazolni, hogy ez mindig átmegy még egy rögzítet ponton. A szögtartomány szögfelezője, az $E'K'$ szakasz t felezőmerőlegese az o' kör egyik szimmetriatengelye. Az A pont erre tükrözött képe ,A^* illeszkedik az o' körre, és így A^* inverziónál származó (ős)képe, $A^{*\prime}$ illeszkedik o-ra.

c) A t egyenes merőleges o'-re łgy inverziónál származó képe, az A, B pontokon átmenő t' egyenes – az e egyenes és a k kör A-beli és B-beli szögfelező köre – is merőleges o-ra. A t' kör H középpontjának a t'-re merőleges körökre vonatkozó hatványa egyenlő a t' kör sugarának négyzetével. Így H illeszkedik a t-re merőleges körök hatványvonalaira, így az egymást érintő körpárok közös pontbeli közös érintőjére is. A merőlegesség miatt az érintő H-ig tartó része a t' kör sugarával egyezik meg, így az érintési pontok a t' körön vannak.

Könnyedén szerkeszthetünk az e', k' egyenesek határolta megfelelő szögtartományba a t szögfelező tetszőleges pontján átmenő, a szögszárakat érintő kört. A szög csúcsát kivéve mindig két ilyen kör van, amelyek egymást is érintik. Ezek inverz képei egymást a t' körön érintő körök lesznek, tehát t' minden pontja lehet érintési pont.

3. megoldás. **b)** Alkalmazzunk egy olyan inverziót, amely kicseréli a k kör e egyenesre eső AB átmérőjét a tekintetbe vett félkörlap AB félkörívével!

Van ilyen inverzió, ennek centruma a k kör AB-re merőleges átmérőjének a félkörlappra nem illeszkedő H végpontja. Ha H centrumú inverziót alkalmazunk, akkor k képe egyenes lesz, hiszen

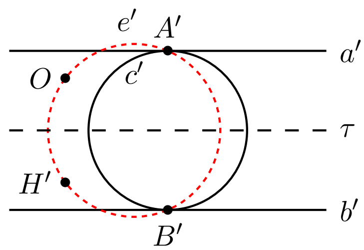
H a k körön van, ha olyan inverziót alkalmazunk, amelynél A és B fix, akkor a k kör képe az e egyenes lesz, hiszen ez az egyetlen egyenes A-n és B-n át.

Tekintsünk az AB szakasz valamely E pontját. A HE egyenes metszi a k kör H-t nem tartalmazó AB ívét, jelölje ezt a metszéspontot K. Van egy olyan o kör, amely E-ben érinti e-t és átmegy K-n. Az E, K pontokat a vizsgált inverzió kicseréli egymással, hiszen az e egyenest és a k kört is kicseréli egymással. Emiatt a teljes o kört önmagára képezi az inverzió (lásd a 3.16. feladatot). Ez azt is jelenti, hogy o érinti k-t K-ban, hiszen o érinti e-t E-ben és E képe K, e képe k és az inverzió érintkezéstartó.

Szemléletesen nyilvánvaló, itt nem igazoljuk, hogy egyetlen olyan kör van, amely az e egyenest az AB szakaszának egy rögzített E pontjában érinti és érinti a k kör rögzített AB ívét is. Ezt a kört az előbb meg is szerkesztettük, látható, hogy az érintési pontokat összekötő EK egyenes mindig átmegy a H ponton.

c) Ha az AB szakaszt és a k kör AB ívét érintő o_1, o_2 köröknek egyetlen közös pontja van, akkor az szükségképpen helyben marad a b)-ben vizsgált inverziónál, hiszen o_1 és o_2 is önmagára képződik, így közös pontjuk is egy közös pontjukba képződik. Ez azt jelenti, hogy egyetlen közös pontjuk az inverzió alapkörén, a H középpontú HA sugarú körön van. Ha P ezen kör rövidebbik AB ívének tetszőleges pontja, és o olyan kör, amely P-ben érinti a HP egyenest, akkor o szükségképpen fix a vizsgált inverziónál. két olyan kör van, jelben o_1 és o_2, amely emellett még e-t is érinti, ezek szükségképpen k-t is érintik, ráadásul egymást is P-ben. Tehát a vizsgált körív minden pontja előáll érintési pontként.

3.8. a) Jelölje a két adott kört a és b, érintési pontjukat O, az őket érintő harmadik kört c. Egy O centrumú inverziónál a és b az egymással párhuzamos a', b' egyenesekbe képződik, c' ezeket érintő kör. A c' kör önmagára képződik annál a τ tükrözésnél, amely a'-t és b'-t felcseréli (lásd az 1. ábrát). Az A, B pontok $A' = a' \cap c'$, $B' = b' \cap c'$ képei egymás tükörképei ennél a tükrözésnél.



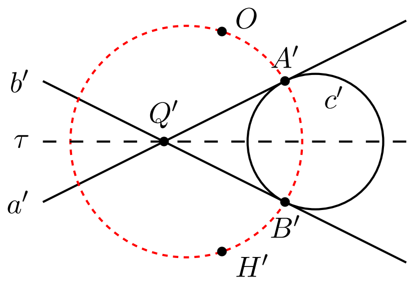
3.8M.1. ábra.

Az $e = AB$ egyenes képe az A', B' és O pontokon átmenő e' kör, amely szimmetrikus az $A'B'$ húrjának felezőmerőlegesére, tehát a τ tükrözésre. Így e'-re O-val együtt annak $\tau(O) = H'$ képe is elleszkedik.

Ha $H' \not\equiv O$, akkor H' az inverziónál valamely H pont képe, amely illeszkedik az e egyenesre. Ez a H pont tehát bármely a-t és b-t is érintő kör érintési pontjait összekötő egyenesre illeszkedik.

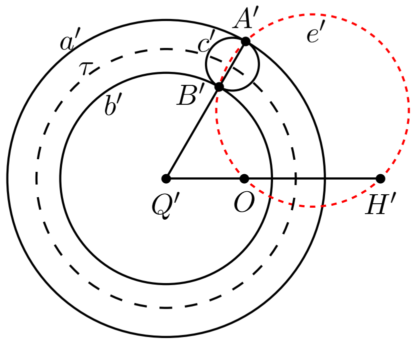
A $H' \equiv O$ speciális eset pontosan akkor következik be, ha O az a', b' párhuzamos egyenesek között féluton helyezkedik el, azaz ha a és b egyenlő sugarú körök. Ebben az esetben a vizsgált AB egyenesek egymással párhuzamosak.

b) Ha az a és b körök az O, Q pontokban metszik egymást, akkor egy O centrumú inverzióval a 2. ábrához jutunk. Most az a', b' egyenesek a Q' pontban metszik egymást. A c' kör egyik szimmetriatengelye az a', b' egyenesek egyik vagy másik szögfelezője. Az A', B', O pontokon áthaladó e' kör is a két szögfelező valamelyikére szimmetrikus, így illeszkedik rá az O pontnak a megfelelő szögfelezőre vonatkozó H' tükörképe is. Így az a) feladatrészben kimondott állítás itt is érvényben marad, de kétféle elhelyezkedésű érintőkör van, az egyikbe tartozók érintési pontjait összekötő egyenes egy bizonyos ponton haladnak át vagy párhuzamosak, a másikba tartozók pedig egy másik ponton haladnak át vagy párhuzamosak.



3.8M.2. ábra.

Ha két közös pont nélküli körből indulunk ki, akkor is teljesül az előző bekezdés végén megfogalmazott állítás. Ha az alapul vett a, b körökre merőleges körök az O, Q pontokon mennek át (lásd a 3.9. feladatot), akkor az O centrumú i inverzió a-t és b-t az egymással koncentrikus a', b' körökbe képezi, közös középpontjuk Q'. Az a-tés b-t is érintő c kör c' képe most a Q' centrumú $\lambda = \pm r'_a r'_b$ paraméterű τ^+, τ^- inverziók egyikére lesz szimmetrikus (lásd a 3. ábrát). Az $e = AB$ egyenes e' képe is invariáns $\tau^\pm$ valamelyikére, így e'-re illeszkedik $\tau^+(O)$ vagy $\tau^-(O)$. Az e egyenes tehát vagy $i(\tau^+(O))$-n vagy $i(\tau^-(O))$-n megy át. (Lásd még a 3.10. és a G.II.8.6. feladatot!)



3.8M.3. ábra.

3.10.

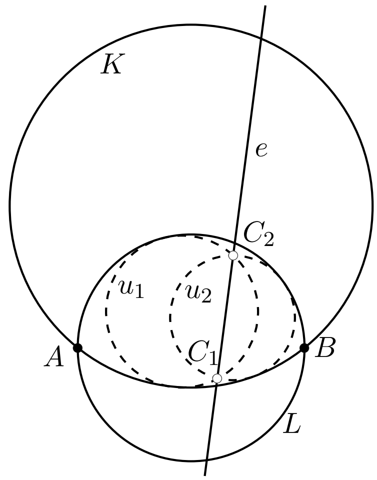
1. megoldás. *Bohus Kinga* (Inverzió, szimmetria)

a) Induljunk ki a kész ábrából (1. ábra). Legyen K és L két metszéspontja A és B és tekintsünk két olyan kört, u_1-t és u_2-t, amelyek érintik K-t és L-t, és amelyek hatványvonala egy e egyenes. Azt kell megmutatnunk, hogy az így létrejövő e egyenesek mind egy közös ponton mennek át. Az állítást csak arra az esetre fogjuk igazolni, ha az u_1, u_2 körök metszők. Ez elégséges lesz, mert ha u_1 és u_2 nem metszők, akkor elkészíthetjük az

$$u_1 = v_1, \qquad v_2, \qquad v_3, \qquad \dots \qquad v_n = u_2$$

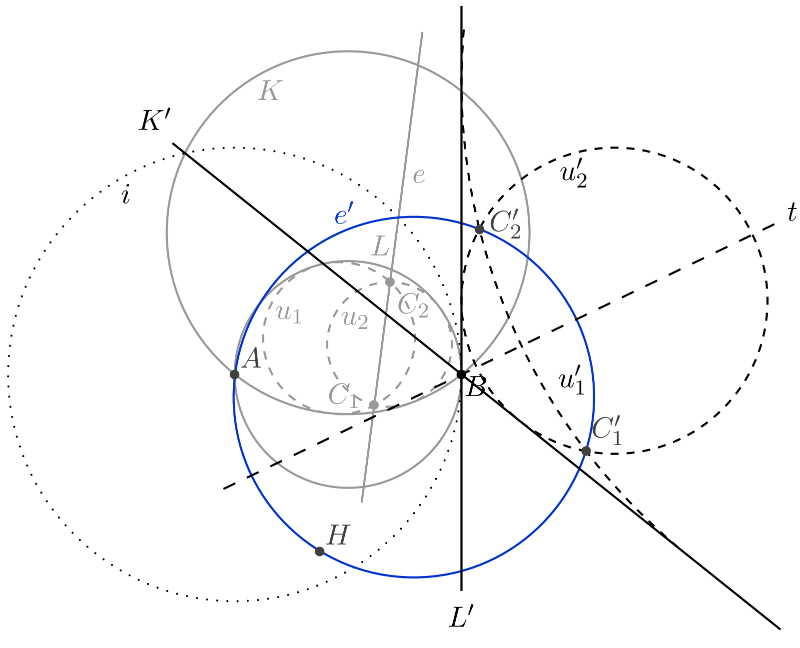
körsorozatot, amelynek egymást követő tagjai metszők és ha az egymást követő körök hatványvonalai egy közös P ponton mennek át, akkor P hatványa u_1-re és u_2-re is egyenlő.

Invertáljuk az ábrát egy A középpontú tetszőleges körre (a 2. ábrán az A középpontú B-n átmenő körre invertáltunk, azaz $B = B'$). A K', L' alakzatok egyenesek, amelyek a B' pontban



3.10M1.1. ábra.

metszik egymást. Az u', v' körök a K', L' egyeneseket az egyik tartományban érintő körök. A K' és L' egyenesekből és az u', v' körökből álló rendszer tengelyesen szimmetrikus a K' és L' egyenesek azon tartományban haladó t szögfelezőjére, amelyben u' és v' is van.



3.10M1.2. ábra.

Az u, v körök e hatványvonala olyan e' körbe transzformálódik, amely átmegy az u és v körök C_1, C_2 metszéspontjainak C_1', C_2' képein és az inverzió A centrumán. Mivel C_1' és C_2' a t tengelyre szimmetrikus u_1', u_2' körök metszéspontjai, így ők is szimmetrikusan helyezkednek el t-re, azaz t a $C_1'C_2'$ szakasz felezőmerőlegese. Így e' is szimmetrikus t-re, A-val együtt az A pont t-re vonatkozó H tükörképe is rajta van e'. Ez azt jelenti, hogy a H pontnak az inverziónál származó képe (azaz őse) illeszkedik e-re.

2. megoldás. *Keresztfalvi Tibor* (Inverzió, körök szöge)

a) Legyen a K és L által meghatározott egyik (vagy két szemközti) tartományba eső és K-t és

L-t is érintő körök halmaza $\mathcal{H}$. Ha létezik a feladat feltételeinek megfelelő O pont, és hatványa a $\mathcal{H}$-beli körökre a nemnegatív r^2 szám, akkor az O középpontú r sugarú h kör mindegyik $\mathcal{H}$-beli körre merőleges. Megfordítva, ha találunk olyan kört, amely a $\mathcal{H}$ mindegyik körére merőleges, akkor annak O középpontjának $\mathcal{H}$ bármelyik körére vonatkozó hatványa ugyanaz a pozitív szám.

Az inverzió szögtartó. Ha a 3.10M1. megoldás mintájára invertáljuk az ábrát, akkor maga a t tengely az az alakzat, amely a K'-t és L'-t érintő mindegyik körre merőleges. Ha t-t visszainvertáljuk, akkor megkapjuk a h kört, annak középpontja lesz a keresett pont.

Megjegyezzük, hogy mivel t felezi K' és L' szögét, így a h kör is felezi L és K szögét (és átmegy azok két metszéspontján).

3. megoldás. *Tomon István ötlete alapján* (Hasonlósági középpont, Steiner hatvány)

a)-b) Ebben a megoldásban nem használunk inverziót, nem tételezzük fel, hogy a K, L körök metszik egymást. Három másutt is hasznos lemmára építkezünk. Meg fogjuk mutatni, hogy a keresett pont a K, L körök egyik hasonlósági középpontja.

Lemma I.: ha K és L különböző sugarú körök, akkor két olyan középpontos nagyítás is van, amely K-t L-be képezi. E két nagyítás arányának abszolútértéke egyenlő (a két kör sugarának aránya), előjele ellentétes.

Megjegyzés: ha a két kör egyenlő sugarú, akkor az egyik nagyítás (a pozitív arányú) eltolássá fajul.

Emlékeztetünk rá, hogy az egyik kört a másikba képező pozitív arányú középpontos nagyítás centrumát a két kör *külső hasonlósági pontjának* nevezzük, míg a negatív arányú nagyítás centruma a *belső hasonlósági pont.*

Lemma II. (két kör Steiner hatványa): a K, L körökhöz és azok H hasonlósági középpontjához hozzárendelhető egy Λ szám a következő tulajdonsággal: ha a H pontot tartalmazó tetszőleges h egyenesen a K, L körök U_K, V_K pontja a K-t L-re képező H centrumú nagyításnál *nem* egymásnak megfelelő pontpár, akkor $HU_K \cdot HU_L = \Lambda$. (Lásd a G.II.11.18. feladatot!)

Lemma III. Az O_1 középpontú λ_1 arányú és az O_2 középponttú λ_2 arányú középpontos nagyítások kompozíciója $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ és $O_1 \neq O_2$ esetén olyan $\lambda_1\lambda_2$ arányú középpontos nagyítás, melynek O_3 centruma az O_1O_2 egyenesen van. (Lásd a G.II.8.1., G.II.8.2., G.II.8.3. feladatokat!)

Következzék a feladat megoldása. Érintse az u kör az adott K-t az U_K, az L kört az U_L pontban. Állítjuk hogy a K, L körök hasonlósági pontjainak egyike illeszkedik az U_LU_K egyenesre. Valóban, egy megfelelő arányú U_K centrumú középpontos nagyítás a K kört u-ra képezi, míg egy U_L középpontú nagyítás u-t L-be viszi. E két középpontos nagyítás kompozíciója K-t L-re képezi, így centruma a K, L körök egyik hasonlósági pontja, ami tehát Lemma III. szerint az U_KU_L egyenesen van.

A nagyítások előjeleit is figyelembe véve állíthatjuk, hogy amennyiben K és u a közös U_K pontjukba vont közös érintőjük különböző oldalán vannak és u és L is az U_L beli érintőjük különböző oldalán van, vagy mindkét esetben az érintő azonos oldalán van a két kör, akkor az U_KU_L egyenes a K, L körök külső hasonlósági pontján megy át, míg ha az egyik körpár közös érintője elválasztja a két kört, a másik körpáré pedig nem, akkor U_KU_L a K, L körök belső hasonlósági pontján megy át.

Ha az L kör U_L-beli érintője és a K kör U_K-beli érintője nem párhuzamos, akkor U_L nem az U_K pont képe annál a középpontos nagyításnál, amelynek H centruma a K, L körök U_KU_L-re illeszkedő H hasonlósági pontja. Ebben az esetben Lemma II. alapján készen is vagyunk a feladat állításának bizonyításával, hiszen a K, L körök H hasonlósági ponthoz tartozó Steiner hatványa a H pont u-ra vonatkozó hatványa.

Az L kör U_L-beli érintője és a K kör U_K-beli érintője párhuzamos, akkor az U_KU_L egyenes az U, K, L körök mindegyikének átmérőegyenese, ezen az egyenesen mindkét hasonlósági pont rajta van. Az egyikhez tartozó hasonlóságnál U_K és U_L nem egymásnak megfelelő pontpár, így alkalmazható az előző gondolatmenet.

3.3. Előzetes megjegyzés: Két kör szögén az egyik metszéspontjukban vont érintőjük szögének abszolút értékét értjük. Egyenes és kör szöge az egyenes és a két alakzat egyik metszéspontjában a körhöz húzott érintő szögének abszolút értéke. A szög értéke – így hogy abszolút értéket veszünk – független a metszéspont választásától (lásd a 3.2. feladatot). Ha a két alakzat érinti egymást, akkor szögük 0. Ha két alakzatnak nincs közös pontja, akkor szögüket – egyelőre – nem értelmezzük.

a) Először azt igazoljuk, hogy két egyenes szöge megegyezik képeik szögével.

Ha a két egyenes e és f, az inverzió középpontja O, akkor az e egyenes képe olyan e' kör, amely átmegy az O ponton és ott az e-vel párhuzamos e_O egyenest érinti vagy pedig e' maga az e_O egyenes. Ehhez hasonlóan, ha f_O az O-t tartalmazó f-fel egyállású egyenes, akkor f képe, f' vagy f_O vagy egy azt O-ban érintő kör. Az e', f' alakzatok szöge tehát az O metszéspontjukon áthaladó e_O, f_O egyenesek szöge, ez pedig megegyezik e és f szögével.

b) Vizsgáljuk most a k_e, k_f alakzatokat (köröket vagy egyeneseket, röviden: kögyeneseket), amelyeknek van egy O-tól különböző A metszéspontja. Jelölje A-beli érintőjüket e és f, a kögyenesek inverziónál származó képét k'_e, k'_f, illetve e', f'. A 3.1. feladat állítása szerint k'_e és e' illetve k'_f és f' is érinti egymást, így k'_e és k'_f szöge, amit az A' metszéspontjukban mérünk, megegyezik e' és f' szögével, ami az előző paragrafus szerint e és f szögével, azaz k_e és k_f szögével is egyenlő.

Végül, ha a k_e, k_f kögyenesek egyetlen közös pontja az inverzió O centruma, akkor ott érintik egymást, így a 3.1. feladat adja a bizonyítást.

3.4. Az alábbi csoportokon belül bármelyik ábra bármelyik másikba átvihető, de a különböző csoportokba tartozó ábrák nem vihetők egymásba.

(A; D), (B; J; K), (C; I), (E; L), (H; F), (G).

3.1.

1. megoldás. Az állítás ebben az általános formában nem igaz. Az 1. ábrán a k_1, k_2, k_3, k_4 körnégyes ciklikusan érinti egymást a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontokban, amelyek valóban egy körön vannak, de a a k_1, k_2, k_3, k'_4 körnégyes is ciklikusan érinti egymást, ahol a P_{12}, P_{23}, P'_{34}, P'_{41} érintési pontok nyilvánvalóan nincsenek egy körön.

A különbség a következő: az 1. ábrán a k_1, k_2, k_3, k_4 köröket tudjuk úgy irányítani, hogy az érintési pontjaikban a találkozó körök irányítása megegyezzen. Megfelel pld., ha a k_1, k_2 köröknek pozitív, k_2-nek és k_4-nek pedig negatív forgásirányt adunk. A k_1, k_2, k_3, k'_4 köröket viszont nem tudjuk így irányítani: ha például a k_1 és k_3 pozitív, k_2 pedig negatív forgásirányt kap, akkor a k'_4 kör pozitív irányítással érintené a k_1 irányított kört, de irányítottan nem érintené k_3-at, míg a negatív irányítású k'_4 kör a k_1-et nem érintené, de érintené k_3-at.

A 3.1M2. megoldásban az irányítással megfogalmazott általánosabb tételt igazolunk, most egyszerűbb eszközök használatával az alábbi módosított állítást tekintjük:

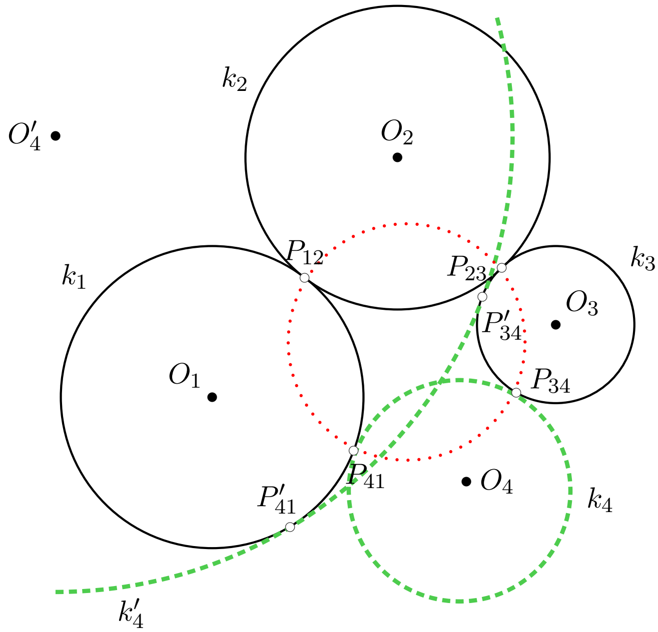
Lemma Ha a k_1, k_2, k_3, k_4 körök kölcsönösen egymás külsejében helyezkednek el és ciklikus sorrendben érintik egymást, akkor a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vannak.

Bizonyítás

Jelölje a k_i kör középpontját O_i, a $P_{41}O_1P_{12}$, $P_{12}O_2P_{23}$, $P_{23}O_3P_{34}$, $P_{34}O_4P_{41}$ egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögét rendre α_1, α_2, α_3 és α_4.

Azt kell igazolnunk, hogy a $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ négyszög húrnégyszög, tehát azt, hogy ebben a négyszögben a szemköztes szögek összege egyenlő:

$$P_{12}P_{23}P_{34}\angle + P_{34}P_{41}P_{12}\angle = P_{23}P_{34}P_{41}\angle + P_{41}P_{12}P_{23}\angle.$$



3.1M1.1. ábra.

Ugyanez az α_i szögekkel kifejezve (lásd a 2. ábrát):

$$(180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3) + (180^\circ - \alpha_4 - \alpha_4) = (180^\circ - \alpha_3 - \alpha_4) + (180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2),$$

ami nyilvánvalóan igaz.

2. megoldás. Az eredeti állítás nem igaz (lásd pld a 3.1M1. megoldást). Helyette az alábbi összefüggést igazoljuk:

I. Lemma Ha a k_1, k_2, k_3, k_4 *irányított* körök ciklikus sorrendben érintik egymást, akkor a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vagy egyenesen vannak.

Bizonyítás

Alkalmazzunk P_{12} centrumú inverziót! Ennél k_1 és k_2 képe két egymással párhuzamos egyenes lesz, amelyek irányítása is egyforma. így az alábbi egyszerűbb bizonyítandó állításhoz jutunk:

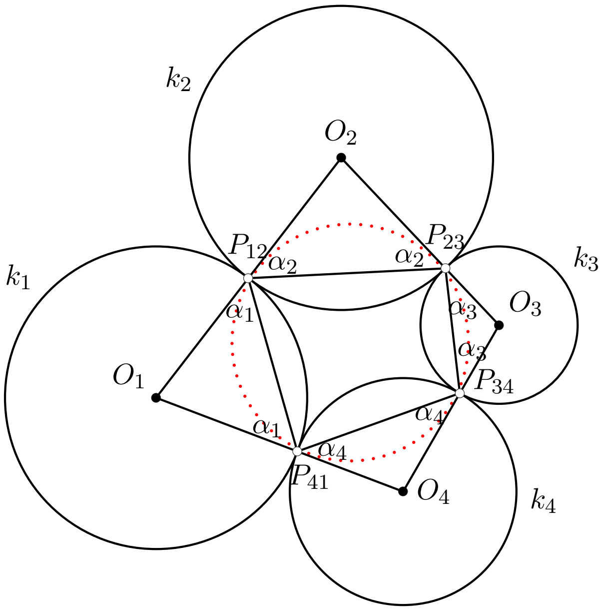
II. Lemma Ha k'_1 és k'_2 párhuzamos és azonosan irányított egyenesek, míg k'_3 és k'_4 olyan irányított körök, amelyek irányítottan érintik egymást a P'_{34} pontban, és k'_3 a P'_{23} pontban irányítottan érinti k'_2, míg k'_4 a P'_{41} pontban irányítottan érinti k'_1-et, akkor a P'_{23}, P'_{34}, P'_{41} érintési pontok egy egyenesen vannak (lásd az 1. ábrát).

A II. Lemmát a P'_{34} centrumú középpontos nagyítás segítségével igazolhatjuk.

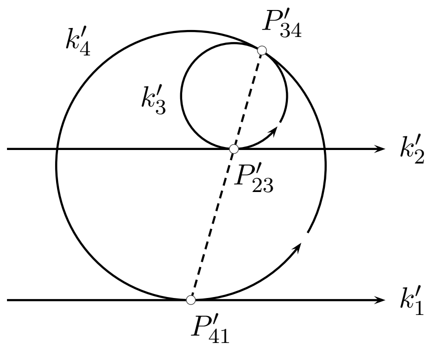
3. megoldás. Az alábbi gondolatmenetet a 3.10. feladat eredményére és annak 3.10M3. megoldásában foglaltakra építjük.

A k_1, k_3 körök hasonlósági pontjai legyenek H_1 és H_2, a két kör Steiner hatványa a H_1-re vonatkoztatva h_1, a H_2-re vonatkoztatva h_2 (lásd a 3.10M3. megoldást vagy a G.II.11.18. feladatot).

Tekintsük a k_1 és k_3 köröket és a mindkettőjüket érintő körök $\mathcal{K}$ halmazát. Ha $k \in \mathcal{K}$ és k a Q_1-ben érinti k_1-et míg Q_2-ben k_2-t, akkor 3.10M3. szerint a Q_1Q_2 egyenes átmegy H_1-an vagy H_2-n. A $\mathcal{K}$ halmazt ennek alapján két „osztályra” $\mathcal{K}_1$-re és $\mathcal{K}_2$-re bonthatjuk fel aszerint, hogy az érintési pontok összekötő egyenese H_1-en vagy H_2-n megy át. A két osztály közös elemei a k_1 és a k_2 körök azon közös érintő körei, amelyek középpontja e két kör centrálisán van.



3.1M1.2. ábra.



3.1M2.1. ábra.

Ha k_2 és k_4 is $\mathcal{K}_1$-ben van, akkor a k_1, k_3 körök H_1-hez kapcsolódó Steiner hatványa:

$$h_1 = H_1P_{12} \cdot H_1P_{23} = H_1P_{41} \cdot H_1P_{12},$$

így a szelőtétel megfordítása szerint (lásd a G.II.11.5. feladatot) a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontok egy körön vannak, ha nincsenek egy egyenesen.

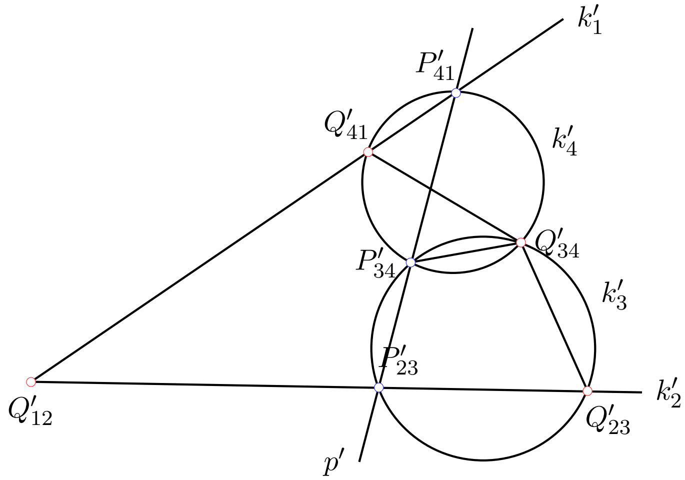
Hasonló a helyzet akkor is, ha k_2 és k_4 is $\mathcal{K}_2$-ben van. Ha azonban különböző osztályban van k_2 és k_4, akkor nem feltétlenül vannak egy körön az érintési pontok.

3.2.

1. megoldás. Alkalmazzunk P_{12} centrumú inverziót! A k_1, k_2 körök k'_1, k'_2 képei az egymást a Q_{12} pont Q'_{12} képében metsző egyenesek lesznek és egyenes lesz a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontok p kögyenesének p' képe is. A k_2, k_3 körök képei körök a további metszéspontok képei pontok, ezeket eredeti elnevezésükből egy vesszővel kapjuk (lásd az 1. ábrát).

Irányított szögekkel modulo 180° számolunk. A k'_3 körben

$$Q'_{23}Q'_{34}P'_{34}\sphericalangle \equiv Q'_{23}P'_{23}P'_{34}\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{1}$$



3.2M1.1. ábra.

és

$$Q'_{23}P'_{23}P'_{34}\sphericalangle \equiv Q'_{12}P'_{23}P'_{41}\sphericalangle \quad (\mathrm{mod}\ 180°), \tag{2}$$

míg a k'_4 körben

$$P'_{34}Q'_{34}Q'_{41}\sphericalangle \equiv P'_{34}P'_{41}Q'_{41}\sphericalangle \quad (\mathrm{mod}\ 180°), \tag{3}$$

ahol

$$P'_{34}P'_{41}Q'_{41}\sphericalangle \equiv P'_{23}P'_{41}Q'_{12}\sphericalangle \quad (\mathrm{mod}\ 180°). \tag{4}$$

(1) és (3) összegéből (2) és (4) figyelembevételével adódik, hogy

$$Q'_{23}Q'_{34}Q'_{41}\sphericalangle \equiv Q'_{12}P'_{23}P'_{41}\sphericalangle + P'_{23}P'_{41}Q'_{12}\sphericalangle \quad (\mathrm{mod}\ 180°), \tag{5}$$

Másrészt a A $Q'_{12}P'_{23}P'_{41}$ háromszögben

$$P'_{23}Q'_{12}P'_{41}\sphericalangle \equiv Q'_{12}P'_{23}P'_{41}\sphericalangle + P'_{23}P'_{41}Q'_{12}\sphericalangle \quad (\mathrm{mod}\ 180°), \tag{6}$$

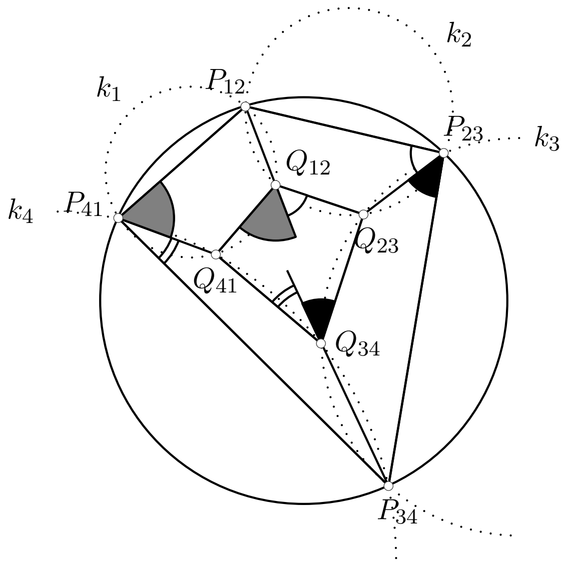
így (5) és (6) összevetéséből kapjuk, hogy

$$Q'_{23}Q'_{34}Q'_{41}\sphericalangle \equiv Q'_{23}Q'_{12}Q'_{41}\sphericalangle \quad (\mathrm{mod}\ 180°), \tag{7}$$

azaz a Q'_{34}, Q'_{12} pontok a Q'_{23}, Q'_{41} pontok azonos látókörén vannak vagy a négy pont egy egyenesre illeszkedik. Ebből adódik, hogy inverziós ősképeik – Q_{34}, Q_{12} és Q_{23} valamint Q_{41} – is egy kögyenesen vannak.

2. megoldás. Az 1. ábrán nyomonkövethet? a megoldás. Továbbhúztuk a $P_{12}Q_{12}$, $P_{34}Q_{34}$ szakaszokat Q_{12}, illetve Q_{34} felé, hogy megjelenhessen a $P_{12}Q_{12}Q_{23}P_{23}$, $P_{23}Q_{23}Q_{34}P_{34}$, $P_{34}Q_{34}Q_{41}P_{41}$, $P_{41}Q_{41}Q_{12}P_{12}$ négyszögek egy-egy küls? szöge, mivel ezek a négyszögek mind húrnégyszögek, így küls? szögük a szemközi bels? szöggel egyezik meg az ábra szerint. A vizsgált négy szög összegével egyezik meg a $P_{12}P_{23}P_{34}\angle + P_{34}P_{41}P_{12}\angle$ és a $Q_{41}Q_{12}Q_{23}\angle + Q_{23}Q_{34}Q_{41}\angle$ szögösszeg is. Mivel a $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha az el?bbi összeg 180°, míg a $Q_{12}Q_{23}Q_{34}Q_{41}$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha az utóbbi összeg 180°, így ez a két négyszög egyszerre húrnégyszög, azaz ha az egyik az, akkor a másik is az.

3.4.



3.2M2.1. ábra.

1. megoldás. a) Lásd a G.II.11.1. feladat megoldását!

2. megoldás. a)-b) Jelölje a háromszög csúcsait A, B és C, a beírt (vagy a hozzáírt) kör érintési pontjait T_A, T_B és T_C, a beírt (vagy hozzáírt) kört illetve középpontját i illetve I, a körülírt kört illetve középpontját k illetve O.

Alkalmazzunk i-re vonatkozó inverziót! Az A pont képe a 3.1. feladat 3.1M. megoldásának II. pontja szerint a T_BT_C szakasz F_A felez?pontja. Hasonlóan kapható a B és a C pont képe és így a k kör k' képe a $T_AT_BT_C$ háromszög Feuerbach-körének adódik. Ismeretes, hogy a Feuerbach kör sugara a körülírt – a $T_AT_BT_C$ háromszög köré írt – kör sugarának fele, azaz k képének sugara $\frac{r}{2}$. Alkalmazzuk a 3.10. feladat eredményét! A sugár transzformációjának képlete szerint $\frac{r}{2} = \frac{r^2R}{|d^2-R^2|}$, azaz

$$\left|d^2 - R^2\right| = 2rR. \tag{1}$$

A beírt kör a körülírt körön belül van, azaz $d < R$, és a képlet ilyenkor:

$$R^2 - d^2 = 2rR, \tag{2}$$

míg a hozzáírt kör középpontja kívül van a körülírt körön, tehát $d > R$, azaz

$$d^2 - R^2 = 2rR. \tag{3}$$

c) Használjuk fel a G.II.8.3. feladat b) részének eredményét! Kapjuk, hogy a feltétel:

$$(R - d) \cdot \left[(R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2)\right] = 0.$$

3.5.

1. megoldás. Invertáljuk az ábrát egy tetszőleges A középpontú körre!

A K kör képe egy K' kör lesz, a K átmérőegyeneseinek képei a K kör O középpontjának O' képén és A-n átmenő körök, az A-n és K egy e átmérőjének végpontjain átmenő l körnek a képe egy olyan egyenes, amely átmegy l' és K' két metszéspontján. Végülis azt kell igazolnunk, hogy van egy olyan pont, amely illeszkedik az A-n és O'-n átmenő bármelyik kör – mint az előbbi

l' – és a K' kör hatványvonalára. Az A-n és O'-n átmenő körök közös hatványvonala az AO' egyenes, tehát annak a Q pontnak, amelyben l' és K' hatványvonala metszi AO'-t, a hatványa mindegyik A-n és O'-n átmenő körre és K'-re is egyforma, tehát rajta van ezek közül bármelyik kettő hatványvonalán.

2. megoldás. Tekintsünk egy A-n átmenő l kört, amely K-t a PQ átmérő végpontjaiban metszi. Legyen l-nek a k körre való invertáltja l_i, ugyanakkor az l körnek a K-kör O középpontjára tükrözött képe l_O.

Állítjuk, hogy az l_i, l_O körök megegyeznek egymással. Ez azonnal nyilvánvalóvá válik, ha a P, Q pontoknál megvizsgáluk K és l valamint K és l_i illetve K és l_O szögét. K és l szöge P-nél és Q-nál abszolútértékben megegyezik, de irányítása szerint ellentétes. A középpontos tükrözés kicseréli P-t és Q-t és a szögeket irányítás szerint megtartja. Az inverzió helybenhagyja P-t és Q-t is és a szögeket megtartja, de megfordítja az irányításukat. Végeredményképp l_i és l_O olyan P-n és Q-n átmenő körök, amelyek P-nél és Q-nál egymással egyenlő irányított szögben hajlanak K-hoz, tehát tényleg megegyeznek egymással.

Ilymódon, ha invertáljuk A-t K-ra, majd a kapott képet tükrözzük O-ra, akkor visszajutunk l-re, tehát az így kapott pont mindegyik olyan körre illeszkedik, amely átmegy A-n és K-t egy átmérő két végpontjában metszi.

Röviden: az az O centrumú *negatív arányú* inverzió, amely K-t önmagára képezi (a K-n középpontos tükrözésként hat) szükségképpen fixálja azokat a köröket is, amelyek K-t egy átmérő végpontjaiban metszik, így ha az A pont rajta van egy ilyen körön, akkor az inverziónál származó képe is rajta van.

3. megoldás. Ha r a K kör sugara, akkor a K kör O középpontjának a vizsgált körök bármelyikére vonatkozó hatványára a $-r^2$ érték adódik, ha a hatványt a vizsgált kör azon húrján számoljuk, amely K átmérője. A szelőtétel szerint a hatvány értéke ugyanekkora lesz az A-t tartalmazó húron is, tehát

$$PA' = \frac{r^2}{PA},$$

ahol A' a vizsgált kör AO szelőjének A-tól különböző és az előjelek szerint O-tól A-val ellenkező irányban található pontja. Ezek szerint illeszkedik az A' a vizsgált körök mindegyikére.

Megjegyezzük, hogy a körök A-tól különböző A' metszéspontja az A pont képe az O középpontú $-r^2$ paraméterű inverziónál. Ennél az inverziónál a vizsgált körök mindegyike fix.

3.6. Az a feltétel, hogy a K-ra vonatkozó inverzió kicseréli egymással A-t és B-t úgy is fogalmazható (lásd a 3.16. feladatot), hogy az A-n és B-n átmenő kögyenesek merőlegesek K-ra. Az I-re vonatkozó inverzió kögyenestartó, tehát az A, B pontokon átmenő kögyenesek képei A', B'-n átmenő kögyenesek. Az inverzió szögtartó is, tehát a K' kör merőleges az A', B' pontokon átmenő kögyenesekre. De újfent a 3.16. feladat állítása szerint ez azt jelenti, hogy A' és B' egymás képei a K' körre vonatkozó inverziónál.

A fenti gondolatmenetből az is kiderül, hogy ha K képe a K' *egyenes*, akkor A' és B' egymás tükörképei erre az egyenesre. Tehát inverzióval átvihetjük az inverziót tengelyes tükrözésbe.

3.7. Használjuk fel a 3.6. feladat eredményét, különösen annak 3.6M. megoldása végén tett megjegyzést. Vizsgáljuk a t tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözést. Tekintsünk egy olyan i inverziót, melynek centruma nem illeszkedik t-re és jelölje t képét az i inverziónál τ. A τ-ra vonatozó inverziónál pontosan akkor felel meg egymásnak az A és a B pont, ha ezen pontok i-nél származó A', B' képei egymásnak felelnek meg a t egyenesre való tükrözésnél. Ez épp azt jelenti, hogy $\tau \circ i \circ \tau$ összetett transzformáció – ahol most egyszerre használjuk a τ jelet a körre és a rá vonatkozó inverzióra – a t-re való tükrözéssel azonos.

$$t(A') = B', \quad \text{és} \quad \tau \circ i \circ \tau(A') = \tau \circ i(A) = \tau(B) = B'.$$

3.8. A 3.7. feladat állításából következik, hogy minden egybevágóság el?állítható inverziók kompozíciójaként.

Ennek alapján elegend? igazolni, hogy bárhogyan is adottak az egymástól különböz? A_1, A_2, A_3 pontok, mindig van olyan inverzió, amely ezeket olyan B_1, B_2, B_3 pontokba képezi, amelyek egy egyenesen vannak és amelyekre B_1 az egységnyi hosszúságú B_2B_3 szakasz felez?pontja. Valóban, ha i ilyen inverzió, míg i' az A_1', A_2', A_3' pontokat viszi ugyanilyen tulajdonságú B_1', B_2', B_3' pontokba, akkor van olyan – inverziókkal el?állítható – φ egybevágóság, amely a B_1, B_2, B_3 pontokat rendre a B_1', B_2', B_3' pontokba viszi és így a keresett transzformáció el?áll az i, φ, i' transzformációk kompozíciójaként.

Tehát olyan O pontot és O centrumú i inverziót keresünk, amelyre

I. az $A_1A_2A_3$ ponthármas képe kollineáris;

II. az $\overline{i(A_1)i(A_2)} = \overline{i(A_1)i(A_3)}$;

III. $\overline{i(A_2)i(A_3)} = 1$.

Az I. feltétel pontosan akkor teljesül, ha O illeszkedik arra az egyértelm? k körre vagy egyenesre, amely átmegy az A_1, A_2, A_3 pontok mindegyikén, de nem egyezik meg a három említett pont egyikével sem.

A II. feltétel a 3.18. feladat eredménye szerint pontosan akkor teljesül, ha O illeszkedik arra az A_1-en átmen? egyértelm?en létez? l körre (lásd a 3.14. feladatot), amelyre vonatkozó inverzió kicseréli A_2-t és A_3-at. Ez az l kör az A_2A_3 egyenest egyszer metszi az A_2A_3 szakaszon és egyszer azon kívül.

A fenti k, l körök egyik közös pontja az A_1 pont, de nem érintik egymást, hiszen l-nek van pontja a k körön belül (az A_2A_3 szakaszon) és azon kívül is. Legyen a k, l körök másik metszéspontja O. Bármelyik O centrumú i inverzió teljesíti az I., II. feltételeket, az inverzió paramétere pedig beállítható úgy, hogy III. is teljesüljön. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

3.9.

1. megoldás. Az A, B pontok akkor és csakis akkor cserélődnek ki a k körre vonatkozó inverziónál, ha az A-n és B-n átmenő kögyenesek merőlegesek k-ra (lásd a 3.16. feladat E pontját). Keressük meg tehát a k_1-re és a k_2-re merőleges kögyeneseket!

Az egyik ilyen kögyenes a k_1, k_2 egyenes közös centrálisa, t. Megjegyezzük, hogy t nem létezik, ha k_1 és k_2 koncentrikus, de ilyenkor olyan valóságos pontpár sincs, amely mindkét körre vonatkozó inverziónál kicserélődik, csak a közös centrum és a „végtelen távoli pont” cserélődik fel.

Keressünk egy mindkét körre merőleges kört is! Ehhez tekintsük a k_1, k_2 körök h hatványvonalát. Messe a hatványvonal a t centrálist T-ben tekintsük h egy – k_1 és k_2 külsejében található – H pontját. Mivel H a k_1, k_2 körök külsejében helyezkedik el, így H-nak a két körre vonatkozó egyenlő hatványa pozitív – jelben r_H^2 –, azaz van egy olyan H középpontú k_H kör, amely merőleges k_1-re és k_2-re is.

A keresett pontpár a k_H kör és a t egyenes két metszéspontja. De van-e két metszéspont? Ha k_1 sugara r_1, középpontja O_1, akkor $r_H^2 = HO_1^2 - r_1^2$, míg $HT^2 = HO_1^2 - O_1T^2$. Pontosan akkor van két metszéspont, ha $r_H^2 > HT^2$, azaz ha $r_1^2 < O_1T^2$, tehát ha a hatványvonal centrálisra illeszkedő pontja a k_1 körön kívül van. Ez épp azt jelenti, hogy a k_1, k_2 körök hatványvonalának nincs közös pontja a két körrel, azaz azoknak sem egymással. Ebben az esetben van a feladat feltételeinek megfelelő pontpár, amelyet fent meg is leltünk.

2. megoldás. Ha A és B kicserélődik a k_1 és a k_2 körökre vonatkozó inverziónál, akkor k_1 és k_2 is az A, B pontpár egy-egy Apollóniusz köre (lásd a 3.15. feladatot), tehát k_1 és k_2 közös pont nélküli nem koncentrikus körök.

k_1 és k_2 is az A, B pontpár egy-egy Apollóniusz köre (lásd a 3.15. feladatot), tehát k_1 és k_2 közös pont nélküli nem koncentrikus körök. Megmutatjuk, hogy ha a k_1 és k_2 közös pont nélküli nem koncentrikus körök, akkor van megfelelő pontpár, és alább meg is határozzuk azokat.

Ha $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ és k_1 illetve k_2 az A, B pontok λ_1 illetve λ_2 arányú Apollóniusz köre, akkor A, B, k_1 és k_2 egyenletei:

$$\begin{array}{rrcl} A: & (x-a_1)^2+(y-a_2)^2 & = & 0, \\ B: & (x-b_1)^2+(y-b_2)^2 & = & 0, \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{rrcl} k_1: & \lambda_1\left((x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right)-\left((x-b_1)^2+(y-b_2)^2\right) & = & 0, \\ k_2: & \lambda_2\left((x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right)-\left((x-b_1)^2+(y-b_2)^2\right) & = & 0, \end{array} \tag{2}$$

tehát A és B (1) egyenleteinek lineáris kombinációiból kaphatók k_1 és k_2 egyenletei. De k_1 és k_2 (2) egyenleteinek lineáris kombinációiból is megkaphatók A és B „egyenletei”, azaz az A, B pontok koordinátái. Valóban, fent

$$A = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}k_1 - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}k_2, \qquad B = \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}k_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}k_2.$$

Most k_1 és k_2 adottak, egyenleteik legyenek

$$\begin{array}{rrcl} k_1: & x^2+y^2-2\xi_1x-2\eta_1y+\delta_1 & = & 0, \\ k_2: & x^2+y^2-2\xi_2x-2\eta_2y+\delta_2 & = & 0. \end{array} \tag{3}$$

Úgy kell lineárkombinálnunk ezeket az egyenleteket, hogy 0 sugarú köröket, azaz pontokat kapjunk. Tekintsük pld az αk_1+k_2 kört, tehát azt, melynek egyenlete

$$\alpha k_1+k_2: \qquad x^2+y^2-2\frac{\alpha\xi_1+\xi_2}{\alpha+1}x-2\frac{\alpha\eta_1+\eta_2}{\alpha+1}y+\frac{\alpha\delta_1+\delta_2}{\alpha+1}=0. \tag{4}$$

Ugyanez teljes négyzetek összegére írva:

$$\left(x-\frac{\alpha\xi_1+\xi_2}{\alpha+1}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha\eta_1+\eta_2}{\alpha+1}\right)^2=\left(\frac{\alpha\xi_1+\xi_2}{\alpha+1}\right)^2+\left(\frac{\alpha\eta_1+\eta_2}{\alpha+1}\right)^2-\frac{\alpha\delta_1+\delta_2}{\alpha+1}, \tag{5}$$

ami akkor lesz pont, tehát 0 sugarú kör egyenlete, ha

$$0=(\alpha\xi_1+\xi_2)^2+(\alpha\eta_1+\eta_2)^2-(\alpha\delta_1+\delta_2)(\alpha+1), \tag{6}$$

A 6. egyenletben adott ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, δ_1, δ_2 és α-t keressük. Egyenletünk az α változóban másodfokú:

$$0=(\xi_1^2+\eta_1^2-\delta_1)\alpha^2+(2\xi_1\xi_2+2\eta_1\eta_2-\delta_1-\delta_2)\alpha+(\xi_2^2+\eta_2^2-\delta_2) \tag{7}$$

és pontosan akkor van két megoldása, ha a

$$D=(2\xi_1\xi_2+2\eta_1\eta_2-\delta_1-\delta_2)^2-4(\xi_1^2+\eta_1^2-\delta_1)(\xi_2^2+\eta_2^2-\delta_2) \tag{8}$$

mennyiség, azaz

$$D=4(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2 \tag{9}$$

pozitív.

xxx XXX FOLYTATÁS?

3. megoldás. Világos, hogy az egymással kicserélődő A, B pontokat a k_1, k_2 körök t centrálisán kell keresni. Tekintsük t-t számegyenesnek, amelyet k_1 a p_1, p_2, míg k_2 a q_1, q_2 számoknak megfelelő pontokban metsz, míg A-nak és B-nek az x_1 és az x_2 szám felel meg. Az inverziós feltételek:

$$\begin{aligned}\left(x_1-\tfrac{p_1+p_2}{2}\right)\left(x_2-\tfrac{p_1+p_2}{2}\right)&=\left(\tfrac{p_1-p_2}{2}\right),\\ \left(x_1-\tfrac{q_1+q_2}{2}\right)\left(x_2-\tfrac{q_1+q_2}{2}\right)&=\left(\tfrac{q_1-q_2}{2}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Ezekből

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=2\tfrac{q_1q_2-p_1p_2}{q_1+q_2-p_1-p_2},\\ x_1x_2&=\tfrac{p_1q_1q_2+p_2q_1q_2-p_1p_2q_1-p_1p_2q_2}{q_1+q_2-p_1-p_2},\end{aligned}\tag{2}$$

azaz

$$x_{1,2}=\frac{q_1q_2-p_1p_2\pm\sqrt{D}}{q_1+q_2-p_1-p_2},\tag{3}$$

ahol

$$D=(p_1-q_1)(p_1-q_2)(p_2-q_1)(p_2-q_2).\tag{4}$$

A D diszkrimináns pontosan akkor pozitív, ha a (p_1,p_2) számpár elválasztja a (q_1,q_2) számpárt, azaz q_1 és q_2 egyike a p_1 és a p_2 között van, a másik pedig nincs a kettő között és nem is egyenlő velük. Ez épp azt jelenti, hogy a k_1, k_2 körök nem metszik egymást. Ebben az esetben (3) adja meg az A, B pontok helyét.

3.10. Egy egyenes pontosan akkor mer?leges egy körre, ha átmegy annak középpontján. Így két adott kör pontosan akkor koncentrikus, ha egynél több olyan egyenes van, amelyre mindkett? mer?leges.

Tehát ha adott két kört koncentrikus körökbe akarunk vinne, akkor olyan kögyeneseket kell keresnünk, amelyek mindkett?re mer?legesek. Ha két ilyen kögyenes egyik metszéspontja az inverziónk centruma, akkor a másik metszéspont képe lesz a képkörök közös középpontja.

A szükséges kögyenesek megtalálását létezését a 3.9. feladat garantálja és némelyik megoldásból a szerkesztés is kiderül.

3.11. a Ha a k_1, k_2 körök sugarai r_1 és r_2, akkor a körlánc tagjainak középpontjai egy $R= \frac{r_1+r_2}{2}$ sugarú körön vannak, és a körlánc tagjai $\rho=\frac{|r_1-r_2|}{2}$ sugarú körök (lásd a 2. ábrát). A koncentrikus körök A középpontjai, a körlánc két szomszédos tagjának O_1, O_2 középpontja egy olyan egyenlő szárú háromszöget alkot, amelyben az alap T felezőpontja az körlánc tagjainak érintési pontja és amelyben

$$\begin{aligned}O_1AT\angle&=\tfrac{180^\circ}{8}=22{,}5^\circ, & ATO_1\angle&=90^\circ,\\ TO_1&=\rho=\tfrac{|r_1-r_2|}{2}, & AO_1&=R=\tfrac{r_1+r_2}{2},\end{aligned}\tag{1}$$

tehát

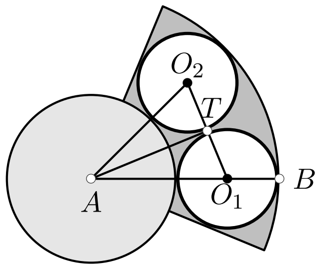
$$\sin 22{,}5^\circ=\frac{\frac{|r_1-r_2|}{2}}{\frac{r_1+r_2}{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad \sin 22{,}5^\circ=\frac{\left|\frac{r_1}{r_2}-1\right|}{\frac{r_1}{r_2}+1},\tag{2}$$

amiből

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1+\sin 22{,}5^\circ}{1-\sin 22{,}5^\circ}.\tag{3}$$

b) Az ATO_1 derékszögű háromszögben $AT=R$, ezt a hosszt keressük és Pitagorasz tételével meg is határozható:

$$R^2=AT^2=AO_1^2-O_1T^2=\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2-\left|\frac{r_1-r_2}{2}\right|^2=r_1r_2,\tag{4}$$



3.11M.2. ábra.

azaz $R = \sqrt{r_1 r_2}$.

c) Az 1 összefüggések közül csak a legelső módosul az alábbi módon:

$$O_1AT\angle = \frac{180^\circ}{n},$$

így az általános esetben

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1+\sin\frac{180^\circ}{n}}{1-\sin\frac{180^\circ}{n}},$$

míg az $R = \sqrt{r_1 r_2}$ összefüggés ugyanúgy érvényben marad.

3.12. Invertáljuk a 3.11. feladatban vizsgált konfigurációt egy tetszőleges, de az ottani k_1, k_2 koncentrikus körökkel nem koncentrikus körre!

3.3. a) Komplex számok hányadosának argumentuma az osztandó és az osztó argumentumának különbsége. A $(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$ osztóviszony argumentuma (forgásszöge) az $(z_1 - z_3)$, $(z_3 - z_2)$ komplex számok argumentumának különbsége. A hányados tehát pontosan akkor valós, ha a z_1 és z_3 ponton átmenő egyenes egyállású a z_3 és z_2 ponton átmenő egyenessel, azaz pontosan akkor, ha z_1, z_2 és z_3 egy egyenesen van.

b) A hasonlósági transzformációk megtartják a szakaszok egymáshoz viszonyított arányát és a szögek nagyságát, tehát megőrzik három komplex szám komplex osztóviszonyát is. Természetesen ezek hányadosát, a kettősviszonyt is megőrzik.

c) Ezt elég az origó középpontú egységkörre vonatkozó inverzióra igazolni, hiszen hasonlósági transzformációkkal ebből minden inverzió elkészíthető. Az alábbi algebrai összefüggést kell igazolni:

$$\overline{\left(\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2} : \frac{z_1-z_4}{z_4-z_2}\right)} = \frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2}} : \frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_2}}$$

De

$$\overline{\left(\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2} : \frac{z_1-z_4}{z_4-z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(z_1-z_3)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_1-z_4)}\right)} = \frac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_4}-\overline{z_2})}{(\overline{z_3}-\overline{z_2})(\overline{z_1}-\overline{z_4})}$$

míg

$$\frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2}} : \frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_2}} = \frac{\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_2}\right)}{\left(\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_4}\right)}$$

így a jobb oldali törtet $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$-gyel bővítve a bizonyítandó állítást kapjuk.

d) A $(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$ osztóviszony értéke olyan komplex szám, amelynek argumentuma mod 180° megadja azt a szöget, amellyel a z_2, z_3 pontokon átmenő egyenest el kell forgatni, hogy a z_3, z_1 pontokon átmenő egyenest kapjuk. Ehhez hasonlóan, a $(z_1, z_2, z_4) = \frac{z_1-z_4}{z_4-z_2}$ osztóviszony argumentuma mod 180° az a szög, amellyel a z_2, z_4 pontokon átmenő egyenest el kell forgatni, hogy a z_4, z_1 pontokon átmenő egyenest kapjuk. A két osztóviszony hányadosa pontosan akkor valós, ha a két osztóviszony argumentuma egyenlő egymással mod 180°.

Ha ez a két szög 0-val kongruens mod 180°, akkor a négy pont egy egyenesen van, ha pedig egy $\alpha \neq 0$ szöggel kongruens mod 180°, akkor a z_3 és a z_4 komplex számoknak megfelelő pontok illeszkednek a z_1, z_2 pontpár α szögű látókörére. Ezzel az állítást igazoltuk.

3.3.

1. megoldás. A k gömbi kör a g gömbnek valamely Σ_k síkkal való metszete. Legyen k középpontja a Σ_k síkban O_k, legyen továbbá a g gömb középpontja O_g.

Tekintsük az O_g, O_k, P pontokat!

Ha $P = O_g$, akkor a vetítés egyben középpontos tükrözés, ez tényleg körtartó.

Ha $P = O_k$, akkor k vetítése egy önmagára való középpontos tükrözés, k képe kör.

Ha $O_g = O_k$, akkor tekintsük a g gömb k körre merőleges $k^\perp$ átmérőegyenesét. Ha P illeszkedik erre az egyenesre, akkor a teljes ábra forgástengelye a $k^\perp$ egyenes, természetes, hogy a k kör képe is kör lesz. Ha P nem illeszkedik a $k^\perp$ egyenesre, akkor a P pont és a $k^\perp$ egyenes által kifeszített Π sík szimmetriasíkja az ábrának, a további vizsgálatok megegyeznek azzal az esettel, amikor O_g, O_k és P mind különbözőek.

Ha O_g, O_k és P különbözőek, akkor az ábránk megint forgásszimetrikus.

Végül, ha O_g, O_k és P nincsenek egy egyenesen, akkor tekintsük e három pont Π síkját. Messe ez a sík a k kört az A_kB_k érintőben és legyen a PA_k, PB_k egyenesek másik metszéspontja a g gömbbel A_l illetve B_l. A g gömb szimmetrikus a Π síkra, mert rajta van a középpontja, és a k kör is szimmetrikus Π-re, hiszen Π tartalmazza a k kör forgástengelyét az O_gO_k egyenest. Ebből következően a Π sík az egész ábra, tehát a k kör P-ből vetített l képének is szimmetriasíkja lesz.

A g gömböt a Π sík két félgömbre osztja. A g gömbnem a P-ből való önmagára vetítése kicseréli egymással ezt a két félgömböt, ha a P pont a g gömb belső pontja, míg az egyes félgömböket önmagára képezi, ha g külső pont.

Tekintsük a k kör tetszőleges C_k pontját és annak A_kB_k egyenesre vonatkozó U_k merőleges vetületét. Messe a PU_k egyenes az A_lB_l egyenest U_l-ben és bocsássunk merőleges A_lB_l-re U_l-ben. Állítjuk, hogy e merőlegesnek a G gömbbel való egyik – az előző bekezdésben foglaltaknak megfelelő – metszéspontja az a C_l pont, amely a C_k pont képe a g gömbnek a P pontból önmagára való vetítésénél. Ha ezt igazoljuk, akkor ezzel a feladat állítását is bizonyítjuk, hiszen az így adódó C_l pontok mértani helye az A_lB_l egyenesen átmenő, a Π síkra merőleges Σ_l sík és a g gömb metszésvonala, ami egy l kör. (Lásd az 1. ábrát)

A P, U_k, U_l pontok egy egyenesen vannak és az U_kC_k, U_lC_l egyenesek párhuzamosak egymással, így mindössze annyit kell igazolnunk, hogy

$$\frac{U_lC_l}{U_kC_k} = \frac{PU_l}{PU_k}. \tag{1}$$

Írjuk fel a magasságtételt a k, l körökben az A_kB_k, A_lB_l átmérőkre írt $A_kC_kB_k$, $A_lC_lB_l$ derékszögű háromszögekre!

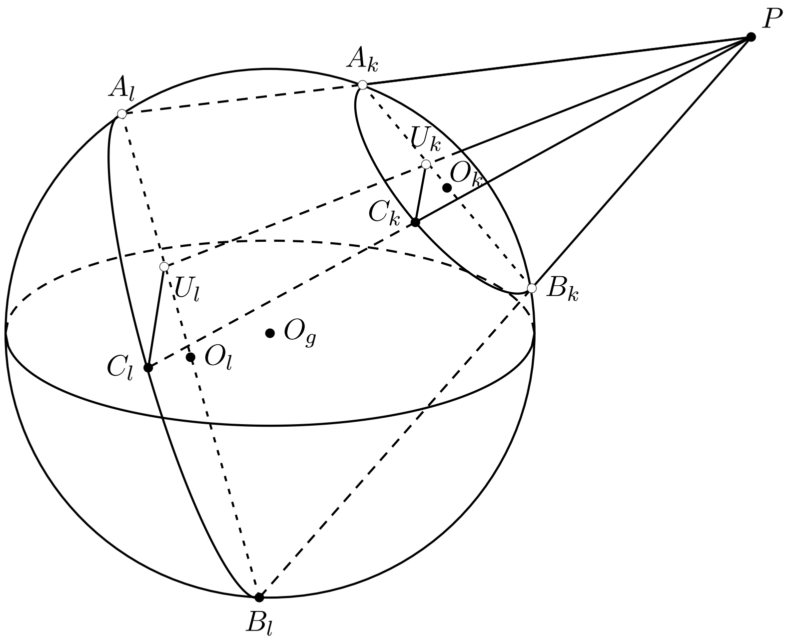
$$U_lC_l^2 = U_lA_l \cdot U_lB_l, \qquad U_kC_k^2 = U_kA_k \cdot U_kB_k. \tag{2}$$

Ennek fényében (1) igazolásához azt kell megmutatni, hogy

$$\frac{U_lA_l \cdot U_lB_l}{U_kA_k \cdot U_kB_k} = \frac{PU_l^2}{PU_k^2},$$

azaz

$$\frac{U_lA_l \cdot U_lB_l}{PU_l^2} = \frac{U_kA_k \cdot U_kB_k}{PU_k^2}. \tag{3}$$



3.3M1.1. ábra.

írjuk fel a Szinusz-tételt a PU_lA_l, PU_lB_l, PU_kA_k, PU_kB_k háromszögekben!

$$\frac{U_lA_l}{PU_l} = \frac{\sin U_lPA_l\angle}{\sin PA_lU_l\angle}, \qquad \frac{U_lB_l}{PU_l} = \frac{\sin U_lPB_l\angle}{\sin PB_lU_l\angle}, \tag{4}$$

illetve

$$\frac{U_kA_k}{PU_k} = \frac{\sin U_kPA_k\angle}{\sin PA_kU_k\angle}, \qquad \frac{U_kB_k}{PU_k} = \frac{\sin U_kPB_k\angle}{\sin PB_kU_k\angle}. \tag{5}$$

A bizonyítandó (3) összefüggés trigonometrikus formája tehát

$$\frac{\sin U_lPA_l\angle \cdot \sin U_lPB_l\angle}{\sin PA_lU_l\angle \cdot \sin PB_lU_l\angle} = \frac{\sin U_kPA_k\angle \cdot \sin U_kPB_k\angle}{\sin PA_kU_k\angle \cdot \sin PB_kU_k\angle}. \tag{6}$$

Az A_l, B_l, A_k, B_k pontok mind illeszkednek a Π sík és a g gömb π körmetszetére, így

$$\begin{array}{lllllll} \sin PA_lU_l\angle & = & \sin A_kA_lB_l\angle & = & \sin A_kB_kB_l\angle & = & \sin U_kB_kP\angle, \\ \sin PB_lU_l\angle & = & \sin B_kB_lA_l\angle & = & \sin B_kA_kA_l\angle & = & \sin U_kA_kP\angle, \end{array} \tag{7}$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy

$$\sin U_lPA_l\angle = \sin U_kPA_k\angle, \qquad \sin U_lPB_l\angle = \sin U_kPB_k\angle, \tag{8}$$

így a (7), (8) összefüggések igazolják a (6)relációt.

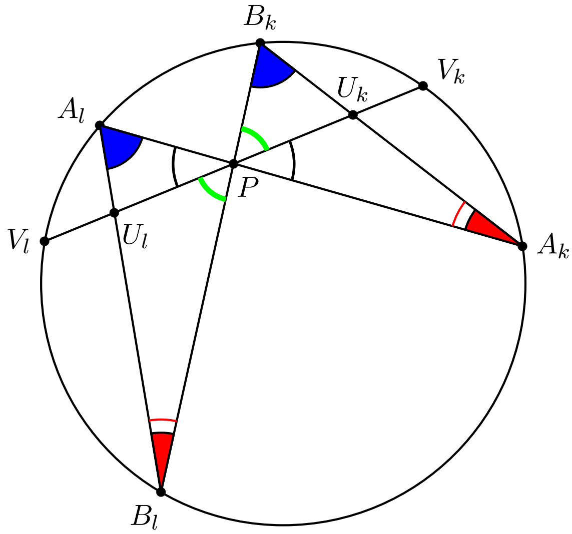
Megjegyzés A (3) önmagában is érdekes. Következik belőle pld a nevezetes „Pillangó-tétel”.
Ehhez tegyük fel, hogy P a g gömb, azaz a k kör belső pontja és $PU_l \geq PU_k$. A (3) összefüggés ilyenkor azt jelenti, hogy az U_l pontnak a k körre (a g gömbre) vonatkozó hatványa legalább akkora, mint az U_k pontnak a k-ra vonatkozó hatványa. Ha az U_kU_l egyenes a k kört a V_k, V_l pontokban metszi, akkor tehát

$$V_lU_l \cdot U_lV_k \geq V_kU_k \cdot U_kV_l,$$

azaz

$$V_lU_l \cdot (U_lU_k + U_kV_k) \geq V_kU_k \cdot (U_kU_l + U_lV_l),$$

amiből a zárójelek felbontása, a $V_lU_l \cdot V_kU_k$ tag eliminálása és U_lU_k-val való osztás után $V_lU_l \geq V_kU_k$. Ezek a lépések megfordíthatók, így azt kaptuk, hogy a $PU_l \geq PU_k$, $V_lU_l \geq V_kU_k$ egyszerre teljesülnek. Ez azt is jelenti, hogy P pontosan akkor felezi az U_kU_l szakaszt, ha P az V_kV_l húr felezőpontja.



3.3M1.2. ábra.

2. megoldás. *Inverzió a térben*

Legyen a P pontnak a g gömbre vonatkozó hatványa λ. A P centrumú λ paraméterű inverzió önmagára képezi a g gömböt úgy, hogy pontosan azt a leképezést valósítja meg rajta, mint a P-ből való vetrítés.

A k kör előállítható két gömb vagy egy gömb és egy sík metszésvonalaként. Az inverzió a gömbökből és síkokból gömböket és síkokat „csinál”, így a k kör képe is előáll két gömb vagy egy gömb és egy sík metszésvonalaként, tehát kör lesz.

3. megoldás. *Algebrai geometria*

Először elmondjuk a gondolatmenet lényegét, utána részletezzük a bizonyítást. Tekintsük azt a $\mathcal{K}$ kúpot, amely a P ponton át a k kör pontjaihoz húzott egyenesek alkotnak. A $\mathcal{K}$ kúp a térbeli Descartes koordinátarendszerben egy háromváltozós másodfokú egyenlettel, jelben $\mathcal{K}_2 = 0$ adható meg. Ennek részletes indoklását kéőbb adjuk meg. A g gömb is egy háromváltozós másodfokú egyenlettel – jelben $\mathcal{G}_2 = 0$ – adható meg ugyanabban a koordinátarendszerben.

E két egyenlet $\alpha\mathcal{K}_2 + \beta\mathcal{G}_2 = 0$ lineáris kombinációi is háromváltozós másodfokú egyenlettel megadható alakzatok, és ezek az alakzatok mind tartalmazzák a g gömb és a $\mathcal{K}$ kúp közös pontjait.

Tekintsük a k kör Σ_k síkjának egy k pontjaitól különböző Q pontját. Q a gömbön és a kúpon sincs rajta, így azok egyenletébe beírva Q koordinátáit a kapott $\mathcal{G}(Q)$, $\mathcal{K}(Q)$ értékek zérustól különbözőek lesznek. Tekintsük tehát a

$$\mathcal{G}(Q)\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}(Q)\mathcal{G}_2 = 0 \tag{1}$$

egyenlettel megadható másodrendű felületet. Ezt az egyenletet kielégíti K minden pontja és a Q pont is. Ebből következik, hogy a Σ_k sík minden pontja is kielégíti az egyenletet. Valóban, egy többváltozós poklinomnak valamely egyenesre való megszorítása is is másodfokú polinom az egyenesen, így vagy azonosan nulla azon az egyenesen vagy legfeljebb két zérushelye van ott. A Q-n átmenő k-t metsző egyeneseken azonban három zérushelye is van vizsgált polinomunknak, így ezeken az egyeneseken azonosan nulla. Ebből következik, hogy a k kör belsejében is azonosan nulla és Σ_k minden pontján át húzható k belsején áthaladó egyenes, így a kifejezés zérus a teljes Σ_k síkon.

Vegyünk fel egy új koordinátarendszert, amelynek origója, y és z tengelye is a Σ_z síkban van, amelbyen tehát Σ_z egyenlete az $x = 0$ egyenlet. Nem nehéz igazolni, hogy a G, $\mathcal{K}$ alakzatok egyenlete ezen új koordinátarendszerbe nis másodfokú, utóbbié legyen $\mathcal{K}'_2 = 0$. Részletesebben:

$$\mathcal{K}'_2: \quad a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}x + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{24}y + a_{33}z^2 + a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{2}$$

A $\mathcal{K}'_2$ kifejezés mindig zérus, ha $x = 0$, azaz a $a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{24}y + a_{33}z^2 + a_{34}z + a_{44}$ kifejezés értéke y és z bármely értéke esetén nulla. Nem nehéz igazolni, hogy ez csak akkor fordulhat elő, ha

$$a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{33} = a_{34} = a_{44} = 0.$$

Ekkor tehát

$$\mathcal{K}'_2: \quad x\,(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) = 0. \tag{3}$$

A $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14} = 0$ egyenlet egy Σ_l sík egyenlete, tehát a kúp és a gömb metszéspontjai két síkban helyezkednek el, ahol nyilván két kört alkotnak, hiszen a gömb és a sík metszésvonala kör. A P-ből való vetítés egymásra képezi ezt a két síkot, ezt a két kört.

3.1. Invertáljuk az ABC háromszög csúcsait és k körülírt körét a háromszög i beírt körére! Az inverzió 3.1M. megoldásban leírt szerkesztése szerint az A, B, C pontok A', B', C' képe rendre a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakasz felezőpontja. A k kör képe tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög k' Feuerbach köre. Ennek O_F középpontja nem a k kör O középpontjának képe, de az inverzió középpontja, az invertált és a képkör középpontjai egy egyenesen vannak, azaz most

$$O_1, \quad O \quad \text{és} \quad O_F$$

kollineáris. Másrészt az $A_1B_1C_1$ háromszög Euler egyenesén van e háromszög körülírt és Feuerbach körének középpontja, valamint a magasságpontja, azaz

$$O_1, \quad O_F \quad \text{és} \quad M_1$$

is kollineáris. Ebből következik, hogy

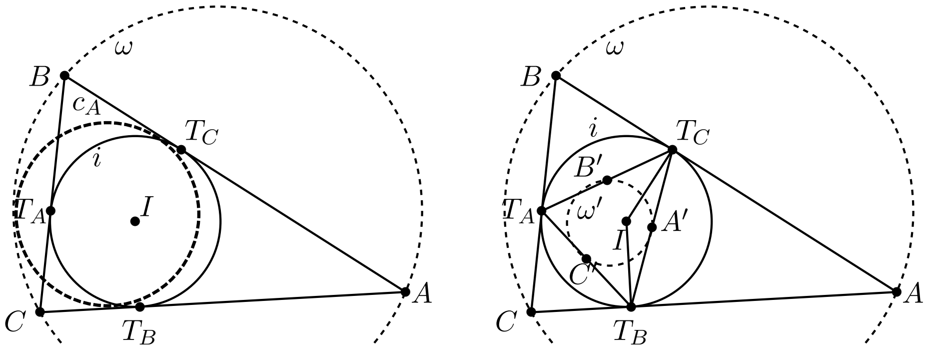
$$O, \quad O_1 \quad \text{és} \quad M_1$$

egy egyenesen vannak.

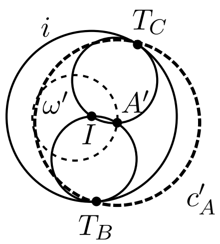
3.2. Két olyan kör is van, amely érinti az AB, AC oldalegyeneseket és az ω kört: az egyik, amelyet most nem vizsgálunk, az ω kör külsejében van, tehát az ABC háromszöglapon és így az i körön is kívül helyezkedik el.

Alkalmazzunk i-re vonatkozó inverziót! (lásd az 1. ábrát). Az i kör AB, AC és BC oldalon található T_C, T_B, T_A érintési pontjai fixen maradna az inverziónál. Ismeretes, hogy az A, B, C csúcsok ilyenkor az T_BT_C, T_CT_A, T_AT_B szakaszok A', B', C' felezőpontjaiba képződnek.. Az ω körülírt kör képe a $T_AT_BT_C$ háromszög Feuerbach köre lesz, melynek sugara a $T_AT_BT_C$ háromszög körülírt köre sugarának fele lesz.

Az AB, AC egyenesek IT_C, IT_B átmérőjű körökbe képződnek, ahol I az i kör középpontja, inverziónk centruma. Ezeknek a köröknek a sugara is fele az i beírt körének és mindketten átmennek az A' ponton. Ez a két kör adott, míg az ω' kör változhat, de ő is ugyanakkora sugarú, A'-n átmenő kör. Van-e olyan kör, amely érinti mind a három legutóbb említett kört?



3.2M.1. ábra.



3.2M.2. ábra.

Igen van: az A' középpontú, i-vel azonos sugarú c'_A kör megfelelő (lásd a 2. ábrát). Ez nem lehet teljességgel i belsejében, hiszen azzal egyenlő sugarú. Emiatt invertált képe, c_A sem lesz teljesn i-n kívül, nem egyezhet meg a megoldás elején említett „rossz” körrel. A most kapott c_A kör tehát megfelelő és független a B, C pontpár választásától.

3.7. Lásd Kömal[11][12], F. 1783 (1971/9).

3.8. Lásd Kömal 768. gyakorlat (1962/4).

3.9. Lásd Kömal P. 80 (1972/2).

3.10. Lásd Kömal P. 84 (1972/4).

3.11. Az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata (Kömal 1984/1)

3.12. Lásd Kömal P. 44 (1970/4).

3.13. Lásd Kömal P. 28 (1969/12).

4. Komplex számok a geometriában

4.1. Az általánosság megszorítása nélkül a húrnégyszög köré írt körének középpontja az O pont, csúcsai a, b, c, d. A négy háromszög köré írt köre megegyezik. A komplex számokra, mint vektorokra tekintünk és felhasználjuk, hogy amennyiben a köré írt kör középpontjából irányítunk vektorokat a háromszög csúcsaiba, akkor a három vektor összege éppen a magasságpontba mutat. Ennek megfelelően a négy háromszög magasságpontjaihoz tartozó komplex számok rendre $a + b + c, b + c + d, a + c + d$ és $a + b + d$. Az $a + b + c$ magasságpontot és a d csúcsot összekötő szakasz felezőpontja a $\frac{a+b+c+d}{2}$ pont. Hasonlóan látjuk, hogy ez bármelyik magasságpontra és a negyedik , a háromszög csúcsai közül hiányzó, csúcsra igaz. A négy felezőpont egybeesik. Ez geometriai szempontból pontosan azt jelenti, hogy az eredeti négyszög és a magasságpontok által meghatározott négyszög erre a pontra középpontosan szimmetrikus.

4.2. Válasszuk ismét origónak a körülírt kör középpontját. Az (abc) háromszög Feuerbach-körének f középpontja az (OM) szakasz felezőpontja, azaz

$$f = \frac{a+b+c}{2}.$$

Az f-et pl. az (ab) oldal f_1 felezőpontjával összekötő vektor

$$f_1 - f = \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{2} = -\frac{c}{2},$$

ez pedig párhuzamos az O-t a c ponttal összekötő vektorral és fele olyan hosszúságú.

4.3. a) Legyen ismét a köré írt kör középpontja az O pont, a négyszög csúcsai az a, b, c, d pontok. Az a, b, c, d mindegyike azonos hosszúságú. Az egyes háromszögek Feurbach-köreinek középpontjai a magasságpontokat a köré írt kör középpontjával összekötő szakaszok felezőpontjai

$$\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+d}{2}, \frac{a+c+d}{2}, \frac{b+c+d}{2}.$$

Vegyük most az $\frac{a+b+c+d}{2}$ pontot. Az egyes középpontok távolságai ettől a ponttól éppen a kör sugarának felével egyenlők. Pl. $\frac{a+v+c}{2} - \frac{a+b+c+d}{2} = -\frac{c}{2}$. A négy középpont az $\frac{a+b+c+d}{2}$ körüli körön helyezkeik el. Ezt a kört hívjuk a négyszög Feuerbach-körének.

b) Most láttuk be, hogy a négy háromszög Feuerbach-körei átmennek a négyszög Feuerbach-körének középpontján.

c) A négyszög súlypontja $\frac{a+b+c+d}{4}$, valóban felezi az OO' szakaszt.

Eltérő gondolatmenettel is célhoz érünk. Legyenek az egyes háromszögek Feuerbach-köreinek középpontjai a', b', c', d'. Alkalmazzuk a

$$z' = \frac{1}{2}\Big[-z + (a+b+c+d)\Big]$$

transzformációt. Ez a transzformáció az $(abcd)$ négyszöget az $(a'b'c'd')$ négyszögbe viszi. Láthatóan ez a transzformáció egy eltolás és egy $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság szorzata, ezért az $(abcd)$ húrnégyszög képe $(a'b'c'd')$ négyszög is húrnégyszög, a pontok egy körön vannak. A transzformáció az O pontot az $\frac{a+b+c+d}{2}$ pontba viszi.

4.4. Az $(abcde)$ ötszög esetében vegyük az $\frac{a+b+c+d+e}{2}$ pontot. Ennek a pontnak pl. az $(abcd)$ húrnégyszög Feuerbach-körének középpontjától vett távolsága a

$$\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{a+b+c+d+e}{2} = -\frac{e}{2}$$

komplex szám normája, az eredeti kör sugarának fele. Az öt húrnégyszög Feuerbach-körének középpontja egy körön van, a középpontja $\frac{a+b+c+d+e}{2}$.

Látjuk, hogy ez az eljárás folytatható. Egy körbe írható n-szög esetén egy-egy csúcs elhagyásával $(n-1)$ oldalú húrsokszögeket kapunk. Ezek mindegyikének van Feuerbach-köre. Az n darab középpont egy körön van.

4.1. A $\frac{B-C}{C-A} = \frac{x}{y}$ egyenlet C-re lineáris, ebből C-t kifejezve kapjuk a bizonyítandó összefüggést.

4.2. A hasonlósági feltétel azzal ekvivalens, hogy a két háromszögben a_2-nél illetve b_2-nél irányítás szerint is azonos szög van és a két szomszédos oldal aránya is megegyezik. A komplex számok nyelvén tehát
$$\frac{a_2-a_1}{a_0-a_2}=\frac{b_2-b_1}{b_0-b_2}.$$
Ebből adódik a kívánt polinomiális kifejezés:
$$(a_0b_1-a_1b_0)+(a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b_0-a_0b_2).$$

4.3. a) A z számnak megfelelő pont akkor és csakis akkor van az említett egyenesen, ha a $\frac{z}{\epsilon}$ tört értéke valós szám. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha egyenlő a konjugáltjával. A szükséges és elégséges feltétel tehát
$$\frac{z}{\epsilon}=\overline{\left(\frac{z}{\epsilon}\right)},\qquad \text{ahol}\qquad \overline{\left(\frac{z}{\epsilon}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{\epsilon}}.$$
Ebből közvetlenül adódik a feladat állítása.

b) Most a $\frac{z-b}{\epsilon}$ törtnek kell valósnak lennie, tehát
$$\frac{z-b}{\epsilon}=\frac{\overline{z}-\overline{b}}{\overline{\epsilon}}.$$
Ebből átszorzás és rendezés után adódik a feladat állítása.

4.4. A 4.5. feladatból a keresett polinom az
$$(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$$
alakban adódik. A szorzást elvégezve kapjuk a $p(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ alakot.

4.5.

1. megoldás. A 4.3. feladat megoldásaiban láttuk, hogy ha $z_0z_1z_2$ pozitív körüljárású szabályos háromszög, akkor $z_2=\overline{e}_{\frac{\pi}{3}}z_0+e_{\frac{\pi}{3}}z_1$, ahol $e_{\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Így ha $z_0z_1z_2$ pozitív körüljárású szabályos háromszög, akkor a
$$z_0+\omega z_1+\omega^2 z_2=0 \tag{1}$$
feltétel is teljesül, hiszen az
$$\omega^2\cdot e_{\frac{\pi}{3}}=e_{\frac{4\pi}{3}}\cdot e_{\frac{\pi}{3}}=e_{\frac{5\pi}{3}}=-\omega,$$
$$\omega^2\cdot \overline{e}_{\frac{\pi}{3}}=e_{\frac{4\pi}{3}}\cdot e_{-\frac{\pi}{3}}=e_{\frac{3\pi}{3}}=-1$$
összefüggések alapján
$$z_0+\omega z_1+\omega^2 z_2=z_0+\omega z_1+\omega^2\left(\overline{e}_{\frac{\pi}{3}}z_0+e_{\frac{\pi}{3}}z_1\right)=0.$$
Másrészt (1) a z_2 változóban lineáris, tehát adott z_0, z_1 esetén egy megoldása van. Láttuk, hogy a z_0z_1 szakaszra emelt pozitív körüljárású szabályos háromszög harmadik csúcsa megoldás, tehát az az egyetlen megoldás. Tehát, ha teljesül a (1) feltétel, akkor a háromszög szabályos.

2. megoldás. Az $1+\omega+\omega^2=0$ összefüggés miatt a megadott feltétel a $z_0-z_2=\omega\cdot(z_2-z_1)$ feltétellel ekvivalens, ami épp azt fejezi ki, hogy a z_2z_0 irányított szakasz a z_1z_2 irányított szakaszból pozitív orientáció szerinti 120°-os forgatással kapható, tehát a háromszög szabályos és pozitív körüljárású.

4.6.

1. megoldás. Az xaO, xbO háromszögek egybevágóak, ellenkező körüljárásúak és x-ben derékszögűek, így

$$\frac{x-a}{O-a} = -\frac{x-b}{O-b}$$

hiszen a két tört abszolútértéke egyenlő és argumentumuk különbsége $2 \cdot 90° = 180°$. A felírt összefüggés x-re nézve lineáris, megoldása:

$$x = \frac{2ab}{a+b}.$$

2. megoldás. Az abO, abx háromszögek egyenlő szárúak, de a szárak szöge (O-ban illetve x-ben) nem egyenlő, hanem ezek egymás kiegészítő szögei. Így abx az $a(-b)O$ háromszöghöz hasonló:

$$\frac{b-x}{x-a} = \frac{-b-O}{O-a} = \frac{b}{a},$$

ahol az utolsó lépésben O-t a számsík origójának tekintettük. Ebből a 4.1. feladat állítása alapján

$$x = \frac{ab+ba}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}.$$

4.7. A két szám számtani közepe az O középpontú kör (ab) húrjának felezőpontja.

A harmonikus közép meghatározásához tekintsük az O középpontú kör a és b pontjaiba húzott érintők h metszéspontját. $90°$-os (pozitív) forgással az a vektor $(h-a)$-val, a b pedig $(b-h)$-val párhuzamos helyzetbe hozható. Mivel $|h-a| = |b-h|$ (hiszen külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok), ezért az elforgatott a-t ugyanolyan λ arányban kell nyújtani, vagy zsugorítani, hogy a $(h-a)$ vektort kapjuk, mint b-t, hogy a $(b-h)$ vektort kapjuk:

$$\lambda a i = h - a,$$

$$\lambda b i = b - h.$$

A két egyenlőséget elosztva és rendezve:

$$\frac{a}{b} = \frac{h-a}{b-h},$$

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

A harmonikus közepet tehát úgy kapjuk, hogy megszerkesztjük az a és b pontokba húzott érintők metszéspontját.

A mértani közép meghatározásához tekintsük a két komplex szám trigonometrikus alakját. A komplex számok halmazán egy számnak két négyzetgyöke van. Ezek alapján a $\sqrt{ab}$ komplex számok hossza megegyezik a és b hosszával, tehát mindkét szám az O középpontú a-t és b-t tartalmazó körön helyezkedik el. Az a és b szorzatának argumentuma a két szög összege, a gyökvonásnál tehát ennek felét, illetve felének $180°$-os elforgatottját kapjuk. Az (aOb) szög felezőjének a körrel vett metszéspontjai adják a két megoldást.

4.1.

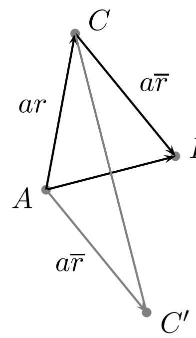
1. megoldás. Először arra adjunk választ, hogyan fejezhető ki, hogy egy háromszög egyenlő szárú. Az ABC egyenlő szárú háromszög. Forgassuk el az $\overrightarrow{AB} = a$ vektort pozitív irányba, és nyújtva (vagy zsugorítva) kapjuk az $\overrightarrow{AC}$ vektort. Ezt a forgatva nyújtást olyan r komplex számmal történő szorzás idézi elő, amelynek argumentuma a $BAC\angle$-gel egyenlő. Tehát $\overrightarrow{AC} = ar$. Viszont az előbbivel ellentétes irányú , de ugyanolyan mértékű forgatva nyújtást az $\overline{r}$ -tal való szorzás idéz elő, ezért az ábráról is leolvasható módon

$$ar + a\overline{r} = a,$$

vagyis az a-val egyszerűsítve

$$r + \overline{r} = 1.$$

Ebből azt is látjuk, hogy $Re(r) = Re(\overline{r}) = \frac{1}{2}$, s ennek következményeként $r - \overline{r}$ tisztán képzetes szám.



4.1M1.1. ábra.

Térjünk rá a feladat megoldására. Az egyszerűbb kezelhetőség érdekében legyen az A pont az origo, továbbá legyen b és d a két megfelelő paralelogramma-csúcs. Ekkor a C csúcsnak megfelelő komplex szám éppen $b + d$. Legyen most a fentiek szerint az r egy olyan komplex szám, amelyre teljesül, hogy $r + \overline{r} = 1$. Az E csúcsnak megfelelő e komplex számra

$$e = (b + d)r,$$

hasonlóan az F pontnak megfelelő komplex f számra

$$f = d + (b - d)r.$$

Az (ef) vektorra

$$ef = d + br - dr - br - dr = d - 2dr = d(r + \overline{r} - 2r) = d(\overline{r} - r).$$

Tudjuk, hogy $r - \overline{r}$ tisztán képzetes szám, így ez a vektor merőleges a paralelogramma AD oldalára.

Foglalkoznunk kell még egy további lényeges esettel. Előfordulhat, hogy az AC-re pozitív irányban, míg a BD-re negatív irányban írtunk egyenlő szárú háromszöget. Ekkor a megoldás a következő szerint módosul.

$$e = (b + d)r,$$

$$f = d + (b - d)\overline{r}.$$

Ekkor a két pontot összekötő vektor

$$ef = d + b\overline{r} - d\overline{r} - br - dr = d(1 - r - \overline{r}) + b(\overline{r} - r) = b(\overline{r} - r).$$

Ez a vektor most a b-re, vagyis az AB oldalra merőleges.

2. megoldás. Ha az CEA, BFD háromszögek egyenlő szárúak – $CE = EA$ és $BF = FD$ – és hasonlóak, akkor vagy azonos körüljárásúak, vagy ellenkező körüljárásúak. Alább azzal az esettel számolunk, amikor azonos körüljárásúak. Ha ellenkező körüljárásúak, akkor az AEC, BFD háromszögek azonos körüljárásúak és az alábbi gondolatmenetben a csak betűcseréket kell végrehajtanunk.

A csúcsoknak megfelelő komplex számot most ugyanazzal a betűvel jelöljük, mint magár a csúcsot. Az elmondottak szerint van egy olyan ϵ egységnyi komplex szám, amelyre

$$\begin{aligned} \epsilon(B-F) &= D-F \\ \epsilon(V-E) &= A-E \end{aligned}$$

A két egyenlet különbségéből rendezés után kapjuk a

$$\frac{B-C}{E-F}=\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$$

relációt. Az a geometriai összefüggés, hogy a paralelogramma BC oldalegyenese merőleges az EF egyenesre egyenletünk alapján azzal ekvivalens, hogy az $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$ komplex szám tisztán képzetes.

Egy komplex szám pontosan akkor tisztán képzetes, ha konjugáltja az ellentettje. Az alábbi átalakítás szerint ez vizsgált számunkra teljesül. Felhasználjuk, hogy egységnyi komplex szám konjugáltja a reciproka.

$$\overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}=\frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}=\frac{1-\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=\frac{z-1}{z+1}=-\frac{1-z}{1+z}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3. megoldás. *Egybevágóságok kompozíciója*

Az A, C csúcsok esetleges felcserélésével elérhető, hogy az $BFD\sphericalangle$, $CEA\sphericalangle$ irányított szögek az irányításnak megfelelően egyenlők legyenek egymással. Jelölje ezt az irányított szöget α.

Az alábbi egybevágósági transzformációkkal dolgozunk: a $\overrightarrow{BC}$ vektorral való eltolást τ jelöli, inverzét, a $\overrightarrow{DA}$ vektorral való eltolástτ^{-1}, az F illetve az E körüli α szöggel való elforgatást F^α illetve E^α.

Vizsgáljuk a

$$\varphi=\tau^{-1}\circ F^\alpha, \qquad \psi=E^\alpha\circ\tau$$

összetett transzformációkat (mindig a jobbra levőt hajtjuk végre előbb).

Mindkét transzformáció irányítástartó és α szöggel forgatja el az irányított szakaszokat, tehát mindkettő α szögű elforgatás. Mivel

$$F^\alpha(B)=D, \qquad \tau^{-1}(D)=A, \qquad \tau(B)=C, \qquad E^\alpha(C)=A,$$

így

$$\varphi(B)=A, \qquad \psi(B)=A.$$

Ebből következik, hogy a φ, ψ transzformációk megegyeznek, hiszen egyetlen egy olyan α irányított szögű elforgatás van, amely B-t A-ba képezi.

Most tengelyes tükrözések segítségével megszerkesztjük a φ, ψ forgatásokat. A τ eltolás tengelyes tükrözések olyan $t_1\circ t_0$ kompozíciójával helyettesíthető, amelyben a két tengely egymással párhuzamos, BC-re merőleges, és t_0-ból a t_1 egy $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ vektorral való eltolással kapható. Válasszuk meg t_1-t úgy, hogy átmenjen E-n. Ebből t_0 egyértelműen adódik.

A τ^{-1} eltolást megadó $t_2'\circ t_1'$ kompozíció tengelyei is merőlegesek BC-re, de itt t_2'-ből kapható meg t_1' egy $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ vektorral való eltolással. Vegyük fel t_1'-et úgy, hogy átmenjen F-en!

A feladat annak igazolásából áll, hogy a t_1, t_1' tengelyek megegyeznek.

Az F^α forgatást a $t_1' \circ t_0'$ kompozíció adja meg, ahol t_0' az az F-en átmenő egyenes, amely t_1'-ből F körüli $-\frac{\alpha}{2}$ szögű elforgatással kapható. Az E^α forgatást pedig az $t_2 \circ t_1$ kompozíció adja meg, ahol t_2 az az E-n átmenő egyenes, amely t_1-ből E körüli $\frac{\alpha}{2}$ szögű elforgatással kapható.

$$\varphi = \tau^{-1} \circ F^\alpha = (t_2' \circ t_1') \circ (t_1' \circ t_0') = t_2' \circ t_0';$$
$$\psi = E^\alpha \circ \tau = (t_2 \circ t_1) \circ (t_1 \circ t_0) = t_2 \circ t_0.$$

Mivel a φ, ψ elforgatások azonosak, így a $t_2 \cap t_0$, $t_2' \cap t_0'$ metszéspontok is azonosak, tehát a BC-re merőleges t_2', t_0 tengelyek egybeesnek, amiből következik, hogy az eltolásokat leíró párjaik, t_1' és t_1 is egybeesnek. Ezt akartuk bizonyítani.

4.2.

1. megoldás. Két lehetőség is van. Legyen z_2^+ és z_3^+ az a két szám, amelyre a $z_0 z_1 z_2^+ z_3^+$ négyzet pozitív körüljárású, míg z_2^- és z_3^- jelölje a negatív körüljárású $z_0 z_1 z_2^- z_3^-$ négyzethez tartozó pontokat.

z_2^+ illetve z_2^- a z_0 pont z_1 körüli $(-90°)$-os, illetve $(+90°)$-es elforgatottja, tehát

$$z_2^+ = (z_0 - z_1)(-i) + z_1 = -i \cdot z_0 + (1+i) \cdot z_1, \qquad z_2^- = (z_0 - z_1)i + z_1 = i \cdot z_0 + (1-i) \cdot z_1.$$

Egy másik elforgatással vagy a $z_0 z_1 z_2 z_3$ paralelogrammára vonatkozó $z_3 - z_2 = z_0 - z_1$ összefüggésből

$$z_3^+ = (1-i) \cdot z_0 + i \cdot z_1, \qquad z_3^- = (1+i) \cdot z_0 - i \cdot z_1.$$

2. megoldás. Alkalmazzuk a 4.1. feladat állítását. A $z_0 z_1 z_2$, $z_0 z_1 z_3$ háromszögek ellenkező körüljárású egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Tehát ha a $z_0 z_1 z_2 z_3$ négyzet pozitív körüljárású, akkor a $z_0 z_1 z_2$ háromszög hasonló a 0, 1, $(1+i)$ komplex számok alkotta háromszöghöz, a $z_0 z_1 z_3$ háromszög pedig a 0, 1, i számok háromszögéhez. A 4.1. feladat állítása szerint tehát ilyenkor a $z_0 = A$, $z_1 = B$ választás mellett $z_2 = C$-vel

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0} = \frac{1-(1+i)}{(1+i)-0} = \frac{-i}{1+i},$$

azaz

$$z_2 = \frac{(-i)z_0 + (1+i)z_1}{1+i+(-i)} = -iz_0 + (1+i)z_1,$$

illetve ugyanúgy $z_0 = A$, $z_1 = B$ mellett $z_3 = C$-vel

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_0} = \frac{1-i}{i-0} = \frac{1-i}{i},$$

azaz

$$z_3 = \frac{(1-i)z_0 + iz_1}{(1-i)+i} = (1-i)z_0 + iz_1.$$

Hasonlóan kapjuk a megoldás abban az esetben is, amikor a $z_0 z_1 z_2 z_3$ négyzet negatív körüljárású. Ilyenkor a z_0, z_1, z_2 pontok háromszöge a 0, 1, $1-i$ pontok háromszögéhez, a z_0, z_1, z_3 csúcsok háromszöge a 0, 1, $-i$ „háromszöghöz” hasonló, így

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0} = \frac{1-(1-i)}{(1-i)-0} = \frac{i}{1-i},$$

azaz

$$z_2 = \frac{iz_0 + (1-i)z_1}{i+(1-i)} = iz_0 + (1-i)z_1,$$

illetve ugyanúgy $z_0 = A$, $z_1 = B$ mellett $z_3 = C$-vel

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_0} = \frac{1-(-i)}{(-i)-0} = \frac{1+i}{-i},$$

azaz

$$z_3 = \frac{(1+i)z_0 - iz_1}{(1+i)-i} = (1+i)z_0 - iz_1.$$

4.3.

1. megoldás. A z_2 csúcs a z_0 csúcs z_1 körüli $60°$-os elforgatottja. Pontosabban: ha a $z_0z_1z_2^+$ szabályos háromszög pozitív körüljárású, akkor az előbbi elforgatás negatív forgásirányú, míg ha $z_0z_1z_2^-$ körüljárása negatív, akkor a forgatás iránya negatív. Így az $e_{\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $e_{-\frac{\pi}{3}} = \overline{e}_{\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ hatodik komplex egységgyökökkel

$$z_2^+ = z_1 + \overline{e}_{\frac{\pi}{3}}(z_0 - z_1) = \overline{e}_{\frac{\pi}{3}} z_0 + (1 - \overline{e}_{\frac{\pi}{3}})z_1 = \overline{e}_{\frac{\pi}{3}} z_0 + e_{\frac{\pi}{3}} z_1.$$

Ehhez hasonlóan

$$z_2^- = e_{\frac{\pi}{3}} z_0 + \overline{e}_{\frac{\pi}{3}} z_1.$$

2. megoldás. Alkalmazzuk a 4.1. feladat állítását. Ha a $z_0z_1z_2$ pozitív körüljárású szabályos háromszög, akkor hasonló a 0, 1, $e_{\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ komplex számok alkotta háromszöghöz, tehát a 4.1. feladatban az $A = z_0$, $B = z_1$, $C = z_2$ szereposztással

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0} = \frac{1 - e_{\frac{\pi}{3}}}{e_{\frac{\pi}{3}} - 0} = \frac{\overline{e}_{\frac{\pi}{3}}}{e_{\frac{\pi}{3}}},$$

azaz

$$z_2 = \frac{\overline{e}_{\frac{\pi}{3}} z_0 + e_{\frac{\pi}{3}} z_1}{1 - e_{\frac{\pi}{3}} + e_{\frac{\pi}{3}}} = \overline{e}_{\frac{\pi}{3}} z_0 + e_{\frac{\pi}{3}} z_1.$$

Ha a $z_0z_1z_2$ negatív körüljárású szabályos háromszög, akkor a 0, 1, $\overline{e}_{\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ komplex számok alkotta háromszöghöz hasonló. Ilyenkor tehát

$$\frac{B-C}{C-A} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0} = \frac{1 - \overline{e}_{\frac{\pi}{3}}}{\overline{e}_{\frac{\pi}{3}} - 0} = \frac{e_{\frac{\pi}{3}}}{\overline{e}_{\frac{\pi}{3}}},$$

amiből

$$z_2 = e_{\frac{\pi}{3}} z_0 + \overline{e}_{\frac{\pi}{3}} z_1.$$

a 4.1M1

4.4. Tegyük fel (az ábra esetleges tükrözésével), hogy az $ABCD$ négyzet pozitív körüljárású és így az $AB'C'D'$ négyzet körüljárása pozitív. Tekintsük a síkot a komplex számsíknak, ahol az adott csúcsoknak megfelelő komplex számot ugyanúgy jelöljük, ahogy magát a csúcsot. A 4.2. feladat eredménye szerint az A, B illetve A, B' számokkal így fejezhetjük ki a többi csúcsnak megfelelő számot:

$$C = -iA + (1+i)B, \qquad D = (1-i)A + iB,$$
$$C' = iA + (1-i)B', \qquad D' = (1+i)A - iB',$$

azaz a négyzetek középpontjai illetve a BB', DD' szakaszok felezőpontjai rendre

$$F = \frac{A+C}{2} = \frac{1-i}{2}A + \frac{1+i}{2}B, \qquad F' = \frac{A+C'}{2} = \frac{1+i}{2}A + \frac{1-i}{2}B',$$

$$F_B = \frac{B+B'}{2} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B', \qquad F_D = \frac{D+D'}{2} = A + \frac{i}{2}B - \frac{i}{2}B'.$$

Állítjuk, hogy $FF_DF'F_B$ pozitív körüljárású négyzet. Ennek igazolásához alkalmazzuk újból a 4.2. feladat eredményét, fejezzük ki az FF_D oldalra emelt pozitív körüljárású négyzet további két csúcsát:

$$-iF + (1+i)F_D = \frac{-i\left((1-i)A + (1+i)B\right) + (1+i)\left(2A + iB - iB'\right)}{2} =$$

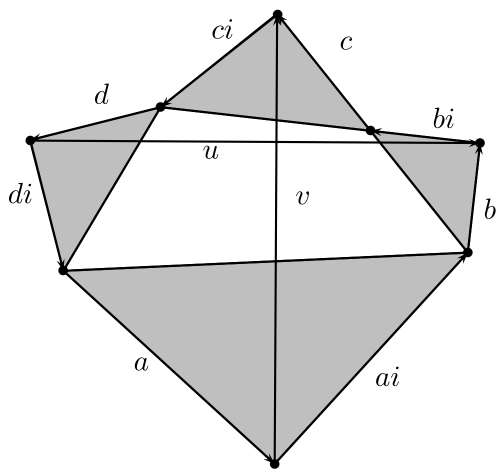
$$= \frac{A\left(-i(1-i) + (1+i)2\right) + B\left(-i(1+i) + (1+i)i\right) + B'(1+i)(-i)}{2} =$$

$$= \frac{1+i}{2}A + \frac{1-i}{2}B' = F',$$

$$(1-i)F + iF_D = \frac{(1-i)\left((1-i)A + (1+i)B\right) + i\left(2A + iB - iB'\right)}{2} =$$

$$= \frac{A\left((1-i)^2 + 2i\right) + B\left((1-i)(1+i) + i^2\right) + B'i(-i)}{2} = \frac{B+B'}{2} = F_B.$$

4.5. A feladat megoldása során nem az oldalakra szerkesztett négyzetek a lényegesek, hanem azok középpontjai, ezeket viszont az oldalakra írt egyenlő szárú derékszögű háromszögek csúcsaiként nyerhetjük.



4.5M.1. ábra.

Az ábrán látható nyolc vektor összege nulla.

$$a + ai + b + bi + c + ci + d + di = 0,$$

$$(a+b+c+d)(1+i) = 0,$$

$$a+b+c+d = 0.$$

Fejezzük ki a szemközti erékszöggű csúcsokat összekötő vektorokat.

$$u = di + a + ai + b,$$

$$v = ai + b + bi + c.$$

Azt kell megmutatni, hogy az u-t $90°$-os forgatás viszi v-be. A $90°$-os forgatásnak i-vel való szorzás felel meg:

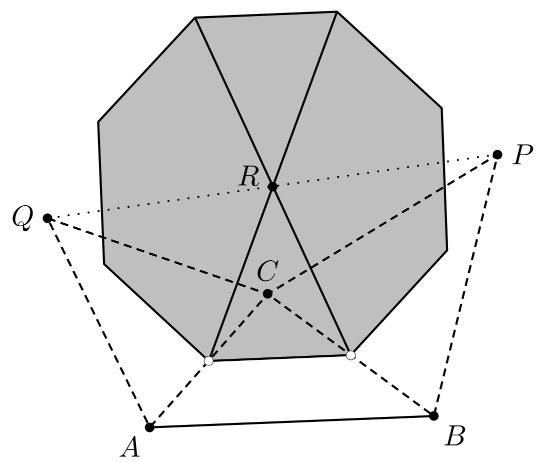
$$ui = di^2 + ai + ai^2 + bi = -a - d + ai + bi.$$

Azt már korábban láttuk, hogy $a + b + c + d = 0$, ennek felhasználásával

$$ui = -a - d + ai + bi = b + c + ai + bi = v.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

4.6. Legyen az AC szakaszra írt szabályos sokszög középpontja P, a BC-re írt Sokszög középpontja Q, továbbá a felezőpontok összekötő szakaszára írt sokszög középpontja R. A csúcsoknak megfelelő komplex számok rendre a, b és c. Most a következőkben a feladatban szereplő állításnál egy általánosabb tényt fogunk igazolni. Ha az eredeti szövegben szereplő módon egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket írunk a két oldalra és a harmadikhoz tatozó középvonalra, akkor (a betűzéseket megtartva) itt is teljesül, hogy az R pont a PQ szakasz felezőpontja.



4.6M.1. ábra.

Az egyenlő szárú háromszögek kezeléséhez a 4.1M1. megoldásban megismert módszert követjük. Választunk egy olyan komplex számot (z), amelyre $z + \overline{z} = 1$. Ezzel az z számmal szorozva a megfelelő oldalak vektorait éppen a szárakra eső vektorokat kapjuk. Az eddigiek alapján

$$p = a + (c - a)z,$$

$$q = c + (b - c)z.$$

Most vegyük a PQ felezőpontját

$$\frac{p+q}{2} = \frac{a + (c-a)z}{+} c + (b-c)z2 = \frac{a+c}{2} + \frac{(b-a)z}{2}.$$

Az AC és BC felezőpontjai összekötő szakaszra írt egyenlő szárú háromszög harmadk csúcsára

$$r = \frac{a+c}{2} + \Big(\frac{b+c}{2} - \frac{a+c}{2}\Big)z = \frac{a+c}{2} + \frac{(b-a)z}{2}.$$

Az általánosabb állítást igazoltuk.

4.7. A megoldás indításaként a harmonikus közép kiszámításának 4.7M. megoldásban leírt módszeréhez nyúlunk. Legyen a BC oldalra írt szabályos sokszög középpontja a P pont. A $BPC\angle$ a teljes szög n-ed része. Azt is tudjuk, hogy $PB = PC$, így az $b - p$ és $c - p$ vektorok egymásnak $\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatottjai. Legyen ϵ az első n-edik egységgyök, $\epsilon = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n}$. Így felírhatjuk, hogy

$$(c - p)\epsilon = b - p.$$

Innen p már kifejezhető:

$$p = \frac{b - c\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a CA és AB oldalakra írt szabályos sokszögek Q, illetve R középpontjaira

$$q = \frac{c - a\epsilon}{1 - \epsilon},$$

$$r = \frac{a - b\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

A 4.4. feladat megoldásánál láttuk, hogy annak algebrai feltétele, hogy a (pqr) háromszög szabályos:

$$p^2 + q^2 + r^2 = pq + qr + rp.$$

Helyettesítsük be a p, q, r-re kapott kifejezéseinket ebbe a feltételbe:

$$\frac{(b - c\epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2} + \frac{(c - a\epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2} + \frac{(a - b\epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2} = \frac{(b - c\epsilon)(c - a\epsilon)}{(1 - \epsilon)^2} + \frac{(c - a\epsilon)(a - b\epsilon)}{(1 - \epsilon)^2} + \frac{(a - b\epsilon)(b - c\epsilon)}{(1 - \epsilon)^2}.$$

A nevezők a két oldalon egyformák és az egyenlet egyébként is erős szimmetriát mutat.

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 + c^2)\epsilon^2 - 2(ab + bc + ca)\epsilon =$$

$$= ab + bc + ca - (a^2 + b^2 + c^2)\epsilon - (ab + bc + ca)\epsilon + (ab + bc + ca)\epsilon^2.$$

Rendezés után

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1 + \epsilon + \epsilon^2) = (ab + bc + ca)(1 + \epsilon + \epsilon^2),$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca)(1 + \epsilon + \epsilon^2) = 0.$$

A feladat feltételei között szerepelt, hogy a háromszög nem egyenlő szárú, tehát nem is szabályos. Emiatt csak

$$1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$$

lehetséges. Szorozzuk ezt be a nullától különböző $(\epsilon - 1)$-gyel:

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2)(\epsilon - 1) = \epsilon^3 - 1 = 0.$$

Az ϵ tehát harmadik egységgyök. Innen már látjuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás $n = 3$.

4.8. A megoldásnál fel fogjuk használni a 4.7M. megoldás egyes részleteit. Legyenek a háromszög csúcsaihoz tartozó komplex számok a, b, c, továbbá az első harmadik egységgyök ε, az első hatodik egységgyök pedig φ. A későbbiekben fel fogjuk azt is használni, hogy $\varphi^2 = \varepsilon$. A feladat kitűzésénél szereplő jelölésekkel most írjuk fel az oldalakra kifelé rajzolt szabályos háromszögek csúcsait.

$$\varphi(b - d) = a - d.$$

Ezt rendezve

$$d = \frac{a - b\varphi}{1 - \varphi},$$

majd ugyanezzel a módszerrel

$$e = \frac{b - c\varphi}{1 - \varphi} \text{ és } f = \frac{c - a\varphi}{1 - \varphi}.$$

Most az ε-nal számolva megkapjuk a kifelé írt szabályos háromszögek középpontjait is:

$$j = \frac{a - b\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \qquad k = \frac{b - c\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \qquad l = \frac{c - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

a) A JKL háromszögre használjuk a 4.4. feladatban megismert szükséges és elégséges feltételt. Azt kell belátnunk, hogy

$$\left(\frac{a - b\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{b - c\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{c - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{a - b\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)\left(\frac{b - c\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) + \left(\frac{b - c\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)\left(\frac{c - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) + \left(\frac{c - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)\left(\frac{a - b\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right).$$

A nevezőkkel beszorozva, a műveletek elvégézse és rendezés után

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 + c^2)\varepsilon^2 - 2(ab + bc + ca)\varepsilon =$$
$$= ab + bc + ca - (a^2 + b^2 + c^2)\varepsilon - (ab + bc + ca)\varepsilon + (ab + bc + ca)\varepsilon^2.$$

Most egy oldalra rendezve a kiemelés után

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0.$$

Ez pedig teljesül, mert ε az első harmadik egységgyök

$$\varepsilon^3 - 1 = 0,$$

$$(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0,$$

és tudjuk, hogy $\varepsilon - 1 \neq 0$. Ezzel beláttuk, hogy a feltétel teljesül, a JKL háromszög valóban szabályos.

Megjegyzés: Ugyanígy szabályos háromszöget kapunk az oldalakra befelé írt szabályos háromszögek középpontjaiból is. Ezeket a háromszögeket hívják Napóleon-féle háromszögeknek.

b) Írjuk fel a JKL háromszög súlypontját:

$$s_{jkl} = \frac{a - b\varepsilon + b - c\varepsilon + c - a\varepsilon}{3(1 - \varepsilon)} = \frac{(a + b + c)(1 - \varepsilon)}{3(1 - \varepsilon)} = \frac{a + b + c}{3}.$$

Az állítás igaz.

c) A G, H, I pontokhoz tartozó komplex szánok felírásához felhasználjuk, hogy ezek felezőpontok:

$$g = \frac{a - b\varphi + b - c\varphi}{2(1 - \varphi)} = \frac{a - c\varphi}{2(1 - \varphi)} + \frac{b}{2}.$$

Így

$$g - b = \frac{a - c\varphi}{2(1 - \varphi)} - \frac{b}{2} = \frac{a - b + b\varphi - c\varphi}{2(1 - \varphi)}.$$

Hasonlóan számolható

$$h - c = \frac{b - c + c\varphi - a\varphi}{2(1 - \varphi)}, \qquad i - a = \frac{c - a + a\varphi - b\varphi}{2(1 - \varphi)}.$$

Az állítás igazolsához forgassuk el a pl. a HC szakaszt 120°-kal pozitív irányba.

$$\varphi^2(h-c)=\frac{b\varphi^2-a\varphi^3-c\varphi^2+c\varphi^3}{2(1-\varphi)}.$$

Mivel φ az első hatodik egységgyök, ezért $\varphi^3=-1$ és $\varphi^3+1=(\varphi+1)(\varphi^2-\varphi+1)=0$. Ez utóbbi a sokszor jól használható $1+\varphi^2=\varphi$ alakba írható. Ezek alapján

$$\frac{b\varphi^2-a\varphi^3-c\varphi^2+c\varphi^3}{2(1-\varphi)}=\frac{b\varphi^2+a-c\varphi^2-c}{2(1-\varphi)}=\frac{b\varphi-b+a-c\varphi}{2(1-\varphi)}=g-b.$$

Ugyanezzel a módszerrel az is belátható, hogy $\varphi(h-c)=-(i-a)$.

d) Itt fogjuk felhasználni, hogy $\varphi^2=\varepsilon$. Írjuk fel először a $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{KL}$ vektorokat.

$$d-c=\frac{a-b\varphi}{1-\varphi}-c=\frac{a-b\varphi-c+c\varphi}{1-\varphi},\qquad l-k=\frac{b-c\varepsilon-c+a\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Felírjuk az $(l-k)$-t a $(d-c)$ számszorosaként:

$$\frac{b-c\varepsilon-c+a\varepsilon}{1-\varepsilon}=\frac{b-c\varphi^2-c+a\varphi}{1-\varphi}=\frac{-b\varphi^3-c\varphi^2+c\varphi^3+a\varphi}{(1-\varphi)(1+\varphi)}=$$

$$=\frac{a-b\varphi-c+c\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{\varphi^2}{1+\varphi}=(d-c)\cdot\frac{\varphi^2}{1+\varphi}.$$

Elegendő megmutatni, hogy $\frac{\varphi^2}{1+\varphi}$ tisztán képzetes szám.

$$\frac{\varphi^2}{1+\varphi}=\frac{\varepsilon}{1+\varphi}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\cdot\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}i.$$

A KL valóban merőleges CD-re.

Melőtt a feladat további részeinek bizonyítására térünk érdemes más módszerrel is felírnunk az egyes pontokhoz tartozó komplex számokat Azt fogjuk felhasználni, hogy a $(z_1z_2z_3)$ akkor és csak akkor pozitív körüljárású szabályos háromszög, ha

$$z_1+z_2\omega+z_3\omega^2.$$

Ezt a feltételt felírva az $(dba),(ecb),(fac)$ háromszögekre

$$d=-b\omega-a\omega^2,\qquad e=-c\omega-b\omega^2,\qquad f=-a\omega-c\omega^2.$$

A (jkl) háromszög csúcsai az előbbi szabályos háromszögek súlypontjai.

$$j=\frac{a+b-b\omega-a\omega^2}{3},\qquad k=\frac{b+c-c\omega-b\omega^2}{3},\qquad l=\frac{c+a-a\omega-c\omega^2}{3}.$$

Ezzel a módszerrel is igazolható pl., hogy a (jkl) háromszög szabályos:

$$j+k\omega+l\omega^2=\frac{a+b-b\omega-a\omega^2}{3}+\frac{b+c-c\omega-b\omega^2}{3}\omega+\frac{c+a-a\omega-c\omega^2}{3}\omega^2=$$

$$=\frac{a-a\omega^3-a\omega^2+a\omega^2+b-b\omega+b\omega-b\omega^3+c\omega-c\omega^2+c\omega^2-c\omega^4}{3}=0.$$

Természetesen azt is fel kell használni, hogy ω az első harmadik egységgyök. Ez azt is jelenti, hogy $1+\omega+\omega^2=0$. Ezzel már röviden az is belátható, hogy a (jkl) és (abc) háromszögek súlypontja egybeesik.

$$\frac{j+k+l}{3}=\frac{2a-a\omega-a\omega^2+2b-b\omega-b\omega^2+2c-c\omega-c\omega^2}{9}=\frac{3a+3b+3c}{9}.$$

Elegendő tapasztalatot szereztünk, hogy hozzáfogjunk az e.) rész igazolásához.

e) Először is írjuk fel az állításban szereplő felezőpontokhoz tartozó komplex számokat.

$$f_{AD}=\frac{a-b\omega-a\omega^2}{2},\qquad f_{DB}=\frac{b-b\omega-a\omega^2}{2},$$

$$f_{BE}=\frac{b-c\omega-b\omega^2}{2},\qquad f_{EC}=\frac{c-c\omega-b\omega^2}{2},$$

$$f_{CF}=\frac{c-a\omega-c\omega^2}{2},\qquad f_{FA}=\frac{a-a\omega-c\omega^2}{2}.$$

Most következhet a felezőpontokat összekötő szakaszok vektorainak felírása.

$$f_{AD}f_{EC}=\frac{a-b\omega-a\omega^2-c+c\omega+b\omega^2}{2},$$

$$f_{BE}f_{FA}=\frac{b-c\omega-b\omega^2-a+a\omega+c\omega^2}{2},$$

$$f_{CF}f_{DB}=\frac{c-a\omega-c\omega^2-b+b\omega+a\omega^2}{2}.$$

Egyszerű beszorzással ellenőrízhető, hogy

$$f_{CF}f_{DB}\cdot\omega=f_{AD}f_{EC},\ \text{és}\ f_{AD}f_{EC}\cdot\omega=f_{BE}f_{FA}.$$

A szakaszokat 120°-kal forgattuk el, tehát valójában 60°-ot zárnak be egymással. Azt is látjuk, hogy a szakaszok egyenlő hosszúságúak is.

f) Ha a p és q komplex számok az origóval egy egyenesbe esnek, akkor a hányadosuk valós. Ez algebrailag azt jelenti, hogy a hányados és komplex konjugáltja megegyezik.

$$\frac{p}{q}=\frac{\overline{p}}{\overline{q}},\ \text{a törteket eltávolítva}\ p\overline{q}=\overline{p}q.$$

Válasszuk origónak az $(af_{BE}$ és $f_{DB}c$ egyenesek metszéspontját. Ekkor tudjuk, hogy

$$\frac{f_{BE}}{a}\ \text{és}\ \frac{f_{DB}}{c}\ \text{valósak és bizonyítandó, hogy}\ \frac{b}{l}\ \text{is valós.}$$

Be kell tehát látni, hogy

$$b\cdot\overline{\frac{c+a-a\omega-c\omega^2}{3}}=\overline{b}\cdot\frac{c+a-b\omega-a\omega^2}{3},$$

miközben azt már tudjuk, hogy

$$a\overline{\frac{b-c\omega-b\omega^2}{2}}=\overline{a}\frac{b-c\omega-b\omega^2}{2},$$

$$c\overline{\frac{b-b\omega-a\omega^2}{2}}=\overline{c}\frac{b-b\omega-a\omega^2}{2}.$$

A két feltételi egyenletet 2-vel szorozva, kifejtve és összeadva, közben felhasználva a konjugálás tulajdonságait, továbbá azt a tényt, hogy $\overline{\omega} = \omega^2$ kapjuk, hogy

$$a\overline{b} - a\overline{c}\omega^2 - \overline{b}a\omega + \overline{b}c - c\overline{b}\omega^2 - c\overline{a}\omega = \overline{a}b - \overline{a}c\omega - \overline{a}b\omega^2 + \overline{c}b - b\overline{c}\omega - a\overline{c}\omega^2.$$

A két közös taggal egyszerűsítve, majd a baloldalon $\overline{b}$-t, a jobboldalon b-t kiemelve

$$\overline{b}(a + c - a\omega - c\omega^2) = b(\overline{a} + \overline{c} - \overline{a}\omega^2 - \overline{c}\omega) = b(\overline{a + c - a\omega - c\omega^2}).$$

Az egyenlőség mindkét oldalát 3-mal osztva éppen a bizonyítandó állítás adódik.

Analóg módszerrel tárgyalható a 4.1 feladat is.

g) Igazoljuk, hogy $(f_{AC}f_{DB}f_{BE})$ pozitív körüljárású szabályos háromszög.

$$\frac{a+c}{2} + \frac{b - b\omega - a\omega^2}{2}\omega + \frac{b - c\omega - b\omega^2}{2}\omega^2 =$$

$$= \frac{a + c + b\omega - b\omega^2 - a\omega^3 + b\omega^2 - c\omega^3 - b\omega^4}{2} = 0.$$

4.9. Legyen O a komplex számsík origója és jelöljük az A, B, A', B' pontoknak megfelelő komplex számokat ugyanúgy, mint magát a csúcsot. Feltehetjük (esetleg egy tükrözés kell hozzá), hogy az OAB háromszög pozitív körüljárású, azaz

$$B = e_{\frac{\pi}{3}}A, \qquad B' = e_{-\frac{\pi}{3}}A',$$

ahol $e_\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$ egységnyi abszolútértékű komplex szám. Ekkor a BB', OA, OA' pontok F_B, F, F' felezőpontja:

$$F_B = \frac{e_{\frac{\pi}{3}}A + e_{-\frac{\pi}{3}}A'}{2}, \qquad F = \frac{1}{2}A, \qquad F' = \frac{1}{2}A'.$$

A 4.3. feladat állítása szerint ez épp azt jelenti, hogy $F'FF_B$ háromszög pozitív körüljárású szabályos háromszög.

4.10. Feltehetjük, hogy az adott kör egységnyi sugarú és középpontja a komplex számsík origója, rajta az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög pozitív körüljárású és csúcsainak az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 komplex számok felelnek meg. Tudjuk, hogy az A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 oldalainak hossza r, tehát

$$a_2 = e_{\frac{\pi}{3}}a_1, \qquad a_4 = e_{\frac{\pi}{3}}a_3, \qquad a_6 = e_{\frac{\pi}{3}}a_5.$$

Az A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1 oldalak felezőpontjainak a

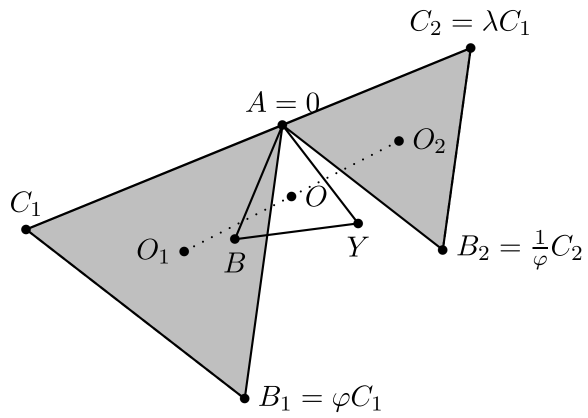
$$f_{23} = \frac{e_{\frac{\pi}{3}}a_1 + a_3}{2}, \qquad f_{45} = \frac{e_{\frac{\pi}{3}}a_3 + a_5}{2}, \qquad f_{61} = \frac{e_{\frac{\pi}{3}}a_5 + a_1}{2}$$

komplex számok felelnek meg. A 4.3. feladat állítása szerint az $f_{23}f_{45}$ pontpárra emelt pozitív körüljárású szabályos háromszög harmadik csúcsa

$$e_{\frac{-\pi}{3}}f_{23} + e_{\frac{\pi}{3}}f_{45} = \frac{a_1 + e_{-\frac{\pi}{3}}a_3}{2} + \frac{e_{2\frac{\pi}{3}}a_3 + e_{\frac{\pi}{3}}a_5}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + e_{\frac{\pi}{3}}a_5}{2} = f_{61},$$

hiszen $e_{-\frac{\pi}{3}} + e_{2\frac{\pi}{3}} = 0$.



4.11M.2. ábra.

4.11. Az egyszerűbb kezelhetőség érdekében legyen az A pont a komplex számsík O kezdőpontja. Így a C_1 és C_2 komplex számok egymás negatív valós számszorosai. Pl. $C_2 = \lambda \cdot C_1$. Legyen továbbá $\varphi = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ az első hatodik egységgyök.

Ekkor C_1-et és C_2-t O körüli ellentétes irányú 60°-os forgatás viszi a megfelelő B_1, illetve B_2 pontokba.

$$B_1 = \varphi C_1, \text{ és } B_2 = \frac{1}{\varphi}C_2.$$

A C_1B_2 szakasz X felezőpontjára

$$X = \frac{C_1 + B_2}{2} = \frac{C_1 + \frac{1}{\varphi}\lambda C_1}{2}.$$

Hasonlóan a C_2B_1 szakasz Y felezőpontjára

$$Y = \frac{C_2 + B_1}{2} = \frac{\lambda C_1 + \varphi C_1}{2}.$$

a) Az első állítás igazolása érdekében alkalmazzunk most az X komplex számra O körüli 60°-os elforgatást.

$$\varphi X = \varphi\frac{C_1 + B_2}{2} = \varphi\frac{C_1 + \frac{1}{\varphi}\lambda C_1}{2} = \frac{\varphi C_1 + \lambda C_1}{2} = y.$$

Az AXY háromszög szabályos.

A **b)** álllítás következménye a **c)** állításnak, így csak az utóbbit látjuk be. Ebben a részben szereplő mindhárom háromszög szabályos, így köré írt köreik középpontja egyben a súlypontjuk is. Ennek megfelelően:

$$O_1 = \frac{C_1 + \varphi C_1}{3},$$

$$O_2 = \frac{C_2 + \frac{1}{\varphi}C_2}{3} = \frac{\lambda C_1 + \frac{1}{\varphi}\lambda C_1}{3},$$

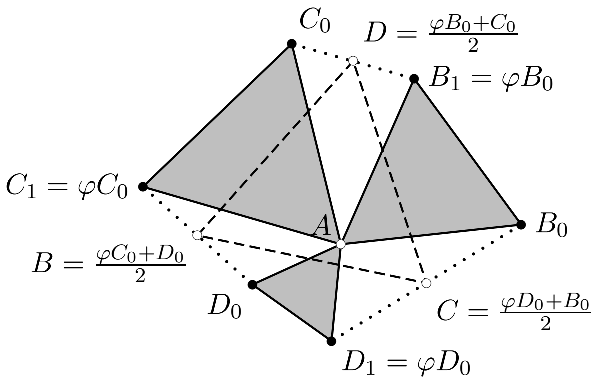
$$O = \frac{X+Y}{3} = \frac{\frac{C_1 + \frac{1}{\varphi}\lambda C_1}{2} + \frac{\lambda C_1 + \varphi C_1}{2}}{3} = \frac{C_1 + \lambda C_1 + \varphi C_1 + \lambda\frac{1}{\varphi}C_1}{6}.$$

Vegyük most O_1O_2 felezőpontját.

$$\frac{O_1 + O_2}{2} = \frac{\frac{C_1 + \varphi C_1}{3} + \frac{\lambda C_1 + \frac{1}{\varphi}\lambda C_1}{3}}{2} = \frac{C_1 + \lambda C_1 + \varphi C_1 + \lambda\frac{1}{\varphi}C_1}{6} = O.$$

4.12. a) A háromszögek közös A csúcsa legyen ismét a komplex számsík kezdőpontja, $\varphi = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ pedig az első hatodik egységgyök. Így $B_1 = \varphi B_0$, $C_1 = \varphi C_0$ és $D_1 = \varphi D_0$. A felezőpontokhoz tartozó komplex számok (lásd a 2. ábrát)

$$D = \frac{\varphi B_0 + C_0}{2}, \qquad B = \frac{\varphi C_0 + D_0}{2}, \qquad C = \frac{\varphi D_0 + B_0}{2}.$$



4.12M.2. ábra.

Azt kell belátnunk, hogy $b - d$ és $c - d$ egymásnak 60°-os elforgatottja.

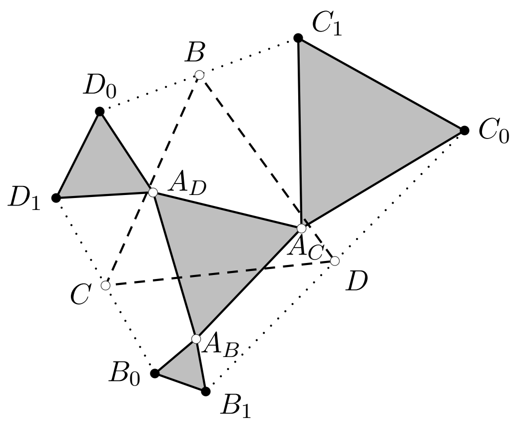
$$\varphi(b - d) = \varphi\frac{\varphi c_0 + d_0 - \varphi b_0 - c_0}{2} = \frac{\varphi^2 c_0 + \varphi d_0 - \varphi^2 b_0 - \varphi c_0}{2}.$$

Felhasználjuk, a $\varphi^3 = -1$, illetve az ezzel $\varphi \neq 1$ miatt ekvivalens $\varphi^2 - \varphi + 1$ összefüggést. Ezt most a $\varphi^2 - \varphi = -1$, $1 - \varphi = -\varphi^2$ alakokban fogjuk használni.

$$\varphi(b - d) = \frac{\varphi^2 c_0 + \varphi d_0 - \varphi^2 b_0 - \varphi c_0}{2} = \frac{\varphi d_0 + b_0 - \varphi b_0 - c_0}{2} = c - d.$$

A DBC háromszög szabályos. Ezt a problémát gyakran *mackósajt*-problémának is nevezik.

b) Lásd a 3. ábrát. Legyen az $A_B A_C A_D$ háromszög középpontja 0, így az egyes csúcsokhoz tartozó komplex számok rendre $a, a\varphi^2, a\varphi^4$.



4.12M.3. ábra.

Legyen a B_0 pontnak megfelelő komplex szám b_0. Tudjuk, hogy $b_1 - a$ a $b_0 - a$-nak 60°-os elforgatottja.

$$b_1 - a = \varphi(b_0 - a).$$

Ebből rendezéssel és felhasználva, hogy φ az első hatodik egységgyök

$$b_1 = \varphi(b_0 - a) + a = b_0\varphi - a_0\varphi^2.$$

Analóg módon

$$c_1 = c_0\varphi - a\varphi^4 = c_0\varphi + a\varphi,$$

$$d_1 = d_0\varphi - a\varphi^6 = d_0\varphi - a.$$

Az egyes felezőpontok most már könnyedén számolhatók:

$$d = \frac{c_0 + b_0\varphi - a_0\varphi^2}{2}, \qquad b = \frac{d_0 + c_0\varphi + a_0\varphi}{2}, \qquad c = \frac{b_0 + d_0\varphi - a_0}{2}.$$

A BCD háromszög szabályosságához igazolnunk kell, hogy pl. a $b - c$ vektor a $d - c$ vektor 60°-os elforgatottja.

$$\varphi(d - c) = \varphi\frac{c_0 + b_0\varphi - b_0 + d_0\varphi - a_0\varphi^2 + a_0}{2} = \frac{c_0\varphi - b_0 + d_0\varphi^2 + a_0 + a_0\varphi}{2} =$$

$$= \frac{d_0 + c_0\varphi + a_0\varphi - b_0 - d_0\varphi + a_0}{2} = b - c.$$

Közben többször is kihasználtuk, hogy φ az első hatodik egységgyök.

c) A megoldáshoz ismét a 4.5. feladatban szereplő feltételt fogjuk segítségül hívni. Eszerint az (abc) háromszög akkor és csak akkor pozitív körüljárású és szabályos, ha

$$a + b\omega + c\omega^2 = 0.$$

Így a b_1 pontra

$$b_1 + a_B\omega + b_0\omega^2 = 0, \text{ azaz } b_1 = -a_B\omega - b_0\omega^2.$$

Hasonlóan kapjuk a c_1 és d_1 pontokat.

$$c_1 = -a_C\omega - c_0\omega^2,$$

$$d_1 = -a_D\omega - d_0\omega^2.$$

A felezőpontok ezek alapján

$$d = \frac{c_0 + b_1}{2} = \frac{c_0 - a_B\omega - b_0\omega^2}{2},$$

$$b = \frac{d_0 + c_1}{2} = \frac{d_0 - a_C\omega - c_0\omega^2}{2},$$

$$c = \frac{b_0 + d_1}{2} = \frac{b_0 - a_D\omega - d_0\omega^2}{2}.$$

A (bcd) háromszög szabályosságának és pozitív körüljárásának feltétele, hogy $b + c\omega + d\omega^2 = 0$ teljesüljön. Írjuk fel ezt a feltételt

$$\frac{d_0 - a_C\omega - c_0\omega^2}{2} + \frac{b_0\omega - a_D\omega^2 - d_0\omega^3}{2} + \frac{c_0\omega^2 - a_B\omega^3 - b_0\omega^4}{2}.$$

Tudjuk, hogy ω az első harmadik egységgyök, ezért a kifejezés egyszerűsíthető

$$\frac{d_0 - a_C\omega - c_0\omega^2 + b_0\omega - a_D\omega^2 - d_0 + c_0\omega^2 - a_B\omega^3 - b_0\omega}{2}.$$

Az önkényesen választott b_0, c_0, d_0 értékek kiesnek és kiemelés után adódik, hogy

$$-\frac{\omega}{2}(a_C + a_D\omega + a_B\omega^2) = 0.$$

Látjuk, hogy a feltétel ekvivalens azzal, hogy $A_BA_CA_D$ háromszög szabályos. Ezzel természetesen egy újabb megoldást nyertünk a feladat b) részére is.

4.1.

1. megoldás. a) A két húr pontosan akkor párhuzamos, ha az $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$ komplex számok argumentuma egyenlő egymással vagy 180°-kal tér el, tehát ha az

$$r = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

tört valós. A tört pontosan akkor valós, ha egyenlő a konjugáltjával Az R abszolútértékű a_1, a_2, b_1, b_2 komplex számok konjugáltjai:

$$\overline{a}_1 = \frac{R^2}{a_1}, \qquad \overline{a}_2 = \frac{R^2}{a_2}, \qquad \overline{b}_1 = \frac{R^2}{b_1}, \qquad \overline{b}_2 = \frac{R^2}{b_2}.$$

Így r konjugáltja:

$$\overline{r} = \frac{\overline{a}_1 - \overline{a}_2}{\overline{b}_1 - \overline{b}_2} = \frac{\frac{R^2}{a_1} - \frac{R^2}{a_2}}{\frac{R^2}{b_1} - \frac{R^2}{b_2}} =$$

$$= \frac{\frac{a_2 - a_1}{a_1a_2}}{\frac{b_2 - b_1}{b_1b_2}} = \frac{b_1b_2}{a_1a_2} \cdot r,$$

azaz r pontosan akkor valós, ha

$$a_1a_2 = b_1b_2.$$

A fenti algebrai reláció a párhuzamosság feltétele.

b) A két húr pontosan akkor merőleges, ha az $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$ komplex számok argumentuma $\pm 90°$-kal tér el egymástól, azaz ha a

$$r = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

tört tisztán képzetes. A tört pontosan akkor tisztán képzetes, ha konjugáltjának ellentettje. Innen, az a) részben r konjugáltjára vonatkozó levezetés alapján $\frac{b_1b_2}{a_1a_2} = -1$, azaz $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ adódik a merőlegesség feltételének.

2. megoldás. a) A két húr pontosan akkor párhuzamos, ha a kör $\widehat{a_1b_1}$, $\widehat{b_2a_2}$ ívei irányítottan egyenlők, azaz ha

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{a_2}.$$

Egyszerűbb alakban a párhuzamosság feltétele

$$a_1a_2 = b_1b_2. \tag{1}$$

b) A két húr pontosan akkor merőleges, ha az egyik 90°-os elforgatottja párhuzamos a másikkal, azaz ha

$$a_1a_2 = (ib_1)(ib_2) = -b_1b_2,$$

tehát a feltétel: $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

4.2. A 4.1. feladat b) részének eredménye szerint, ha körünk középpontja az O origó, akkor $AA' = -BC$, azaz $A' = -\frac{BC}{A}$ és ehhez hasonlóan $B' = -\frac{CA}{B}$, $C' = -\frac{AB}{C}$. A bizonyítandó $B'A'A\sphericalangle = AA'C'\sphericalangle$ összefüggés a kerületi és középponti szögek tétele szerint ekvivalens a $B'OA\sphericalangle = AOC'\sphericalangle$ relációval, amelynek algebrai megfelel?je a $\frac{OB'}{OA} = \frac{OA}{OC'}$ összefüggés. Ennek algebrai formája: $\frac{B'}{A} = \frac{A}{C'}$, azaz

$$\frac{-\frac{CA}{B}}{A} = \frac{A}{-\frac{AB}{C}},$$

ami nyilvánvalóan teljesül.

4.3. a) Ha O a komplex számsík origója, akkor $\frac{a+b+c}{3}$ az a, b, c csúcsok alkotta háromszög súlypontja, így (lásd az Euler egyenesen az arányokat) a magasságpont:

$$m = a + b + c. \tag{1}$$

Ha nem akarunk hivatkozni az Euler egyenesre, akkor a következőképp igazolhatjuk komplex számokkal, hogy (1) a magasságpontot adja. Azt kell igazolnunk, hogy az a és az m pontot összekötő szakasz merőleges a b és a c pontot összekötő szakaszra (és ugyanaz igaz ezzel analóg módon a másik két csúcskiosztásban), tehát az $m - a = (b + c)$, $(b - c)$ komplex számok argumentumának különbsége $\pm 90°$. Azt mutatjuk meg, hogy az

$$r = i\frac{b+c}{b-c}$$

komplex szám valós, azaz egyenlő a konjugáltjával. Az egyszerűbb levezetés kedvéért feltesszük, hogy a körülírt kör az egységkör, tehát $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. Ekkor

$$\overline{r} = \overline{i}\frac{\overline{b}+\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}} = -i\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = -i\frac{\frac{c+b}{bc}}{\frac{c-b}{bc}} = -i\frac{c+b}{c-b} = r.$$

b) Érdemes előbb a c) feladatrészt megoldani!

c) A magasságpontnak az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei a köré írt körön vannak. A magasságvonal és az oldalegyenes merőleges, így a merőlegesség 4.1. b) feladatban talált feltételéből $a \cdot a' + b \cdot c = 0$, tehát

$$a' = -\frac{bc}{a}, \qquad b' = -\frac{ca}{b}, \qquad c' = -\frac{ab}{c}.$$

b) A magasságok talppontjai két egymásra merőleges húr – pl $t_a = aa' \cap bc$ – metszéspontjaként adódnak:

$$t_a = \frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}, \qquad t_b = \frac{a+b+c-\frac{ac}{b}}{2}, \qquad t_c = \frac{a+b+c-\frac{ab}{c}}{2}.$$

d) Legyen az a csúcs tükörképe az x pont. Az (ax) szakasz felezőpontja éppen a t_a, azaz

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2},$$

$$x = b + c - \frac{bc}{a},$$

és hasonlóan b és c csúcsoknak a megfelelő y és z tükörképeire

$$y = a + c - \frac{ac}{b}, \qquad z = a + b - \frac{ab}{c}.$$

4.4. A 4.3M. megoldás jelöléseivel azt kell igazolni, hogy (t_bt_c) szakasz merőleges az a vektorra. Mivel a (t_bt_c) szakasz párhuzamos a köré írt kör $b'c'$ húrjával, ezért elég megmutatni, hogy a $b'c'$ húr merőleges az$a(-a)$ húrra. A merőlegesség feltétele:

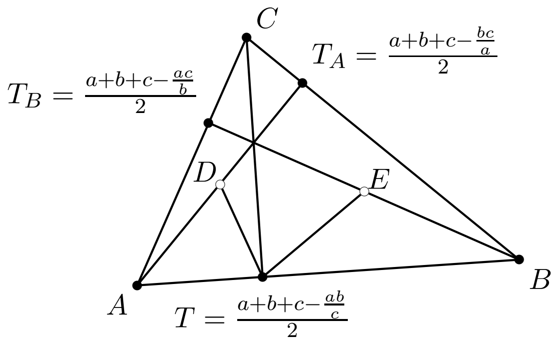
$$b'c' + a(-a) = b'c' - a^2 = 0.$$

Ellenőrízzük, hogy ez teljesül-e.

$$b'c' - a^2 = \Big(-\frac{ac}{b}\Big)\Big(-\frac{ab}{c}\Big) - a^2 = a^2 - a^2 = 0.$$

A másik két csúcsra pontosan ugyanígy igazolható az állítás.

4.5. A 4.4. 4.3. feladatok megoldása során már rutint szerezhettünk az egyes pontokhoz tartozó komplex számok felírásában. Legyen ismét a köré írt kör középpontja az O pont, a csúcsokhoz tartozó komplex számok a, b, c.



4.5M.1. ábra.

Az A-ból induló magasság talppontja $\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}$. Így a D felezőponthoz tartozó komplex szám

$$d = \frac{3a+b+c-\frac{bc}{a}}{4}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az E felezőpontra, hogy

$$e = \frac{3b+a+c-\frac{ac}{b}}{4}.$$

A C-ből induló magasság T talppontja

$$t = \frac{a+b+c-\frac{ab}{c}}{2}.$$

A továbbiakban a DTE szög meghatározásához képezzük a $\frac{d-t}{e-t}$ hányadost.

$$\frac{d-t}{e-t} = \frac{\frac{3a+b+c-\frac{bc}{a}}{4} - \frac{2a+2b+2c-\frac{2ab}{c}}{4}}{\frac{3b+a+c-\frac{ac}{b}}{4} - \frac{2a+2b+2c-\frac{2ab}{c}}{4}} = \frac{a-b-c-\frac{bc}{a}+\frac{2ab}{c}}{b-a-c-\frac{ac}{b}+\frac{2ab}{c}}.$$

Most hozzunk közös nevezőre a számlálóban és a nevezőben külön-külön, majd próbáljuk szorzatá alakítani a kifejezéseket.

$$\frac{a^2c - abc - ac^2 - bc^2 + 2a^2b}{4ac} : \frac{b^2c - abc - bc^2 - ac^2 + 2ab^2}{4bc} =$$

$$== \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2c - -ac^2 + a^2b - abc + a^2b - bc^2}{b^2c - bc^2 + ab^2 - abc + ab^2 - ac^2} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{ac(a-c) + ab(a-c) + b(a-c)(a+c)}{bc(b-c) + ab(b-c) + a(b-c)(b+c)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(a-c)(ac+ab+ab+bc)}{(b-c)(bc+ab+ab+ac)} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a-c}{b-c}.$$

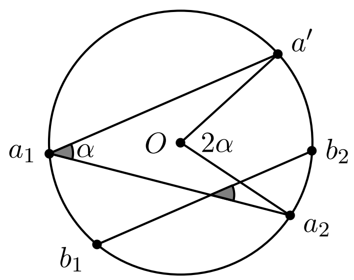
A $\frac{b}{a}$ arány egy egység komplex szám, amelynek argumentuma a kerületi és középponti szögek tétele alapján 2γ. Legyen ez a komplex szám $e_{2\gamma}$. A $b-c$ és $a-c$ vektorok γ szöget zárnak be, de hosszuk nem egyforma és az irányítás éppen ellentétes az előbbi $\frac{b}{a}$ irányításával. Most ez az arány tehát $\lambda \cdot e_{-\gamma}$. A kapott arány ezekkel a megjegyzésekkel

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{a-c}{b-c} = e_{2\gamma} \cdot \lambda \cdot e_{-\gamma} = \lambda \cdot e_{\gamma}.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy a szóban forgó szög γ-val egyenlő. Azt is beláttuk, hogy a két vektor hosszának aránya megegyezik (ac) és (bc) arányával, az ABC és DTE háromszögek hasonlók.

4.6. Lásd a 4.7. feladat mértani középre vonatkozó részét!

4.7. Az O középpontú körben a húrok végpontjai legyenek a_1, a_2, illetve b_1, b_2, és bezárt szögük α. A két húr közül az egyik valamely végpontja körül pozitív irányban α szöggel elforgatva a másikkal párhuzamos helyzetbe hozható.



4.7M.1. ábra.

??. ábránkon az (a_1a_2) húrt az a_1 körül forgattuk, az elforgatott húr másik (körön lévő) végpontja a'. A párhuzamossági feltétel szerint $a_1a' = b_1b_2$. A kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján a' az a_2-höz képest O körül 2α szöggel van pozitív irányban elforgatva. Legyen $e_{2\alpha}$ a 2α argumentumú egység-komplex szám, ezzel $a' = a_2e_{2\alpha}$. A keresett feltétel

$$a_1a_2e_{2\alpha} = b_1b_2.$$

4.8.

1. megoldás. a) A k kör o középpontja, a két vizsgált húr f_a, f_b felezőpontja a húrok s metszéspontjával olyan téglalapot alkot, amelyben os átló.

Mivel $f_a = \frac{a_1+a_2}{2}$ és $F_b = \frac{b_1+b_2}{2}$, így

$$s = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{4}.$$

b)

2. megoldás. b) Jelölje az a_1, a_2 komplex számok egyenesét t_a, a b_1b_2 húregyenest t_b, a kör O középpontjának (a komplex számsík origójának) a t_a tengelyre vonatkozó tükörképét A, a t_b tengelyre való tükörképét B. Tekintsük a t_A tengelyre való tükrözés és a t_B tengelyre való tükrözés φ kompozícióját. Látjuk, hogy φ az A pontot B-be képezi. Másrészt ismeretes, hogy φ a t_A, t_B tengelyek S metszéspontja körüli elforgatás, melynek szöge a t_A, t_B tengelyek γ irányított szögének duplája. Ezek szerint az ASB háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, melyben a szárak S-nél található szöge 2γ. Az a_1, a_2 pont közti húr felezőmerőlegesének argumentuma megegyezik az a_1, a_2 komplex számok argumentumainak átlagával (mod 180°), így ezen argumentum duplája az $a_1 \cdot a_2$ komplex szám argumentumával egyezik meg. Ezt a b_1, b_2 pontok közti húr felezőmerőlegesére is végiggondolva kapjuk, hogy az (a_1a_2), O, (b_1b_2) pontok háromszöge (ill. ez a ponthármas) hasonló az A, S, B pontok háromszögéhez (ponthármasához):

$$\frac{A-S}{S-B} = \frac{a_1a_2-0}{O-b_1b_2}.$$

Ebből az $A = a_1 + a_2$, $B = b_1 + b_2$ összefüggések és a 4.1. feladat eredménye alapján kapjuk a kívánt formulát:

$$S = \frac{(a_1+a_2)b_1b_2-(b_1+b_2)a_1a_2}{b_1b_2-a_1a_2}.$$

3. megoldás. Az egyenes egyenletének 4.3. feladatban meghatározott alakjával dolgozunk. Az a_1, a_2 pontokat összekötő szakasz felezőpontjának az $f_a = \frac{a_1+a_2}{2}$ komplex szám felel meg. Az egyenes egyenletéhez szükségünk van a szám konjugáltjának meghatározására. Ha R a kör sugara, akkor

$$\overline{f_a} = \frac{\overline{a_1}+\overline{a_2}}{2} = \frac{\frac{R^2}{a_1}+\frac{R^2}{a_2}}{2} = \frac{R^2(a_1+a_2)}{2a_1a_2}.$$

A két adott pont egyenesének „irányvektora” $\epsilon_a = a_1 - a_2$, amelyre

$$\overline{\epsilon_a} = \overline{a_1} - \overline{a_2} = \frac{R^2}{a_1} - \frac{R^2}{a_2} = \frac{R^2(a_2-a_1)}{a_1a_2}.$$

Így az egyenes egyenlete

$$(a_1-a_2)\overline{z} + \frac{R^2(a_1-a_2)}{a_1a_2}z = (a_1-a_2)\frac{R^2(a_1+a_2)}{2a_1a_2} + \frac{R^2(a_1-a_2)}{a_1a_2}\frac{a_1+a_2}{2},$$

azaz $\frac{a_1a_2}{a_1-a_2}$-vel átszorozva

$$a_1a_2\overline{z} + R^2z = R^2(a_1+a_2). \tag{1}$$

Ehhez hasonlóan, a z pont akkor és csakis akkor illeszkedik a b_1, b_2 pontokat összekötő húr egyenesére, ha

$$b_1b_2\overline{z} + R^2z = R^2(b_1+b_2). \tag{2}$$

A fenti egyenletek $b_1b_2(1)-a_1a_2(2)$ kombinációjából kiesik $\overline{z}$ és így z gyorsan kifejezhető:

$$z = \frac{(a_1+a_2)b_1b_2-(b_1+b_2)a_1a_2}{b_1b_2-a_1a_2}. \tag{3}$$

4.9. A 4.8M3. megoldásban kaptuk a $a_1a_2\overline{z}+R^2z = R^2(a_1+a_2)$. összefüggést. Az $R = 1$ esetben

$$a_1a_2\overline{z} + z = a_1 + a_2.$$

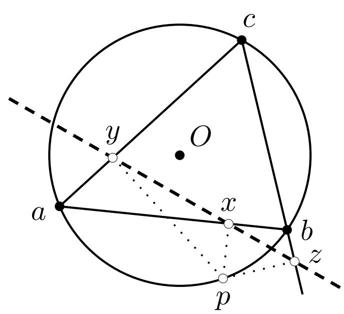
A z-re 4.8M3. végén kapott $z = \frac{(a_1+a_2)b_1b_2-(b_1+b_2)a_1a_2}{b_1b_2-a_1a_2}$ kifejezést ide behelyetesítvek özös nevezőre hozás és az egyszerűsítések után kapjuk a kívánt relációt.

4.10. A 4.1. feladat b) megoldása során láttuk, hogy az a-hoz tartozó magasságvonal a köré írt kört a $a' = -\frac{bc}{a}$ pontban metszi. A merőleges húrok metszéspontjra vonatkozó 4.3M. b) megoldás alapján már az is ismert, hogy a talppont

$$t_a = \frac{b + ca - \frac{bc}{a}}{2}.$$

Innen már látható, hogy ez éppen az $m = a + b + c$ magasságpontot és az a' ponttal összekötő szakasz felezőpontja. A magasságpont (bc)-re vonatkozó tükörképe az a' pont.

4.11. a) Legyen O az $(abc)\triangle$ köré írt körének középpontja, p a kör tetszőleges pontja. A p-ből az oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai pedig sorra x, y, z (lásd az 1. ábrát).



4.11M.1. ábra.

Állítsunk a p-ből merőlegest az ab egyenesre. Ez a kört a p' pontban metszi. A merőlegesség feltétele alapján $p' = -\frac{ab}{p}$. A merőleges húrok metszéspontja a keresett talppont:

$$x = \frac{a + b + p - \frac{ab}{p}}{2} = \frac{(a + b + p)p - ab}{2p}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$y = \frac{(a + p + c)p - ac}{2p} \text{ és } z = \frac{(p + b + c)p - bc}{2p}.$$

Az x, y, z akkor vannak egy egyenesen, ha az $\frac{x-z}{y-z}$ valós,

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{p(a - c) - ab + bc}{p(a - b) - ac + bc} = \frac{p(a - c) - b(a - c)}{p(a - b) - c(a - b)} = \frac{(p - b)(a - c)}{(p - c)(a - b)}.$$

Ez viszont egy köri pontnégyes kettős viszonya $(pabc)$, tehát valós. Az x, y, z pontok egy egyenesen vannak.

b) Elegendő megmutatni, hogy ha pl. x-et és y-t a p-ből kétszeresére nagyítjuk, akkor olyan x' és y' pontokat kapunk, amelyek az m-mel egy egyenesen vannak.

$$x' = 2x - p = a + b - \frac{ab}{p}, \text{ és } y' = 2y - p = a + c - \frac{ac}{p}.$$

Tudjuk, hogy $m = a + b + c$, megmutatjuk, hogy az $\frac{m-x'}{m-y'}$ hányados valós, azaz egyenlő a konjugáltjával. A bizonyítás során felhasználjuk, hogy a, b, c, p egység komplex számok, s ezért konjugáltjuk, a reciprokukkal egyenlő:

$$\frac{m - x'}{m - y'} = \frac{c + \frac{ab}{p}}{b + \frac{ac}{p}} = \frac{pc + ab}{pb + ac} = \frac{\frac{1}{ab} + \frac{1}{pc}}{\frac{1}{ac} + \frac{1}{pb}} = \frac{\overline{ab} + \overline{pc}}{\overline{ac} + \overline{pb}} = \frac{\overline{m} - \overline{x'}}{\overline{m} - \overline{y'}}.$$

4.12. a) A 4.11M megoldásból látjuk, hogy a p ponthoz tartozó Simson-egyenes irányvektora $m - x' = c + \frac{ab}{p}$, s így az átellenes köri ponthoz, $(-p)$-hez tartozó Simson-egyenesé $c - \frac{ab}{p}$. Mivel a, p, b, c egység komplex számok, ezért $c + \frac{ab}{p}$ merőleges $c - \frac{ab}{p}$ vektorra, tehát valóban igaz, hogy az átellenes köri pontokhoz tartozó Simson-egyenesek merőlegesek egymásra.

b) Kicsinyítsük felére a magasságpontból a háromszög köré írt kört, ekkor a Feuerbach-kört kapjuk. Az a) részben bizonyítottak szerint p és $-p$ kicsinyítettje a Feurbach-kör egy átmérőjének két végpontja lesz, továbbá mindkét pont rákerül a hozzá tartozó Simson-egyenesre. Mivel azonban a p-hez és a $-p$-hez tartozó Simson-egyenesek merőlegesek egymásra, ezért metszéspontjuk a Thalesz-tétel értelmében a Feuerbach-körön van.

4.13. Legyen sokadszor O a háromszög kőré írt kör középpontja. Az α szögben metszés feltétele a 4.7. feladat alapján

$$a \cdot a^* = bc \cdot e_{2\alpha}, \qquad b \cdot b^* = ac \cdot e_{2\alpha}, \qquad c \cdot c^* = ab \cdot e_{2\alpha}.$$

Ebből

$$a^* = \frac{bc}{a} e_{2\alpha}, \qquad b^* = \frac{ac}{b} e_{2\alpha}, \qquad c^* = \frac{ab}{c} e_{2\alpha}.$$

Másrészt a 4.3. c) feladat megoldásánál láttuk, hogy a magasságvonalaknak a köré írt körrel vett metszéspontjai rendre

$$a' = -\frac{bc}{a}, \qquad b' = -\frac{ac}{b}, \qquad c' = -\frac{ab}{c}.$$

A kettő összevetéséből

$$a^* = -a' e_{2\alpha}, \qquad b^* = -b' e_{2\alpha}, \qquad c^* = -c' e_{2\alpha}.$$

Az $(a^* b^* c^*)$ háromszög csúcsait az $(a'b'c')$ háromszög csúcsaiból $-e_{2\alpha}$-val történő szorzással, vagyis O körüli forgatással lehet származtatni. Ez azt jelenti, hogy a háromszögek mind egybevágók az $(a'b'c')$ háromszöggel.

4.14. Vegyünk fel az O körül egy olyan nagy kört, amely a belsejében tartalmazza az O-ból az E egyeneseire állított valamennyi merőleges talppontját. Tegyük fel, hogy E egy tetszőleges g egyenese a kört a_1, a_2 pontokban metszi, az O-ból a g-re állított merőleges $c, -c$ pontokban. Az $(a_1 a_2)$ és $(-cc)$ húrok merőlegességéből

$$a_1 a_2 - c^2 = 0$$

következik. Forgassuk el az Oc egyenest φ szöggel, és legyen a φ argumentumú egység komplex szám e. Az elforgatott egyenes a kört a $ce, -ce$ pontokban metszi. Az elforgatott egyenes és g metszéspontja 4.30.b. alapján

$$b = \frac{a_1 a_2 (ce - ce) + c^2 e^2 (a_1 + a_2)}{a_1 a_2 + c^2 e^2}.$$

Figyelembe vehetjük még, hogy $a_1 a_2 = c^2$ és az $(a_1 a_2)$ húr felezőpontját a-val jelölve $a_1 + a_2 = 2a$, ezért

$$b = \frac{c^2 e^2 \cdot 2a}{c^2 + c^2 e^2} = a \frac{2e^2}{1 + e^2} = v.$$

Látjuk, hogy az A_i-hez , illetve B_i-hez tartozó komplex számot a_i-vel, illetve b_i-vel jelölve

$$b_i = v \cdot a_i \qquad \{i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ponthalmazt forgatva nyújtás viszi át a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ponthalmazba, tehát az E egyeneshalmaz O-ra vonatkozó valamennyi talpponti alakzata hasonló.

4.1. Komplex számokra is teljesülnek a szokásos alapműveleti tulajdonságok. Végezzük el a szorzásokat és összevonásokat külön a bal- és jobboldalon.

$$(a-c)(b-d) = ab - bc - ad + cd,$$

$$(a-d)(b-c) + (d-c)(b-a) = ab - bd - ac + cd + bd - bc - ad + ac = ab + cd - bc - ad.$$

A két oldal egyenlő.

4.2. A 4.1. feladatban bizonyított algebrai azonosság geometriailag azt jelenti, hogy az a, b, c, d csúcsokkal rendelkező négyszögben az átlóvektorok szorzata egyenlő a szemközti oldalvektorok szorzatának összegével. (A vektorok irányát az azonosságnak megfelelő módon kell választani!) Ebből következtetést tudunk levonni a négyszög oldalainak, illetve átlóinak hosszára, továbbá a hosszak közötti kapcsolatokra.

Vezessük be a $z = (a-c)(b-d)$, $z_1 = (a-d)(b-c)$ és $z_2 = (a-b)(c-d)$ jelöléseket. Az előző feladatban bizonyított azonosság szerint

$$z = z_1 + z_2.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|z| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

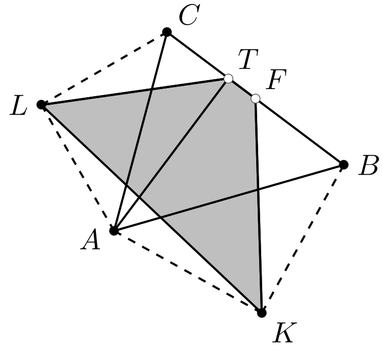
és egyenlőség pontosan akkor áll, ha z_1 és z_2 párhuzamos és egyirányú vektorok, azaz jelöléseink szerint

$$\frac{z_1}{z} = \frac{a-d}{a-c} : \frac{b-d}{b-c} = (abdc) \text{ és } \frac{z_2}{z} = \frac{a-b}{a-c} : \frac{d-b}{d-c} = (adbc).$$

A kettősviszonyoknak pozitív valós számoknak kell lenniük. Tudjuk, hogy az a, b, c, d pontok nincsenek egy egyenesen, tehát a kettősviszonyok csak akkor lesznek valósak, ha a pontok egy körön vannak. Ebben az esetben viszont pozitívak is a kettősviszonyok, mert egyrészt c és d az (ab) egyenesnek ugyanazon az oldalán van, továbbá ugyanez igaz az (ad) egyenesre és a b, c pontpárra is. Egyenlőség tehát akkor és csak akkor teljesül, ha $abcd$ húrnégyszög. Azt is beláttuk, hogy tetszőleges négyszögben az átlók szorzata nem lehet nagyobb a szemközti oldalak szorzatának összegénél.

4.3.

1. megoldás. Legyen az (abc) háromszög köré írt körének középpontja O. Az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy a kör sugara egységnyi.



4.3M1.1. ábra.

A (bc) oldal felzőpontja $f = \frac{b+c}{2}$, a magasság talppontja korábbi feladatok megoldásai alapján $t = \frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}$. Az (ab) oldalra írt négyzet k középpontjára az $a-k$ vektor a $b-k$ vektor $90°$-os elforgatottja:

$$i(b-k) = a-k,$$

ahonnan

$$k = \frac{a-ib}{1-i}.$$

Hasonlóan a másik kiflé írt négyzet l középpontjára

$$l = \frac{c-ia}{1-i}.$$

Azt kell igazolnunk, hogy az (f,t,k,l) kettősviszony valós. A

$$\frac{b+c}{2}, \qquad \frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}, \qquad \frac{a-ib}{1-i}, \qquad \frac{c-ia}{1-i}$$

számok kettősviszonya nem változik, ha mindegyik számot $2a = (1-i)(1+i)$-vel szorozzuk. Így a

$$ab+ac, \qquad a^2+ab+ac-bc, \qquad (1+i)a^2+(1-i)ab, \qquad (1-i)a^2+(1+i)ac$$

számokhoz jutunk. Ezek kettősviszonya nem változik, ha mindegyikből levonunk $ab+ac$-t:

$$0, \qquad a^2-bc, \qquad (1+i)a^2-iab-ac, \qquad (1-i)a^2-ab+iac.$$

A kettősviszony:

$$\frac{(1+i)a^2-iab-ac}{(1-i)a^2-ab+iac} \cdot \frac{-ia^2-ab+iac+bc}{ia^2-iab-ac+bc}. \tag{1}$$

Itt az első hányados $\frac{(1+i)a^2-iab-ac}{(1-i)a^2-ab+iac} = i$, míg a második

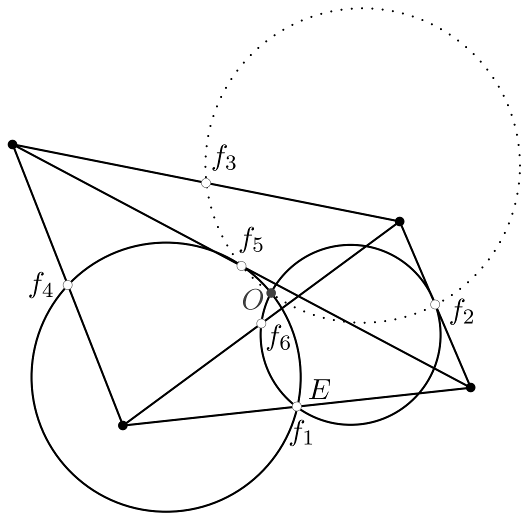
$$\frac{(c-a)(b+ia)}{(c-ia)(b-a)} = \frac{(c-a)(b-ia)}{(c-ia)(b-a)} \cdot \frac{b+ia}{b-ia},$$

ahol az elős tényező az (a, ia, c, b) köri pontnégyes kettősviszonya, tehát valós, a második tényező pedig a Thalesz tétel szerint – b azon a körön va, amelyben egy átmérő két végpontja ia és $(-ia)$ – tisztán képzetes. Négy vizsgált pontunk (1) kettősviszonya tehát valós, valóban egy körön vannak.

2. megoldás. Sokféleképpen igazolható, hogy KFL olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben F-nél van a derékszög. Ebből most csak az a lényeges, hogy F illeszkedik KL Thalesz körére.

Másrészt L és T az AC szakasz Thalesz körén van, így $45° = ACL\angle = ATL\angle$ és ehhez hasonlóan az AB Thalesz körére illeszkedik K és T, ahol $45° = ABK\angle = ATK\angle$. Mindezekből $LTK\angle = LTA\angle + ATK\angle = 90°$, azaz T is illeszkedik KL Thalesz körére, tehát L, K, T, F egy körön vannak.

4.4. Legyenek a négyszög oldalainak és átlóinak felezőpontjai: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. Az O pontot úgy válasszuk meg, hogy az f_1, f_2, f_6 illetve az f_1, f_4, f_5 pontokon átmenő Feuerbach-körök az f_1-en kívül O-ban messék egymást. (Az O egybe is eshet f_1-gyel.) Elegendő azt megmutatni, hogy a két kör közös O metszéspontján pl. az $(f_1f_3f_5)$ kör is átmegy. A bizonyítás az $(f_3f_4f_6)$ körre hasonlóan menne.



4.4M.1. ábra.

A feltétel algebrailag azt jelenti, hogy az $(Of_6f_1f_2)$ és $(Of_4f_5f_1)$ kettősviszonyok valósak, a bizonyítandó pedig az, hogy az $(Of_3f_5f_2)$ kettősviszony is valós. Tudjuk, hogy

$$(Of_6f_1f_2) = \frac{f_1}{f_2} : \frac{f_6 - f_1}{f_6 - f_2} = \lambda \in R,$$

$$(Of_4f_5f_1) = \frac{f_5}{f_1} : \frac{f_4 - f_5}{f_4 - f_1} = \mu \in R.$$

Szorozzuk össze a két egyenlőséget:

$$\frac{f_5}{f_2} : \frac{(f_6 - f_1)(f_4 - f_5)}{(f_6 - f_3)(f_4 - f_1)} = \lambda\mu.$$

Tudjuk, hogy $f_4 - f_5 = f_6 - f_2$, mivel közös alapú háromszögek középvonal-vektorai és ugyanilyen okból $f_6 - f_1 = f_3 - f_5$, továbbá $f_4 - f_1 = f_3 - f_2$. Ezeket behelyettesítve az egyszerűsítés után

$$\frac{f_5}{f_2} : \frac{f_3 - f_5}{f_3 - f_2} = \lambda\mu \in R,$$

ez éppen az $(of_3f_5f_2)$ kettősviszony.

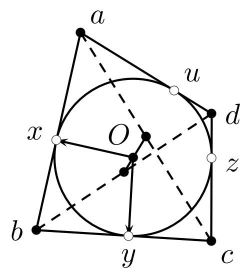
4.5. Helyezzük el az *abcd* érintőnégyszöget úgy, hogy beírt körének középpontja az O pont legyen. Jelöljük a beírt kör érintési pontjait az $(ab), (bc), (cd), (da)$ oldalakon rendre x, y, z, u betűkkel (lásd a **??**. ábrát).

Mivel az x vektor merőleges $b-x$-re és y merőleges $y-b$-re, továbbá $|x| = |y|$ és $|b-x| = |y-b|$, ezért $b - x = \lambda ix$, és $y - b = \lambda iy$, hiszen az x vektort ugyanaz a 90°-os forgatva nyújtás viszi át $b - x$-be, mint y-t $y - b$-be. Ebből a két egyenletből adódik, hogy

$$\frac{b - x}{y - b} = \frac{x}{y}.$$

Innen azonnal számolható, hogy $b = \frac{2xy}{x+y}$. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$c = \frac{2yz}{y + z}, \qquad d = \frac{2zu}{z + u}, \qquad a = \frac{2ux}{u + x}.$$



4.5M.1. ábra.

Legyen az (ac) és (bd) átlók felezőpontja e és f. Azt kell belátnunk, hogy e és f hányadosa valós szám.

$$\frac{e}{f}=\frac{\frac{a+c}{2}}{\frac{b+d}{2}}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{\frac{ux}{u+x}+\frac{yz}{y+z}}{\frac{xy}{x+y}+\frac{zu}{z+u}}=\frac{(x+y)(z+u)}{(u+x)(y+z)}=\frac{x+y}{x+u}:\frac{z+y}{z+u}.$$

Ez viszont nem más, mint az $x, z, -y, -u$ köri pontnégyes kettősviszonya, tehát valós.

4.2. a) Az

$$\left.\begin{aligned} z_0+z_1+z_2+z_3 &= A_0\\ z_0+iz_1-z_2-iz_3 &= A_1\\ z_0-z_1+z_2-z_3 &= A_2\\ z_0-iz_1-z_2+iz_3 &= A_3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása:

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \tfrac{A_0+A_1+A_2+A_3}{4}\\ z_1 &= \tfrac{A_0-iA_1-A_2+iA_3}{4}\\ z_2 &= \tfrac{A_0-A_1+A_2-A_3}{4}\\ z_3 &= \tfrac{A_0+iA_1-A_2-iA_3}{4} \end{aligned}\right\},$$

vagy az eredeti alaknak jobba megfelelő formában:

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \tfrac{A_0+A_1+A_2+A_3}{4}\\ z_1 &= \tfrac{A_0+i^3A_1+i^2A_2+iA_3}{4}\\ z_2 &= \tfrac{A_0+i^6A_1+i^4A_2+i^2A_3}{4}\\ z_3 &= \tfrac{A_0+i^9A_1+i^6A_2+i^3A_3}{4} \end{aligned}\right\}.$$

b) Az $A_0=0$ feltétel azt jelenti, hogy a négyszög súlypontja (a négy csúcsba helyezett egyforma tömegekből álló tömegpontrendszer súlypontja) az origó.

Az $A_1=0$ feltétel a

$$\frac{z_0+iz_1}{1+i}=\frac{z_2+iz_3}{1+i} \tag{1}$$

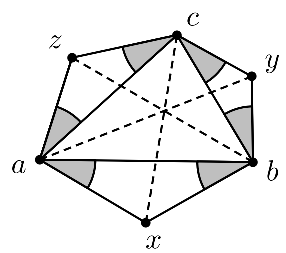
formába írható át. A 4.1. feladat állítása szerint a z_0, z_1 számok 1-gyel, i-vel „súlyozott” osztópontja, az $O=\frac{z_0+iz_1}{1+i}$ pont az a pont, amelyre $\frac{z_1-O}{O-z_0}=\frac{i}{1}$, tehát az a pont, amelyre z_0Oz_1 pozitív forgásirányú egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek derékszöge O-nál van. Az 1 formula azt fejezi ki, hogy ugyanekkor z_2Oz_3 is pozitív forgásirányú egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek derékszöge O-nál van. Az O körüli $90°$-os forgatás a z_1 pontot z_0-ba, egyúttal z_3-at z_2-be viszi, tehát a $z_0z_1z_2z_3$ négyszög átlói egymásra merőlegesek, egyenlő hosszúak és a z_1z_3 átlót z_0z_2-be képező $90°$-os forgatás pozitív forgásirányú.

Az $A_2=0$ feltétel annak felel meg, hogy a $z_0z_1z_2z_3$ négyszög paralelogramma.

Az $A_3=0$ feltétel az $A_1=0$ feltételhez hasonló tartalmú csak az említett forgásirány itt ellenkező.

4.1.

1. megoldás. A 4.1M1 megoldásban részletesen bemutattuk, hogyan fejezhető ki, hogy egy háromszög egyenlő szárú, és ezt alkalmaztuk is már a 4.6. feladat megoldásában. Vegyünk tehát egy olyan r komplex számot, amelyre teljesül, hogy $r + \overline{r} = 1$. Legyenek az (abc) háromszög oldalaira szerkesztett hasonló egyenlő szárú háromszögek csúcsai x, y, z (lásd az 1. ábrát).



4.1M1.1. ábra.

Az (abx) háromszög alapja $b - a$, szárai $(b - a)r$ és $(b - a)\overline{r}$. Hasonlóan írhatjuk fel a többi oldalakat is. Az r argumentumával történő elforgatás biztosítja, hogy a mindhárom háromszög hasonló lesz. Válasszuk origónak az (ay) és (cx) egyenesek metszéspontját. Bizonyítani kell, hogy a b és z vektorok egy egyenesbe esnek. A feltételek algebrai formában:

$$\frac{x}{c} \in \mathbb{R}, \qquad \frac{y}{a} \in \mathbb{R}, \qquad \text{bizonyítandó:} \quad \frac{z}{b} \in \mathbb{R}.$$

Egy komplex szám akkor és csak akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. A feltételeket most ezzel is kifejezhetjük:

$$\frac{x}{c} = \frac{\overline{x}}{\overline{c}}; \qquad \frac{y}{a} = \frac{\overline{y}}{\overline{a}}; \qquad \text{bizonyítandó, hogy} \quad \frac{z}{b} = \frac{\overline{z}}{\overline{b}}.$$

Törtek nélkül pedig:

$$x \cdot \overline{c} = \overline{x} \cdot c, \qquad y \cdot \overline{a} = \overline{y} \cdot a, \qquad z \cdot \overline{b} = \overline{z} \cdot b.$$

Ugyanezt a módszert már láttuk a 4.8M. f) megoldásban.

Fejezzük ki x, y, z értékeit, figyelembe véve, hogy $\overline{r} = 1 - r$.

$$x = a + (b - a)r = a(1 - r) + br = a\overline{r} + br,$$
$$y = b + (c - b)r = b(1 - r) + cr = b\overline{r} + cr,$$
$$z = c + (a - c)r = c(1 - r) + ar = c\overline{r} + ar.$$

Ezeket most behelyettesítjük a feltételekbe:

$$(a\overline{r} + br)\overline{c} - (\overline{a}r + \overline{b}\overline{r})c = 0,$$

illetve

$$(b\overline{r} + cr)\overline{a} - (\overline{b}r + \overline{c}\overline{r})a = 0.$$

A bizonyítandó állítás pedig a következő alakot ölti:

$$(c\overline{r} + ar)\overline{b} - (\overline{c}r + \overline{a}\overline{r})b = 0.$$

Beszorzás után adjuk össze a két feltételi egyenlőséget.

$$a\overline{r}\overline{c} + br\overline{c} - \overline{a}cr - \overline{b}c\overline{r} + b\overline{a}\overline{r} + cr\overline{a} - a\overline{b}r - a\overline{c}\overline{r} = br\overline{c} - \overline{b}c\overline{r} + b\overline{a}\overline{r} - a\overline{b}r = 0.$$

Kiemelés és (-1)-gyel történő szorzás után

$$\overline{b}(c\overline{r}+ar)-b(\overline{c}r+\overline{ar})=0,$$

a bizonyítandót kaptuk.

Megjegyzés: Közben érdekes következményt is beláttunk, ugyanis

$$x+y+z=a\overline{r}+br+b\overline{r}+cr+c\overline{r}+ar=(a+b+c)(r+\overline{r})=a+b+c.$$

Az (abc) és (xyz) háromszögek súlypontja megegyezik.

2. megoldás. A feladat egyszerűen kezelhető a „Trigonometrikus Ceva tétellel" (lásd a G.II.7.12. feladatot).

Jelölje a háromszög csúcsait A, B és C, belső szögeit α, β illetve γ, és legyenek az oldalakra kifelé írt egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögek AC_1B, BA_1C, CB_1A, amelyekben tehát

$$C_1AB\angle=ABC_1\angle=A_1BC\angle=BCA_1\angle=B_1CA\angle=CAB_1\angle=\varphi.$$

A Trigonometrikus Ceva tétel szerint azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle}\cdot\frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{\sin A_1AB\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CBB_1\sphericalangle}{\sin B_1BA\sphericalangle}=1.$$

Alkalmazzuk a Szinusz-tételt az ACC_1, C_1CB, BAA_1, A_1AC, CBB_1, B_1BA háromszögekben! Az ACC_1 háromszögben például

$$\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{AC_1}=\frac{\sin C_1AC\sphericalangle}{C_1C}\qquad\Longrightarrow\qquad\sin ACC_1\sphericalangle=\frac{AC_1}{C_1C}\sin(\alpha+\varphi),$$

míg az C_1CB háromszögben

$$\frac{\sin C_1CB\sphericalangle}{BC_1}=\frac{\sin C_1BC\sphericalangle}{C_1C}\qquad\Longrightarrow\qquad\sin C_1CB\sphericalangle=\frac{BC_1}{C_1C}\sin(\beta+\varphi).$$

Ezek alapján

$$\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle}=\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)},$$

és nyilván ehhez hasonlóan

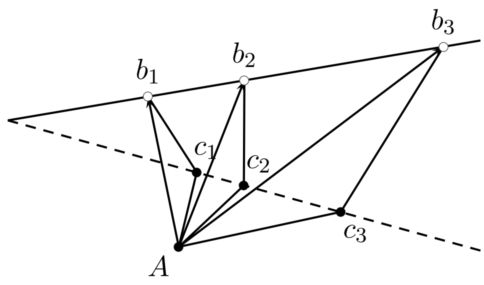
$$\frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{\sin A_1AC\sphericalangle}=\frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)},$$

$$\frac{\sin CBB_1\sphericalangle}{\sin B_1BA\sphericalangle}=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

A legutóbbi három egyenlet szorzatából:

$$\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle}\cdot\frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{\sin A_1AC\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CBB_1\sphericalangle}{\sin B_1BA\sphericalangle}=\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}\cdot\frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\gamma+\varphi)}=1,$$

tehát az állítást igazoltuk.



4.2M.1. ábra.

4.2. Legyen a háromszögek közös csúcsa az O pont. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy a b_1, b_2, b_3 vektorokat ugyanaz a forgatva nyújtás viszi át a megfelelő c_1, c_2, c_3 vektorokba.

A forgatva nyújtás egy z komplex számmal történő szorzás. Így $c_1 = b_1 z, c_2 = b_2 z, c_3 = b_3 z$. Mivel a közös kezdőpontú b_1, b_2, b_3 vektorok végpontjai egy egyenesen vannak, ezért a vektoroknál tanultak értelmében léteznek olyan λ és μ valós számok, amelyekre $\lambda + \mu = 1$ és

$$b_3 = \lambda b_1 + \mu b_2.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát z-vel.

$$b_3 z = \lambda b_1 z + \mu b_2 z,$$

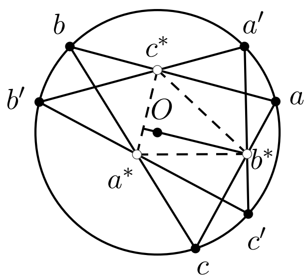
$$c_3 = \lambda c_1 + \mu c_2,$$

vagyis a c_1, c_2, c_3 pontok is egy egyenesen vannak.

A bizonyítás során azt is beláttuk, hogy a b_1, b_2, b_3 pontok osztóviszonya megegyezik c_1, c_2, c_3 pontok osztóviszonyával.

4.3. a) Legyen a kör középpontja az O pont, az ABC háromszög csúcsai pedig rendre a, b, c. Ezekhez képest az $A'B'C'$ háromszög csúcsai ugyanazzal az α szöggel vannak elforgatva az O körül (lásd az 1. ábrát). Jelöljük az α argumentumú egység komplex számot e-vel. Ekkor

$$a' = ae, \qquad b' = be, \qquad c' = ce.$$



4.3M.1. ábra.

Az (ab) és $(a'b')$ oldal c^* metszéspontja (a húrok metszéspontjára vonatkozó 4.8. b) feladat eredményét felhasználva):

$$c^* = \frac{ab(a' + b') - a'b'(a + b)}{ab - a'b'} = \frac{abe(a + b) - abe^2(a + b)}{ab - abe^2} =$$

$$= (a+b)\frac{e-e^2}{1-e^2} = (a+b)\frac{e}{1+e}.$$

Hasonlóan a másik két metszéspont

$$a^* = (b+c)\frac{e}{1+e}, \qquad b^* = (a+c)\frac{e}{1+e}.$$

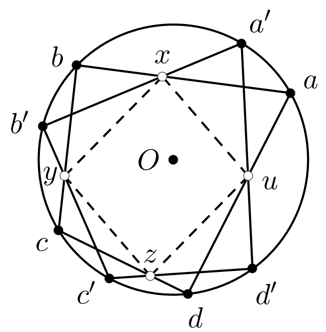
Vizsgáljuk meg teljesül-e az (abc) és $(a^*b^*c^*)$ háromszögek hasonlóságának feltétele.

$$\frac{a^*-c^*}{b^*-c^*} = \frac{a-c}{b-c}.$$

Ez a feltétel az $\frac{e}{1+e}$-vel történő egyszerűsíthetőség miatt nyilvánvalóan teljesül.

b) Elegendő pl. azt megmutatni, hogy a középpontot a c^*-gal összekötő egyenes merőleges az (a^*b^*) oldalra, tehát magasságvonal. A bizonyítás a másik két magasságvonalra is ugyanígy menne. Mivel $|a| = |b|$, ezért $a+b$ merőleges $a-b$-re, tehát $c^* = \frac{e}{1+e}(a+b)$ is merőleges az (a^*b^*) oldal $b^* - a^* = \frac{e}{1+e}(a-b)$ vektorára.

4.4. Legyen a kör középpontja az O pont, a húrnégyszög csúcsainak megfelelő komplex számok a, b, c, d, az elforgatott négyszög csúcsai pedig $a', b'c', d'$. Az $(ab), (bc), (cd), (da)$ oldalak elforgatottjaikat rendre az x, y, z, u pontokban metszik (lásd az 1. ábrát).



4.4M.1. ábra.

A 4.3M. megoldás jelöléseivel és számításai szerint

$$x = (a+b)\frac{e}{1+e}, \qquad y = (b+c)\frac{e}{1+e},$$

$$z = (c+d)\frac{e}{1+e}, \qquad u = (d+a)\frac{e}{1+e}.$$

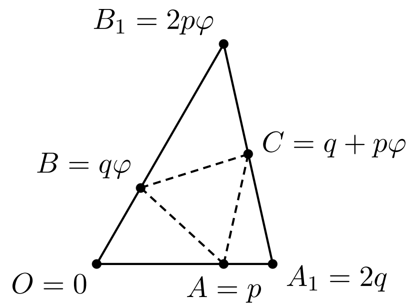
Ebből viszont következik, hogy $x - y = u - z$, azaz az $(xyzu)$ négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

4.5. A szög csúcsa - az egyszerűbb kezelhetőség érdekében - legyen az O pontban. Korábbi jelöléseink szerint legyen továbbá az első hatodik egységgyök $\varphi = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Ezzel az egyes pontoknak megfelelő komplex számok (lásd az 1. ábrát)

$$a = p, a_1 = 2q, b = q\varphi, b_1 = 2p\varphi.$$

A C ponthoz tartozó komplex szám felezőpontként adódik:

$$c = p\varphi + q.$$



4.5M.1. ábra.

A 4.4. feladatban meghatároztuk annak algebrai feltételét, hogy három pont egy szabályos háromszög három csúcsa. Alább ezt alkalmazzuk és Ífelhasználjuk, hogy φ hatodik egységgyök, tehát $\varphi^2 - \varphi + 1 = 0$. Azt kell belátnunk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Írjuk be az egyes pontok kifejezéseit a baloldara és végezzünk azonos átalakításokat.

$$p^2 + q^2\varphi^2 + p^2\varphi^2 + 2pq\varphi + q^2 - pq\varphi - pq\varphi^2 - q^2\varphi - p^2\varphi - pq =$$

$$p^2(\varphi^2 - \varphi + 1) + q^2(\varphi^2 - \varphi + 1) - pq(\varphi^2 - \varphi + 1) = (p^2 - pq + q^2)(\varphi^2 - \varphi + 1).$$

Ez valóban nulla, mert $\varphi^2 - \varphi + 1 = 0$.

Megjegyzés: A feladat természetesen vektorok forgatásával is megoldható

4.6. Legyen az eredeti háromszög (abc), négyzetközéppontok által meghatározott pedig (xyz). Ha x az (ab) oldal fölé szerkesztett négyzet középpontja, akkor $x - a$ merőleges $b - x$ -re és vele egyenlő hosszúságú. Innen

$$(x - a)i = b - x,$$

$$x = \frac{b + ai}{1 + i}.$$

Ugyanezzel a módszerrel

$$y = \frac{c + bi}{1 + i} \qquad z = \frac{a + ci}{1 + i}.$$

Annak feltétele, hogy az (xyz) háromszög szabályos legyen (lásd a 4.4. feladatot)

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

Ebbe az egyenlőségbe az előbbieket behelyettesítve és $(1 + i)^2$-tel szorozva:

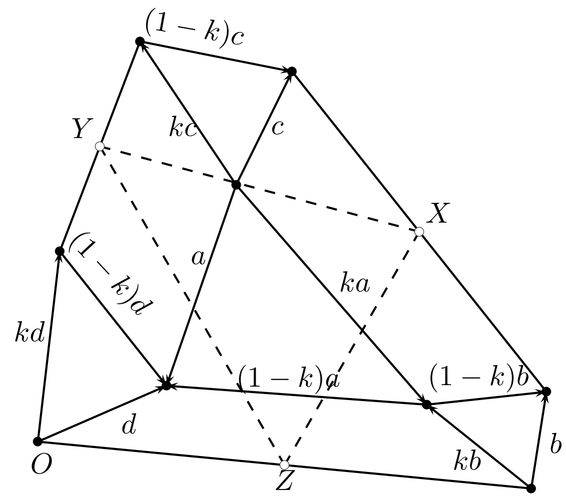
$$b^2 + 2abi - a^2 + c^2 + 2bci - b^2 + a^2 + 2cai - c^2 =$$

$$= bc + b^2i + cai - ab + ca + c^2i + abi - bc + ab + a^2i + bci - ca.$$

Az egyszerűsítések után i-vel osztva

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Látható, hogy a két feltétel ekvivalens. Pontosan akkor lesz a négyzetközéppontok által meghatározott háromszög szabályos, ha az eredeti is az.



4.7M.1. ábra.

4.7. Az 1. ábrán követhető a számolás. A k komplex számmal való szorzás azt a forgatva nyújtást hajtja végre, amellyel pl. az a oldalból a szomszédos ka oldalt kapjuk.

Számísuk ki az X, Y, Z-hez tatozó komplex számokat.

$$X = \frac{d - a + c + d - (1-k)a + (1-k)b}{2},$$

$$Y = \frac{kd + d - a + kc}{2},$$

$$Z = \frac{d - (1-k)a - kb}{2}.$$

Tekintsük az (XYZ) háromszög oldalvektorait.

$$X - Z = \frac{d - a + c + b}{2},$$

$$Y - Z = \frac{kd - ka + kc + kb}{2} = \frac{k(d - a + c + b)}{2},$$

$$X - Y = \frac{(1-k)d - (1-k)a + (1-k)c + (1-k)b}{2} = \frac{(1-k)(d - a + c + b)}{2}.$$

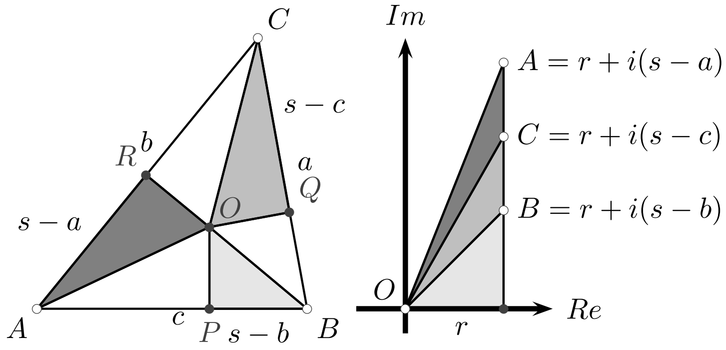
Ez pedig azt jelenti, hogy ez a háromszög is hasonló az előre megadott négy háromszöghöz.

4.8. Mészáros József felvidéki kolléga találta ezt az érdekes bizonyítást a Heron-képletre, amelyre egy középiskolás diák, Miles Dillon Edwards jött rá[15].

A háromszögek O-nál fellépő szögei a szokásos jelölésekkel (lásd az 1. ábrát) rendre $90^\circ - -\frac{\alpha}{2}, 90^\circ - \frac{\beta}{2}, 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. A beírt kör sugara r, az érintőszakaszok $AP = s-a, BQ = s-b, CR = s-c$.

Helyezzük el most az OPA, OQB és ORC háromszögeket a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy az O pont mindegyik háromszögre legyen a középpontban és a háromszögek r hosszúságú befogója a valós tengelyre essen. Így az A, B, C csúcsoknak megfelelő komplex számok

$$A = r + (s-a)i, B = r + (s-b)i, C = r + (s-c)i.$$



4.8M.1. ábra.

A három komplex szám argumentumának összege

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 270^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 180^\circ.$$

Szorzásakor az argumentumok összeadódnak, ennek megfelelően a három szám szorzatának képzetes része nulla kell, hogy legyen.

$$A \cdot B \cdot C = [r + (s-a)i][r + (s-b)i][r + (s-c)i] =$$

$$= [r^3 - r(s-a)(s-b) - r(s-b)(s-c) - r(s-c)(s-a)] +$$

$$+ i[r^2(s-a) + r^2(s-b) + r^2(s-c) - (s-a)(s-b)(s-c)].$$

A képzetes rész nulla:

$$r^2(s-a+s-b+s-c) - (s-a)(s-b)(s-c) = 0.$$

átrendezve és s-sel szorozva

$$r^2 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Végül beírva az ismert $t = rs$ összefüggést éppen a Heron-képlet adódik

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

4.9. Feltevésünk szerint a következő kettősviszonyok mind valósak (lásd az 1. ábrát):

$$(z_1 w_2 z_2 w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} : \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1},$$

$$(z_2 w_3 z_3 w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} : \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2},$$

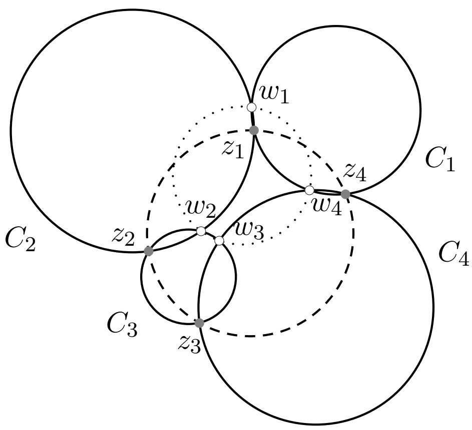
$$(z_3 w_4 z_4 w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} : \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3},$$

$$(z_4 w_1 z_1 w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} : \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}.$$

Következésképpen

$$\frac{(z_1 w_2 z_2 w_1)}{(z_2 w_3 z_3 w_2)} \cdot \frac{(z_3 w_4 z_4 w_3)}{(z_4 w_1 z_1 w_4)} =$$

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)(w_2-w_1)(w_4-w_3)(w_3-z_3)(w_1-z_1)(z_2-w_2)(z_4-w_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)(w_3-w_2)(w_1-w_4)(w_2-z_2)(w_4-z_4)(z_1-w_1)(z_3-w_3)}.$$



4.9M.1. ábra.

Az egyszerűsítés után pedig

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(w_2 - w_1)(w_4 - w_3)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)}.$$

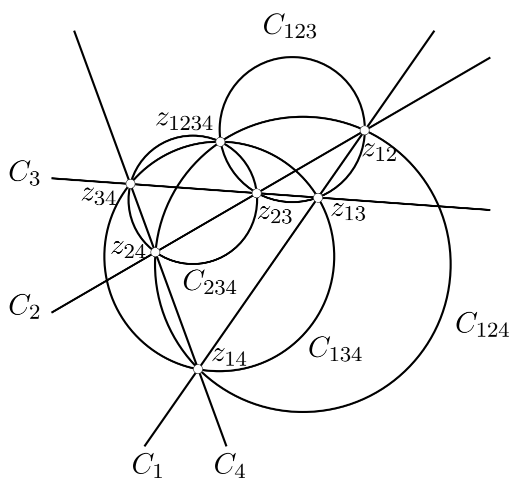
Most két-két előjelet megváltoztatva a képlet átírható

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_4)(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \cdot \left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} : \frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4}\right) =$$

$$= (z_1 z_3 z_2 z_4) \cdot (w_1 w_3 w_2 w_4).$$

Vagyis $(z_1 z_3 z_2 z_4)$ pontosan akkor lesz valós, ha $(w_1 w_3 w_2 w_4)$. Ezzel az állítást beláttuk.

4.10. a) Négy általános helyzetű egyenesünk a síkon legyen: C_1, C_2, C_3, C_4. Legyen továbbá a C_j és C_k egyenesek (egyik) metszéspontja z_{jk} (a másik ∞), a z_{jk}, z_{km}, z_{jm} pontok köré írt köre pedig C_{jkm} (lásd az 1. ábrát).



4.10M.1. ábra.

Alkalmazzuk a 4.10. feladat eredményét a $C_{234}, C_2, C_1, C_{134}$ „körök”-re. Ekkor a következőket figyelhetjük meg:

C_{234} és C_2 metszéspontjai z_{23} és z_{24},

$$C_2 \text{ és } C_1 \text{ metszéspontjai } \infty \text{ és } z_{12},$$

$$C_1 \text{ és } C_{134} \text{ metszéspontjai } z_{13} \text{ és } z_{14},$$

$$C_{134} \text{ és } C_{234} \text{ metszéspontjai } z_{34} \text{ és } z_{1234},$$

ahol z_{1234} az „új” metszéspontja a C_{134} és C_{234} köröknek. (A másik metszéspontjuk z_{34}.) Mivel $z_{23}, \infty, z_{13}, z_{34}$ kollineárisak, ezért a a 4.10. feladat alapján azonnal következtethetünk, hogy $z_{24}, z_{12}, z_{14}, z_{1234}$ egy körön vannak. A jelölések alapján azt is tudjuk, hogy z_{24}, z_{12}, z_{14} köré írt köre C_{124}. Ezek szerint a $C_{124}, C_{134}, C_{234}$ körök metszik egymást a z_{1234} pontban.

Másrészt , ugyanez elmondható a $C_{234}, C_2, C_1, C_{134}$ körökre más szereposztással is. Mivel $z_{24}, \infty, z_{14}, z_{34}$ kollineárisak (mind a C_4 egyenesen vannak), ezért $z_{23}, z_{12}, z_{13}, z_{1234}$ egy körön vannak. A z_{23}, z_{12}, z_{13} köré írt kör C_{123}. Ezek szerint a $C_{123}, C_{134}, C_{234}$ körök is a z_{1234} pontban metszik egymást.

A négy kör a z_{1234} pontban metszi egymást. Ez a pontot hívjuk a négy egyenes *Clifford-féle pontj*ának.

b) Itt már valóban nem érdemes megállni! Most vegyünk öt általános helyzetű egyenest. Bármelyik négynek van Clifford-féle pontja. Az eddig módszerrel belátható, hogy az így nyerhető öt Clifford-féle pont egy körön van. Sőt! Hat általános helyzetű egyenesnek hat Clifford-féle köre van. Ezek úgy keletkeznek, hogy egy-egy pontot elhagyunk és a maradék öt pontnak vesszük a Clifford-körét. Az is az eddig módszerrel igazolható, hogy ez a hat kör egy pontban metszi egymást, stb... Kaptunk egy végtelen tételláncolatot, az *ún. Clifford-féle tételláncot.*

5. Projektív geometria

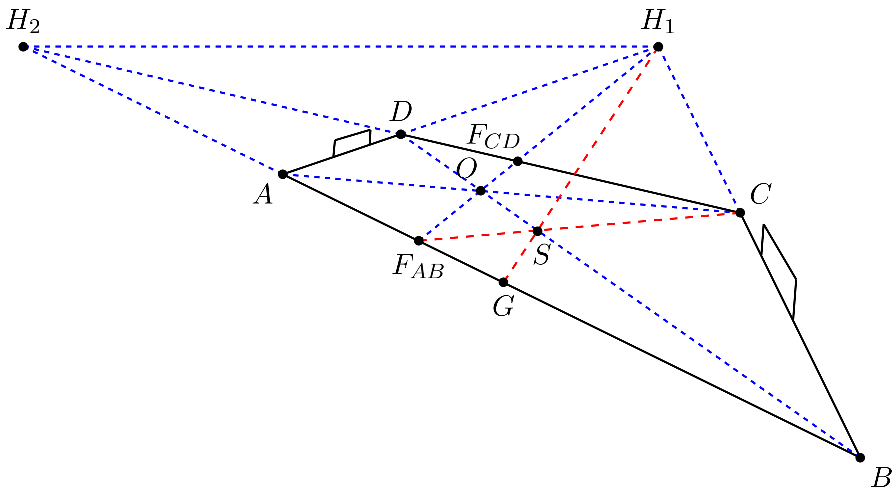
5.2. A fényképezés egy vetítésnek fogható fel. A külvilágot a fényképezőgép P fókuszpontjából a film Σ síkjára vetítjük. A fényképen megjelenő $ABCD$ négyszög a valóságos focipálya, az $A'B'C'D'$ téglalap képe ennél a vetítésnél. Az $A'D'$ alapvonal és a P fókuszpont egy Σ_{AD} síkot alkot, ez a sík tartalmazza a fókuszpontot az oldalvonal bármely pontjával összekötő egyenest, tehát az AD egyenes a Σ_{AD} sík és a Σ sík metszésvonala. Az $A'D'$-vel párhuzamos $B'C'$ alapvonal és a P pont síkja Σ_{BC}, melynek Σ-val való metszete a BC egyenes. A Σ_{AD} és a Σ_{BC} sík is tartalmazza a P ponton át az $A'D'$, $B'C'$ egyenesekkel párhuzamosan húzott h_1 egyenest. Ha h_1 a film Σ síkját H_1-ben metszi, akkor H_1 egyben az AD, BC egyenesek metszépontja is. Az focipálya valódi síkjában az $A'D'$, $B'C'$ egyenesekkel párhuzamos egyenesek képei mind H_1-en mennek át, mert bármelyik ilyen egyenes és a P pont olyan síkot feszít ki, amely tartalmazza a h_1 egyenest.

Ehhez hasonlóan a focipálya $A'B'$, $C'D'$ oldalvonalainak és az ezekkel párhuzamos egyeneseknek olyan egyenesek a képei, pl AB és CD, amelyek a Σ sík egy H_2 pontján haladnak át.

a) A pálya középpontja az $A'C'$, $B'D'$ átlók O' metszéspontja, ennek O képét megkapjuk az AC, BD egyenesek metszéspontjaként. A pálya középvonala az O' ponton át az $A'D'$, $B'C'$ alapvonalakkal párhuzamosan húzott egyenes, melynek képe tehát az OH_1 egyenes. OH_1 egyenes és az AB, CD egyenesek F_{AB}, F_{CD} metszéspontjai az oldalvonalak felezőpontjainak képei.

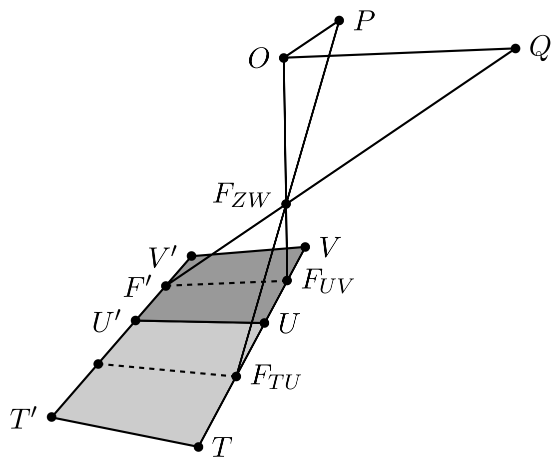
b) Felhasználjuk, hogy a súlypont harmadolja a súlyvonalat. A pálya oldalvonalainak F'_{AB}, F'_{CD} felezőpontjai és a B' sarokzászló alkotta háromszög egyik súlyvonala $O'B'$, egy másik súlyvonala $F'_{AB}C'$ így a háromszög S' súlypontjának képe a Σ síkon $S = F_{AB}C \cap OB$. A harmadolóvonal az SH_1 egyenes.

5.4. d) Erre a feladatrészre adunk egy számolás nélküli indoklást. Legyen festőhöz legközelebbi parkettalap az $UVV'U'$ lap, a festő szeme a Q pont, az UV, $U'V'$ szakaszok felezőpontja F_{UV} és F', az F' pont képe a vásznon F_{ZW}. Az $UVV'U'$ parkettalappal szomszédos egyik négyzetlap (lásd a 2. ábrát) $TUU'T'$, ezen a TU oldalél felezőpontja F_{TU}. A vizsgált TU', UV'



5.2M.2. ábra.

átlókkal párhuzamos a parkettalapok síkjában az $F_{TU}F'$ egyenes is, melynek képe a vásznon az $F_{TU}F_{ZW}$ egyenes, amely tehát szintén P-ben metszi az OP horizontot. Az $F_{UV}F'$, $F_{UV}F_{TU}$ szakaszok egyenlőek egymással, hiszen mindketten egyenlők a parketta négyzetlapok oldalával. Az $F_{ZW}F_{UV}F'$, $F_{ZW}F_{UV}F_{TU}$ háromszögek így egybevágó derékszögű háromszögek, amelyek az $F_{UV}O$ tengely körüli derékszögben egymásba forgathatók. Ez a forgatás egyúttal egymásba viszi a P, Q pontokat is, hiszen ezek a pontok az egymásba forduló $F_{TU}F_{ZW}$, $F'F_{ZW}$ egyeneseknek a forgatásnál önmagába képződő OPQ síkkal (a Q ponton áthaladó a parkettalapok, azaz a földfelszín síkjával párhuzamos síkkal) való metszéspontjai.



5.4M.2. ábra.

5.7. a) Az $ABCD$ négyszög AB, CD szemközti oldalainak meghosszabbítását jelölje U, a BC, DA oldalegyenesekét V. Legyen O a négyszög Σ síkjára nem illeszkedő tetszőleges pont és vetítsük Σ-t O-ból a $\Pi = OUV$ síkkal párhuzamos Π' síkra. Az OU, OV vetítősugarak párhuzamosak ezzel a síkkal, így U és V a Π' sík ideális pontjába képződik, az $ABCD$ négyszög $A'B'C'D'$ képén az $A'B'$, $C'D'$ és a $B'C'$, $D'A'$ egyenesek is párhuzamosak lesznek.

b) Azt mutatjuk meg, hogy az $A'B'C'D'$ paralelogramma átvihető négyzetbe. Legyen Γ tetszőleges sík, amely tartalmazza az $A'B'$ egyenest, de nem tartalmazza C'-t és D'-t. A Γ sík megfelelő C^*, D^* pontjaira ABC^*D^* négyzet. Mivel C^*D^* és $C'D'$ is párhuzamos és egyenlő hosszú $A'B'$-vel így azok egymással is egyenlőek és párhuzamosak, azaz $C'D'D^*C^*$ paralelogramma. Ha a Π' síkot a $C'C^*$ egyenessel párhuzamos vetítősugarakkal átvetítjük a Γ síkra, akkor az $A'B'C'D'$ paralelogramma képe az $A'B'C^*D^*$ négyzet lesz.

c) Az a) feladatrész megoldásának ábrájára alkalmazzunk egy olyan $\mathcal{A}$ affin transzformációt, amely Σ síkon identikus, és az $A'B'C'D'$ paralelogrammát négyzetbe képezi. A $\mathcal{A}(O)$ pontból a $\mathcal{A}(\Pi')$ síkra vetítve az $ABCD$ négyszög az $\mathcal{A}(A'B'C'D')$ négyzetbe képződik.

5.3. Jelölje T_{PQR} a PQR háromszög előjeles, tehát a háromszög körüljárásának megfelelő előjelű, területét!

Az alábbi összefüggés annak alapján írható fel, hogy az említett háromszögek mindegyikének magassága az O pont és az $ABCD$ egyenes távolsága.

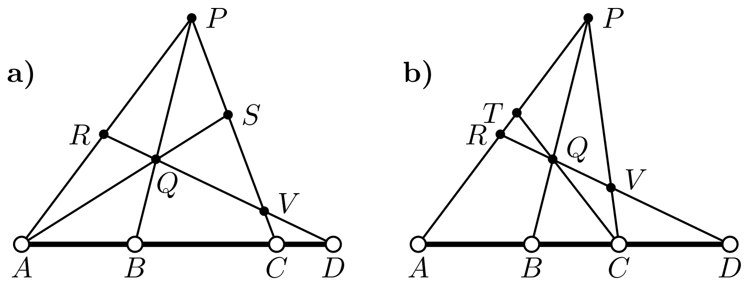
$$(ABCD) = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = \frac{T_{ACO} \cdot T_{DBO}}{T_{CBO} \cdot T_{ADO}} = \frac{(OA \cdot OC \cdot \sin(ac)) \cdot (OD \cdot OB \cdot \sin(db))}{(OC \cdot OB \cdot \sin(cb)) \cdot (OA \cdot OD \cdot \sin(ad))} =$$

$$= \frac{\sin(ac) \cdot \sin(db)}{\sin(cb)\sin(ad)} = (abcd).$$

5.5. $(ABC) = AC/CB = (3-0)/(1-3) = -\frac{3}{2}$. $(ABCD) = (ABC)/(ABD)$, amiből $(ABD) = = (ABC)/(ABCD) = -\frac{3}{8}$. $(ABD) = (d-0)/(1-d) = -\frac{3}{8}$, miből $d = -\frac{3}{5}$.

5.6. **a)** $(ABC) = \frac{7-(-3)}{1-7} = -\frac{5}{3}$, $(ABD) = \frac{10-(-3)}{1-10} = -\frac{13}{9}$,
$(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{15}{13}$.
b) $(DCB) = \frac{1-10}{7-1} = -\frac{3}{2}$, $(DCA) = \frac{(-3)-10}{7-(-3)} = -\frac{13}{10}$,
$(ABCD) = (ABC)/(ABD) = \frac{15}{13}$.
c) $(ABC) = -\frac{5}{3}$, $(ABE) = -1$, $(ABCD) = \frac{5}{3}$.

5.9. Vegyünk fel egy $ABCD$ egyenesre nem illeszkedő tetszőleges P pontot és a PB egyenesen egy P-től és B-től különböző Q pontot. Legyen még $R = DQ \cap PA$, $V = DQ \cap PC$ valamint a)-ban kell még $S = AQ \cap PC$ és b)-ben $T = CQ \cap PA$ (lásd az 1. ábrát).



5.9M.1. ábra.

a) $(ABCD) \overset{Q}{=} (SPCV) \overset{A}{=} (QRDV) \overset{P}{=} (BADC)$
b) $(ABCD) \overset{P}{=} (RQVD) \overset{C}{=} (RTPA) \overset{Q}{=} (DCBA)$

5.16. $(ABDC)=\frac{AD}{DB}/\frac{AC}{CB}=\frac{AD\cdot CB}{DB\cdot AC}=\frac{1}{\frac{AC}{CB}/\frac{AD}{DB}}=\frac{1}{(ABCD)}=\frac{1}{x}$.

$(BACD)=\frac{BC}{CA}/\frac{BD}{DA}=\frac{BC\cdot DA}{CA\cdot BD}=\frac{AD\cdot CB}{DB\cdot AC}=\frac{1}{x}$, mint fent.

Ha $y=(ACBD)=\frac{AB}{BC}/\frac{AD}{DC}=\frac{AB\cdot DC}{BC\cdot AD}$ és $x=\frac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD}$, akkor

$$y+x=\frac{AB\cdot CD+AC\cdot DB}{CB\cdot AD}=\frac{AB\cdot(CB+BD)+AC\cdot DB}{CB\cdot AD}=$$
$$=\frac{AB\cdot CB+AB\cdot BD+AC\cdot DB}{CB\cdot AD}=\frac{AB\cdot CB+BA\cdot DB+AC\cdot DB}{CB\cdot AD}=$$
$$=\frac{AB\cdot CB+(BA+AC)\cdot DB}{CB\cdot AD}=\frac{AB\cdot CB+BC\cdot DB}{CB\cdot AD}=$$
$$=\frac{AB\cdot CB+CB\cdot BD}{CB\cdot AD}=\frac{(AB+BD)\cdot CB}{CB\cdot AD}=\frac{AD\cdot CB}{CB\cdot AD}=1,$$

azaz $y=1-x$.

Innen minden permutáció számolható. Pl az A-val kezdődőek:

$(ABCD)=x$, $(ABDC)=\frac{1}{x}$, $(ACBD)=1-x$, $(ACDB)=\frac{1}{1-x}$, $(ADCB)=1-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{x-1}$, $(ADBC)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

x	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
$(ABCD)$	$(ACBD)$	$(ABDC)$	$(ACDB)$	$(ADCB)$	$(ADBC)$
$(BADC)$	$(BDAC)$	$(BACD)$	$(BDCA)$	$(BCDA)$	$(BCAD)$
$(CDAB)$	$(CADB)$	$(CDBA)$	$(CABD)$	$(CBAD)$	$(CBDA)$
$(DCBA)$	$(DBCA)$	$(DCAB)$	$(DBAC)$	$(DABC)$	$(DACB)$

5.17. Eredmény: $(ABCD)=\frac{\beta_1\alpha_2}{\beta_2\alpha_1}$.

5.1. a) A hányados argumentuma a $z_3z_2z_1$ irányított szöggel egyenlő.

b) Az irányítástartó hasonlósági transzformációk az eltolások és a forgatva nyújtások. A t komplex számmal való eltolás a $z\to z+t$, a b pont körüli $a=\lambda(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ komplex számmal való forgatva nyújtás (ϕ szöggel való forgatás és λ arányú nyújtás) a $z\to a(z-b)+$ $+b=az+b(1-a)$ képlettel adható meg. A konstans hozzáadása már a z_i-z_j különbségeket sem változtatja meg, a konstanssal való szorzás pedig ezek hányadosát hagyja invariánsan.

c) Ha a b középpontú λ paraméterű inverziónál z invertáltja z', akkor $(z'-b)(\overline{z-b})=\lambda$, azaz

$$z'=b+\frac{\lambda}{\overline{z-b}}.$$

A b szám kivonása illetve hozzáadása, a λ-val való szorzás nem változtatja az osztóviszonyt, így a kettősviszonyt sem. Csak azt kell megmutatnunk, hogy a $z\to\frac{1}{\overline{z}}$ leképezés, tehát az egységkörre vonatkozó inverzió, a konjugáltjára változtatja a kettősviszonyt.

$$\left(\frac{1}{\overline{z_1}},\frac{1}{\overline{z_2}},\frac{1}{\overline{z_3}},\frac{1}{\overline{z_4}}\right)=\frac{(\frac{1}{\overline{z_1}}-\frac{1}{\overline{z_3}})(\frac{1}{\overline{z_4}}-\frac{1}{\overline{z_2}})}{(\frac{1}{\overline{z_3}}-\frac{1}{\overline{z_2}})(\frac{1}{\overline{z_1}}-\frac{1}{\overline{z_4}})}=\frac{\left(\frac{\overline{z_3}-\overline{z_1}}{\overline{z_1 z_3}}\right)\left(\frac{\overline{z_2}-\overline{z_4}}{\overline{z_4 z_2}}\right)}{\left(\frac{\overline{z_2}-\overline{z_3}}{\overline{z_3 z_2}}\right)\left(\frac{\overline{z_4}-\overline{z_1}}{\overline{z_1 z_4}}\right)}=$$

$$=\frac{(\overline{z_3}-\overline{z_1})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_2}-\overline{z_3})(\overline{z_4}-\overline{z_1})}=\overline{(z_1z_2z_3z_4)}.$$

5.3. Egy korábbi feladat állítása szerint az $(ABCD)$ kettősviszony értéke valós. Így $(ABCD)$ kiszámításához csak az A, B, C, D pontok közti szakaszok hosszát kell figyelembe vennünk, illetve meg kell vizsgálni a kettősviszony előjelét is.

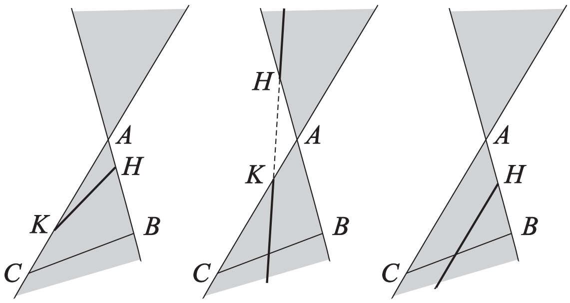
Az $(ABCD)$ komplex kettősviszony és az $(abcd)$ sugárnégyes kettősviszonya egyszerre negatív, ha az AB pontpár elválasztja a CD pontpárt, ami ugyanakkor következik be, ha az ab egyenespár elválasztja a cd egyenespárt.

Alkalmazzuk a Nagy Szinusz Tételt a PAC, PCB, PAD, PDB háromszögekre! Ha az adott kör sugara r, akkor

$$AC = 2r\sin ac, \qquad CB = 2r\sin cb, \qquad AD = 2r\sin ad, \qquad DB = 2r\sin db, \tag{1}$$

így $(ABCD) = (abcd)$. Megjegyezzük, hogy a (1) összefüggés akkor is teljesül, ha P megegyezik az A, B, C, D pontok valamelyikével, pl A-val, mert ilyenkor a húr pl AC kerületi szöge a PA érintő és az AC húr szögével egyenlő.

5.1. Jelöle a k vezérkörű A csúcsú kúpot $\mathcal{A}$, a k kör Σ síkjától különböző vizsgált síkot Π, a Π, Σ síkok metszésvonalát e, a k kör e-re merőleges átmérőjét BC, az $\mathcal{A}$ kúp AB, AC alkotóinak a Π síkkal való metszéspontjait, amennyiben léteznek, H és K. A bizonyítás során elsősorban az A, B, C, H, K pontok Δ síkjában dolgozunk. A BC átmérő és az e egyenes G metszéspontja HK-ra is illeszkedik, hiszen $G = \Sigma \cap \Delta \cap \Pi$, míg $HK = \Delta \cap \Pi$ (lásd a 2. ábrát).



5.1M.1. ábra.

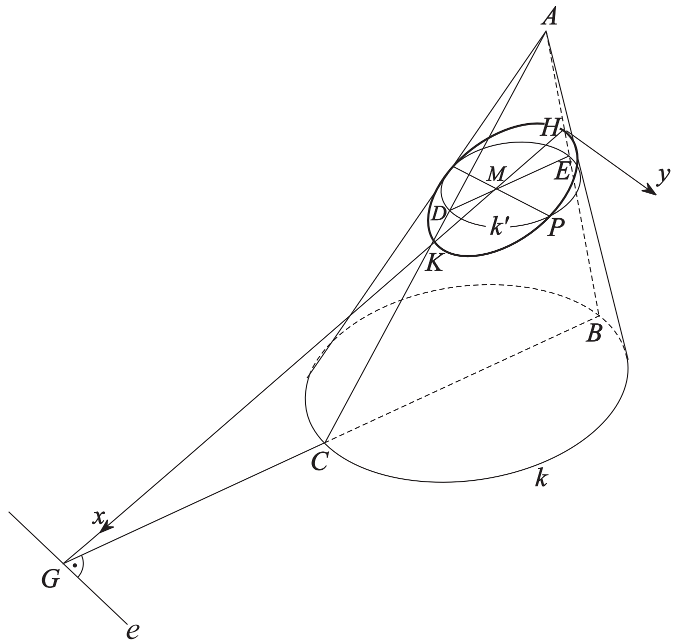
Az 1. ábrán a Δ sík látható. A szürkére színezett kettős szögtartomány $\mathcal{A}$ belseje, a BC szakasz pedig a k kör átmérője. A Π metsző sík és a Δ sík HK metszésvonala három lényegesen különböző módon helyezkedhet el: vagy csak az egyik szögtartományt metszi el, vagy mindkét szögtartománnyal van közös pontja, vagy párhuzamos az egyik szögszárral, amikor is H és K egyike, a továbbiakban K, nem is jön létre. Látni fogjuk, hogy ezekben az esetekben rendre ellipszis (esetleg kör), hiperbola illetve parabola lesz a Π sík és a $\mathcal{A}$ kúp metszésvonala.

Jelölje $\mathcal{A}$ és Π egy tetszőleges közös pontját P. Fektessünk P-n át a k alapkörrel párhuzamos síkot, amely a kúpból kimetszi a DE átmérőjő k' kört. Húzzunk végül a P pontból az e egyenessel párhuzamost, azaz a DE átmérőre merőlegest. Az így nyert PM szakasz hosszát szeretnénk meghatározni. A P pont illeszkedik a DE szakasz k' Thalesz-körére, így a DPE háromszög derékszögű. Ebben – a magasságtétel szerint – $PM^2 = DM \cdot EM$. Másrészt, az EHM és BHG, illetve a DMK és CGK hasonló háromszögekből (lásd a 2. ábrát vagy a 3. ábra bal oldali részábráját)

$$\frac{DM}{MK} = \frac{CG}{GK}, \qquad \frac{EM}{MH} = \frac{BG}{GH}, \tag{1}$$

így

$$PM^2 = MK \cdot MH \cdot \frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH}. \tag{2}$$

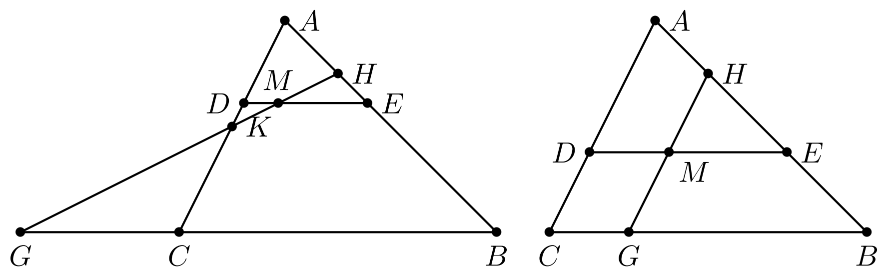


5.1M.2. ábra.

Vegyük most tekintetbe, hogy a $\frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH}$ tényező független a P pont helyzetétől, tehát, ha μ^2-tel jelöljük, akkor a metszésvonal egyenlete („szümptómája"):

$$PM^2 = \mu^2 \cdot MH \cdot MK. \tag{3}$$

Bár a 2. ábrán a 1. ábra bal oldali részábrájának megfelelő eset (ellipszis) látható, de a fenti levezetés a 1. ábrán látható középső esetben is (hiperbola) szó szerint ugyanez. A (3) szümptómát a két esetben különböző alapfeltevés mellett kell vizsgálni: az egyikben M a HK szakaszon, a másikban csak a HK szakaszon kívül lehet, illetve M mindkét esetben megegyezhet a H, K pontok bármelyikével.



5.1M.3. ábra.

Ha az 1. ábra jobb oldali esete valósul meg, akkor a 3. ábra jobb oldali részábráját vizsgáljuk. Itt KM és AC párhuzamosak, így a 4. összefüggések megfelelői most

$$DM = CG, \qquad \frac{EM}{MH} = \frac{BG}{GH}, \tag{4}$$

ezért a $PM^2 = DM \cdot ME$ magasságtételt is figyelembe véve

$$PM^2 = MH \cdot \frac{CG \cdot BG}{GH}. \tag{5}$$

A $\frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH} = \mu^2$ tényező független a P pont helyzetétől, tehát, a metszésvonal egyenlete:

$$PM^2 = \mu^2 \cdot MH, \tag{6}$$

ami valóban parabola egyenlete.

5.2. Alapozzunk a megoldást az 5.1M megoldásra. Ott láttuk, hogy ha e az alapkör síkjának és a metszési síknak a metszésvonala, KH a metszet egy átmérője, amelyet a metszet P pontjából e-vel párhuzamosan bocsájtott egyenes M-ben metsz, akkor

$$PM^2 = MK \cdot MH \cdot \frac{CG \cdot BG}{GK \cdot GH}. \tag{1}$$

Itt nem részletezzük annak indoklását, hogy az 1. összefüggés pontosan akkor kör egyenlete, hogy e merőleges HK-ra és

$$CG \cdot BG = GK \cdot GH. \tag{2}$$

A merőlegességi feltétel azt jelenti, hogy a metsző sík szimmetrikus a kúp A csúcsán áthaladó, a k alapkör síkjára most merőleges síkra. A metszésvonal tehát az a HK átmérőjű kör, amely merőleges a szimmetriasíkra (egy ilyen kör van).

a) Körmetszet konstukciójához kiindulunk az alapkör BC átmérőjéből, majd a BC egyenesen felveszünk egy tetszőleges, de B-től és C-től különböző G pontot; az alapkörre merőleges, a BC egyenesre illeszkedő Δ síkon felveszünk egy G-t tartalmazó, de BC-től különböző GK egyenest és azon a H, K pontokat a (2) relációnak megfelelően. Ebben még azt is figyelembe kell venni (lásd az 5.1M megoldás esetszétválasztást bemutató ábráját), hogy G pontosan akkor van B és C között, ha H és K között van. Azt is mondhatjuk, hogy H a B, C, K pontokon áthaladó kör és a GK egyenes metszéspontja, hiszen a (2) egyenlet G-nek erre a körre vonatkozó hatványát fejezi ki kétféleképpen. A keresett kúp A csúcsa a BK, CH (vagy a BH, CK) egyenesek metszéspontja.

b) Tekintsük az alapkört és a K pontot is tartalmazó g gömböt. A 2. összefüggés a G pontnak erre a gömbre vonatkozó hatványát fejezi ki kétféleképpen, tehát H is illeszkedik g-re. A HK egyenesre illeszkedő, a szimmetriasíkra merőleges sík a g gömbből egy kört metsz ki, ami tehát szükségképpen megegyezik a vizsgált metszésvonallal.

5.3. b) Legyen a k kör t-re merőleges átmérője BC, a BC egyenes és t metszéspontja T. A keresett mértani hely a BC-re illeszkedő, az alapkörre merőleges Δ síkban található $r = \sqrt{TA \cdot TB}$ sugarú T középpontú kör, kivéve e kör BC egyenesre illeszkedő pontjait.

5.1.

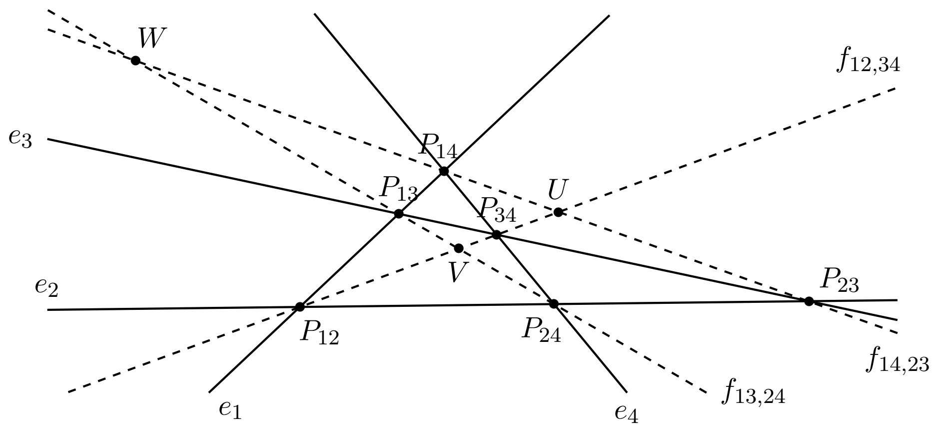
1. megoldás. Az 1. ábrán az e_1, e_2, e_3, e_4 egyenesek alkotta négyoldal e_i, e_j egyeneseinek metszéspontját jelölje P_{ij}, a $P_{12}P_{34}$ egyenesnek a $P_{14}P_{23}$ egyenessel való metszéspontját U, a $P_{13}P_{24}$ egyenessel való metszéspontját V. Az UV egyenes a teljes négyoldal egy átlója, rajta U és V az átlóspontok.

Az alábbi kettősviszonyok egyenlők, mert a jelölt pontból egymásba vetíthetők a pontnégyesek:

$$(P_{12}P_{34}UV) \overset{P_{13}}{=} (P_{14}P_{23}UW) \overset{P_{24}}{=} (P_{34}P_{12}UV).$$

2. megoldás. Ha átvetítjük a síkot egy másik síkba úgy, hogy a $P_{14}P_{23}$ egyenes az ideális egyenesbe képződjön, akkor a $P_{34}P_{24}P_{12}P_{13}$ négyszögből paralelogramma lesz és azt kell bizonyítani, hogy a $P_{34}P_{12}$ átlót felezi a $P_{24}P13$ átló. Ez nyilvánvaló.

5.3.



5.1M1.1. ábra.

1. megoldás. A π leképezés fixpontjai az $X = e \cap f$, $Y = O_1O_2 \cap e$ pontok.

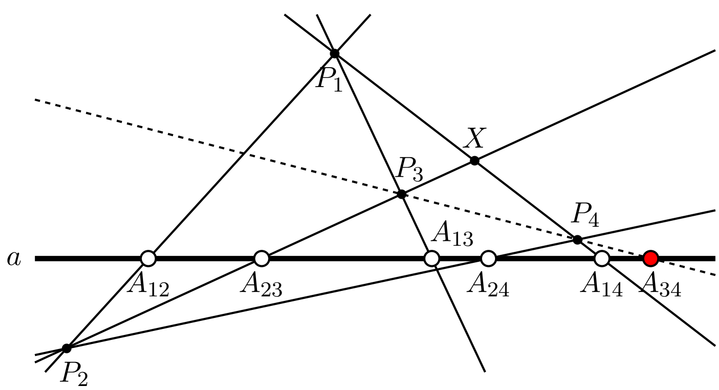
$$(XYAP) \stackrel{\pi}{=} (XYBP') \stackrel{\pi}{=} (XYAP''),$$

így $P'' = P$.

2. megoldás. Vetítsük át a síkot úgy, hogy az O_1 pont és az $X = e \cap f$ pont a végtelenbe kerüljön, tehát az e, f egyenesek illetve az AA_f, BB_f egyenesek párhuzamosak legyenek. Könnyű megmutatni, hogy a π transzformáció az új síkon az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözés.

5.4. Egyrészt $(A\phi(A)B\phi(B)) \stackrel{\phi}{=} (\phi(A)A\phi(B)\phi(\phi(B)))$, másrészt $(ABCD) = (BADC)$, így $(A\phi(A)B\phi(B)) = (\phi(A)A\phi(B)B)$, így $\phi(\phi(B)) = B$.

5.5. b) Legyen $P_3 = P_1A_{13} \cap P_2A_{23}$, $P_4 = P_1A_{14} \cap P_2A_{24}$, így mindegyik feltétel teljesül. A P_3, P_4 pontok bármelyike lehet ideális is, tehát a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög esetleg elfajul.



5.5M.2. ábra.

c) Legyen $P_1P_4 \cap P_2P_3 = X$ (lásd a 2. ábrát). Vetítsük az a egyenest P_2-ből P_1P_4-re, majd azt P_3-ból vissza a-ra:

$$(A_{23}A_{14}A_{12}A_{24}) \stackrel{P_2}{=} (XA_{14}P_1P_4) \stackrel{P_3}{=} (A_{23}A_{14}A_{13}A_{34}).$$

A bal oldalon található kettősviszony meghatározott, a jobb oldali kettősviszonyt adó első három pont rögzített, így a negyedik, A_{34} is meghatározott.

5.6. a) Legyen $P_4 = a_{14} \cap a_{24}$ és legyen P_1 az a_{14} egyenes tetszőleges, de P_4-től különböző és a -ra nem illeszkedő pontja. Legyen $a_{12} = P_1A_{12}$ és $P_2 = a_{12} \cap a_{24}$, $a_{23} = P_2A_{23}$, $a_{13} = P_1A_{13}$, végül $P_3 = a_{13}a_{23}$. Könnyű ellenőrizni, hogy az így kapott P_1, P_2, P_3, P_4 pontnégyes teljesíti a feladat feltételeit.

b) Az 5.5. feladat állítása szerint A_{34} rögzített, így $P_4 = a_{14} \cap a_{24}$ révén az $a_{34} = P_4A_{34}$ egyenes is fix, ezen van P_3. Itt lényegében bárhol lehet, mert az a)-ban leírt szerkesztés $P_1 \in a_{14}$ kezdeti felvétele helyett $P_3 \in a_{34}$ kezdeti felvételével is elmondható.

5.7. Az 5.5. feladat állítására vezetjük vissza a feladatot. Ebből a célból átbetűzzük az ábrát:

$$A_1 = P_2, \qquad A_2 = P_2', \qquad B_1 = P_3, \qquad B_2 = P_3', \qquad C_1 = P_4, \qquad C_2 = P_4',$$

míg $P_1 = A_1A_2 \cap B_1B_2$ és

$$P_iP_j = a_{ij}, \qquad P_i'P_j' = a_{ij}' \qquad (1 \le i < j \le 4),$$

továbbá

$$\begin{array}{rcccl} A_1B_1 \cap A_2B_2 & = & a_{23} \cap a_{23}' & = & A_{23}, \\ A_1C_1 \cap A_2C_2 & = & a_{24} \cap a_{24}' & = & A_{24}, \\ A_{23}A_{24} & = & a. & & \end{array}$$

Ha a két háromszög pontra nézve perspektív, akkor $P_1 \in C_1C_2$ és így a

$$P_iP_j \cap a = a_{ij} \cap a = A_{ij} \qquad (1 \le i < j \le 4)$$

és a

$$P_i'P_j' \cap a = a_{ij}' \cap a = A_{ij}' \qquad (1 \le i < j \le 4)$$

pontok megegyeznek egymással a hat esetből öt esetben, csak A_{34} és A_{34}' egybeesése nem adódik a feladat feltételeiből illetve a fenti definíciókból. Az 5.5. feladat állítása szerint azonban az első öt pont egybeeséséből A_{34} és A_{34}' egybeesése következik, azaz B_1C_1 és B_2C_2 az a egyenesen metszik egymást. Ezt kellett igazolnunk.

Ha a két háromszög egyenesre nézve perspektív, akkor $B_1C_1 \cap B_2C_2 = P_3P_4 \cap P_2'P_4' \in a$ és így a fenti A_{ij}, A_{ij}' pontok megegyeznek egymással öt esetben, csak A_{14} és A_{14}' egybeesése nem adódik a feladat feltételeiből illetve a fenti definíciókból. Az 5.5. feladat állítása szerint azonban öt pont egybeeséséből A_{14} és A_{14}' egybeesése következik, azaz P_1C_1 és P_1C_2 az a egyenest a közös $A_{14} = A_{14}'$ pontban metszi, tehát C_1 és C_2 is a P_1A_{14} egyenesen van. Ezt kellett igazolnunk.

5.9. Jelölje az AB oldalegyenes ideális pontját I, a beírt kör és az AC oldal érintési pontját H. Azt szeretnénk megmutatni, hogy D a KL szakasz felezőpontja, azaz $(KLDI) = -1$. Az AB egyenest E-ből a beírt körre vetítjük, majd a beírt kört A-ból önmagára vetítjük:

$$(KLDI) \stackrel{E}{=} (FGDH) \stackrel{A}{=} (GFDH). \tag{1}$$

Másrészt algebrai azonosság szerint $(GFDH) = \frac{1}{(FGDH)}$, így az 1 kettősviszony értéke (-1), ahogy azt állítottuk is.

5.2. Lásd [11][1968/9/30.o., P. 3.]

5.3. a) A szabályos 13-szög csúcsai között összesen hatféle hosszúság fordul elő, így legfeljebb négy csúcs választható ki, hiszen $\binom{4}{2} = 6 < \binom{n}{2}$, ha $4 < n$. Négy csúcs kiválasztható, pl a csúcsok egy körüljárás szerinti sorszámai: 0, 1, 4, 6.

b) Igen. Pl. a csúcsok sorszámai: 0, 1, 4 illetve 0, 2, 7.

5.6. a) $b = \frac{\lambda\binom{n}{2}}{\binom{k}{2}}$.

b) $r = \frac{\lambda(n-1)}{k-1}$

d) Számoljuk össze kétféleképpen azokat a blokkpárokat (egyenespárokat), amelyeknek van közös eleme (metszéspontja).

Egyrészt b blokk van, így a metsző párok száma legfeljebb $\binom{b}{2}$, és ha ennyi metsző pár van, akkor bármely két blokk metszi egymást, így a blokkrendszer projektív síkot.

Másrészt egy pontban r egyenes találkozik, tehát pontonként $\binom{r}{2}$ pártalálkozás van, összesen pedig $v\binom{r}{2}$. Ha a kétféle számolást összevetjük és felhasználjuk az a), b) feladatrészben kapott összefüggéseket és átszorzás után egyszerűsítünk a $(v-k) > 0$ tényezővel, akkor a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk.

e) Igaz.

f) Az alábbi táblázat a lehetséges eseteket foglalja össze. A táblázat egy-egy oszlopában egy-egy lehetséges v értéket (pontok száma) vizsgálunk, 6 ponttól 31-ig.

		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
		15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153
3	3	-	1	-	2	-	X	-	3	-	4	-	X	-
4	6	-	X	-	-	X	-	-	10	-	-	11	-	-
5	10	-	-	-	X	-	-	-	X	-	-	-	X	-
6	15	16	-	-	-	-	X	-	-	-	-	17	-	-

		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
		171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	409	435	462
3	3	5	-	6	-	X	-	7	-	8	-	X	-	9
4	6	X	-	-	X	-	-	12	-	-	13	-	-	X
5	10	-	-	14	-	-	-	15	-	-	-	X	-	-
6	15	-	-	18	-	-	-	-	X	-	-	-	-	19

Egy-egy sor a blokk egy-egy lehetséges méretének felel meg 3-tól 6-ig. A „-” jelet tettük egy mezőbe, ha a $(k-1)|(v-1)$ feltétel miatt kiesik az a lehetőség, míg „X” mutatja, hogy a $\binom{k}{2}|\binom{n}{2}$ feltétel az akadály. A megmaradt helyekre egy-egy számot, az eset sorszámát írtuk, később eszerint vesszük végig a lehetőségeket. A táblázatból kimaradtak a 6-nál hosszabb blokkoknak megfelelő esetek, de ezeknél minden eset kizárható az említett két feltétel miatt. 6-nál kevesebb ponttal nincs nemtriviális blokkrendszer.

A táblázatból kiolvasható esetek:

1. eset: $(7,3,1)$ - a kételemű test feletti projektív sík, a Fano sík. Jelben: $\mathbb{P}G(2{,}2)$.

2. eset: $(9,3,1)$ - a háromelemű test feletti affin sík. Jelben: $\mathbb{A}G(2{,}3)$.

3. eset: $(13,3,1)$, $r=6$, $b=26$. Vegyünk egy szabályos 13-szöget és csúcsai közül két háromszöget, melyek összesen hat oldala mind különböző hosszú. Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

4. eset: $(15,3,1)$, $r=7$, $b=35$. Legyenek a pontok egy teljes hatszög-gráf élei. Három él tartozzon egy blokkba, ha háromszöget alkot vagy ha hat kölönböző végpontja van.

5. eset: $(19,3,1)$, $r=9$, $b=57$.Vegyünk egy szabályos 19-szöget és csúcsai közül három háromszöget, melyek összesen kilenc oldala mind különböző hosszú (a csúcsok sorszámai lehetnek pl 0, 1, 5 és 0, 2, 8 illetve 0, 9, 12). Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

6. eset: $(21,3,1)$, $r=10$, $b=70$. Vegyünk három Fano síkot: $P_0, P_1, \ldots, P_6, Q_0, Q_1, \ldots, Q_6, R_0, R_1, \ldots, R_6$. A blokkok álljanak egyrészt azokból a hármasokból, amelyek betűjele azonos és saját projektív síkjukon egy egyenesen vannak, másrészt azokból, amelyek három különböző betűt tartalmaznak és indexeik összege 0-val kongruens $\pmod 3$.

7. eset: $(25, 3, 1)$, $r = 12$, $b = 100$. Vegyünk egy szabályos 25-szöget és csúcsai közül négy háromszöget, melyek összesen 12 oldala mind különböző hosszú. A csúcsok sorszámai lehetnek pl (0, 1, 6), (0, 2, 9), (0, 3, 11) és (0, 4, 11). Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

8. eset: $(27, 3, 1)$, $r = 13$, $b = 117$. A háromelemű test feletti affin tér: $\mathbb{A}G(3{,}3)$. Másképp: Vegyünk három $\mathbb{A}G(2, 3)$ síkot: P_0, P_1, ..., P_8, Q_0, Q_1, ..., Q_8, R_0, R_1, ..., R_8. A blokkok álljanak egyrészt azokból a hármasokból, amelyek betűjele azonos és saját affin síkjukon egy egyenesen vannak, másrészt azokból, amelyek három különböző betűt tartalmaznak és indexeik összege 0-val kongruens $\pmod 3$.

9. eset: $(31, 3, 1)$, $r = 15$, $b = 155$. Vegyünk egy szabályos 31-szöget és csúcsai közül öt háromszöget, melyek összesen 15 oldala mind különböző hosszú. A csúcsok sorszámai lehetnek pl (0, 1, 5), (0, 2, 16), (0, 3, 11), (0, 6, 13) és (0, 9, 19). Legyenek a blokkok ezek a háromszögek és elforgatottjaik.

10. eset: $(13, 4, 1)$, $r = 4$, $b = 13$. $\mathbb{P}G(2{,}3)$.

11. eset: $(16, 4, 1)$, $r = 5$, $b = 20$. $\mathbb{A}G(2{,}4)$.

12. eset: $(25, 4, 1)$, $r = 8$, $b = 100$.??

13. eset: $(28, 4, 1)$, $r = 9$, $b = 126$.??

14. eset: $(21, 5, 1)$, $r = 5$, $b = 21$. $\mathbb{P}G(2{,}4)$.

15. eset: $(25, 5, 1)$, $r = 6$, $b = 30$. $\mathbb{A}G(2{,}5)$.

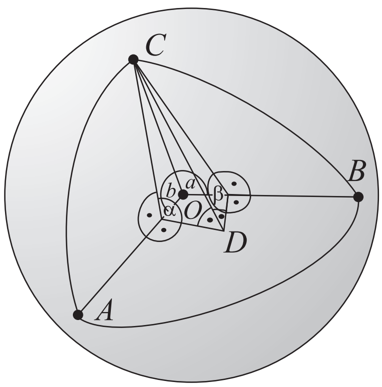
16. eset: $(6, 6, 1)$, $r = 1$, $b = 1$. Triviális dizájn, egy halmaz és egyetlen részhalmaza, önmaga.

17. és 18. eset: A d) feladatrész eredménye miatt nem létezik.

19. eset: $(31, 6, 1)$, $r = 6$, $b = 31$. $\mathbb{P}G(2{,}5)$.

6. A gömb geometriája

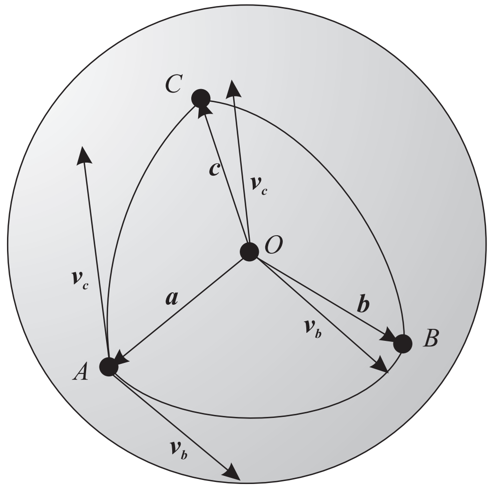
6.1. Legyen az A pont merőleges vetülete az OBC síkon D, D merőleges vetülete az OB, illetve az OC egyeneseken rendre E és F. Ekkor AE merőleges OB-re, AF pedig OC-re (lásd az 1. ábrát).



6.1M.1. ábra.

Ebből következően az AE és ED egyenesek párhuzamosak az ABC gömbháromszög c, illetve a oldalának B-beli érintőjével. Így $AED\angle = \beta$. Hasonlóan $AFD\angle = \gamma$. Tehát az ADE derékszögű háromszögben $\sin\beta = AD/AE$, az ADF derékszögű háromszögben $\sin\gamma = AD/AF$. Ezért $\sin\beta : \sin\gamma = AF : AE$. $AOB\angle = c$ miatt az AOE derékszögű háromszögben $\sin c = AE/AO = AE$, mivel egységsugarú gömböt vizsgálunk. Hasonlóan, $AOC\angle = b$ miatt az AOF derékszögű háromszögben $\sin b = AF/AO = AF$. Tehát $\sin b : \sin c = AF : AE = \sin\beta : \sin\gamma$. A tétel többi része hasonlóan bizonyítható.

6.2. Legyenek a gömb O középpontjából a háromszög A, B, C csúcsaiba mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Legyen továbbá $\mathbf{v_b}$ az az egységvektor, mely a gömbháromszög AB oldalszakaszának A-beli érintőfélegyenese irányába mutat. Hasonlóan vegyük fel az AC oldalszakaszt A-ban érintő $\mathbf{v_c}$ egységvektort is.



6.2M.1. ábra.

Ekkor a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektor c szöggel való elforgatottja a rá merőleges $\mathbf{v_b}$ vektor felé. Így a szögfüggvények definíciója értelmében

$$\mathbf{b} = \cos c\mathbf{a} + \sin c\mathbf{v_b}.$$

Hasonló módon, a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektor b szöggel való elforgatottja a rá merőleges $\mathbf{v_c}$ vektor felé, így

$$\mathbf{c} = \cos b\mathbf{a} + \sin b\mathbf{v_c}.$$

A két vektoregyenletet skalárisan összeszorozva:

$$\mathbf{bc} = (\cos c\mathbf{a} + \sin c\mathbf{v_b})(\cos b\mathbf{a} + \sin b\mathbf{v_c}).$$

A $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egységvektorok szöge a, ezért az egyenlet bal oldalán $\cos a$ szerepel, a jobb oldalon pedig kibonthatjuk a zárójelet:

$$\cos a = \cos b\cos c\mathbf{a^2} + \cos c\sin b\mathbf{a}\mathbf{v_c} + \sin c\cos b\mathbf{v_b}\mathbf{a} + \sin b\sin c\mathbf{v_b}\mathbf{v_c}.$$

Az $\mathbf{a}$ vektor merőleges $\mathbf{v_b}$-re és $\mathbf{v_c}$-re is, ezért az ezekkel való skaláris szorzata 0, a $\mathbf{v_b}$ és a $\mathbf{v_c}$ egységvektorok szöge pedig α, ezért a skaláris szorzatuk $\cos\alpha$. Tehát

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

6.3. Ha az oldalakra vonatkozó koszinusztételbe behelyettesítjük a $\cos\alpha > -1$ egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$\cos a > \cos b\cos c - \sin b\sin c = \cos(b + c).$$

Mivel $0 < a < \pi$, $0 < b + c < 2\pi$ illetve $\cos a = \cos(2\pi - a)$ és a koszinuszfüggvény szigorúan monoton csökken a $[0; \pi]$ intervallumon, a $[\pi; 2\pi]$ intervallumon pedig szigorúan monoton nő, a fenti egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, hogy $b + c$ értéke a és $2\pi - a$ között van, tehát $a < b + c < 2\pi - a$. Ebből egyrészt $a < b + c$, másrészt $a + b + c < 2\pi$.

6.4. Legyenek az ABC gömbháromszög polárisának csúcsai A^*, B^* és C^*, a gömb középpontja pedig O. Definíció szerint $\overrightarrow{OA}$ merőleges $\overrightarrow{OB^*}$-ra és $\overrightarrow{OC^*}$-ra is, tehát $\overrightarrow{OA}$ az OB^*C^* sík egységnormálisa, továbbá az AA^* gömbi szakasz hossza nagyobb $\pi/2$ -nél, ezért $\overrightarrow{OA}$ az OB^*C^* sík A^*-ot nem tartalmazó félterébe mutat. Így $A^{**} = A$. Hasonlóan belátható, hogy $B^{**} = B$ és $C^{**} = C$, így az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög polárisa az ABC gömbháromszög.

6.5. Az AB^*C^* gömbháromszög egyenlő szárú, hiszen $AOB^*\angle = AOC^*\angle = \pi/2$ miatt az AB^* és AC^* oldalszakaszok negyedkörök. A merőlegességek következtében az AB^*, illetve AC^* ívek A-beli érintő egységvektorai az $O\vec{B}^*$, illetve $O\vec{C}^*$ vektorok, így a B^*AC^* gömbi szög nagysága megegyezik a B^*OC^* euklidészi szög nagyságával, azaz a^*-gal.

Az AB^* és AC^* ívek B^*-, illetve C^*-beli érintő egységvektora az $O\vec{A}$, ami merőleges az $OB^* * C^*$ síkra, így $AB^*C^*\angle = AC^*B^*\angle = \pi/2$. Hasonlóan látható, hogy az AC^*B és az AB^*C gömbháromszögek is egyenlő szárúak, és az A-nál lévő szögük derékszög (hiszen az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög polárisa az ABC gömbháromszög).

Ezek szerint az A csúcsnál lévő teljes gömbi szöget az AB, AC, AB^*, AC^* szakaszok két derékszögre, egy α nagyságú és egy a^* nagyságú szögre osztják. Ebből következően $\alpha + a^* = \pi$. Hasonlóan belátható, hogy $\beta + b^* = \gamma + c^* = \pi$. Az is igaz, hogy a poláris gömbháromszög szögeit az eredeti gömbháromszög meglelő oldalaival összeadva szintén π-t kapunk, hiszen az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög polárisa ABC.

6.6. Az $A^*B^*C^*$ poláris gömbháromszögre az oldalakra vonatkozó koszinusztételt felírva a

$$\cos a^* = \cos b^* \cos c^* + \sin b^* \sin c^* \cos \alpha^*$$

egyenlőséghez jutunk. Felhasználva, hogy $a^* = \pi - \alpha, b^* = \pi - \beta, c^* = \pi - \gamma$ és $\alpha^* = \pi - a$:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta)\sin(\pi - \gamma)\cos(\pi - a)$$

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

6.7. Tekintsük azt a gömbháromszöget, amelynek csúcsai Budapest(B), New York(N) és az Északi-sark(E). Legyen $EB = b, EN = n$ és $BN = d$. Tudjuk, hogy $b = 90° - 47.5° = 42{,}5°, n = = 90° - 41° = 49°$ illetve $BEN\angle = 19° + 74° = 93°$. Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján

$$\cos d = \cos b \cos n + \sin b \sin n \cos BEN\angle$$

$$\cos d = \cos 42{,}5° \cos 49° + \sin 42{,}5° \sin 49° \cos 93°$$

$$\cos d \approx 0{,}457.$$

Innen

$$d \approx 62.81° \approx 1{,}096 rad.$$

Tehát a Budapest-New York távolság megközelítőleg $1{,}096 \cdot 6378 km \approx 6991 km$.

6.8. Bocsássunk merőlegest Oslóból(C) az Egyenlítőre! Legyen a talppont B (keleti hosszúság 11°), a keresett város pedig A. Az ABC gömbháromszög oldalaira és szögeire a szokásos jelöléseket használjuk. Tudjuk, hogy $\beta = 90°$ és azt is, hogy $\gamma = 90°$, hiszen az a oldal észak-déli, a b oldal pedig kelet-nyugati irányú. A szögekre vonatkozó koszinusztételből

$$\cos\alpha = -\cos 90° \cos 90° + \sin 90° \sin 90° \cos a,$$

így

$$\cos\alpha = \cos a,$$

amiből a feltételeket figyelembe véve következik, hogy $\alpha = a$. Így a szinusztétel alapján $\gamma = c$, azaz $c = 90°$. Tehát a keresett egyenlítői város a nyugati hosszúság $90° - 11° = 79°$-án fekszik, így az Ecuador fővárosa, Quito.

6.9. Tekintsük azt a gömbháromszöget, amelynek csúcsai Budapest (B), London (L) és az Északi-sark (E). Legyen $EB = b, EL = l$ és $BL = d$. Tudjuk, hogy $b = 90° - 47{,}5° = 42{,}5°, l =$ $= 90° - 51{,}5° = 38{,}5°$ illetve $BEL\angle = 19°$. Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján

$$\cos d = \cos b \cos l + \sin b \sin l \cos BEL\angle$$

$$\cos d = \cos 42{,}5° \cos 38{,}5° + \sin 42{,}° 5° \sin 38{,}5° \cos 19°$$

$$\cos d \approx 0{,}975,$$

amiből

$$\sin d = \sqrt{1 - \cos^2 d} \approx 0{,}224.$$

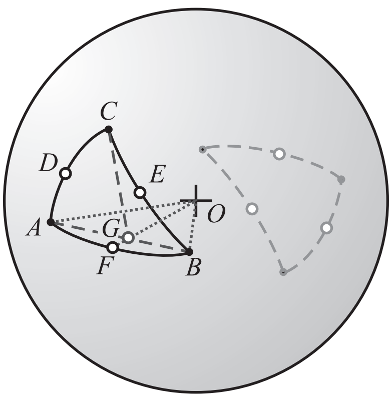
A szinusztételt felhasználva

$$\sin EBL\angle = \sin b * \sin BEL\angle / \sin d$$

$$\sin EBL\angle \approx \sin 42{,}5° * \sin 19° / 0{,}224$$

$$\sin EBL\angle \approx 0{,}983.$$

Innen $EBL\angle \approx 79{,}5°$. Tehát a repülőnek az északi iránnyal megközelítőleg $79{,}5°$-ot bezárva kell elindulnia.

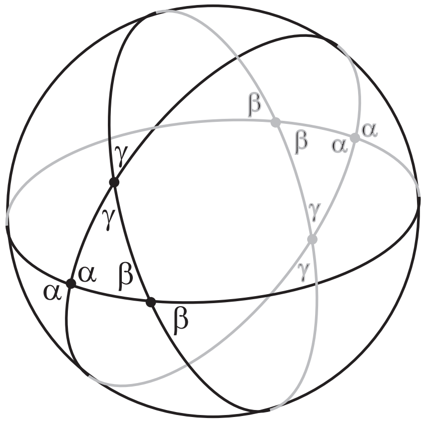


6.10M.1. ábra.

6.10. Legyenek a gömbháromszög csúcsi A, B, C, a gömb középpontja O. Legyen az AB ív felezőpontja F, az AB szakaszé G. Az O, G és F pontok egy egyenesen vannak. A gömbháromszög C-ből induló súlyvonala az az ív, amit a gömbfelületből az OCF sík kimetsz. Ez a sík ugyanakkor az ABC síkháromszöget is a C-hez tartozó súlyvonalában (CG) metszi. Hasonlóan láthatjuk, hogy az ABC gömbháromszög másik két súlyvonalának síkja az ABC síkháromszöget a másik két súlyvonalában metszi. Mindhárom súlyvonal síkja illeszkedik tehát az ABC síkháromszög súlypontjára, tehát egy egyenesre illeszkednek. Ez pedig azt jelenti, hogy a gömbháromszög súlyvonalai is egy ponton mennek át, amely nem más, mint a síkháromszög súlypontjának vetülete a gömbfelületre.

6.11. a) Egy gömbkétszög csúcsai átellenes pontok, mivel csak ekkor húzható köztük több egyenes. Ezért ha a gömbkétszög szöge α, akkor a teljes gömbfelületnek az $\alpha/2\pi$-ed részét foglalja el, tehát a területe: $4\pi * \alpha/2\pi = 2\alpha$.

b) A gömbháromszög oldalegyenesei egymást a gömbháromszögben és az átellenes gömbháromszögében fedő gömbkétszögekre osztják a gömbfelületet. Ezek közül kettő (egymással átellenesen elhelyezkedő) szöge α, kettő szöge β, kettő szöge pedig γ. (lásd az 1. ábrát).



6.11M.1. ábra.

Ha ezeknek a területét összeadjuk, akkor majdnem a teljes gömbfelszínt kapjuk, csak éppen a gömbháromszög területét (T) hatszor számoltuk (háromszor az egyik, háromszor a másik oldalon), tehát néggyel többször, mint ahányszor kellene. Így a teljes gömbfelszín:

$$4\pi = 2(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) - 4T,$$

amiből

$$4T = 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4\pi$$
$$T = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

6.12. Mivel a keresett mértani hely szimmetrikus az AB egyenesre, elég a gömbnek csak az egyik felét vizsgálnunk. Legyen az A pont átellenes pontja A', a B-é B'. Be fogjuk bizonyítani, hogy a megfelelő C pontok mértani helye a félgömbön egy olyan körív, amelynek végpontjai A' és B'.

Legyen C a körív tetszőleges A'-től és B'-től különböző pontja. Tudjuk, hogy az A, C, A', a B, C, B', illetve az A, B, A', B' pontok egy egyenesen vannak. Emiatt $B'A'C\angle(= \alpha') = B'AC\angle =$ $= \pi - BAC\angle = \pi - \alpha, A'B'C\angle(= \beta') = A'BC\angle = \pi - ABC\angle = \pi - \beta$, valamint $A'CB'\angle(=$ $= \gamma') = ACB\angle = \gamma$. Ezek szerint az ABC háromszög területe

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \pi - \alpha' + \pi - \beta' + \gamma' - \pi = \pi - (\alpha' + \beta' - \gamma').$$

Ez pedig akkor állandó, ha $\alpha' + \beta' - \gamma'$ állandó. Tehát azt kell igazolnunk, hogy a gömbön adott A', B' pontokhoz azon C pontok mértani helye az egyik félgömbön, amelyekre $B'A'C\angle +$ $+ A'B'C\angle - A'CB'\angle$ állandó, egy A' és B' között húzódó körív. Ez az állítás az euklideszi geometriában is igaz (ott az egyik félgömb helyett az egyik félsíkot vizsgáljuk), és a bizonyítása is ugyanúgy elmondható:

Legyen a körív (gömbi) középpontja O. Ha O az $A'B'C$ háromszög belsejében helyezkedik el, akkor

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = (B'A'O\angle + OA'C\angle) + (A'B'O\angle + OB'C\angle) - (OCA'\angle + OCB'\angle) =$$

$$= B'A'O\angle + A'B'O\angle$$

(hiszen az $OA'C$ és $OB'C$ háromszögek egyenlő szárúak), ami pedig független attól, hogy a C pont hol helyezkedik el a köríven. Ha O az $A'C$ vagy a $B'C$ szakaszon van, akkor könnyen belátható, hogy $\alpha' + \beta' - \gamma'$ szintén $B'A'O\angle + A'B'O\angle$-gel egyenlő. Ha pedig O az $A'B'C$ háromszögön kívül van, akkor szintén

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = (B'A'O\angle + OA'C\angle) + (A'B'O\angle - OB'C\angle) - (OCA'\angle - OCB'\angle) =$$

$$= B'A'O\angle + A'B'O\angle.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk, tehát a kersett C pontok mértani helye az egyik félgömbön valóban egy A' és B' között húzódó körív, így a teljes gömbön egy körívpár. (Más helyeken lévő C pontok biztosan nem felelnek meg a feltételnek, hiszen könnyen belátható, hogy akkor az ABC háromszög területe vagy nagyobb, vagy kisebb lesz.)

7. A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

8. Speciális görbék

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

9. Vegyes feladatok

9.2.

1. megoldás. A bizonyítást az alábbi Lemmára alapozzuk.

Lemma A k_{XYU}, $k_{X'Y'U}$ körök pontosan akkor érintik egymást U-ban, ha

$$XYU\sphericalangle + UY'X'\sphericalangle \equiv XUX'\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{1}$$

Ezt a lemmát a G.II.6.5. feladat G.II.6.5M2 megoldásában már használtuk és igazoltuk is.

Most a k_{ABP}, k_{CDP} körök P-ben érintik egymást, tehát

$$CDP\sphericalangle + PAB\sphericalangle \equiv CPB\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{2}$$

és azt szeretnénk igazolni, hogy a $k_{ABP'}$, $k_{CDP'}$ körök P'-ben érintik egymást, tehát

$$CDP'\sphericalangle + P'AB\sphericalangle \equiv CP'B\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy

$$CDP'\sphericalangle \equiv CDP\sphericalangle + PDP'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{4}$$

míg

$$P'AB\sphericalangle \equiv PAB\sphericalangle - PAP'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{5}$$

és a $k_{DPP'A}$ körben

$$PDP'\sphericalangle \equiv PAP'\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{6}$$

így (4), (5) és (6) összege (2) figyelembevételével épp a bizonyítandó (3) összefüggést adja.

2. megoldás. Az Állítás P centrumú inverzióval igazolható. Ilyen inverziónál a k_{ABP}, k_{CDP} körök képei párhuzamos egyenesek, tehát az A, B, C, D pontok A^*, B^*, C^*, D^* képei trapézt alkotnak, melyben A^*B^* és C^*D^* az alapok, P'^* pedig az átlók vagy a szárak egyeneseinek metszéspontja, így a $k_{ABP'}$, $k_{CDP'}$ körök képei valóban érintik egymást P' képében, hiszen onnan egymásba nagyíthatók.

9.3.

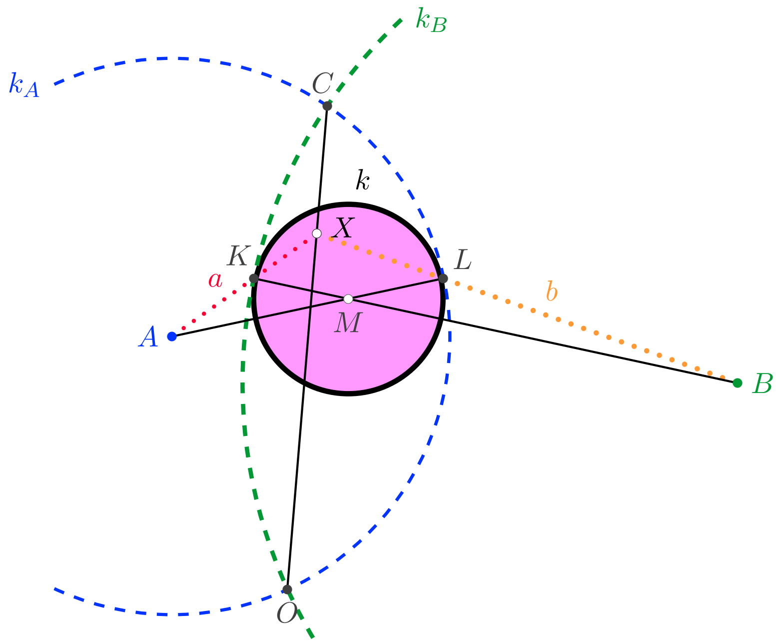
1. megoldás. Legyen az A középpontú AC sugarú és B középpontú BC sugarú körök másik metszéspontja O pont.

Első észrevételünk, hogy az A, M, L illetve a B, M, K pontok egy-egy egyenesre esnek. Amennyiben a feladat állítása igaz, úgy az M középpontú MK sugarú kör belülről érinti a k_A, k_B köröket. Az állítást tehát átfogalmazhatjuk úgy, hogy tetszőleges olyan körre, amely belülről érinti a k_A, k_B köröket és érintési pontja k_A-val K pont, k_B-vel L pont, teljesül, hogy a BK és AL egyenesek X metszéspontja a két kör közös CO húrjára esik. (Lásd az 1. ábrát!)

Alkalmazzunk O középpontú körre vonatkozó inverziót! Az OC egyenes átmegy az inverzió centrumán, tehát a C pont képe az OC félegyenesre eső C' pont. Mivel a k_A és k_B körök átmennek az inverzió centrumán és egymást merőlegesen metszik, ezért képük két egymásra merőleges egyenes, amelyek metszéspontja a közös C pont C' képe. Az M középpontú MK sugarú k kör nem megy át az inverzió centrumán, ezért képe k' kör, amely érinti a k_A és k_B körök képeit. Ez tehát egy olyan kör lesz, amely K' és L' pontokban érinti a k'_A és k'_B egymásra merőleges egyeneseket. Azon fog múlni a bizonyítás, hogy a $C'L'$, $C'K'$ szakaszok a k' kör érintői, tehát egymással egyenlő hosszúságúak. Alább ezt a közös hosszt u jelöli.

Az AK és BL egyenesek nem mennek át az inverzió O középpontján, így képük egy-egy O-n átmenő kör lesz. Az AK a' képe átmegy az A', K', O pontokon, a BL egyenes b' képe pedig az L', B', O pontokon. (Lásd a 2. ábrát!)

Azt kell igazolni, hogy X' rajta van a $C'O$ egyenesen.



9.3M1.1. ábra.

Ehhez felhasználjuk a következő ismert feladat eredményét. Legyenek P és Q a sík rögzített pontjai. Azon R pontok mértani helye a síkon, amelyekre $PR^2 - QR^2$ egy előre adott állandó, PQ-ra merőleges egyenes.

Ennek megfelelően legyen most a feladatunkban $P = O_a$ az a' kör, $Q = O_b$ pedig a b' kör középpontja. Az $A'O$ szakasz felezőpontja rajta van k'_A egyenesen, mert éppen az O pont A-ra vonatkozó tükörképének inverz képe. Így a körök merőlegessége miatt O_a a k'_A egyenesre, míg O_b a k'_B egyenesre illeszkedik.

A körök metszéspontjai O és X', tehát $O_aX'^2 - O_bX'^2 = O_aO^2 - O_bO^2$. Most O helyett válaszhatjuk a körök egy-egy különböző pontját.

$$O_aO^2 - O_bO^2 = O_aL'^2 - O_bK'^2 = O_aC'^2 + u^2 - (O_bC'^2 + u^2) = O_aC'^2 - O_bC'^2.$$

Tehát X', C', O egyenesen vannak, ennek megfelelően C, O, X is egy egyenesen vannak. Az állítást igazoltuk.

2. megoldás. Legyen ábránk betűzése az első megoldás szerinti. AZ AX félegyenes a k_B kört másodszor a K' pontban, BX félegyenes a k_A kört másodszor az L' pontban metszi. (Lásd az 1. ábrát!)

A KK' és CO húrok metszéspontja a k_B körben az X pont. Ezért az X pontra vonatkozó hatvány ebben a körben

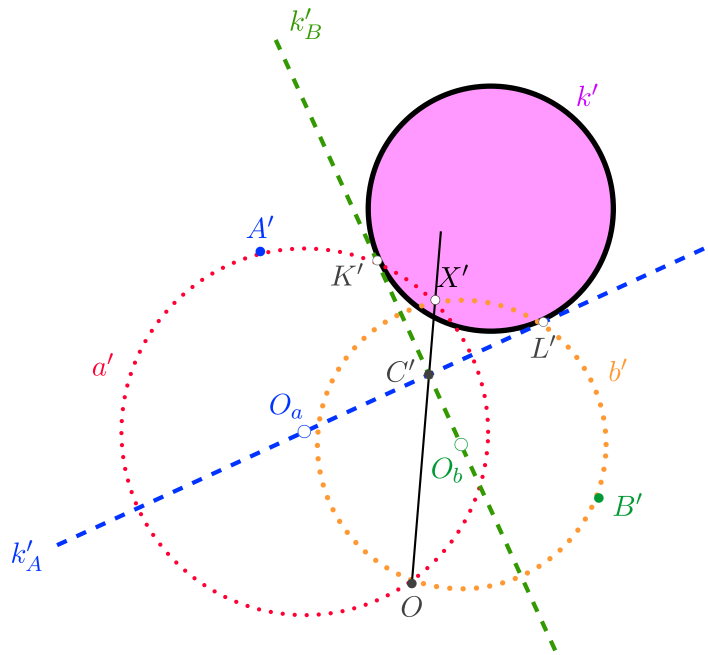
$$KX \cdot XK' = CX \cdot XO.$$

Másrészt a k_A körben LL' és CO húrok metszéspontja szintén X pont. Az X-re vonatkozó hatvány ebben a körben

$$LX \cdot XL' = CX \cdot XO.$$

Látjuk, hogy

$$KX \cdot XK' = LX \cdot XL',$$



9.3M1.2. ábra.

tehát a K, L, L', K' pontok egy körön, a k körön helyezkednek el. Az A pont k körre és k_B körre vonatkozó hatványa megegyezik, továbbá a k_A és k_B körök merőlegessége miatt AC érinti a k_B kört. Ezek alapján

$$AK \cdot AK' = AC^2 = AL^2,$$

tehát AL érinti a k kört. Hasonlóan igazolható, hogy BK érinti a k kört. A két érintő metszéspontjából, M-ből a k körhöz húzott két érintőszakasz MK és ML egyenlők.

9.4. Legyen k_1, k_2 ill. k_3 középpontja O_1, O_2 ill. O_3. Meg fogjuk mutatni, hogy ha $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = E$ és $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = F$ közül bármelyik létezik, akkor a másik is létezik és egymás izogonális konjugáltjai az $O_1O_2O_3$ háromszögre vonatkozóan.

Tegyük fel pl., hogy E létezik és jelölje az EO_1, EO_2, EO_3 egyeneseket t_1, t_2, t_3, az O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 centrálisokat u_1, u_2, u_3, az $O_1O_2O_3$ háromszög szögfelezőit v_1, v_2, v_3 (lásd az 1. ábrát). Alább az e egyenes t tengelyre vonatkozó tükörképét $t(e)$ jelöli. Tehát a szimmetria miatt pl.

$$v_1(u_2) = u_3, \qquad v_2(u_3) = u_1, \qquad v_3(u_1) = u_2. \tag{1}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy az

$$\begin{array}{llllll} u_1(e_1) = & f_1, & u_2(e_2) = & f_2, & u_3(e_3) = & f_3, \\ v_1(t_1) = & \tau_1, & v_2(t_2) = & \tau_2, & v_3(t_3) = & \tau_3 \end{array} \tag{2}$$

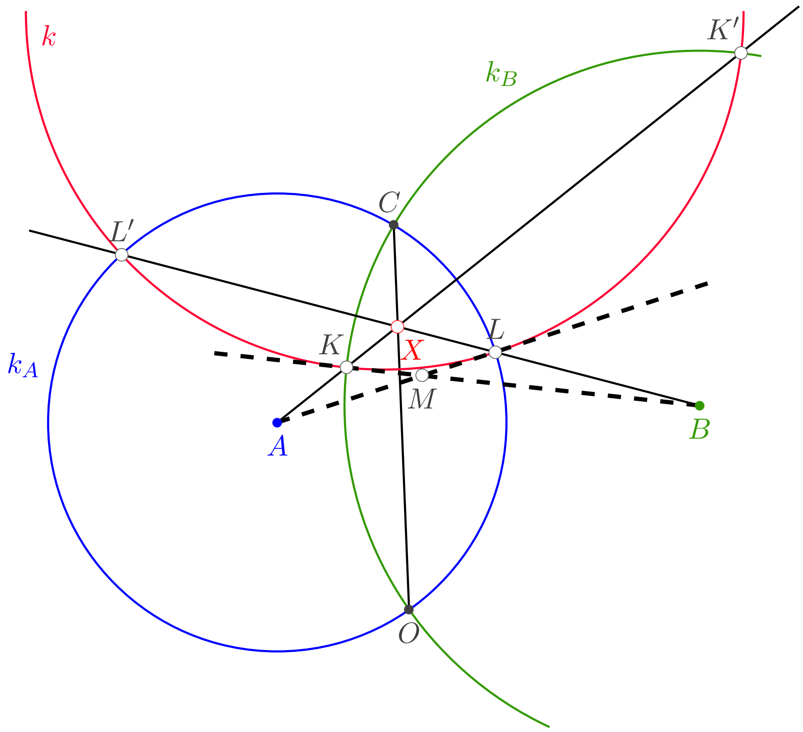
hat egyenes mind egy közös ponton halad át, sőt kicsit több is igaz, f_1, f_2, f_3 páronkénti szögfelezői a τ_1, τ_2, τ_3 egyenesek.

Az alábbi összefüggéseket használjuk fel:

Lemma 1. Ha a v, t, τ egyenesekre $v(t) = \tau$, akkor a τ-ra vonatkozó tükrüzés, mint transzformáció így írható: $\tau = v \circ t \circ v$

Lemma 2. Ha t, u, v közös ponton átmenő tengelyek, akkor $t \circ v \circ u \circ t = u \circ v$.

Észrevétel 1. Mivel t_1, t_2 és t_3 metszéspontja E, így (2) második sorának egyenesei az E pont $O_1O_2O_3$ háromszögre vonatkozó izogonális konjugáltjában (lásd a G.II.11.12., G.II.16.1. feladatokat) metszik egymást.



9.3M2.1. ábra.

Adott pontból adott ciklushoz húzott két érintő (antiérintő) szimmetrikus a pontot a ciklus középpontjával összekötő egyenesre, így

$$t_1(e_3) = e_2, \qquad t_3(e_2) = e_1, \qquad t_2(e_1) = e_3. \tag{3}$$

Ebből, a fenti lemmákból és (1)-ből következik, hogy

$$\tau_1(f_2) = f_3, \qquad \tau_2(f_3) = f_1, \qquad \tau_3(f_1) = f_2, \tag{4}$$

hiszen pl

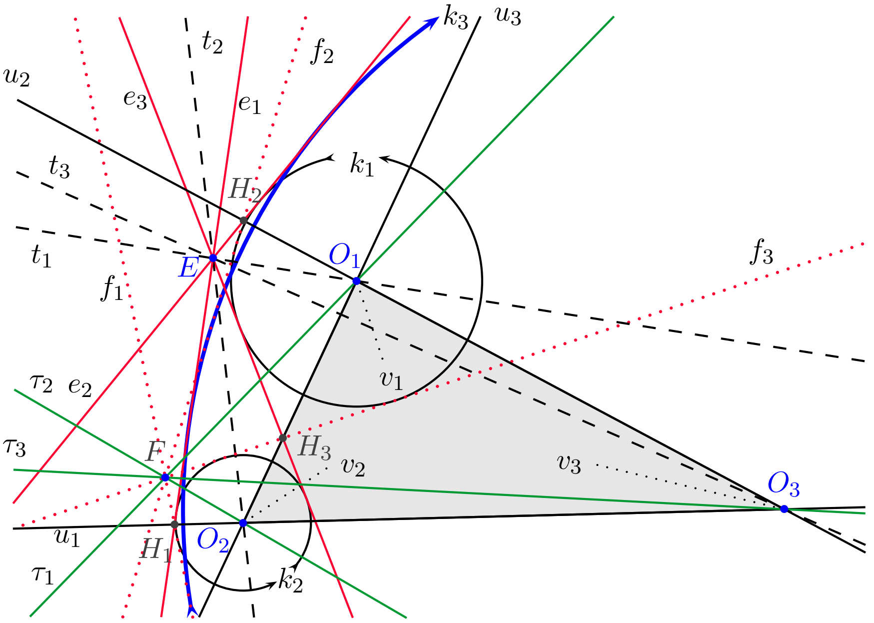
$$\tau_1(f_2) = v_1 \circ t_1 \circ v_1(f_2) = v_1 \circ t_1 \circ v_1 \circ u_2(e_2) =$$
$$= v_1 \circ t_1 \circ v_1 \circ u_2 \circ t_1(e_3) = v_1 \circ u_2 \circ v_1(e_3) = u_3(e_3) = f_3.$$

Ez azt is jelenti, hogy f_2, f_3 és τ_1 egy ponton megy át, sőt f_3, f_1 és τ_2, valamint f_1, f_2 és τ_3 is egy ponton megy át. Ha ez a három közös pont nem mind azonos, akkor az f_1, f_2, f_3 egyenesek alkotta Δ háromszög pontra nézve perspektív az $O_1O_2O_3$ háromszöggel, a perspektivitás középpontja az Észrevétel 1.-ben említett izogonális konjugált. Desargues tétele szerint e két háromszögnek egyenesre nézve is perspektívnek kellene lennie, azaz az

$$f_1 \cap u_1 = e_1 \cap u_1 = H_1, \qquad f_2 \cap u_2 = e_2 \cap u_2 = H_2, \qquad f_3 \cap u_3 = e_3 \cap u_3 = H_3$$

pontoknak egy egyenesre kell illeszkednie. Azonban ezek a pontok a k_1, k_2, k_3 irányított körök páronkénti „antihasonlósági pontjai” (pl H_1 a k_2 irányított kör és a k_3 irányított kör ellentettjének hasonlósági pontja), amelyek nincsenek egy egyenesen, ha O_1, O_2, O_3 sincsenek egy egyenesen. Ha O_1, O_2, O_3 egy egyenesen vannak, akkor a közös centrálisra vonatkozó tengelyes szimmetria miatt a feladat állítása nyilvánvalóan teljesül.

9.5.



9.4M.1. ábra.

1. megoldás. Felhasználjuk az alábbi lemmát:

Lemma Az e egyenes pontosan akkor megy át az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontján, ha e-nek az $I_1I_2I_3$ háromszög oldalaira vonatkozó tükörképei egy ponton mennek át (lásd a G.II.6.5.–G.II.6.9. feladatokat).

A fenti lemmát itt nem igazoljuk.

Az e egyenesnek az I_1I_2 egyenesre vonatkozó tükörképe a BC egyenes, míg az I_2I_3 egyenesre vonatkozó tükörképe CD, így csak azt kell megmutatni, hogy az e egyenes I_1I_3-ra vonatkozó tükörképe is átmegy C-n. Ezt kétféleképpen is igazoljuk.

I. gondolatmenet

Jelölje a DAM, MAB szögek szögfelezőit t_1 illetve t_2, a CDA, DAB, ABC, BCD szögek szögfelezőit rendre t_D, t_A, t_B illetve t_C. Az utóbbi négy szögfelező rendre DC-t DA-ra, DA-t BA-ra BA-t BC-re illetve BC-t DC-re képezi, míg t_1 a DA-t e-re, míg t_2 az e-t BA-ra viszi.

Ismeretes, hogy $ABCD$ pontosan akkor érintőnégyszög, ha a $t_B \circ t_A \circ t_D \circ t_C$ transzformáció az identitás. Mivel $t_C(C) = C$, így most $t_B \circ t_A \circ t_D(C) = C$. A $t_2 \circ t_1$ forgatás pontosan úgy képezi AD-t AB-re mint t_A, így $t_B \circ t_2 \circ t_1 \circ t_D(C) = C$, azaz $t_1 \circ t_D(C) = t_2 \circ t_B(C)$. Jelölje ezt az e-n található közös pontot C'. A C' pont tehát a C pont $t_1 \cap t_D = I_3$ körüli elforgatottja, és egyúttal a C pont $t_2 \cap t_B = I_1$ körüli elforgatottja is, azaz $I_3C = I_3C'$ és $I_1C = I_1C'$. Ezek szerint az I_3CI_1, $I_3C'I_1$ háromszögek egybevágók, C' a C tükörképe I_1I_3-ra. Épp ezt akartuk igazolni.

2. megoldás. A 9.5M1. megoldást folytatjuk másképp.

II. gondolatmenet Legyen $ABCD$ negatív körüljárású, és irányítsuk az ABM, NDA háromszögek k_1, k_2 beírt köreit pozitívan, az $ABCD$ négyszög beírt k_3 körét negatívan. A BA és a CB irányított egyenesek érintik k_1-et és antiérintik k_3-at; a DA, CD irányított egyenesek érintik k_3-at és antiérintik k_2-t míg az $MA = e$ irányított egyenes és még egy f irányított egyenes érintik k_2-t és antiérintik k_1-et.

A BA, DA, $MA = e$ irányított egyenesek az A ponton mennek át, így a 9.4. feladat állítása szerint a CB, CD, f egyenesek is egy ponton mennek át, azaz f átmegy C-n. Az e, f irányított egyenesek érintik k_1-et és antiérintik k_2-t így egyenesük egymás tükörképe a k_1, k_2 körök centrálisára vonatkozólag, azaz f (fordított irányítással) az e egyenes I_1I_2-re vonatkozó tükörképe.

Végülis azt kaptuk, hogy a feladatban A és C egymás izogonális konjugáltjai az I_1I_3I háromszögre vonatkozólag, ahol I az $ABCD$ négyszög beírt körének középpontja.

9.6. Lásd a 3.17. feladatot!

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Hraskó András (szerk.): *Új matematikai mozaik.* Budapest, 2002, Typotex kiadó, Budapest. ISBN 963 9326 41 0. Szabadon elérhető ebook-ként a http://www.hik.hu/tankonyvtar/site/books/b124/index.html címen.

[2] Sárközy András: *Komplex számok példatár.* Bolyai sorozat sorozat. Budapest, 1973, Műszaki Könyvkiadó.

[3] John Casey: *A Sequel To The First Six Books Of The Elements Of Euclid.* 3. kiad. Dublin, 1885, Hodges and Figgis and Co., Grafton-St. Szabadon letölthető: http://www.gutenberg.org/etext/21076.

[4] Kiss Géza: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon. In *Felkészítés általános és középiskolai kistérségi matematikai tehetséggondozásra* (konferenciaanyag). 2012, 149–165. p. http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/zalamat/2012/12_konyv.pdf.

[5] Hubai Tamás diák, 2005c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[6] Reiman István: *Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.* Középiskolai szakköri füzetek sorozat. Budapest, 1957, Tankönyvkiadó.

[7] Reiman István: *Geometria és határterületei.* 2001, Szalay Könyvkiadó. ISBN 9632370120.

[8] Csan Kuang: Ha a tömegek területet jelölnek. 1984. 8. sz., *Kvant*, 35–38. p.

[9] Kürschák József Matematikai Verseny.
URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kurschak_Jozsef_verseny.html`.

[10] Kvant, fizikai és matematikai tudományos népszerűsítő folyóirat. A Szovjet, majd az Orosz Tudományos Akadémia és a Pedagógiai Tudományok Akadémiájának lapja. URL `http://kvant.mirror0.mccme.ru/`.

[11] A Kömal digitális archívuma. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok archívuma a Sulineten. URL `http://www.sulinet.hu/komal/`.

[12] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[13] V. G. Boltyánszkij M. B. Balk: *Geometria massz.* 61. köt. 1987, Bibliotyecska Kvant.

[14] Miklós Szilárd. Javaslatok a Kömalba. Herceghalom.

[15] Miles Dillon Edwards: A proof of Heron's Formula. 114. évf. (2007) 10. sz., *American Mathematical Monthly*, 987. p.

[16] Sagmeister Dávid. Veszprém.

[17] B. L. van der Waerden: *Egy tudomány ébredése.* Budapest, 1977, Gondolat. ISBN 963 280 326 4.

[18] David Hilbert és Stefan Cohn Vossen: *Szemléletes geometria*. 1982, Gondolat. ISBN 963 281 143 7.