Laboratorinis darbas #3

Domantas Keturakis

Gruodis 2024

Užduotis

Išspręsti Koši uždavinį: $x''(t) + 4x(t) = 4\sin(4t) - 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

Analitiškas sprendimas

Pateikta antros eilės tiesinė nehomogeninė diferencialinė lygtis ir pradinės sąlygos:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Visų pirmą randamas homogeninės dalies sprendinys, naudojant charakteringajį polinomą:

$$\begin{aligned} x''(t) + 4x(t) &= 0, \\ \lambda^2 + 4 &= 0, \\ \lambda &= \pm 2i \end{aligned}$$

Charakteringojo polinomo šaknis yra kompleksinis skaičius, bendrasis sprendinys turės tokią formą:

$$x_h = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$$

Nehomogeninės dalies sprendinį (x_a) galima rasti naudojant neapibrėžtųjų koeficientų medotą. Kadangi abu dešinios pusės nariai atitinka galimas formas galima pritaikyti sumos taisyklę:

$$\begin{aligned} x_a &= A\sin(4t) + B\cos(4t) + C\sin(t) + D\cos(t) \\ x_a' &= 4A\cos(4t) - 4B\sin(4t) + C\cos(t) - D\sin(t) \\ x_a'' &= -16A\sin(4t) - 16B\cos(4t) - C\sin(t) - D\cos(t) \end{aligned}$$

Įstračius į pradinę lygtį:

$$\begin{aligned} & -16A\sin(4t) - 16B\cos(4t) - C\sin(t) - D\cos(t) \\ & \quad +4A\sin(4t) + 4B\cos(4t) + 4C\sin(t) + 4D\cos(t) \\ = & -12A\sin(4t) - 12B\cos(4t) + 3C\sin(t) + 3D\cos(t) = 4\sin(4t) - 2\cos t \end{aligned}$$

Gaunama lygčių sistema:

$$\begin{cases} -12A = 4 \\ -12B = 0 \\ 3C \quad = 0 \\ 3D \quad = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Atskirasis sprendinys gaunasi:

$$x_a = -\frac{1}{3}\sin(4t) - \frac{2}{3}\cos(t)$$

Bendras sprendinys:

$$x(t) = x_h + x_a = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) - \frac{1}{3}\sin(4t) - \frac{2}{3}\cos(t)$$

Naudojamos pradinės sąlygos $x(0) = 0$ ir $x'(0) = 1$, kad rasti: C_1 ir C_2

$$x'(t) = 2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) - \frac{4}{3}\cos(4t) + \frac{2}{3}\sin(t)$$

$$x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{1}{3}\sin 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}$$

$$x'(t) = 2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 - \frac{4}{3}\cos 0 + \frac{2}{3}\sin 0 = 1 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{7}{6}$$

Galutinis sprendinys:

$$x(t) = \frac{7}{6}\sin(2t) + \frac{2}{3}\cos(2t) - \frac{1}{3}\sin(4t) - \frac{2}{3}\cos(t)$$

Sprendinys naudojant kompiuterinę programą

Python `sympy` bibliotekos pateiktas sprendinys (Pav. 1).

$$x(t) = \frac{7\sin(2t)}{6} - \frac{\sin(4t)}{3} - \frac{2\cos(t)}{3} + \frac{2\cos(2t)}{3}$$

Pertvarkius gautą atsakymą akivaizdu, kad abu sprendimai yra lygūs.

$$x(t) = \frac{7\sin(2t)}{6} + \frac{2\cos(2t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{3} - \frac{2\cos(t)}{3}$$

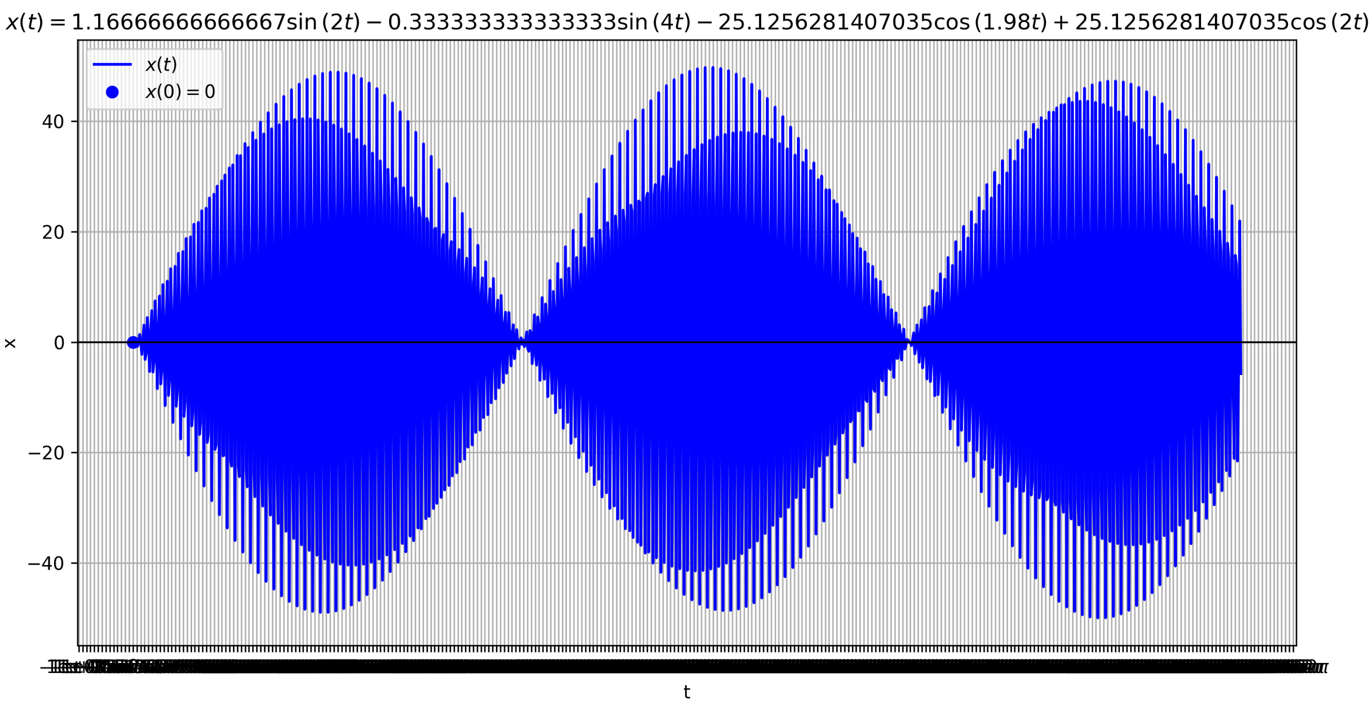

Fig. 1: Koši uždavinio $x''(t) + 4x(t) = 4\sin(4t) - 2\cos(t)$ sprendinio grafikas

Sprendinio analizė

Sprendinys yra sudarytas iš trigonometrijos funkcijų sin ir cos, kurios yra periodinės ir neturi ribos, todėl, kai $t \to +\infty$, sprendinys irgi neturi ribos.

Svyravimo periodas
Norint nustatyti periodą, reikia išanalizuoti atskiras dedamąsias ir jų dažnius:

Kiekvienos trigonometrinės funkcijos periodai:

$$\cos(2t), \sin(2t) \Rightarrow T = \pi$$
$$\sin(4t) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$
$$\cos(t) \Rightarrow T = 2\pi$$

Bendras funkcijos periodas yra mažiausias bendras visų dedamųjų periodų kartotinis:

$$T_x = \mathrm{MBK}\left(\pi, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right) = 2\pi$$

Svyravimo amplitudė
Amplitudė apskaičiuojama pagal sprendinio maksimalias ir minimalias reikšmes per vieną periodą. Skaitiškai galima atrasti minimalias reikšmes intervale $[0, 2\pi]$

$$\min x(t) \approx -1.9659, \max x(t) \approx 1.6623$$

Priedai

NumPy sprendimo kodas

Python

```
from sympy import Function, dsolve, Derivative, Eq, lambdify, sin, cos
from sympy import print_python, print_maple_code, print_latex, latex
from sympy.abc import t

x = Function('x')

eq = Eq(Derivative(Derivative(x(t), t), t) + 4*x(t), 4*sin(4*t) - 2*cos(t))

solution = dsolve(eq)
print_latex(solution)
display(solution)

Cs = solve(
  [
    Eq(solution.rhs.subs(t, 0), 0),
    Eq(solution.rhs.diff(t).subs(t, 0), 1)
  ],
  symbols("C1, C2")
)

concrete_solution = solution.subs(Cs)
print_latex(concrete_solution)
display(concrete_solution)
```

Pav. 1: Sprendimo kodas

Vizualizacijos kodas

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import FuncFormatter, MultipleLocator
from fractions import Fraction as Frac

sol_f = lambdify(t, concrete_solution.rhs)

t_vals = np.linspace(-2.5 * np.pi, 2.5 * np.pi, 1000)
x_vals = sol_f(t_vals)

_, ax = plt.subplots(figsize=(12, 6))

ax.plot(t_vals, x_vals, color='blue', label=f"$x(t)$")
ax.plot(0, 0, 'bo', label="Koši taškas")

ax.set_title(f"${latex(concrete_solution)}$")
ax.axhline(y=0, lw=1, color='k')
ax.set_xlabel("t")
ax.set_ylabel("x")
ax.legend()
ax.grid(True)
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(
    lambda val,pos: '{:.0g}$\\pi$'.format(val/np.pi) if val != 0 else '0'
))
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(base=np.pi))
plt.savefig('solution.png', dpi=300)

plt.show()
```

Pav. 2: Vizualizacijos kodas