Laboratorinis darbas #2

Domantas Keturakis

Spalis 2024

Užduotys

1. Išspręsi paprastąją pirmos eilės, netiesinę diferencialinę lygtį $\frac{du}{dx} = x^2 \ln(u + x) - x$, su Koši sąlyga $u(0) = u_0$ intervale 0 ≤ x ≤ 1, taikant:

   a. 4-pakopi Rungės-Kuto metodą ir

   b. dvipakopi Rungės-Kuto (σ = 0.5).

   Su pradiniu tašku $u_0 = 1$, žingsniais (τ) 0.1 ir 0.05.

2. Įvertinti paklaidą, intervale $(0, 1]$, Rungės metodu.

Rungės-Kuto 4-kopis metodas

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2) \\ k_4 &= f(x_n + \tau, y_n + \tau k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Rungės-Kuto 2-kopis metodas

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Sprendimai

Sprendimas (kodas prikabintas 4 psl.), kartu su Python `ScyPy` bibliotekos pateiktu sprendiniu naudojant `solve_ivp` funkciją.

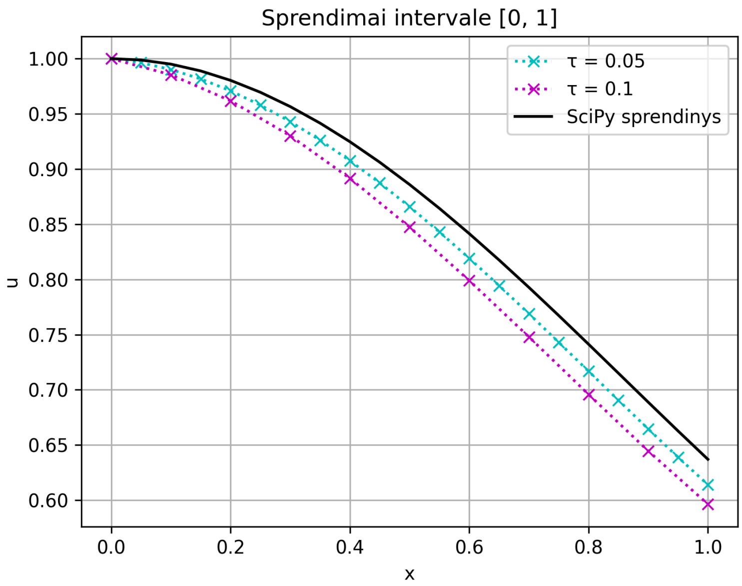

Fig. 1: Sprendimas 2-to laipsnio Rungės Kuto metodu, su žingsniais 0.1 ir 0.05

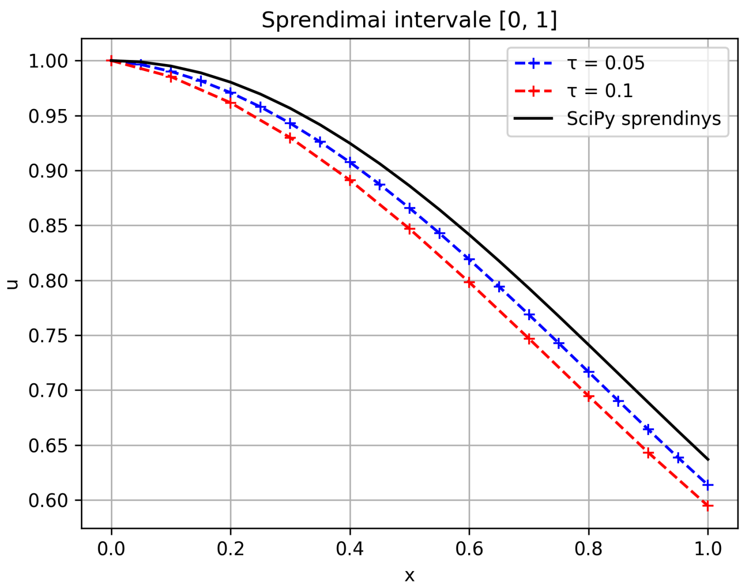

Fig. 2: Sprendimas 4-to laipsnio Rungės Kuto metodu, su žingsniais 0.1 ir 0.05

Paklaidos vertinimas

Paklaida įvertinta Rungės metodu $|u(T) - y_\tau| \approx \dfrac{|y_{2\tau} - y_\tau|}{2p - 1}$, kur:

y_τ – skaitinis sprendinys taške t = T, apskaičiuotas su žingsniu τ,

$y_{2\tau}$ – skaitinis sprendinys taške t = T, apskaičiuotas su žingsniu 2τ,

p – metodo tikslumo eilė.

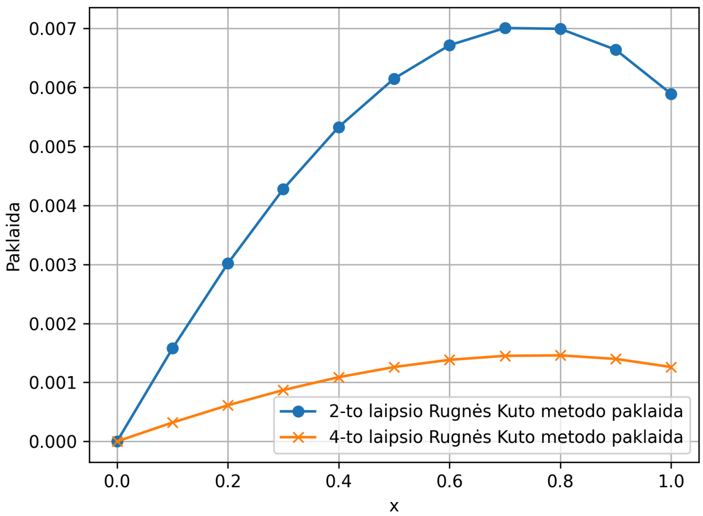

Fig. 3: Paklaidos naudojant 2-to ir 4-to laipsnio Rungės Kuto metodus

Priedai

Naudojami įtraukimai:

```py
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pipe import take_while
from scipy.integrate import solve_ivp
```

Sprendimai

Sprendimas 4-to laipsnio Rungės Kuto metodu:

```py
def RungeKutta4(fn, u0 = 1, lower_bound = 0, upper_bound = 1, tau = 0.1):
  y = [u0]
  ts = np.arange(lower_bound, upper_bound + tau, tau)

  k1 = lambda t_n: fn(t_n,         y[-1])
  k2 = lambda t_n: fn(t_n + tau/2, y[-1] + tau * k1(t_n) / 2)
  k3 = lambda t_n: fn(t_n + tau/2, y[-1] + tau * k2(t_n) / 2)
  k4 = lambda t_n: fn(t_n + tau,   y[-1] + tau * k3(t_n))
  y_n_plus_one = lambda t_n: y[-1] + (tau/6)*(k1(t_n) + 2*k2(t_n) + 2*k3(t_n) + k4(t_n))


  for t in ts[1:]:
    y.append(y_n_plus_one(t))

  return ts, y
```

Sprendimas 2-to laipsnio Rungės Kuto metodu:

```py
def RungeKutta2(fn, u0 = 1, lower_bound = 0, upper_bound = 1, tau = 0.1):
  y = [u0]
  ts = np.arange(lower_bound, upper_bound + tau, tau)

  k1 = lambda t_n: fn(t_n,         y[-1])
  k2 = lambda t_n: fn(t_n + tau/2, y[-1] + tau * k1(t_n) / 2)
  y_n_plus_one = lambda t_n: y[-1] + (tau/2)*(k1(t_n) + k2(t_n))

  for t in ts[1:]:
    y.append(y_n_plus_one(t))

  return ts, y
```

Sprendimas naudojant ScyPy:

```py
def SciPy(fn, u0 = 1, lower_bound = 0, upper_bound = 1, tau = 0.1):
  ts = np.arange(lower_bound, upper_bound + tau, tau)
  sol = solve_ivp(f, (lower_bound, upper_bound), [u0], t_eval=ts)
  return ts, sol['y'][0]
```

Vizualizacijos

```py
f = lambda x, u: np.pow(x, 2) * np.log(u + x) - x

ts1, rk4_ys1 = RungeKutta4(f, tau = 0.05)
ts2, rk4_ys2 = RungeKutta4(f, tau = 0.1)

_, rk2_ys1 = RungeKutta2(f, tau = 0.05)
_, rk2_ys2 = RungeKutta2(f, tau = 0.1)

_, scipy1 = SciPy(f, tau = 0.05)
plt.plot(ts1, rk4_ys1, 'b--', marker='+', label='RungeKutta4: Žingsnis (τ) = 0.05')
plt.plot(ts2, rk4_ys2, 'r--', marker='+', label='RungeKutta4: Žingsnis (τ) = 0.1')
plt.plot(ts1, scipy1, color='black', label='SciPy sprendinys')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('u')
plt.title('Sprendimai intervale [0, 1]')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('rk4.png', dpi=300)
plt.show()

plt.plot(ts1, rk2_ys1, 'c:', marker='x', label='RungeKutta2: Žingsnis (τ) = 0.05')
plt.plot(ts2, rk2_ys2, 'm:', marker='x', label='RungeKutta2: Žingsnis (τ) = 0.1')
plt.plot(ts1, scipy1, color='black', label='SciPy sprendinys')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('u')
plt.title('Sprendimai intervale [0, 1]')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('rk2.png', dpi=300)
plt.show()
```

Paklaidos skaičiavimas ir vizualizacija

```py
def error(y_tau, y_2tau, tau = 0.1, order = 2):
  y_tau  = np.array(y_tau)
  y_2tau = np.array(y_2tau[::2])
  return np.abs(y_2tau - y_tau) / (2**order - 1)

rk2_err = error(rk2_ys2, rk2_ys1, order = 2)
rk4_err = error(rk4_ys2, rk4_ys1, order = 4)

plt.plot(ts2, rk2_err, label='2-to laipsio Rugnės Kuto metodo paklaida', marker='o')
plt.plot(ts2, rk4_err, label='4-to laipsio Rugnės Kuto metodo paklaida', marker='x')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('Paklaida')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('error.png', dpi=300)
plt.show()
```