

BECAUSE IT'S THERE.

GEORGE LEIGH MALLORY

DOMINIQUE AUBERT

COSMOLOGIE PHYSIQUE

ELLIPSES

Table des matières

<i>État des connaissances</i>	13
<i>Prélude : Cosmologie Newtonienne</i>	23
<i>Concepts Fondamentaux</i>	31
<i>Dynamique de l'Univers Homogène</i>	51
<i>l'Univers Chaud</i>	67
<i>Histoire thermique de l'Univers et Nucléosynthèse primordiale</i>	81
<i>Le Fond Diffus Cosmologique</i>	89
<i>La Matière Noire</i>	105
<i>Formation des grandes structures</i>	129
<i>Formation des 'petites' structures</i>	151
<i>Simulations Cosmologiques</i>	163

Entropie et Univers 181

L'Inflation 193

La Réionisation 203

Bibliographie 217

Introduction

ON NE MESURE PAS ASSEZ LA CHANCE de pouvoir faire de la cosmologie. Cette possibilité nous est offerte aujourd’hui car nous disposons de moyens instrumentaux capables de sonder l’Univers le plus distant et le plus ancien, car nous disposons de théories et modèles suffisamment matures et car la nature aura bien voulu se laisser observer, se présentant dans un état d’évolution tel que le cosmos intéressant est aujourd’hui accessible. L’objectif de ce livre est donc de célébrer cette opportunité qui nous est donnée.

La cosmologie se fixe pour objectif démesuré d’étudier l’Univers dans sa globalité comme on étudierait une ville, un espèce dans son habitat ou un système de pensée philosophique. On se dit qu’on peut le faire, osant dire ‘chiche’ devant l’énormité de la tâche. L’Univers est actuellement en train d’évoluer, on ne peut le reproduire en laboratoire, nous faisons partie de l’expérience, il ne nous est pas entièrement inaccessible et pourtant l’ambition de la cosmologie est de passer outre ces obstacles et de faire au mieux pour pouvoir comprendre, prédire et décrire ce qui contient tout ce qui est, tout ce qui est passé et tout ce qui adviendra.

Ce que cet ouvrage va tenter de montrer, alors que tout semble indiquer que cette tâche est impossible à priori, c’est que la cosmologie est viable : elle fonctionne, en dépit du bon sens. L’édifice des théories physiques développé au cours des siècles parvient autant que faire ce peut à dégager un modèle cohérent, relativement simple de notre Univers. Nous avons affaire à un objet naturel, le cosmos, que la science permet d’aborder sous de multiples aspects et chacun de ses aspects produit une vision globale de notre Univers et de son évolution. La cosmologie étudie un objet avec tous les outils de la physique dont nous disposons, plutôt que de s’attacher à une théorie physique et l’appliquer aux multiples contextes où elle peut être pertinente : la cosmologie est une discipline de l’astrophysique, c’est à dire une science naturelle. C’est pour cette raison que ce livre est davantage un panorama de divers aspects de la cosmologie, sur la richesse physique nécessaire à sa description, plutôt qu’un ouvrage

totallement cohérent et autonome de l'état actuel de notre compréhension de l'Univers. Il se passe beaucoup de choses dans ce dernier et l'emphase est mise sur la diversité des modèles physiques qu'il faut invoquer pour tenter de comprendre toutes ses facettes.

Une autre des motivations qui pousse cet ouvrage à être ainsi écrit est la conviction que l'astrophysique (et la cosmologie en particulier) est le lieu idéal pour promouvoir la physique, sa richesse, sa capacité à décrire les régimes naturels les plus inattendus. En particulier, la physique est traversée de démarches constantes et similaires appliquées dans les contextes les plus divers : la cosmologie permet de mettre cette versatilité en avant. De façon récurrente, il est des régimes d'approximations ou d'extrapolations qui permettent à des théories physiques, de prime abord trop complexes, de décrire simplement et précisément des processus à l'oeuvre dans le cosmos. On réalise ceci progressivement, avec l'expérience, avec les confrontations multiples à l'étude de cas physiques divers et variés : l'objectif de ce livre est aussi d'amorcer cette prise d'expérience pour le lecteur.

Enfin, l'astrophysique et la cosmologie ont besoin des mathématiques : c'est une évidence qui ne peut et ne doit pas être niée. Pour cette raison, ce livre a un biais théorique et affiche un grand nombre d'équations. Ceci étant posé, je considère que les mathématiques ont plus besoin de l'astrophysique que l'inverse et de fait je pense également que la physique en général permet d'appréhender, de façon intuitive, comment est structurée une équation, comment des quantités pertinentes peuvent être anticipées. La physique permet une approche empirique des mathématiques, qui dans bien des cas permet de faciliter leur compréhension et démontrer en quoi elles sont puissantes et utiles et dans quels contextes.

LA COSMOLOGIE FONCTIONNE mais comme montré dans cet ouvrage, cela a un coût. Ce coût est d'une part la perte de certaines intuitions façonnées par notre expérience quotidienne : la perte d'une définition absolue de l'espace en est l'exemple le plus frappant. Par l'expérience, c'est toute une habitude, une façon de penser qui doit être rapidement prise par le lecteur : cet ouvrage cherche aussi dédramatiser cet aspect et par extension à tordre le cou à certaines idées reçues ou mal expliquées. D'autre part, le modèle standard de la cosmologie a un coût important en ce qu'il nous impose d'admettre notre grande ignorance. Par exemple 95% du bilan énergétique actuel de l'Univers nous est simplement inconnu¹ : l'influence de ce 'secteur sombre' est parfaitement décrite par nos théories et rencontre nombres de succès, mais sans que sa nature nous soit accessible. C'est la grande ombre qui plane sur cette discipline, telle l'épée de Damoclès : toute difficulté rencontrée par ce modèle nous force à

^{1.} par exemple environ un quart de cette énergie est sous forme de matière noire et environ deux tiers est sous la forme d'énergie noire

lever la tête vers cette incertitude permanente, vers la pensée lancinante que cet échafaudage n'est pas forcément des plus stables. Et pourtant bien des choses sont trop belles pour qu'on ne puisse pas envisager qu'elles soient vraies. C'est pour cette raison que ce livre cherchera en permanence à mettre en regard succès et faiblesses de la cosmologie moderne.

Les thèmes qui y sont abordés sont relativement standards, tout comme son organisation. Les premiers chapitres sont dédiés à l'Univers parfait, homogène et à sa dynamique afin d'établir sa caractéristique la plus spectaculaire à savoir *l'expansion*. Cette expansion, prédictive par la théorie de la relativité générale donne à notre Univers un début, une histoire et par extension un avenir que nous sommes capables de lui prédire. Par la suite, l'ouvrage se focalise sur l'Univers à ses débuts, lorsque les températures sont élevées et les densités importantes : c'est le royaume de la cosmologie primordiale, de la physique des énergies inaccessibles aux accélérateurs actuels. La conclusion de cette phase est la production² de l'objet le plus important de la cosmologie, le fond diffus cosmologique, et peut-être l'objet naturel le plus important de toute la physique : étudié sous toutes ses coutures et compris à des degrés rarement égalés dans d'autres disciplines, le fond diffus est presque une anomalie dans le paysage de l'astrophysique. Sa compréhension est maîtrisée et son importance a été mainte fois démontrée : c'est probablement la source la plus importante de notre savoir actuel sur l'Univers. Les chapitres suivants sont axés sur l'Univers hétérogène et la formation des structures, la thématique de la matière noire : ces sujets sont le pont entre la cosmologie simple et pure et l'astrophysique complexe. C'est le fondement de la théorie de la formation des galaxies, sujet qui ne sera pas abordé en détail dans ce livre, car il mérite plusieurs ouvrages en soi³. Toutefois, un chapitre est dédié aux simulations cosmologiques, programmes informatiques qui visent à modéliser cette cosmologie hétérogène dans toute sa complexité : ce chapitre est à nouveau l'occasion d'exposer la variété des physiques pertinentes à la cosmologie et c'est également un sujet rarement abordé dans des livres équivalents. Comme il s'agit de mon sujet de recherche principal, ce chapitre est l'occasion de présenter une expertise qui m'est chère. On m'excusera par avance de ne pas dédier de chapitre équivalent aux moyens d'observations : ces moyens et les techniques associées sont généralement décrits au sein des différents chapitres lorsque cela est nécessaire et par ailleurs, il existe nombre de livres de grande qualité dédiés à l'observation astronomique⁴ qui seront bien plus utiles au lecteur que ce que j'aurais pu rapidement proposer ici. L'ouvrage se termine sur des sujets plus spéculatifs, plus nouveaux ou plus abstraits, comme l'Inflation, le rôle de l'entropie en cosmo-

2. 380 000 ans après le Big-Bang

3. et de multiples références existent d'ores et déjà

4. la bibliographie donnée en fin d'ouvrage mentionne de tels ouvrages

logie ou la Réionisation du milieu intergalactique : c'est à nouveau l'occasion de mettre l'emphase sur la variété d'outils physiques qu'il faut mobiliser pour avoir une compréhension de notre Univers.

LE PUBLIC VISÉ par ce livre est celui d'étudiantes et d'étudiants de filière scientifiques, de Licence, de Master et d'écoles d'ingénieurs. Le pré-requis sont ceux d'une maîtrise de l'analyse et de l'algèbre de terminale scientifique, même si l'ouvrage essaie autant que faire ce peut de présenter différents niveaux de lecture et fournir des explications ou des conclusions qui ne nécessitent pas forcément de suivre les démonstrations mathématiques. De fait, je tiens à préciser que ce livre n'est pas complet, parfois imprécis et prend sans honte un certain nombre de raccourcis : il existe de multiples références qui sont elles complètes dans leurs démonstrations, exhaustives dans leurs analyses parfois au prix d'une complexité élevée. Ici, on vise davantage à exposer les démarches, les idées en sacrifiant ici et là à des simplifications. De fait, cette démarche reflète ma propre approche de la discipline : je ne suis pas moi-même un spécialiste de cosmologie à proprement parler, mais mon activité de recherche centrée sur la production de modèles où le contexte cosmologique est extrêmement important m'a conduit à développer une connaissance large, empirique de cette discipline. C'est ce rassemblement d'idées, d'approches, de compréhensions parfois superficielles mais dont l'utilité m'a été démontrée par ma pratique de la science que je souhaite partager dans cet ouvrage. De fait, j'ose espérer que cet ouvrage intéressera le non-physicien, voire le non-scientifique mais plus généralement toute personne intéressée par la mise en hypothèse, le raisonnement, la conceptualisation.

CET OUVRAGE DOIT BEAUCOUP à mes collègues de l'Observatoire Astronomique de Strasbourg et d'ailleurs, à mes étudiants et aux mentors qui ont tous façonné d'une manière ou d'une autre ma trajectoire de scientifique et d'enseignant à l'Université. Je tiens ainsi à remercier Pierre Ocvirk, Jonathan Chardin, Nicolas Gillet, Nicolas Deparis, Joe Lewis, Sébastien Derrière, Arnaud Siebert, Caroline Bot, Thomas Keller, Thomas Boch, Sandrine Langenbacher, Romaric David, Medhi Amini, Nicolas Martin, Ariane Lançon, Christian Boily, Rodrigo Ibata, Benoit Famaey, Jean-Marie Hameury, Olivier Bénaymé, Hervé Wozniak et Pierre-Alain Duc. La contribution implicite de Christophe Pichon et de Romain Teyssier à cet ouvrage est incomensurable. Ce livre doit également beaucoup à certaines rencontres dont celles avec Benoit Sémerin, Jérémie Blaizot, Mathieu Langer, Marian Douspis, Yann Rasera, Mathias Gonzalez, Edouard Audit, Françoise Combes, Francis Bernardeau, Nabila Aghanim, Guilaine

Lagache, Jean-Loup Puget, François Bouchet, Stéphane Colombi, et
Stéphane Basa. Pour finir je tiens à remercier Anne-Catherine, Anouk
& Raoul, mes phares immuables au sein de ce cosmos infini.

État des connaissances

L'objectif de ce chapitre est de faire un court panorama de l'état de nos connaissances sur les propriétés observées de l'Univers. Les chapitres suivants seront eux consacrés à l'élaboration des concepts et des théories qui permettent de rendre compte de ces propriétés observées.

Concernant notre connaissance des propriétés de l'Univers, elle repose souvent sur *l'interprétation d'observations au travers de théories et de modèles*. Par conséquent les propriétés décrites dans ce chapitre sont essentiellement valables dans le contexte du modèle standard de la cosmologie décrit dans les chapitres suivants. Si un changement de paradigme vient à opérer, rien n'empêche à priori que ces observations soit réinterprétées et donc conduisent à modifier ce que nous savons de l'Univers.

Observation fondamentale : le décalage vers le rouge

L'observation première de la cosmologie, à l'origine même de l'émergence de la discipline au début du 20ème siècle, est la constatation que tous les objets observés à grande distance sont plus "rouges" qu'attendus. La mesure du spectre de ces objets indiquent que les systèmes de raies observés, parfois complexes, sont tous à des longueurs d'ondes plus importantes que ce que l'observation de ces mêmes éléments aurait donné dans un laboratoire. On définit le décalage vers le rouge ou "redshift" par la quantité z

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (1)$$

où λ est la longueur d'onde⁵ observée et λ_0 celle mesurée en laboratoire. En corrélant cette quantité avec la distance des objets, on observe que ce rougissement est d'autant plus grand que la source est éloignée.

Dans le cadre du modèle standard de la cosmologie, ce rougissement est de nature *cosmologique* et traduit le phénomène *d'expansion* de l'Univers. Dans ce processus d'expansion, toute distance prise

5. avec $\lambda = cT = c/\nu$ où T et ν sont respectivement les périodes et fréquences d'oscillation de l'onde électromagnétique associée

entre 2 points de l'Univers est amenée à évoluer⁶. Notons dès à présent que cette augmentation n'est pas le symptôme d'un déplacement des sources par rapport à leur espace local mais plutôt la conséquence d'une 'dilatation' de l'espace entre l'observateur et la source. Cette dilatation agit également sur la longueur d'onde des photons⁷ en vol et conduit au rougissement observé. Cette dilatation agit aussi sur les densités, diluant au cours du temps de telles quantités et on peut montrer qu'elle produit des dilatations des durées, on allongeant tout type d'intervalles temporels. Enfin, cette interprétation cosmologique permet également d'expliquer pourquoi ce décalage vers le rouge est d'autant plus important que la source est éloignée.

Notons que comme le redshift croît avec la distance, z est de façon indirecte un indicateur de *distance* et comme la lumière nous parvient avec une vitesse finie et connue, z est également un indicateur de *l'époque* à laquelle la source est observée. En cosmologie, l'action de désigner un objet ou un phénomène par son redshift z implique à la fois une information spectrale, spatiale et temporelle.

Le processus d'expansion a débuté il y a 13.8 milliards d'années : c'est le *Big-Bang*. Aux premiers instants, les distances étaient présumément courtes, l'Univers était donc de fait très dense. Régnaient également une température très élevée, qui fut amenée à décroître au cours du temps⁸. De fait le modèle accepté permettant de décrire les origines de l'Univers est parfois dénommé modèle du *Big Bang chaud*.

Propriétés générales de l'Univers

L'Univers dans lequel nous vivons peut, semble-t-il, être décrit par une poignée de paramètres. La connaissance de ceux-ci, ajoutée à la connaissance de ce que nous croyons être les bonnes lois de la physique, permet d'expliquer une très grande partie des propriétés globales de l'Univers et également une grande partie des processus astrophysiques qui subissent la cosmologie qui les entoure.

Paramètres cosmologiques

Comme détaillé dans les chapitres suivant, l'Univers peut être décrit à un haut niveau de précision en considérant qu'il est homogène, isotrope et possédant une dynamique régie par les équations de la relativité générale. Toutefois cette description nécessite la connaissance à priori de certains paramètres qui permettent d'expliquer l'Univers tel qu'il est observé. L'observation de l'état actuel du cosmos met des contraintes sur la valeur de ces paramètres et nous détaillons ci-dessous les plus importants d'entre eux.

6. en l'occurrence à augmenter dans un modèle standard d'Univers

7. et donc sur leur énergie donnée par $E = h\nu = hc/\lambda$

8. Par exemple la température du 'gaz de photons cosmiques', le fond diffus cosmologique, est aujourd'hui de 2.73 K mais était environ 1000 fois plus chaud lorsqu'il a été libéré il y a 380 000 ans

Paramètre de Hubble Le premier paramètre est le paramètre de Hubble H_0 , qui caractérise le taux d'expansion actuel. Sa valeur est d'environ 70 km/s/Mpc et indique qu'un objet situé à 1 Mpc⁹ s'éloignerait de nous à 70 km/s s'il était soumis uniquement à l'expansion. On utilise parfois le paramètre de Hubble réduit h tel que $H_0 = 100h$ km/s/Mpc : sa valeur est proche $h \sim 0.7$.

Paramètres de densité Les différents types d'énergies présentes dans l'Univers ont une grande influence sur ses propriétés et leurs contributions au budget énergétique total sont caractérisées par des paramètres de densité Ω_i . En pratique, Ω_i représente le rapport de la densité d'énergie de type i à une densité d'énergie de référence appelée *densité critique*. On distingue la densité de matière Ω_m , la densité de baryons (protons+neutrons(+électrons))¹⁰ Ω_b , la densité de rayonnement Ω_r , la densité d'énergie des neutrinos Ω_ν et la densité d'énergie noire Ω_Λ . Il faut noter que la contribution de la matière contient celle des baryons, par conséquent $\Omega_m \geq \Omega_b$: actuellement on a $\Omega_m \sim 0.3$ et $\Omega_b \sim 0.05$, la différence étant la contribution apportée par une matière *non baryonique* et invisible, appelée la matière noire. Les contributions des espèces relativistes (photons, neutrinos) est aujourd'hui négligeable, bien que ce type de particules soit très abondant en nombre.

Spectre de fluctuations initiales L'Univers tel qu'observé actuellement n'est pas strictement homogène, en particulier sur des échelles inférieures à la dizaine de Mpc. Les galaxies et amas qui nous entourent trouvent leur origine dans des fluctuations initiales de densité de très faible amplitude. Ces fluctuations sont caractérisées par un spectre dit 'de puissance' $P(k)$ qui donne la distribution des amplitudes des fluctuations de taille $L = 2\pi/k$. On suppose actuellement que celles-ci trouvent leur origine dans la période *d'Inflation* qui prédit un spectre primordial de la forme

$$P(k) \sim k^{n_s}. \quad (2)$$

n_s constitue également un paramètre cosmologique et les modèles Inflationnaire lui prédise une valeur *proche mais différente* de l'unité¹¹. L'amplitude globale du spectre doit également être paramétrée, par exemple sous la forme d'une amplitude de fluctuation sur une échelle arbitraire de 8 Mpc, notée σ_8 . Notons enfin que les modèles d'Inflation prédisent un fond d'ondes gravitationnelles, caractérisé par un spectre de fluctuations tensorielles, similaire à celui des fluctuations de densité (dites également scalaires). Le rapport d'amplitude entre fluctuations tensorielles et scalaires est noté r et sa valeur est supposée faible.

9. 1 Megaparsec vaut environ 3.08×10^{22} m

10. en termes rapides, les baryons constituent la matière 'normale' à laquelle nous sommes habitués

11. le satellite Planck mesure ainsi une valeur proche de 0.96

État d'ionisation de l'Univers Le dernier paramètre canonique de la cosmologie permet de décrire l'état d'ionisation de l'Univers au cours de son histoire. Cet état se mesure en contrignant le nombre moyen de diffusions des photons sur les électrons libres du cosmos. Cette quantité est notée τ avec une valeur typique $\tau \sim 0.07$. L'essentiel de ces électrons libres sont produits au cours de la Réionisation de l'Univers au redshift $z_{\text{reion}} \sim 8 - 6^{12}$: dans les modèles les plus simples τ et z_{reion} sont directement liés.

Modèle minimal L'ensemble des paramètres décrits précédemment permet de rendre compte d'une grande variété de propriétés observables. D'autre part, certaines hypothèses permettent encore de réduire le nombre de paramètres libres. Par exemple, l'Inflation prédit une courbure intrinsèque nulle qui se traduit en pratique par $\sum_i \Omega_i = 1$. D'autre part l'amplitude des modes tensoriels (i.e. les ondes gravitationnelles issues de l'Inflation) étant attendue comme très faible, on peut aisément poser $r = 0$. Enfin, le paramètre de densité de rayonnement Ω_r est très précisément connue, par la mesure précise de la température du fond diffus ($T = 2.7255 \pm 0.0006$ K) et ne permet donc plus de latitude significative sur sa valeur. Enfin, en l'absence de physique exotique la densité d'énergie des neutrinos Ω_ν est directement liée à celle des photons¹³. Au final, un modèle extrêmement solide peut être construit avec seulement 6 paramètres libres. Un choix typique de "sextet" est $(\Omega_b, \Omega_m, H_0, \sigma_8, n_s, \tau)$. Bien sûr d'autres combinaisons de paramètres libres sont possibles.

Principales sondes observationnelles

Les paramètres précédents sont contraints par l'observation croisée de différentes sondes observationnelles. La convergence de ces valeurs conduit à ce qui est communément nommé *le modèle de concordance ou modèle standard*. Voici une liste (non-exhaustive) de ces sondes cosmologiques.

Mesure directe de H_0 Cette mesure s'effectue à l'aide de chandelles standards qui permettent de mesurer indépendamment la distance d'un objet extra-galactique et son redshift z . La chandelle de référence est la relation période-luminosité des étoiles variables de type Céphéides : la mesure de la période de variation de leur flux apparent permet de déterminer leur luminosité intrinsèque¹⁴ et la connaissance de ce flux et cette luminosité permet d'obtenir la distance¹⁵. Les Céphéides sont des indicateurs primaires et permettent de calibrer des indicateurs secondaires : courbes de lumières des supernovæ, relation de Tully-Fisher¹⁶, etc... Ce type d'indicateurs

12. environ 1 milliard d'années après le Big-Bang

13. tout en étant quasi nulle aujourd'hui

14. une Céphéide intrinsèquement brillante varie lentement, une Céphéide faible varie rapidement

15. via $\text{Flux} = \text{Lum}/4\pi(\text{dist})^2$

16. qui relie la luminosité d'une galaxie à sa vitesse de rotation

donne une valeur de $H_0 \sim 73 \text{ km/s/Mpc}$. Le fond diffus cosmologique permet également une mesure indépendante de $H_0 \sim 67 \text{ km/s/Mpc}$ en légère tension avec les estimateurs précédents.

Supernovæ et cosmologie La grande luminosité des supernovæ permet leur détection à des distances cosmologiques : ce terme désigne les stades finaux des étoiles les plus massives incapables de maintenir des réactions de fusion nucléaires en leur sein, conduisant à leur explosion. De plus certains types de supernovæ, celles dites de type 'SN1A', ont un caractère quasi standard car elles résultent d'explosions de naines blanches dans des systèmes binaires pour lesquelles il existe une forte corrélation entre luminosité et paramètres de la courbe de luminosité. L'accélération¹⁷ de l'expansion de l'Univers a été mise en évidence pour la première fois à l'aide de ce type d'indicateurs, en proposant pour la première fois la combinaison $\Omega_m \sim 0.3$ et $\Omega_\Lambda \sim 0.7$. De plus ces mêmes indicateurs indiquent que la densité d'énergie noire est probablement une constante en temps et en espace, donc équivalente à une constante cosmologique¹⁸.

Le fond diffus cosmologique Le fond diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background, CMB) est constitué des photons produits lors de la Recombinaison, 380 000 ans après le Big-Bang. Il constitue le plus grand réservoir de photons du cosmos et présente une brillance homogène à des niveaux de 1 pour 100 000. En deçà de ces niveaux, le CMB présente néanmoins de faibles inhomogénéités qui tracent les inhomogénéités de matière à cette époque. Leur structure spatiale (en fait angulaire sur le ciel) comprend des informations sur toute l'histoire de croissance des structures depuis le Big-Bang jusqu'à 380 000 ans plus tard et sur les processus de couplage entre le rayonnement et la matière. L'étude de ces fluctuations permet par exemple d'établir la platitude de la géométrie de l'Univers, fournit une mesure de la quantité de baryons Ω_b , confirme la nécessité d'une matière non-baryonique et l'absence d'évolution de l'énergie noire. Le CMB indique également que le spectre de fluctuation initial est compatible avec les modèles d'Inflation et pour l'instant les modes tensoriels restent indétectables. Enfin le nombre de diffusions des photons sur les électrons est de l'ordre de $\tau \sim 0.07$ correspondant à une Réionisation vers un redshift de $z \sim 8$. Le CMB constitue à l'heure actuelle la sonde la plus précise et la plus complète d'informations cosmologiques. C'est l'objet d'étude de missions spatiales et sol de très grande ampleur, dont par exemple le satellite européen *Planck*.

Grands relevés de Galaxies Les galaxies constituent des traceurs (biaisés) de la distribution de matière dans le cosmos. Par conséquent des

17. c'est-à-dire le fait que les distances augmentent de plus en plus rapidement aujourd'hui

18. on rencontrera aussi parfois le terme d'énergie du vide

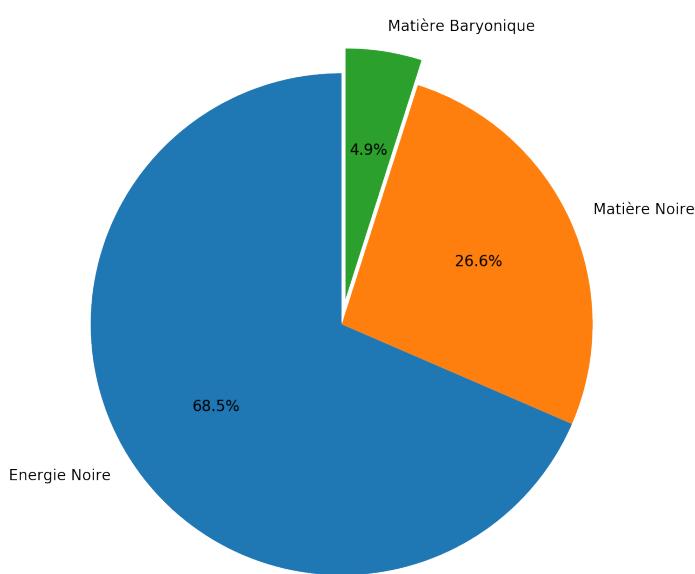


FIGURE 1: La répartition des différentes formes d'énergie au bilan énergétique total de l'Univers, d'après les mesures du satellite *Planck*. On note l'absence de contribution du rayonnement et des neutrinos, dont le poids énergétique est trop faible pour pouvoir être représenté ici. La matière 'normale', désignée comme 'baryonique' et composée de protons, neutrons et électrons ne représente que $\sim 5\%$ du total. Le reste constitue le *secteur sombre*.

efforts importants sont réalisés pour collecter de façon homogène, les positions dans le ciel et les propriétés de millions de galaxies, sous forme de grands relevés : parmi les plus connus on citera le *Sloan Digital Sky Survey*, SDSS, ou bien le futur relevé du satellite européen *Euclid*¹⁹. En théorie, l'étude de la distribution spatiale de ces objets dans des grands relevés doit permettre de contraindre le déroulé du processus de croissance des structures de l'Univers et par extension la cosmologie. Parmi les mesures les plus spectaculaires autorisées par ce type de relevés est la détection des oscillations baryoniques acoustiques (BAOs) à bas redshift. Les BAOs sont déclenchés dans l'Univers pré-Recombinaison et consistent en des ondes acoustiques dans le gaz baryonique entretenues par la compétition entre la pression de rayonnement et la gravitation produite par toute la matière. Ces BAOs sont gelés après la Recombinaison et se manifestent sur des échelles d'environ 150 Mpc dans toute distribution de matière qui échantillonnent ces distances, dont le CMB et les grands relevés de galaxies. La cosmologie issue des relevés de galaxies permet généralement de lever les dégénérescences entre paramètres²⁰, par exemple pour les estimations issues du CMB, et sont donc d'une importance essentielle. De plus les relevés opèrent à différents redshifts z et offrent des vues à différents instants d'une même sonde cosmologique (par exemple sur les BAOs) et sont donc des outils

19. prévu pour voler en 2021

20. on parle de dégénérescences quand plusieurs combinaisons de paramètres permettent de reproduire une même observation. Impossible alors de distinguer laquelle est la meilleure.

extrêmement puissants.

Amas de Galaxies Les amas de galaxies constituent les plus grands objets qui se sont effondrés gravitationnellement aujourd’hui. Ils peuvent comprendre plusieurs milliers de galaxies et atteindre des masses allant jusqu’à $10^{15} M_{\odot}$. Le décompte de ces objets et leur fonction de masse permet ainsi de contraindre le champ de matière aux échelles qui viennent seulement de s’effondrer, sous l’action de la gravité²¹. Généralement on extrait de l’étude des amas les quantités $\sigma_8 \sim 0.8$ et $\Omega_m \sim 0.3$. Ces amas sont généralement des émetteurs X, dont l’émissivité permet de déterminer la masse. On les détecte également dans le signal du CMB comme des distorsions locales du spectre via l’effet Sunyaev-Zeldovich.

Milieu Intergalactique La structure du gaz dans le milieu intergalactique (IGM) nous renseigne également sur la distribution spatiale de la matière à différents redshifts, via la mesure du spectre de puissance de la matière $P(k)$. La sonde la plus commune de l’IGM est la *forêt Lyman-alpha*, qui se manifeste dans les spectres de quasars distants comme un ensemble de raies d’absorptions qui tracent la distribution de nuages absorbants le long de la ligne de visée. Dans le meilleur de cas, les BAOs peuvent même être retrouvés (c’est le cas par exemple vers $z \sim 2$) grâce à de multiples spectres pris le long de multiples directions vers des quasars différents. Une autre application de l’étude de l’IGM pour la cosmologie consiste à observer les tunnels d’absorptions dans les spectres de quasars à très grand redshift $z > 5.5$: l’Univers y est jeune ($t < 1$ milliard d’années) et encore neutre. La mesure de ces tunnels permet de contraindre l’histoire de la Réionisation de l’Univers et le paramètre cosmologique τ .

Lentilles Gravitationnelles Les lentilles gravitationnelles traduisent la déformation de l’espace temps à proximité d’objets massifs, ce qui conduit également à une déformation de la trajectoire des rayons lumineux entre une source et un observateur. Dans les cas les plus spectaculaires(lentillage fort ou *strong lensing*) à proximité d’amas de galaxies cela conduit à la production d’images multiples et à de fortes déformations de types arcs gravitationnels. Sur de grandes portions du ciel, le signal est beaucoup plus modéré bien que l’on s’attende à ce que par exemple le CMB ou bien la distribution de galaxies à un certain z soient déformés par la distribution de matière entre eux et nous observateurs (lentillage faible ou *weak lensing*). Ces faibles déformations peuvent toutefois être analysées statistiquement pour conduire à des contraintes sur la distribution de la matière déformante via $P(k)$ et à l’amplitude des fluctuations associées σ_8 .

21. on parle aussi de passage au régime non linéaire pour l’effondrement, en référence à la nature non linéaire des équations qui permettent de décrire ce processus

Une Histoire du Cosmos

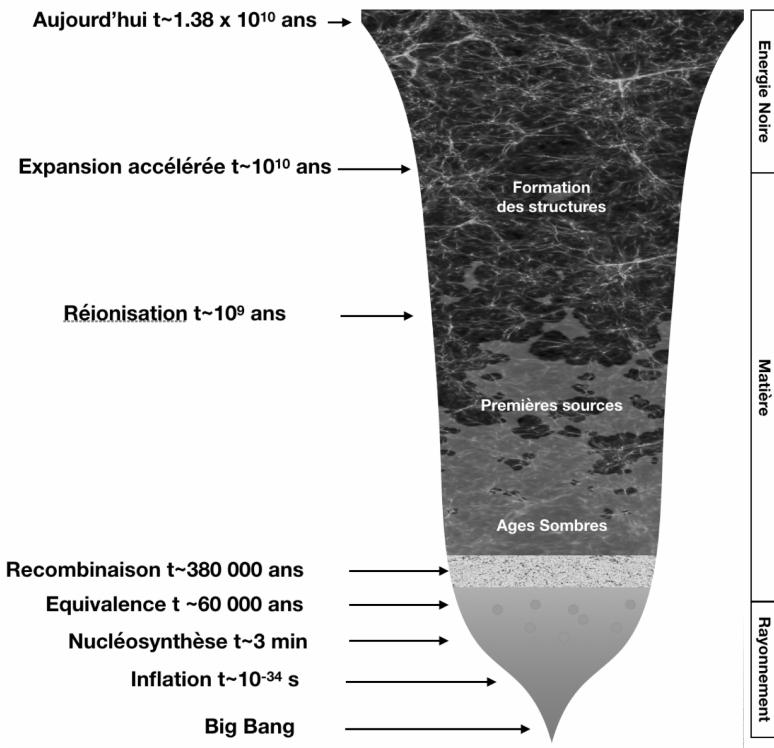


FIGURE 2: Les grandes étapes dans l'histoire du cosmos. Cette frise couvre environ 13.8 milliards d'années d'évolution depuis le Big-Bang jusqu'à nos jours. Notons que l'échelle temporelle n'est pas régulière et l'extension latérale décrit l'histoire d'évolution des distances dans le cosmos. Les grandes étapes de domination sont également indiquées. Les temps correspondent à une cosmologie standard Λ CDM.

POUR FINIR, nous allons donner un court descriptif des grandes étapes de l'histoire de l'Univers. Ces grandes étapes décrivent des processus physiques ou des transitions spécifiques qui opèrent à certains stades de l'évolution du cosmos : par extension leurs noms sont aussi utilisés pour désigner des instants. Par exemple on parle de la Réionisation pour désigner la fin du premier milliard d'années de l'Univers ou bien de l'Inflation pour désigner ses premiers instants.

L'Univers a connu une phase extrêmement dense et chaude, il y a 13.8 milliards d'années. Nos théories actuelles ne nous permettent pas actuellement de remonter en deçà d'un temps de Planck ($\sim 10^{-44}$ s), désignant une durée sur laquelle les effets de gravité quantique pourraient se manifester²². A cette incertitude près, l'histoire de l'Univers débute à cette époque, nommée le *Big-Bang*. A partir de cet instant, l'Univers va subir un effet d'expansion de l'espace et de baisse de sa température. Dans le cadre du modèle cosmologique standard, les grandes étapes de son évolution sont les suivantes (cf. figure 2) :

1. L'Inflation $t \sim 10^{-34}$ secondes : cette phase est encore spéculative et consisterait en une phase d'expansion accélérée de l'Univers

22. gravité quantique pour laquelle nous n'avons à ce jour pas de théorie satisfaisante

dans ces instants quasi-initiaux. Si ce processus a bien eu lieu, il permettrait d'expliquer naturellement la grande homogénéité initiale de l'Univers, sa platitude et donnerait une origine quantitative aux fluctuations initiales de matière qui sont à l'origine des grandes structures actuelles de l'Univers. Ce processus aurait également été la source d'ondes gravitationnelles qui seraient toujours détectables et dont la découverte signerait la confirmation de l'existence d'une phase d'Inflation.

2. l'Univers primordial $t < 3$ minutes : au cours de cette époque l'Univers reste extrêmement chaud et dense. Il s'y déroule des processus à très haute énergie : plasma quark-gluons, confinement des quarks, baryogénèse (i.e. l'annihilation matière anti-matière), découplage des neutrinos, nucléosynthèse des éléments légers jusqu'à l'hélium.
3. l'Équivalence $z = 3100$ $t=60$ 000 ans l'Univers voit son bilan énergétique passer d'une domination par les espèces relativistes (le rayonnement) à une domination par la matière.
4. La Recombinaison $z = 1100$ $t=380$ 000 ans : l'Univers devient suffisamment froid ($T=3000$ K) et peu dense pour permettre la création d'atomes neutres et l'émission du fond diffus cosmologique (CMB).
5. les âges sombres $1100 > z > 30$ l'Univers est rempli de gaz froid et neutre. Le gaz se structure sous l'effet de la gravitation mais n'est pas encore en mesure de former des étoiles.
6. la Réionisation $30 > z > 6$ le gaz parvient à des densités lui permettant de se convertir en étoiles. Ces étoiles vont émettre un rayonnement ionisant qui vont réioniser (avec une fraction d'atomes neutres $x_{\text{HI}} \sim 0.0001$) et réchauffer totalement l'Univers ($T \sim 10000$). C'est les stades initiaux de la formation des galaxies.
7. la formation des galaxies et des grandes structures $30 > z > 0$ à partir de la formation des premières étoiles vont se former dans les premières galaxies. Elles vont croître de façon hiérarchique par assemblage de petits objets pour former les plus gros, sous l'effet de processus d'instabilité gravitationnelle dominés par une matière non baryonique. Les amas de galaxies vont apparaître vers $z = 1$.
8. Accélération de l'expansion cosmique $z \sim 0.3$, $t \sim 10$ milliards d'années. Le bilan énergétique de l'Univers devient dominé par l'énergie noire, induisant une expansion accélérée de l'Univers.
9. Aujourd'hui $z = 0$. L'Univers a 13.8 milliards d'années .

Prélude : Cosmologie Newtonienne

Ce chapitre est à la fois optionnel et indispensable : optionnel car le reste de l'ouvrage n'en dépend pas et les quelques points qui y sont abordés sont décrits bien plus en détail dans les chapitres suivants. Il n'en reste pas moins indispensable en ce qu'il permet d'introduire facilement et simplement beaucoup de concepts utilisés couramment en cosmologie.

Ce prélude porte sur un modèle *Newtonien* de cosmologie. Ce modèle possède une portée limitée mais permet une introduction progressive à certains concepts et à certains modes de raisonnements propres à la cosmologie. On discutera de sa validité et des hypothèses sous-jacentes en fin de chapitre, après en avoir exploré tous les recoins.

CONSIDÉRONS un 'gaz de galaxies' homogène et isotrope au sein duquel on trace un volume sphérique de rayon R et d'origine O . Au sein de ce volume chacune de ces galaxies est repérée grâce à un rayon vecteur $r(t)$, variable au cours du temps (voir Fig. 3). Ce modèle repose sur l'hypothèse que toutes ces galaxies vont voir leur position évoluer *radialement* par rapport à O suivant une loi homothétique :

$$r(t) = a(t)r_0. \quad (3)$$

$r(t)$ est le rayon à un instant donné tandis que r_0 est le rayon mesuré pour chacune de ces galaxies à un instant arbitraire t_0 . La dépendance temporelle est encodée dans le facteur d'échelle ²³, $a(t)$. Ce dernier est un facteur sans dimension et dont on voit que par définition :

$$a(t_0) = a_0 = 1. \quad (4)$$

Cet instant t_0 peut être choisi arbitrairement mais il est d'usage de dire qu'il correspond au *moment présent* : pour $t < t_0$ on regarde le système dans le passé et $t > t_0$ il s'agit du futur. De même, toute quantité indiquée avec 0 est prise à sa valeur aujourd'hui et par exemple $r(t_0) = r_0$.

²³. appelé aussi *facteur d'expansion*

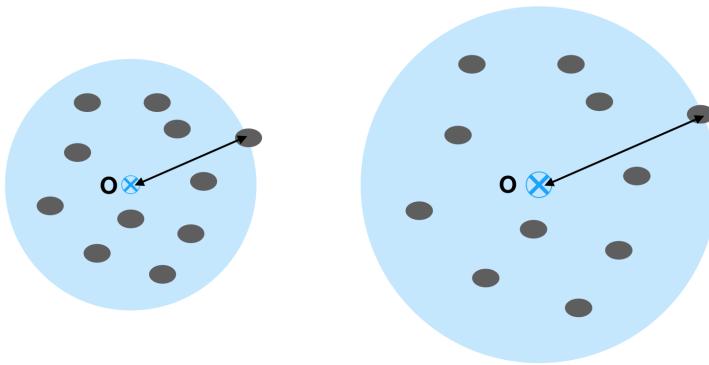


FIGURE 3: Le modèle Newtonien. La sphère représente une portion de gaz de galaxies, uniforme et isotrope centrée sur O . Seules quelques galaxies sont représentées ici sous forme d'ellipses : la plus éloignée d'entre elles fournit le rayon maximum de notre *volume de contrôle* (montré ici sous la forme d'une flèche). Deux instants sont représentés ici, le temps s'écoulant de la gauche vers la droite et le volume subit alors une transformation homothétique. Notons que la galaxie la plus éloignée reste toujours la même à tous les instants.

Dès à présent, on peut constater que la notion de distance à l'origine n'est pas univoque : elle peut désigner la distance à un moment donné ou bien la distance variant au cours du temps. Pour lever cette ambiguïté, on appelle $r(t)$ la *distance physique* : à chaque instant elle représente l'intervalle qui sépare physiquement une galaxie de l'origine. De même on appelle r_0 la distance comobile : c'est la distance mesurée à un instant de référence t_0 , mais on peut également la considérer comme une mesure effectuée dans un système de coordonné en mouvement avec la matière (d'où le nom comobile). Enfin, le facteur d'expansion peut également être envisagé comme une mesure du rayon en unité du rayon comobile.

Si on considère maintenant le bord externe de notre volume de contrôle $R(t)$, celui-ci subit la même loi d'expansion $R(t) = a(t)R_0$ ²⁴. Ce volume de contrôle est sphérique, il évolue au cours du temps et son expression précise est :

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}R(t)^3 = a(t)^3 \frac{4\pi}{3}R_0^3 = a^3 V_0. \quad (5)$$

Son volume varie en a^3 , comme tous les volumes attachés à de la matière. De même on peut aisément démontrer que sa surface varie en a^2 comme toutes les surfaces attachées à de la matière : dans les deux cas, la dépendance de ces quantités par rapport aux longueurs impose une certaine dépendance par rapport au facteur d'expansion. Ce type d'arithmétique est très fréquente en cosmologie et peut être aisément étendue à d'autres quantités, comme par exemple la densité de galaxies dans notre volume de contrôle :

$$n = \frac{N_{\text{gal}}}{\frac{4\pi}{3}R(t)^3} = a^{-3}n_0. \quad (6)$$

A cause de la dilution des longueurs et des volumes, la densité dé-

24. se faisant on considère que ce rayon est 'attaché' ou ancré à une galaxie, la galaxie la plus externe

croît au cours du temps avec une puissance -3 du facteur d'expansion.

Notons dès à présent, que la masse ou le nombre de galaxies restent invariantes malgré l'évolution des distances. Dit autrement, le flux net au travers de la surface de contrôle est nul : aucune galaxie ne rattrape ou ne se fait dépasser par une galaxie initialement plus interne ou plus externe. En effet si $R_{0,a} < R_{0,b} < R_{0,c}$ alors à chaque instant $R_a < R_b < R_c$.

LA CINÉMATIQUE de ce système mérite aussi d'être étudiée. La vitesse de fuite de chacune de ces galaxies est simplement donnée par :

$$\dot{r} = r_0 \dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} r. \quad (7)$$

A un instant t donné, la vitesse de fuite est donc directement proportionnelle à la distance d'une galaxie : plus elle est éloignée de l'origine, plus elle s'en éloigne rapidement. Cela est cohérent avec l'absence de flux net au travers des limites du volume de contrôle. Le rapport de proportionnalité varie au cours du temps et est noté $H(t)$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (8)$$

Dans ce cadre Newtonien, cette fonction est l'analogie à la fonction de Hubble que nous rencontrons par la suite et nous retrouvons cette propriété observée dans notre univers. La vitesse de récession des objets est proportionnelle à leur distance :

$$v = Hr \quad (9)$$

Cette loi dite *de Hubble* est linéaire, ce qui a une grande importance. En effet, si la loi avait été quadratique ($v \sim r^2$) ou bien à vitesse de récession constante ($v \sim r^0$), on peut aisément montrer que l'homogénéité initiale est détruite, ce qui n'est pas une propriété désirable de notre modèle d'Univers. Par ailleurs, on peut également démontrer que cette hétérogénéité serait dépendante du point de vue ou de l'origine utilisée, ce qui est une autre propriété indésirable. Cette loi de Hubble, linéaire, est la seule qui permette de conserver une homogénéité et une égalité des points de vues.

L'ÉNERGÉTIQUE du système nous est à présent accessible. Calculons la quantité d'énergie disponible dans ce gaz de galaxies, que ce soit sous forme cinétique ou potentielle. L'énergie cinétique est obtenue en sommant l'énergie cinétique de chaque coquille de rayon r et d'épaisseur dr en récession²⁵ :

$$E_c = \int_0^R dE_c = \int_0^R \frac{1}{2} \rho v^2(r) 4\pi r^2 dr. \quad (10)$$

25. ρ désigne la densité massique de galaxies. Elle est indépendante de r , le système étant homogène

En utilisant la loi de Hubble (Eq. 9) et la relation entre masse et densité, on obtient aisément l'expression suivante pour l'énergie cinétique totale du gaz en expansion²⁶ :

$$E_c = \frac{3}{10} M H^2 R^2. \quad (11)$$

On y retrouve aisément une dépendance en vitesse au carré²⁷. De même l'énergie potentielle totale de gravitation se trouve en intégrant l'énergie potentielle de chaque coquille²⁸ :

$$E_p = \int_0^R dE_p = - \int_0^R \frac{GM(< r)}{r} dm. \quad (12)$$

Ayant $M(< r) = 4/3\pi\rho r^3$ et $dm = 4\pi r^2 \rho dr$, on obtient :

$$E_p = - \frac{16\pi^2 G}{3} \rho^2 \frac{R^5}{5} = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (13)$$

expression pour laquelle on retrouve bien une forme d'énergie potentielle de gravitation.

Quelques éléments de dynamique

Après avoir étudié ces quelques propriétés simples de notre modèle Newtonien, nous allons procéder à une première analyse de son évolution. Pour ce faire nous nous en tiendrons à une simple analyse énergétique. A partir des expressions des énergies cinétiques et potentielles, calculons l'énergie mécanique totale de notre système auto-gravitant :

$$E = E_c + E_p = \frac{3}{10} M H^2 R^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (14)$$

Comme tout système auto-gravitant, sa stabilité nous est donnée par le signe de son énergie mécanique. Une énergie totale positive va conduire à un système libre, avec une expansion infinie (voire asymptotiquement infinie si elle est exactement nulle) tandis qu'une énergie négative correspond à celle d'un système lié, voué à s'effondrer au bout d'un certain temps.

QUELLE CONDITION faut-il satisfaire pour avoir un système lié ?

Écrivons l'inégalité correspondante :

$$\frac{3}{10} M H^2 R^2 < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (15)$$

Cette inégalité peut se réécrire sous la forme d'une condition sur la densité :

$$\frac{3H^2}{8\pi G} < \frac{M}{4/3\pi R^3} = \rho. \quad (16)$$

26. M désigne la masse dans le volume de contrôle (conservée au cours du temps) et R le rayon de ce dernier

27. via le terme Hr

28. l'énergie potentielle de gravitation est considérée nulle à l'infini. L'énergie potentielle d'une coquille de rayon r ne dépend que de $M(< r)$, la masse à l'intérieur de son rayon.

Dit autrement si la densité de notre gaz de galaxies est supérieure à une certaine densité critique, le système est voué à atteindre un rayon limite et à s'effondrer. Cette densité critique est donnée par :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (17)$$

et correspond exactement à la densité critique obtenue par un traitement relativiste exact. De même on montrera qu'un gaz de galaxies sous-dense, avec $\rho < \rho_c$, n'est pas lié et connaîtra une expansion illimitée.

Compte tenu du rôle joué par cette densité critique, il est d'usage d'exprimer les densités massiques en unités de cette densité de référence. On parle alors de paramètre de densité Ω :

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (18)$$

Un système lié voué à l'effondrement équivaut à $\Omega > 1$ tandis qu'un système en expansion infinie équivaut à $\Omega < 1$. Le cas limite $\Omega = 1$ correspond à un comportement asymptotique avec une expansion nulle à l'infini. A nouveau, cette relation sera très exactement retrouvée dans le cadre d'un traitement relativiste complet.

Équation de Friedmann

Ce paramètre de densité Ω intervient également dans l'équation différentielle qui régit l'évolution du facteur d'expansion $a(t)$. On rappelle que ce terme encode toute l'évolution temporelle des distances dans notre modèle Newtonien d'Univers, via la relation $r(t) = a(t)r_0$. Prenons la galaxie la plus lointaine²⁹, dont la distance à l'origine est donnée par $R(t)$. Comme la mécanique Newtonienne peut s'appliquer, le principe fondamental de la dynamique donne³⁰ :

$$\ddot{R} = -\frac{GM(< R)}{R^2}. \quad (19)$$

En l'absence de flux net au travers de R , la masse $M(< R)$ reste constante ce qui permet d'intégrer simplement en multipliant par $2\dot{R}$:

$$2\dot{R}\ddot{R} = -2GM\frac{\dot{R}}{R^2} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{K}{R^2} \quad (21)$$

où K désigne une constante d'intégration. On reconnaît alors dans le terme de gauche le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a = \dot{R}/R$. Introduisons également la valeur de ce paramètre aujourd'hui $H_0 = H(t_0)$:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \frac{\rho_0}{a^3} + \frac{K}{(R_0 H_0)^2 a^2} \right). \quad (22)$$

29. ce choix est arbitraire, le même raisonnement peut être tenu pour n'importe quelle galaxie à l'intérieur du volume de contrôle

30. notons que le mouvement est purement radial en l'absence de mouvements initiaux tangentiels. $M(< R)$ désigne la masse à l'intérieur du rayon R et la force ressentie par la galaxie est celle créée par toute cette masse rassemblée en O.

On reconnaît l'expression de la densité critique prise aujourd'hui ρ_{c0} dans le terme lié à la densité de matière ρ_0 . De plus le second terme lié à la constante d'intégration doit également être sans dimension et constant, à la dépendance en a^{-2} près. Pour ces raisons, cette équation est généralement présentée sous la forme suivante :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} \right). \quad (23)$$

qui donne l'évolution du paramètre de Hubble au cours du temps³¹, en fonction du contenu en masse, Ω_m , de notre modèle d'Univers.

La constante K a généré un terme supplémentaire qui ne dépend que des conditions aux limites et qui doit satisfaire³² :

$$\Omega_m + \Omega_K = 1. \quad (24)$$

Ce terme n'est pas libre et correspond à une quantité qui possède une dépendance en inverse de la longueur au carré³³ : il correspond à un terme de courbure intrinsèque. L'équation 23 contient toute l'information pour permettre de calculer $a(t)$, connaissant Ω_m et H_0 : elle constitue l'une des formes de l'équation de Friedmann .

PRENONS UN UNIVERS CRITIQUE : dans ce type de modèle, $\Omega_m = 1$ et produit une dynamique que l'on sait être asymptotiquement en expansion pour un temps infini. L'équation 23 est alors très simple à intégrer à partir de³⁴ :

$$\dot{a} = \frac{H_0}{\sqrt{a}} \quad (25)$$

ou bien

$$\sqrt{a} da = H_0 dt. \quad (26)$$

En intégrant entre $t = 0$ et un temps t quelconque on obtient la loi d'expansion de ce modèle d'Univers :

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (27)$$

On reconnaît une évolution temporelle lente asymptotique avec comme dérivées du facteur d'expansion :

$$\dot{a} \sim t^{-1/3} \quad (28)$$

$$\ddot{a} < 0. \quad (29)$$

La dérivée tend vers 0 à l'infini et la courbure est négative, donnant une expansion qui décélère : ce comportement est typique des Univers remplis de matière. Ce modèle est appelé modèle de *Einstein-de Sitter*.

31. via la dépendance temporelle en $a(t)$

32. avec $H(a_0 = 1) = H_0$

33. par analogie avec le terme en densité qui varie en a^{-3} alors que celui ci varie en a^{-2}

34. ici on ne considère que la solution croissante, correspondant à l'Univers observé qui s'avère être en expansion

L'AGE DE L'UNIVERS s'obtient également très facilement : il suffit de prendre le temps correspondant à un facteur d'échelle unité, c'est à dire le temps qu'il s'est écoulé depuis $t = 0$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (30)$$

On constate alors que l'inverse du facteur de Hubble actuel est l'âge de l'Univers à un facteur proche de 1 près. De fait on nomme cette quantité le *temps de Hubble*³⁵ :

$$t_H = H_0^{-1}. \quad (31)$$

Dans tous les modèles d'Univers, cette quantité constitue une bonne approximation de l'âge de l'Univers. De fait toute quantité temporelle qui est désignée comme étant de l'ordre du temps de Hubble est implicitement désignée comme une quantité longue ou lente en évolution. C'est l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'évolution de l'Univers.

Remarquons d'emblée que l'âge de l'Univers prédit par ce modèle simple est problématique. Pour une valeur typique de $H_0 \sim 70$ km/s/Mpc³⁶, le modèle d'Einstein-de Sitter conduit à un âge actuel d'Univers d'environ 9,2 milliards d'années or il existe des populations d'étoiles³⁷ qui présentent des âges de plus de 13 milliards d'années. Ne pouvant avoir un Univers plus jeune que son contenu, il faut envisager autre chose qu'un Univers composé uniquement de matière avec une densité critique.

Commentaire sur la validité du modèle

A ce stade, on peut s'interroger sur les conditions d'applications de ce modèle Newtonien. Rappelons que nous considérons une sphère de "gaz" de galaxies dans un Univers homogène : il s'avère que dans certains cas, le traitement Newtonien est exact³⁸. En effet, faisons l'expérience de pensée qui consiste à retirer une sphère de matériau à cet ensemble homogène : quelle est la structure de l'espace-temps au sein de ce creux nouvellement créé ? La solution est donnée par le théorème de Birkhoff : l'espace-temps y est plat³⁹. Par conséquent lorsque la matière est remise dans ce creux la mécanique y est celle d'un espace plat, à savoir Newtonienne.

Ceci n'est toutefois vrai qu'à certaines conditions, la première étant que la matière que nous remettons dans ce volume n'y courbe pas significativement l'espace afin que l'on puisse continuer à raisonner sans relativité générale. On peut par exemple imposer que l'énergie potentielle de gravitation est faible par rapport à son énergie de masse :

$$\frac{GM}{Rc^2} \ll 1 \quad (32)$$

35. Notons que la loi de Hubble $v = Hr$ suggérait déjà que H constituait l'inverse d'un temps

36. correspondant à un temps de Hubble $t_H \sim 14$ milliards d'années

37. par exemple au sein d'amas globulaires

38. voir par exemple *Physical Cosmology* de P.J.E Peebles

39. De la même façon, quel est le champ Newtonien de gravitation créé à l'intérieur d'une sphère creuse ? D'après le théorème de Birkhoff, la réponse est un champ de gravitation nul, dont l'équivalent relativiste est une absence de courbure de l'espace temps.

Par ailleurs, il faut la taille de notre volume soit petite par rapport à l'horizon, pour que les effets de propagation de l'interaction gravitationnelle⁴⁰ ne se fassent pas sentir :

$$\frac{RH}{c} \ll 1, \quad (33)$$

ce qui est équivalent à considérer une vitesse de fuite très inférieure à la vitesse de la lumière. Donc de fait, le système ne peut être ni trop grand (pour éviter les grandes vitesses) ni trop petit (pour éviter les trop grandes densités). Par contre dans le cadre de ces hypothèses, le traitement est exact.

Une autre difficulté rencontrée par ce problème est qu'il est limité à l'action de la matière seule : qu'en est-il d'un modèle à l'intérieur duquel se trouve également du rayonnement ou bien toute autre forme d'énergie ? Le cadre Newtonien ne peut répondre à cette question or l'on comprend bien que ces autres types d'énergie doivent aussi contribuer à créer de la gravitation, comme indiqué par la relativité générale. On peut faire appel de façon ad hoc à un résultat relativiste en disant que toute forme d'énergie va contribuer sous la forme d'une densité *équivalente* de matière de la forme⁴¹ :

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{c^2}(\epsilon + 3P). \quad (34)$$

Dans le cas d'une matière froide⁴², on retrouve $\tilde{\rho} = \rho$. Pour le cas d'un gaz de rayonnement on peut démontrer que la densité équivalente est $\tilde{\rho} = 2\epsilon/c^2$. Par exemple pour un corps noir⁴³, la densité d'énergie ϵ et la pression P sont des fonctions simples de la température T ⁴⁴ :

$$\epsilon = \frac{4\sigma}{c}T^4 \quad (35)$$

$$P = \frac{4\sigma}{3c}T^4. \quad (36)$$

Ces relations conduisent bien à la densité équivalente décrite ci-dessus. Toutefois, cette 'astuce' ne permet pas d'expliquer quel rôle joue la pression et pourquoi elle contribue à modifier la dynamique de l'espace-temps. Cet aspect sera décrit plus en détail dans le chapitre suivant.

40. qui se fait à la vitesse de la lumière

41. ϵ désigne la densité d'énergie associée à l'énergie en question et P est sa pression

42. sans pression

43. qui est l'exemple typique d'un gaz de photons fortement couplé avec la matière

44. ici $\sigma \sim 5.6 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ désigne la constante de Stefan-Boltzmann

Concepts Fondamentaux

Définition de l'Univers et de la Cosmologie

Il faut 3 constituants pour définir complètement un Univers :

1. un contenu en énergie, qui peut être sous diverses formes,
2. un jeu de lois physiques qui régissent l'entrejeu des différentes énergies,
3. un espace-temps, qui est la scène sur laquelle cet entrejeu prend place.

L'enjeu de la *cosmologie* est précisément d'étudier le contenu, les lois physiques et la structure de l'Univers. Par conséquent la cosmologie est liée aux aspects théoriques les plus fondamentaux de la physique mais également à des problèmes astrophysiques et il existe plusieurs manières de faire de la cosmologie. On cherchera par exemple à déterminer quelles sont les lois à l'œuvre dans le cosmos (point 2), ce qui est davantage du domaine de la physique théorique, ou bien à déterminer les paramètres (point 3) qui caractérisent la structure spatio-temporelle (e.g. sa forme ou bien son histoire) de l'Univers comme en cosmologie observationnelle. De même comprendre comment les différentes formes d'énergie (matière, lumière, etc...) s'organisent ou évoluent au cours du temps (point 1) (e.g. comment les grandes structures de l'Univers se mettent en place) permet d'avoir un éclairage sur les deux autres aspects du problème cosmologique.

Principe Cosmologique

L'objectif de la cosmologie est ambitieux et cette ambition n'est pas sans obstacles. L'un des problèmes les plus importants est notre incapacité à garantir que ce que nous observons autour de nous reste valable à l'échelle du cosmos, *y compris dans les régions de l'Univers qui nous serons à jamais inaccessibles*. Par exemple, rien ne garantit absolument que la neutralité électrique soit vraie dans tout le cosmos ou bien que la densité de matière mesurée dans notre Univers observable soit effectivement celle de l'Univers entier⁴⁵. Aujourd'hui, il

45. on distingue parfois *Cosmos* et *Univers*, où le Cosmos est la sous-partie de l'Univers qui nous est accessible. Par simplicité, aucune différence ne sera faite entre les deux termes dans cet ouvrage.

ne viendrait à l'idée de personne d'attribuer au cosmos une densité égale à celle de la Terre, pour autant c'est peu ou prou ce que nous faisons en cosmologie.

Pour autant, *nous n'avons pas le choix*. Par définition, il est impossible de connaître les propriétés de régions dont on ne peut extraire de l'information et toujours par définition, il existe de telles régions dans l'Univers. Quelle option reste-t-il à la personne désireuse de faire de la science à l'échelle de l'Univers, si ce n'est de supposer que ce qui nous est accessible est valide dans tout le cosmos ? Aucune : en l'absence d'une telle hypothèse, il est tout simplement impossible de faire de la science avec l'Univers.

Cette supposition est à la base du *Principe Cosmologique*. Si nous revenons sur les 3 constituants définis en début de chapitre, il est aisément de reconnaître que cette supposition implique que le contenu universel en énergie doit être le même que celui que nous constatons autour de nous. De même, la structure spatio-temporelle universelle doit être la même que celle que nous constatons dans l'Univers observable. Toutefois cette hypothèse "universaliste" implique également que nous supposons que les mêmes lois de la nature s'appliquent dans tout le cosmos, y compris dans les régions qui nous sont inaccessibles ou pour lesquelles l'information n'est pas extractible. Le *Principe Cosmologique* que nous retiendrons est le suivant : le contenu en énergie de l'Univers, sa structure spatio-temporelle et les lois qui y opèrent sont les mêmes partout et par conséquent sont celles que nous constatons autour de nous. Notons tout de suite que cette universalité des composants s'applique aux échelles pertinentes pour la cosmologie et n'empêche pas des départs locaux aux valeurs universelles.

Tautologie

A ce stade, il nous semble que la cosmologie peut être définie par une tautologie : *la cosmologie est la science qui met le principe cosmologique à l'épreuve*. Si nous nous retrouvons dans une situation qui reste inexplicable dans ce que nous croyons être le jeu universel de contenu énergétique, spatio-temporel et "législatif" de l'Univers, alors les options sont réduites :

- soit nous continuons de croire que le principe cosmologique reste valide et c'est le détail de son contenu qui doit être révisé. Par exemple on modifiant les lois de la physique pour qu'elles rendent compte des nouveaux phénomènes tout en continuant à être une bonne description des processus locaux. C'est la voie scientifique standard.
- soit nous renonçons au principe cosmologique et donc à l'universalité de ses composants et nous renonçons en même temps

à l'ambition de décrire tout l'Univers avec la science que nous connaissons.

Principe cosmologique pragmatique

Le principe cosmologique est souvent décliné dans une version plus pragmatique qui est la suivante :

1. la gravitation est correctement décrite par la théorie de la relativité générale d'Einstein ,
2. l'Univers est homogène et isotrope.

Le point 2 revient à appliquer au cosmos ce que nous voyons de l'état de l'Univers autour de nous (contenu, géométrie, évolution etc...).

Le point 1 revient à définir les lois universelles de la gravité : une emphase particulière est mise sur cette interaction⁴⁶ car elle est la seule qui *in fine* est toujours de portée infinie et donc cosmologique. Par ailleurs, une fois la théorie de relativité générale choisie comme description correcte de la gravité, le point 2 a des conséquences sur les régimes qui vont être explorés avec cette théorie.

Relativité Générale : notions

La gravitation est centrale à l'étude de la cosmologie car elle est la seule "force" dont l'action ne peut être écrantée et dont la portée soit infinie⁴⁷. De fait, elle est la seule force qui soit effective lorsque des échelles cosmologiques sont abordées. De plus la gravitation peut être décrite comme la manifestation des propriétés de l'espace-temps. Or il s'avère que la structure spatio-temporelle de l'Univers n'est pas triviale comme l'indique par exemple le phénomène d'expansion de l'Univers. Par conséquent l'observation de l'expansion du cosmos nous dit également des choses sur la façon dont la gravitation est à l'œuvre dans le cosmos. Compte tenu du rôle central de la gravitation pour les études cosmologiques, nous allons faire un aperçu de la théorie de la relativité générale et sur son application dans le cadre cosmologique⁴⁸.

Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence existe sous forme de différentes saveurs. La plus triviale est la suivante, où l'on considère le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{F_z}{m_i} = \ddot{z}. \quad (37)$$

Ici l'on explique que l'accélération suivant la direction z est proportionnelle à la force appliquée au système étudié et *inversement*

46. On rappelle qu'on distingue 4 interactions fondamentales : la *gravitation*, la *force électromagnétique* et les deux forces corpusculaires *fortes* et *faibles*.

47. les forces corpusculaires sont de courte portée tandis que la force électromagnétique est en pratique toujours écrantée car une charge n'est jamais isolée de charges opposées sur les échelles qui nous intéressent

48. le lecteur intéressé pourra par exemple se reporter à l'excellent ouvrage d'introduction *A first course in general relativity* par B. Schutz.

proportionnelle à un coefficient, que l'on nomme *masse inertie*. Par conséquent, deux systèmes soumis à la même force vont réagir différemment selon les valeurs du coefficient m_i qui les caractérisent.

Intuitivement on comprend assez rapidement que ce coefficient est lié à la quantité de matière que le système possède, d'où son qualificatif de masse : soumis à la même force, un système fortement chargé en matière réagira moins qu'un système ayant une quantité de matière plus faible. Maintenant considérons l'expression de F_z si cette force se trouve être une force de pesanteur⁴⁹ :

49. c'est à dire le poids

$$F_z = m_g g \quad (38)$$

où g est la norme du champ de pesanteur. Cette force F_z est d'autant plus forte que le coefficient m_g est important : ce coefficient caractérise également la quantité de matière dans le système et un système avec une grande quantité de masse va naturellement avoir une valeur élevée de m_g et donc une pesanteur importante. Cette masse m_g est aussi dénommée *masse grave*.

A ce stade, nous avons donc deux coefficients qui tracent la quantité de matière dans un système physique : le premier m_i lié aux équations de la dynamique, et sans aucune référence à priori à une force de pesanteur (ou de gravitation), et le second m_g qui lui pour le coup est complètement lié à la présence d'un champ de pesanteur. Il faut alors se rappeler qu'à priori, *rien* ne nous informe d'une quelconque relation quantitative entre les deux et qu'il faut postuler une éventuelle relation entre les masses inertielles et graves.

Toutefois, l'expérience nous indique que tous les systèmes soumis à un champ de pesanteur donné semblent posséder la même accélération \ddot{z} et ceci quelles que soient leurs masses inertielles et graves. Ceci implique que $m_g \sim m_i$. Plutôt qu'une vague égalité, le principe d'équivalence stipule une exacte identité entre ces deux quantités :

$$m_g = m_i. \quad (39)$$

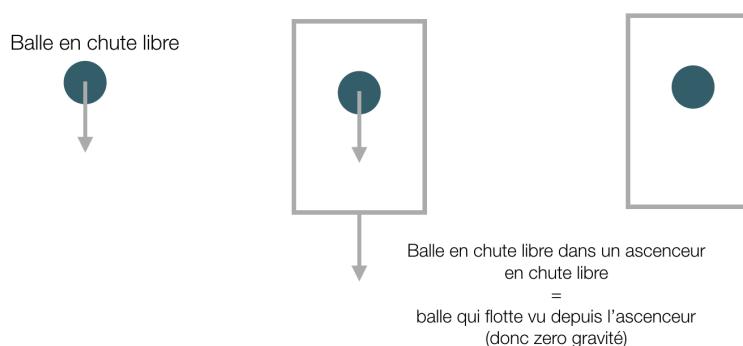
Cette égalité est fortement suggérée par l'expérience, mais ne peut être démontrée comme étant absolument valide⁵⁰. Selon ce principe, la quantité de matière intervient au travers d'une valeur unique qui est la *masse* $m = m_g = m_i$. On peut noter dès à présent que cette égalité confère à la gravitation un rôle spécial : la masse *inertie* est liée à la loi décrivant la dynamique des systèmes, y compris en l'absence de gravitation. Par exemple, une particule chargée dans un champ électrique verra son accélération modulée en q/m_i . La force électrostatique, comme toutes les autres forces subit l'impact de ce coefficient d'origine dynamique. D'après le principe d'équivalence, la gravitation quant à elle possède *dans sa propre expression* ce même coefficient, avant expression d'un quelconque problème dynamique.

50. actuellement les mesures expérimentales excluent toute différence relative entre les 2 masses supérieure à 10^{-12}

Elle dispose donc de façon innée d'une sorte d'élément d'information sur la façon dont la dynamique est régie, information que ne possèdent pas les autres interactions.

Référentiel inertiel

L'équivalence entre masse grave et inertie a plusieurs conséquences. Comme déjà mentionné, elle permet de rendre compte de l'universalité de l'accélération de systèmes différents dans un même champ de pesanteur. C'est la fameuse expérience de la tour de Pise où des masses différentes lâchées de la même hauteur parviennent au sol au même instant car étant accélérées exactement de la même façon. Il en découle également que si l'on fait le choix d'étudier la chute libre de plusieurs objets dans un référentiel lui-même en chute libre, ces objets apparaissent tous comme en "flottaison" comme si l'on avait annulé la gravitation dans ce référentiel et ceci même si ils sont tous très différents. A nouveau cela n'est possible que parce que la chute libre dans un champ de pesanteur est la même quel que soit l'objet considéré.



Ce type de référentiel est appelé *référentiel inertiel*. Généralement un tel référentiel ne peut être construit que localement et par exemple dans un champ de pesanteur radial, il est possible de construire une collection de référentiel inertiels qui annuleront la gravité localement mais aucun de ces référentiels ne peut annuler globalement le champ de pesanteur. A ce titre il est usuel de se référer à ce type de référentiel sous l'appellation *référentiel localement inertiel*. Cette possibilité d'annuler localement la gravité est intrinsèquement lié à l'égalité $m_i = m_g$. Ce lien est si fort que l'on va considérer que *la possibilité d'annuler la gravitation par un choix approprié de référentiel local est aussi un énoncé du principe d'équivalence*.

De fait, cette approche renverse le point de vue habituellement

FIGURE 4: Dans cette expérience de pensée, on considère une balle en chute libre dans un champ de pesanteur. Si on encage cette balle dans un ascenseur lui-même en chute libre, on crée un référentiel concrétisé par les parois de l'ascenseur, à l'intérieur duquel la balle 'flotte'. Dans ce jeu de coordonnées précis, on annule la gravitation : un observateur à l'intérieur de l'ascenseur est incapable de dire si on a éteint la gravité, ou bien si il se trouve dans un ascenseur en chute libre. Notons que comme tous les objets tombent à la même vitesse, l'observateur ne peut pas se renseigner en faisant la même expérience avec des objets divers : tous les objets, quelles que soient leurs masses et leurs compositions vont flotter de la même manière.

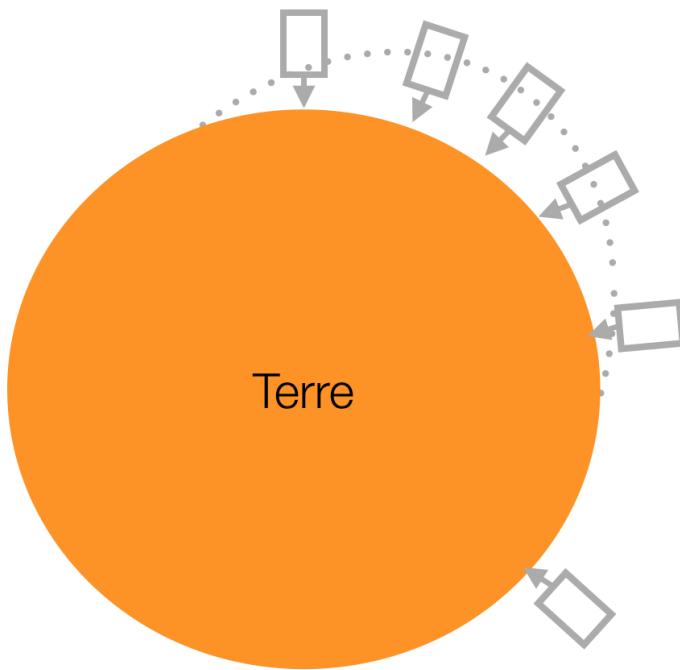


FIGURE 5: Tous ces ascenseurs en chute libre, *localement*, vont annuler le champ de pesanteur. En revanche, ils sont tous orientés différemment, suivant le champ de pesanteur local : on ne peut pas construire un système de référence global qui annule tous les champs de gravité. Ces référentiels inertiels sont locaux.

adopté sur le comportement mécanique des objets. Le point de vue newtonien classique consiste à supposer l'existence d'un champ de pesanteur qui va par exemple 'tordre' la trajectoire d'un objet initialement rectiligne en une parabole⁵¹. Dans l'approche relativiste, la trajectoire d'un système est toujours rectiligne dans les référentiels localement inertiels : en effet, en l'absence de pesanteur, le système se déplace toujours en ligne droite. Mais comme les référentiels ne sont pas tous 'alignés' les uns avec les autres, la trajectoire apparaît comme 'tordue' : les systèmes se propagent en ligne droite dans des systèmes de références qui ne sont pas 'alignés', créant ainsi toutes les variétés de trajectoires que nous connaissons.

Notez qu'à l'aide d'un choix approprié de référentiel on peut également créer de la gravité. Si des systèmes libres sont placés dans un référentiel uniformément accéléré, ils percevront leur mouvement relatif comme induit par une force de gravitation. *De façon générale il est impossible localement de distinguer un référentiel uniformément accéléré d'un champ de gravitation.*

Qu'est-ce que la gravitation ?

A nouveau, on peut créer ou "détruire" un champ gravitationnel par un choix approprié de référentiel. Or un référentiel pourrait

51. c'est le cas par exemple de la trajectoire balistique standard en $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t + x_0$.

se résumer à un ensemble de règles étalons et d'horloges ayant un certain comportement donc à un objet qui n'a qu'une nature géométrique et non pas physique. A partir de cette constatation, il est tentant de considérer alors que la gravitation n'est qu'une manifestation géométrique de l'espace dans lequel évoluent les systèmes. C'est le choix que fait la théorie de la relativité générale (RG par la suite), où la gravitation n'est pas une force à proprement parler mais davantage une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. En RG, les systèmes se déplacent librement dans une géométrie qui, si elle est non triviale, produit des effets qui peuvent être interprétés comme le produit d'une interaction. A ce titre on peut dire que *la gravitation n'existe pas*, elle n'est qu'une interprétation d'un effet de nature fondamentalement géométrique.

Ainsi, on verra par la suite que c'est la courbure de cette géométrie qui produit les effets gravitationnels⁵². A l'inverse, une géométrie sans courbure, i.e. une géométrie plane, produit un environnement sans effets de gravitation. Or il est aisément d'imaginer qu'il est toujours possible de trouver *localement* un jeu de coordonnées qui rendent une géométrie plane, i.e. une transformation *locale* qui permette de détruire la gravitation. Par analogie, une fonction régulière peut être approximée comme une collection de tangentes sur lesquelles il n'y a pas de courbures et qui localement sont des représentations exactes de la fonction originale. C'est une manifestation du principe d'équivalence : *il est toujours possible de trouver une transformation locale qui rende la géométrie de l'espace-temps plane*. Plus précisément c'est parce que l'on considère la gravitation comme étant de la géométrie que le principe d'équivalence se trouve naturellement réalisé.

Cette capacité à créer un jeu de coordonnées qui puisse annuler la gravitation est d'une importance majeure, pour la physique en général. En effet, comment faire pour faire de la physique en présence d'un champ de gravitation ? Il suffit d'annuler la gravitation, par un choix approprié de système de référence, pour retomber sur le cas sans gravitation et que généralement on arrive à formuler. D'un point de vue technique, si l'on parvient en l'absence de gravitation à exprimer les lois dans la nature dans une formulation qui s'accorde bien avec les changements de référentiels 'propres'⁵³, nous sommes capables de les exprimer en présence de gravitation car il existe toujours un 'point de vue' qui permet d'annuler ses effets. C'est le cas par exemple des lois de l'électromagnétisme, qui possèdent une telle formulation.

Cette vue de la gravité comme géométrie de l'espace-temps est l'école classique d'interprétation de la RG. Elle n'est toutefois pas sans poser problème par exemple si l'on cherche à quantifier la gravitation. Si cette dernière est pure géométrie alors on peut arguer qu'il

52. mathématiquement, cela se manifeste par des dérivées secondes de la géométrie par rapport aux variables qui décrivent l'espace-temps

53. on parle de formulation *covariante*

n'y a rien à quantifier et par exemple il n'y a pas de raison à priori d'invoquer l'existence d'un boson porteur de l'interaction, coupant court à toute tentative de quantification et donc d'unification. Si l'on estime que la quantification est nécessaire alors la vision géométrique n'est qu'une interprétation, certes très puissante, d'un processus qui n'est pas pure géométrie. Dans ce cadre le principe d'équivalence devient prééminent : il faut le supposer réalisé par un mécanisme encore inconnu et sa réalisation conduit à une possible interprétation géométrique⁵⁴. L'approche classique vue précédemment raisonne de façon inverse.

Espace-temps et Métrique

La théorie de la relativité générale décrit la gravitation comme une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. Cet espace temps possède 4 dimensions, une de temps et trois d'espace. L'outil mathématique permettant de décrire cette géométrie est la géométrie différentielle. Une quantité centrale est *la métrique* : fondamentalement elle est l'outil qui permet de calculer des distances (des produits scalaires) dans une géométrie arbitraire. En notation d'Einstein⁵⁵, le calcul d'une distance s'écrit de la façon suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (40)$$

où les indices μ, ν courent sur les indices des coordonnées, ds^2 est un scalaire donnant la distance couverte par un intervalle (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3). La quantité $g_{\mu\nu}$ est la métrique et permet de relier la distance aux composantes de l'intervalle. Si la géométrie est plane, la métrique aura une certaine forme et si la géométrie est courbe et complexe, cette expression sera différente. En géométrie euclidienne plane à 3D le calcul de distance est le suivant :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (41)$$

En géométrie de Minkowski, correspondant à l'espace-temps plat utilisé par la relativité restreinte, le calcul devient

$$ds^2 = (dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad (42)$$

où $dx^0 = cdt$ est la composante liée au temps. L'expression générale est elle donnée par Eq. 40.

Cette métrique synthétise la structure spatio-temporelle de la variété que l'on cherche à étudier. Pour faire de la cosmologie, il faut ainsi se doter d'une telle métrique, la plus à même de représenter ce que l'on croit être les caractéristiques génériques du cosmos.

54. c'est par exemple l'approche adopté par S. Weinberg dans le livre *Gravitation & Cosmology*

55. la notation d'Einstein consiste à omettre le signe de sommation sur les indices répétés. Par exemple $g_{\alpha\beta}x^\alpha = \sum_\alpha g_{\alpha\beta}x^\alpha$

Métrique de Friedmann-Robertson-Walker

En se rappelant l'énoncé du principe cosmologique pragmatique, la métrique devant servir à décrire l'Univers doit refléter les propriétés d'homogénéité et d'isotropie. La métrique la plus générique satisfaisant ces contraintes est la métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A l'aide de celle-ci, l'intervalle de distance 4D est donné par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr_0^2}{1 - Kr_0^2} + r_0^2 d\theta^2 + r_0^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (43)$$

On note que cette métrique fait usage d'un système de coordonnées sphériques (r_0, θ, ϕ) pour sa partie espace. On note également que par rapport aux exemples Euclidien et Minkowskien, FRW couple explicitement les parties temporelles et spatiales, via le facteur d'expansion $a(t)$ ⁵⁶.

r_0 est une *distance comobile* : c'est une coordonnée de nature spatiale et indépendante du temps. Ici elle désigne une distance radiale prise à partir de l'origine du système de coordonnées et est également prise en compte pour calculer les contributions à l'intervalle des séparations angulaires $d\theta$ et $d\phi$. Le paramètre K est un paramètre de courbure auquel on peut éventuellement associer un rayon de courbure $R_K = K^{-1/2}$ ⁵⁷.

Si l'on considère deux événements sur une même ligne de visée (donc avec $d\theta = d\phi = 0$), l'intervalle peut se représenter sous une forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2, \quad (44)$$

avec

$$dr = \frac{a(t)dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (45)$$

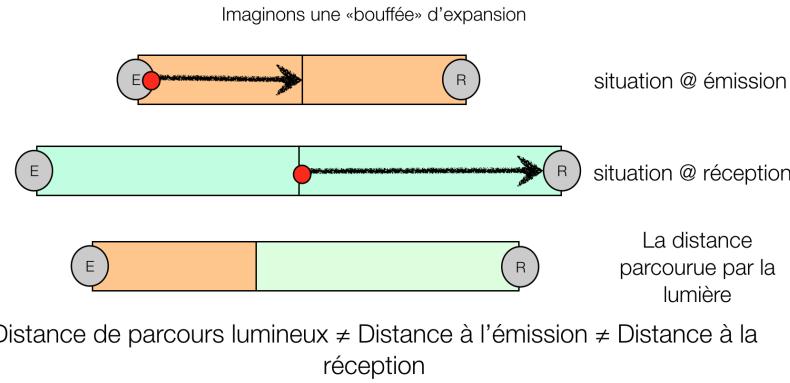
Ici dr désigne la distance *physique* de la partie spatiale (donc 3D) de l'intervalle que nous étudions. Cette distance dépend du temps, donc de l'instant considéré, et est modulé par une éventuelle courbure. A proximité de l'origine ($r_0 \rightarrow 0$) ou dans des régimes de très faible courbure ($R_K \rightarrow \infty$ ou $K \rightarrow 0$), distance physique et distance comobile sont directement reliées par :

$$dr = a(t)dr_0. \quad (46)$$

Là où la distance comobile était une quantité statique, la distance physique est une quantité évolutive, dont la dépendance temporelle est encodée par le facteur d'expansion $a(t)$. Notons que si l'on considère le parcours d'un photon sur un intervalle infinitésimal (t est alors quasi constant et $r_0 \ll 1$) alors $dr = cdt$ et la distance physique

56. appelé aussi facteur d'échelle

57. une simple analyse dimensionnelle montre par exemple que Kr_0^2 doit être sans dimension



est celle effectivement parcourue par le rayon lumineux. Considérons à présent un intervalle non-infinitésimal : si la géométrie intrinsèque de l'Univers est plane, nous avons $K = 0$ et la distance de parcours lumineux *dans ce cas précis* vaut

$$D_L = \int_{t_e}^{t_r} dr = \int_{t_e}^{t_r} a(t)dr_0, \quad (47)$$

où t_e et t_r désignent les instants d'émission et de réception de ce photon sur notre intervalle. Or cette quantité est différente des distances physiques mesurées à l'instant t_e et à l'instant t_r :

$$r(t_e) = a(t_e)r_0 \neq D_L \quad (48)$$

$$, r(t_r) = a(t_r)r_0 \neq D_L \quad (49)$$

car $a(t)$ varie au cours de la trajectoire du photon. On a donc 3 distances différentes (voir aussi la figure 6) alors que les extrémités sont identiques dans les 3 cas : ces 3 définitions sont valides mais il faut savoir exactement de quoi il est question⁵⁸ ! Par ailleurs, si la courbure de l'espace est positive et non nulle, $K > 0$, alors

$$D_L > \int_{t_e}^{t_r} a(t)dr_0 \quad (50)$$

et dans le cas d'une courbure négative, $K < 0$

$$D_L < \int_{t_e}^{t_r} a(t)dr_0. \quad (51)$$

Cette différence traduit le fait que la lumière voyage en épousant à chaque instant la géométrie de l'espace qu'elle parcourt⁵⁹, rallongeant ou raccourcissant son trajet par rapport à la distance physique 'brute' des points qu'elle relie.

De façon générale, la courbure induit un départ de la distance physique par rapport à une fonction simple de la distance comobile. Considérons à nouveau la distance physique en se plaçant à

FIGURE 6: On considère un photon émis en E et reçu en R. Pour simplifier, les distances subissent une expansion instantanée au moment où le photon a parcouru la moitié de la distance initiale entre E et R. 3 distances peuvent être également considérées dans cette expérience de pensée : la distance physique entre E et R à l'émission (représentée par 2 blocs courts), la distance physique entre E et R à la réception (représentée par 2 blocs longs) et la distance effectivement parcourue par le photon entre l'émission et la réception (représentée par un bloc long et un bloc court). Ces trois distances sont différentes dans un Univers non statique.

58. en particulier, les articles 'grand public' entretiennent fréquemment cette confusion

59. la lumière parcourt des géodésiques de l'espace-temps

un instant donné et en calculant $r(t)$ entre 2 points A et B, séparés d'une distance comobile R_0 le long d'une direction avec (θ, ϕ) donnés. En pratique il s'agit d'intégrer l'équation 45 tout en considérant t constant. On a alors

$$a(t)R_0 \quad (52)$$

$$r(t) = a(t)R_K \arcsin(R_0/R_K) \quad (53)$$

$$a(t)R_K \operatorname{argsh}(R_0/R_K) \quad (54)$$

pour une courbure $R_K = K/|K|^{3/2}$ respectivement nulle, positive et négative. Notons que les termes de courbure sont indépendants du temps. Les trois solutions peuvent être résumées sous la forme d'une équation unique $r(t) = a(t)S_K(r_0)$. A nouveau, les distances physiques sont des fonctions du temps qui ne dépendent que de la variation temporelle du facteur d'expansion $a(t)$. Si a est un fonction croissante, *toutes* les distances physiques augmentent avec le temps et on parle d'Univers en expansion. A l'inverse, $a(t)$ peut être une fonction décroissante du temps dans certains modèles, auquel cas l'Univers est en contraction.

Pour finir, mentionnons que les distances physiques aujourd'hui sont obtenues en prenant la valeur du facteur d'expansion aujourd'hui. Ces types de quantités mesurées aujourd'hui sont notées par convention avec l'indice 0. Par exemple le temps qui a pu s'écouler depuis le Big-Bang jusqu'à aujourd'hui est noté t_0 : c'est la définition même de l'âge actuel de l'Univers. De même le facteur d'expansion aujourd'hui est noté $a_0 = a(t_0)$. *Par convention* le facteur d'expansion est normalisé à cette valeur actuelle et

$$a_0 = a(t_0) = 1. \quad (55)$$

Il en découle que

$$r(t_0) = S_K(r_0). \quad (56)$$

et dans le cas sans courbure, on constate que la distance physique mesurée aujourd'hui est égale à la distance comobile $r(t_0) = r_0$.

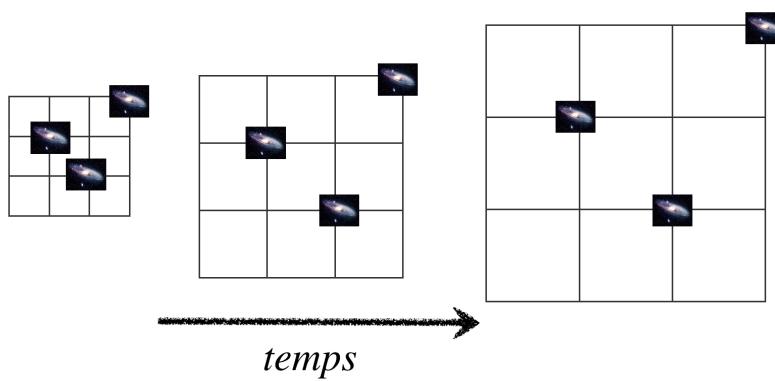
Facteur d'expansion, Loi de Hubble

La distance physique $r(t)$ entre deux points peut être simplement dérivée au cours du temps.

$$\dot{r}(t) = \dot{a}S_K(r_0) = \frac{\dot{a}}{a}r(t). \quad (57)$$

On définit la *fonction de Hubble* comme la fonction dépendante du temps donnée par :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (58)$$



A l'aide de cette nouvelle fonction, le taux de variation des distances peut s'exprimer comme une fonction linéaire de la distance, *la loi de Hubble*

$$\dot{r}(t) = H(t)r(t). \quad (59)$$

Si a est une fonction croissante, les distances physiques varient d'autant plus qu'elles sont importantes.

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos des Eqs 58 et 59. La première est que la fonction de Hubble n'est pas une constante temporelle, en revanche sa valeur ne dépend pas du point de l'espace considéré : on peut considérer que c'est une constante *spatiale* de valeur donnée dans tout l'Univers à un instant donné. Suivant la convention générique en cosmologie, sa valeur actuelle est notée avec un indice 0 et vaut environ

$$H_0 \sim 70 \text{ km/s/Mpc}. \quad (60)$$

Cette valeur est déterminée expérimentalement via par exemple la mesure conjointe des distances et des vitesses de fuites d'objets à grande distance. Cette mesure nécessite une connaissance de la luminosité intrinsèque de ces objets⁶⁰ : par comparaison avec leur luminosité apparente, la distance peut être déduite tandis que la vitesse s'obtient à partir du décalage vers le rouge. Un diagramme de Hubble peut alors être construit pour obtenir la valeur de H_0 (voir Fig. 8).

On peut constater au vu des unités employées et au vu de la structure de l'équation 58, que le paramètre de Hubble a la dimension de l'inverse d'un temps. On définit ainsi le temps de Hubble par $t_H = H^{-1}$: on verra par la suite que ce temps de Hubble est une bonne approximation de l'âge de l'Univers.

La seconde remarque porte sur le caractère linéaire de l'équation 59 : on peut montrer que cela permet de conserver le caractère iso-

FIGURE 7: Une représentation schématique de la différence entre distance comobile et physique. Ces trois galaxies s'éloignent les unes des autres au cours du temps sous l'effet de l'expansion de l'Univers : l'espace se "dilate" comme indiqué par la grille dont les carreaux deviennent de plus en plus grands. La distance comobile est la distance mesurée en unités de carreaux : ces distances ne varient pas au cours du temps, car les galaxies sont immobiles par rapport à leur espace local. La distance physique, est la vraie distance mesurée avec une règle sur cette page : de façon évidente celle-ci varie pour toutes les paires de galaxies. Notons que ces distances physiques varient mais fondamentalement les galaxies sont toutes immobiles par rapport à l'espace sur lesquelles elles reposent.

60. on parle aussi de chandelles standards

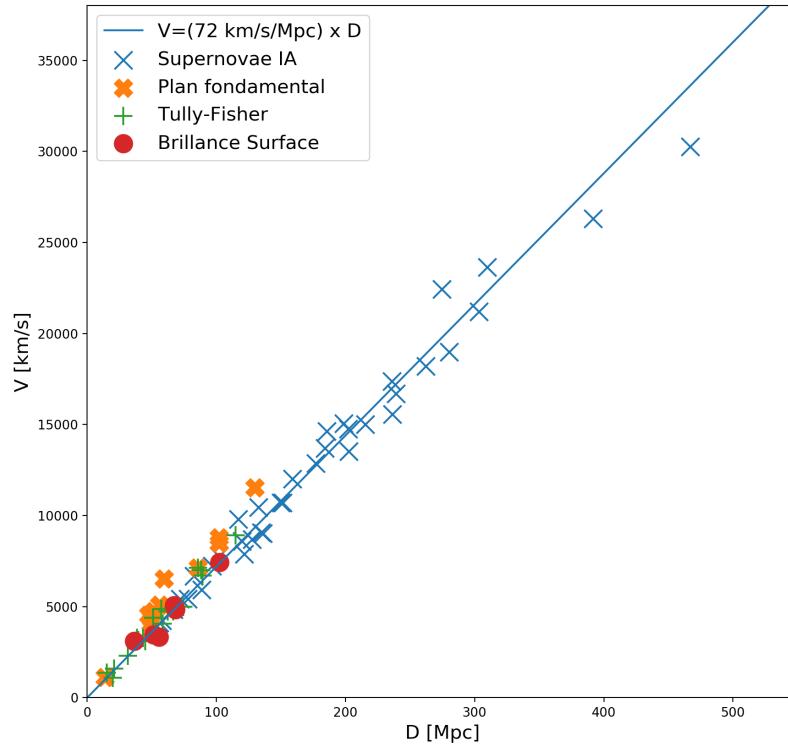


FIGURE 8: Diagramme de Hubble représentant la vitesse de fuite de différentes sondes astrophysiques à partir des données de Freedman et al. (2000). La ligne trace la relation attendue pour une valeur $H_0 = 72$ km/s/Mpc tandis que chaque point représente un objet dont la distance et la fuite sont connues. Les objets considérés sont soit des supernovæ (points bleus) soit des galaxies (points orange, vert et rouge) dont les distances sont déterminées avec 3 techniques différentes. On note que les supernovæ permettent de sonder les distances les plus lointaines et sont donc les plus contraignantes pour la mesure du paramètre de Hubble.

trope et homogène des points de vue (cf. Fig. 9), comme exigé par le principe cosmologique. Si la loi avait été constante ($\dot{r} \sim r^0$) ou bien quadratique ($\dot{r} \sim r^2$), l'homogénéité aurait été perdue.

La dernière remarque porte sur le fait que la loi donnée par l'Eq. 59 donne l'impression que des récessions supraluminiques sont autorisées ($\dot{r} > c$) : il s'avère que cela est exact, mais le taux de variation de distance calculé ici n'implique pas de déplacement par rapport à un référentiel local inertiel (qui lui serait limité par c)⁶¹ mais se rapporte à une dilatation même de l'espace : dit rapidement, ceci n'est pas la vitesse d'un corps en déplacement. Par exemple, insistons sur le fait que cette dilatation ne permet pas de transmettre d'information.

Décalage vers le rouge

Nous venons de voir que la forme de la métrique FRW conduit naturellement à la Loi de Hubble. Dans le même ordre d'idée, la métrique FRW conduit naturellement à une modification de la perception des intervalles temporels. Si l'on considère par exemple l'émission d'un photon depuis un point E jusqu'à sa réception au point R, l'intervalle séparant les deux évènements est nul, $ds^2 = 0$, comme c'est toujours le cas pour une particule sans masse et se dé-

61. et qui est le régime d'application de la relativité restreinte



plaçant à la vitesse de la lumière. Soit E l'origine du système de référence, alors E et R se trouvent sur un seul et même rayon-vecteur ($d\theta = d\phi = 0$) et FRW permet d'écrire :

$$\int_{t_E}^{t_R} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (61)$$

Considérons un second photon qui va effectuer le même parcours mais en étant émis à l'instant $t_E + \delta_E$ et reçu à l'instant $t_R + \delta_R$. Dans un espace-temps statique, on s'attend à obtenir $\delta_E = \delta_R$. Pour ce second photon FRW permet d'écrire :

$$\int_{t_E + \delta_E}^{t_R + \delta_R} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (62)$$

Notons que les bornes d'intégration du second membre restent inchangées, le second photon passant par les 2 mêmes endroits en coordonnées comobiles : par conséquent les 2 intégrales temporelles des 2 photons sont identiques permettent d'écrire la relation :

$$\int_{t_E}^{t_E + \delta_E} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_R}^{t_R + \delta_R} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (63)$$

Si l'on suppose que les délais temporels δ_E et δ_R sont suffisamment petits par rapport au temps typique d'évolution du facteur d'expansion a , alors l'on obtient que le délai mesuré à la réception diffère du délai à l'émission :

$$\delta_R = \frac{a(t_R)}{a(t_E)} \delta_E. \quad (64)$$

Cette relation est valable pour tous les délais : si la métrique n'est pas statique $a(t_E) \neq a(t_R)$, les délais sont modifiés. Par exemple on constate que les courbes de lumières de supernovæ sont affectées par cette modification des délais (voir Fig. 10). De même les flux de photons⁶² subissent une "dilution" cosmologique à cause d'une modification de la durée s'écoulant entre 2 photons successifs. Enfin la

FIGURE 9: La loi de Hubble établit une relation linéaire entre vitesse et distance physique. L'image du milieu montre comment une image est déformée par une telle loi linéaire, en fonction de la distance du pixel au centre de l'image : le canard devient plus grand mais n'est en pratique pas déformé. Les deux autres exemples montrent le même type de transformation mais en appliquant une déformation constante en fonction de la distance ou bien une déformation variant comme le carré de la distance. Dans ces 2 cas, le canard est déformé : si ce type de transformation avait été appliquée à un milieu homogène, cette dernière aurait été brisée. Par ailleurs, cette brisure dépendrait du choix de l'origine, en contradiction avec le principe d'homogénéité des points de vues.

62. flux qui sont des nombres de photons reçus par intervalle de temps

longueur d'onde $\lambda = cT$ est directement proportionnelle à une durée (la période). La longueur d'onde d'un rayonnement électromagnétique reçu aujourd'hui est donc aussi affectée :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_E}{a(t_E)} \quad (65)$$

où on a utilisé la convention $a(t_0) = 1$. Il en découle que le décalage vers le rouge est donné par

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_E}{\lambda_E} = \frac{1}{a_E} - 1. \quad (66)$$

Si le facteur d'expansion était plus petit dans le passé (comme attendu pour un Univers en expansion), le décalage vers le rouge (ou *redshift*) est positif ou nul. Notons qu'à aucun moment il n'est fait mention de vitesse de déplacement de source ou de récepteur. Le seul effet est celui d'un espace-temps non-statique qui donne un effet similaire à un effet Doppler mais qui en aucun cas ne nécessite que la source ou l'émetteur possèdent une vitesse non-nulle par rapport à son référentiel localement inertiel.

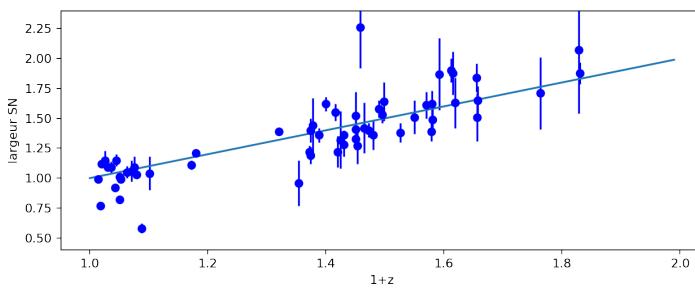


FIGURE 10: Un exemple de mesure des durées des supernovæ cosmologiques en fonction du redshift. Tous ces objets ont des courbes de lumières identiques car correspondant à l'explosion d'objets très similaires (des naines blanches d'environ $1.4 M_\odot$). On constate que la durée des courbes de lumières associées varient en suivant une loi en $1 + z$ où z est le redshift : c'est l'effet cosmologique de dilatation des durées qui opère ici. Données issues de Goldhaber et al. 2001.

Source de la gravitation

A ce stade, l'élément essentiel qui reste à préciser est la loi qui régit l'évolution du facteur d'expansion et par extension celle de la métrique FRW. Plus généralement quelles sont les lois qui permettent de relier la métrique $g_{\mu\nu}$ (donc la structure de l'espace-temps) aux sources de la gravitation ? Ces relations sont connues et portent le nom d'équations d'Einstein. Leur détermination exacte est une démarche relativement complexe mais le cheminement logique qui aboutit à leur obtention peut être aisément décrit.

Un bon point de départ est l'équation de champ de la gravitation Newtonienne, à savoir l'équation de Poisson. Elle relie la densité de matière ρ au potentiel gravitationnel $\phi(x)$, qui est une fonction

simple du champ de gravitation :

$$\Delta\phi = \rho. \quad (67)$$

Clairement, le potentiel gravitationnel a pour source la densité de matière. En RG, l'objectif est d'obtenir une équation de champ analogue mais reliant $g_{\mu\nu}$ à ses sources. Disons d'emblée que dans le régime des champs faibles(dans lequel la gravitation Newtonienne s'applique) métrique et potentiel gravitationnel sont directement reliés.

Quelles sont à priori les sources de la métrique en RG ? Une première tentative peut être effectuée en considérant directement la densité de matière ρ comme source : c'est le cas quand les champs sont faibles et la matière est source de gravitation donc de géométrie. Toutefois on sait également que la masse en tant que telle ne joue pas de rôle central dans les théories relativistes, c'est davantage l'énergie E qui joue un rôle de premier plan.

La *densité* énergie serait-elle cette source ? Il est clair qu'elle doit jouer un rôle, par exemple au travers de la densité d'énergie de masse ρc^2 , ce qui reviendrait simplement à considérer la contre-partie énergie de la source de gravité Newtonienne. La difficulté de cette option réside dans le fait que l'énergie n'est pas directement une quantité fondamentale, y compris en relativité restreinte : l'énergie n'est qu'une composante d'un concept plus vaste qui est l'énergie-impulsion⁶³. Par conséquent si l'énergie source la gravité en RG, c'est au travers de l'énergie-impulsion et non seule. Plus précisément c'est au travers d'une *densité* d'énergie-impulsion.

Si on note l'énergie impulsion (P^0, P^1, P^2, P^3) où $P^0 = E$ (en supposant $c = 1$), on arrive à des expressions de densités de type :

$$\frac{dP^\mu}{dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma}. \quad (68)$$

Notons que α, β, γ désigne toutes les coordonnées disponibles, *temps* compris. Bien sûr la densité d'énergie sus-mentionnée fait partie des sources :

$$\frac{dE}{dxdydz}, \quad (69)$$

tandis que l'expression suivante est tout aussi légitime pour constituer un terme source de la gravité :

$$\frac{dP_x}{dtdydz}. \quad (70)$$

Cette dernière expression désigne une force (dP_x/dt) divisée par une surface $dydz$ à x constant⁶⁴, à savoir une pression suivant la direction x . Notons qu'une pression est homogène à une densité d'énergie.

63. par ailleurs la valeur de l'énergie dépend du système de référence choisi, ce qui plaide en sa défaveur

64. c'est littéralement le flux de P par unité de temps au travers de la surface $dydz$ perpendiculaire à dx

En généralisant cette expression, on obtient le tenseur des contraintes ou *tenseur énergie-impulsion*

$$T^{\mu\delta} = \frac{dP_\mu}{dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma}. \quad (71)$$

obtenu en considérant la densité de la composante μ de P sur la "surface" de coordonnées x^δ constante. C'est la source de la métrique, qui généralise la densité de masse du cas newtonien. Comme mentionné ci-dessus, la densité d'énergie a donc un rôle à jouer mais également la pression, de même que le cisaillement⁶⁵. Par la suite la contribution d'un type d'énergie à la dynamique de l'espace-temps devra s'évaluer au vu de toutes ces quantités.

Notons que T obéit à une équation analogue à généralisation de la conservation de l'énergie dans un espace-temps quelconque :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (72)$$

cette relation est tensorielle et non triviale et définit une "conservation" globale de l'objet T . La densité d'énergie est l'une des composantes de cet objet et n'est pas généralement conservé *individuellement*, ne serait-ce que parce que l'expression de la densité d'énergie dépend du système de coordonnées choisi.

A ce stade, le terme source de la dynamique de l'espace-temps est connu, reste à expliciter l'opérateur différentiel qui agit sur la métrique et qui joue un rôle analogue au laplacien de l'équation 67. En d'autres termes quel est le tenseur G , fonction de la métrique qui permette d'avoir :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (73)$$

Sans rentrer dans les détails, on cherchera à obtenir un opérateur différentiel du second ordre, tout comme pour l'équation de Poisson newtonienne. De plus il faut que l'équation 72 soit satisfaite par G . L'opérateur différentiel du second ordre le plus simple permettant de satisfaire à cette contrainte est le *tenseur d'Einstein*

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{R}{2}g^{\mu\nu} \quad (74)$$

où $R^{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci ou *tenseur de courbure* et qui dépend de dérivées de second ordre de $g^{\mu\nu}$. R est la trace de ce tenseur et est appelé aussi scalaire de courbure ou scalaire de Ricci.

Pour résumer, l'équation de champ de la gravité dans le cadre de la relativité générale décrit le comportement de la métrique en fonction du contenu local en énergie, via :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (75)$$

65. qui est une force parallèle à une surface, complémentaire à la pression qui est perpendiculaire à une surface

Plusieurs remarques peuvent être faites à ce stade. La première est que nous sommes passé d'une équation scalaire dans le cas newtonien à une équation tensorielle avec dans l'absolu $4 \times 4 = 16$ équations couplées à résoudre. Toutefois le tenseur d'énergie-impulsion est symétrique et au final seules 10 équations restent réellement indépendantes dans le cas générique. De plus si les sources d'énergies possèdent un certain degré d'anisotropie (comportement de fluide parfait⁶⁶ par exemple) les composantes anisotropes de la pression ne rentrent pas en jeu et le système peut encore être réduit. La seconde remarque porte sur la structure du tenseur d'Einstein (Eq. 74). On constate ainsi que l'opérateur est non linéaire en métrique (via par exemple $\frac{R}{2}g^{\mu\nu}$), ce qui rend l'équation de champ particulièrement complexe à résoudre dans le cas général. On constate également que la métrique $g^{\mu\nu}$ est elle-même source de courbure. Cela est particulièrement manifeste en écrivant l'équation 75 avec un terme supplémentaire :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \quad (76)$$

où Λ est un scalaire constant dans l'espace-temps. Compte tenu de $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, il en découle que l'équation 76 reste valable et dans ce cas la métrique est également source de courbure. Notons que le scalaire Λ introduit dans l'équation Eq. 76 s'interprète comme une *constante cosmologique*.

Équations de Friedmann

Comme indiqué dans la section précédente, l'hypothèse d'un Univers homogène et isotrope conduit à une forme de la métrique donnée par FRW. Considérant de plus que la relativité générale fournit une bonne description de la dynamique de l'espace temps, on est en principe capable de résoudre les équations d'Einstein pour une métrique FRW. Le résultat de cette opération est l'*équation de Friedmann*. Elle repose sur la RG, sur la métrique de FRW et considère que le contenu en énergie de l'Univers est bien décrit par des "fluides" parfaits, de pression isotrope et sans viscosité.

L'équation de Friedmann est une relation scalaire qui relie le facteur d'expansion $a(t)$, qui restait la dernière quantité non précisée de la métrique, au contenu en énergie de l'Univers :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P), \quad (77)$$

où ρc^2 est la densité d'énergie de l'Univers et P sa pression, qui sont toutes deux fonctions du temps et donc de a . On constate que comme prévu, la dynamique de l'espace temps est lié à son contenu énergétique. Notons que *à priori* le second terme est défini positif, donc

66. c'est-à-dire un fluide sans viscosité ni cisaillement

la dynamique de l'Univers semble être décélérée $\ddot{a} < 0$. Un modèle d'Univers se définira à partir d'une solution de cette équation différentielle, qui elle même dépendra du contenu en énergie. C'est l'objet du chapitre suivant.

Dynamique de l'Univers Homogène

Nous savons dorénavant que la distance physique r entre deux points dans l'Univers peut évoluer au cours du temps, suivant une simple loi d'échelle :

$$r(t) = a(t)r_0 \quad (78)$$

où r_0 désigne la distance actuelle entre 2 points⁶⁷. La facteur sans dimension $a(t)$ encode toute la dépendance temporelle de l'évolution des distances dans l'Univers homogène. Reste à présent à déterminer l'évolution temporelle de ce facteur $a(t)$, appelé aussi *facteur ou paramètre d'expansion*⁶⁸. En particulier l'un des objectifs est de parvenir à comprendre l'histoire observée de notre Univers avec un Big-Bang ($a \rightarrow 0$ quand $t \sim 0$), des distances qui augmentent avec le temps ($\dot{a} > 0$) et une expansion récente accélérée ($\ddot{a} > 0$ quand $t \sim t_0$).

67. appelée aussi distance comobile

68. appelé aussi facteur d'échelle

Fluides Cosmologiques

On désigne par *fluides* les différentes formes sous lesquelles l'énergie-impulsion se trouve stockée dans l'Univers. Ces fluides opèrent comme termes sources de l'équation de Friedmann (Eq. 77) et régissent donc la dynamique de l'espace-temps.

Ces fluides sont supposés isotropes et parfaits (non visqueux) : leurs pressions se résument donc à des scalaires comme pour un fluide "standard". Par la suite on distinguera 3 types de fluides cosmologiques :

- la *matière* qui désigne plus précisément la matière non-relativiste et qui se distinguera par une pression négligeable,
- le *rayonnement* qui désigne par abus de langage toute forme de matière relativiste⁶⁹. Sa pression est non nulle,
- le *volume* qui désigne une forme d'énergie dont la densité volumique est constante. Comme expliqué par la suite, on parle aussi de *vide*.

69. dont les photons et les neutrinos par exemple

Ces 3 fluides cosmologiques sont définis par des densités d'énergie et des pressions dont les comportements diffèrent, notamment en

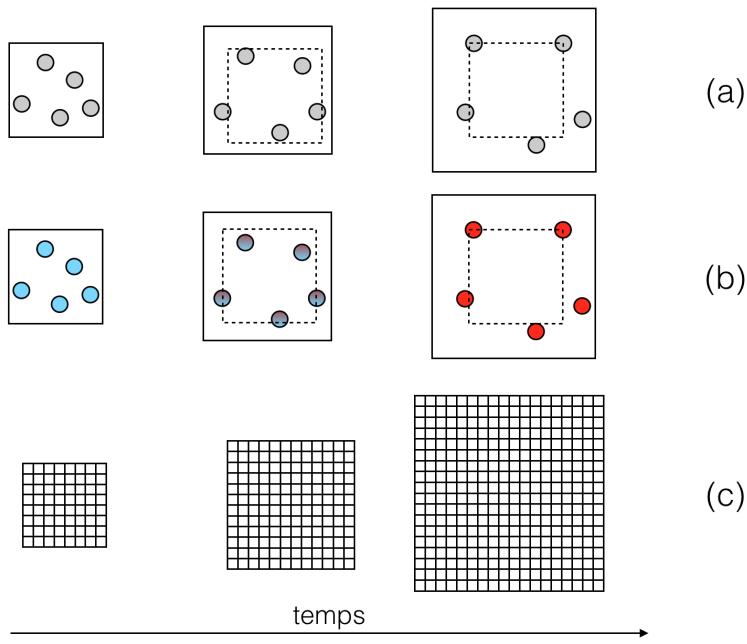


FIGURE 11: Évolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste (a), le nombre de particules reste constant, l'énergie totale est constante et la densité d'énergie diminue avec le volume. Pour la matière relativiste (b), le nombre de particules reste constant mais l'énergie individuelle de chacune diminue sous l'effet du rougissement cosmologique : l'énergie totale diminue et la densité d'énergie diminue sous le double effet du rougissement et de la dilution. Pour le 'volume' (c), la densité d'énergie est constante dans chaque élément de volume (représenté par une case) et l'énergie totale à l'intérieur du volume de contrôle augmente avec l'expansion.

fonction du paramètre d'expansion a . Par la suite, on pourra démontrer que leurs contributions à l'histoire de la dynamique de l'Univers vont se faire à différentes époques et suivant différentes dépendances temporelles.

Afin de comprendre leurs influences respectives sur la dynamique du cosmos, la procédure à suivre sera toujours plus ou moins identique. Rappelons l'expression de l'équation de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P). \quad (79)$$

Nous voyons que la dépendance temporelle de $a(t)$ (décrise par le membre de gauche de l'équation) est 'sourcée' par les quantités du membre de droite qui caractérisent la matière contenue dans l'Univers. Pour intégrer cette équation et trouver une expression pour $a(t)$, il s'agit donc de connaître la densité d'énergie du fluide cosmologique ainsi que la pression qui l'accompagne : ces quantités constituent les *sources* de la variation de a et donc de la dynamique des distances dans l'Univers.

Notons que dans le cas général, $\rho = \rho(t) = \rho(a)$ et $P = P(t) = P(a)$. Le terme source va donc varier au cours du temps (ou de façon équivalente en fonction de la valeur du facteur d'expansion), et va donc modifier le comportement de $a(t)$. Si jamais plusieurs fluides se trouvent être présents simultanément, chacun aura sa propre contribution au terme source de l'équation de Friedmann dont l'expression

devient alors :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_i^{\text{fluides}} (\rho_i c^2 + 3P_i). \quad (80)$$

Généralement, la densité d'énergie $\rho_i c^2$ est facilement obtenue en faisant un bilan du nombre de particules du fluide considéré. Ici le fluide est considéré comme libre⁷⁰, non-soumis à une interaction extérieure, et chacun de ses éléments emmène une énergie :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (81)$$

constitué de son énergie cinétique et de son énergie de masse .

La pression nécessite généralement un peu plus d'effort. Afin d'évaluer cette pression, une approche consiste à considérer que la *variation* d'énergie interne avec le volume est due au travail des forces de pression. Ainsi si on considère un volume de contrôle que l'on fait varier d'une quantité dV , la variation interne d'énergie est proportionnelle à cette pression :

$$dE = -PdV, \quad (82)$$

il ne s'agit ni plus ni moins que d'une application du premier principe de la thermodynamique⁷¹. En cosmologie, la source de variation du volume d'un contour est la dynamique de l'Univers, via le facteur d'expansion. Ainsi le volume V mesuré à n'importe quel instant peut être exprimé en fonction du volume mesuré aujourd'hui, V_0 , du même contour :

$$V = V_0 a^3, \quad (83)$$

d'où l'expression suivante pour la variation dV

$$dV = V_0 3a^2 da = 3V \frac{da}{a}. \quad (84)$$

Notons par exemple que le taux de variation du volume est donné par :

$$\frac{dV}{dt} = 3HV \quad (85)$$

et fait intervenir la fonction de Hubble, $H(a) = \dot{a}/a$.

La matière non-relativiste

Le premier fluide considéré est la matière non-relativiste, celle qui nous est la plus familière. On y trouve les baryons et toute forme de matière noire froide⁷². Cette matière se caractérise par une énergie par particule dominée par l'énergie de masse et une énergie cinétique négligeable devant cette dernière ($pc \ll mc^2$) :

$$E \sim mc^2. \quad (86)$$

70. sans influence exercée par une force extérieure

71. appliqué ici en l'absence de flux de chaleur, qui est nul dans un Univers homogène

72. *froid* désigne ici un fluide dont les particules sont animées de faibles vitesses devant c , voir le chapitre dédié à la matière noire

Supposons un volume de contrôle V à l'intérieur duquel se trouve N particules non-relativistes (voir Fig. 11 (a)). A l'intérieur, la densité d'énergie vaut :

$$\rho_m c^2 = \frac{Nm c^2}{V} = \frac{Nm c^2}{a^3 V_0} = \rho_{m0} c^2 \frac{1}{a^3}. \quad (87)$$

Ici la masse d'une particule est supposée constante et le volume de contrôle contient toujours le même nombre de particules. Cette dernière hypothèse revient à considérer qu'il n'y a aucune création ou destruction nette de particules et que le flux net au travers de la surface délimitant ce volume est nul⁷³ : pour un Univers homogène, donc sans variations spatiales susceptibles de générer des mouvements de matière, cette dernière hypothèse est raisonnable. L'équation 87 nous renseigne sur l'évolution temporelle de la densité d'énergie de la matière non-relativiste. Dans un Univers en expansion, a est une fonction croissante du temps : on constate alors que cette densité diminue au cours du temps, par simple dilution d'un nombre constant de particules (et donc d'énergie totale) dans un volume de plus en plus grand. Toujours dans le cas d'un facteur d'expansion croissant avec le temps, on constate que la densité d'un tel fluide était plus importante dans le passé.

Qu'en est-t-elle de la pression de ce fluide non relativiste ? Si l'on met à profit l'équation 82, on obtient :

$$P_m = -\frac{dE_m}{dV} \quad (88)$$

où E_m est l'énergie totale dans le volume de contrôle considéré. Dans le cas présent cette énergie est complètement dominée par l'énergie de masse, qui est constante dans ce volume, y compris lorsque le volume est modifié par la dynamique de l'Univers. Par conséquent, pour un fluide non-relativiste, la pression est considérée comme négligeable :

$$P_m = 0. \quad (89)$$

Ceci n'est pas une totale surprise : en effet nous avons défini ce fluide non-relativiste comme étant *absolument froid*, i.e. avec une contribution nulle (en pratique négligeable) de l'énergie cinétique à son énergie interne totale⁷⁴. Pour mémoire, la pression est une manifestation des mouvements microscopiques des particules individuelles : celles-ci étant figées, il en résulte une pression égale à zéro.

La Matière Relativiste

On désigne par matière relativiste toute forme de matière pour laquelle la contribution de son énergie cinétique domine celle de

73. voir aussi le chapitre dédié au modèle newtonien de cosmologie

74. la température est une mesure de la dispersion de vitesses : être 'froid' implique donc une faible contribution de l'énergie cinétique, voir le chapitre dédié à la matière noire

son énergie de masse. Pour une particule de ce fluide, nous avons $mc^2 \ll pc$ et son énergie individuelle est donnée par :

$$E \sim pc, \quad (90)$$

où p désigne l'impulsion de la particule. Cela concerne bien évidemment les photons mais également toute particule très légère comme les neutrinos. Supposons le même volume de contrôle que pour la matière non relativiste, avec une densité N de particules chacune porteur d'une énergie pc (voir Fig. 11 (b)). Comme précédemment, la densité d'énergie de ce volume de contrôle est donnée par :

$$\rho_r c^2 = \frac{Npc}{V}. \quad (91)$$

Toutefois, contrairement à la masse, l'impulsion est sensible à la dynamique de l'Univers puisqu'elle peut s'exprimer en fonction de la longueur d'onde qui elle-même subit les effets de rougissement cosmologique⁷⁵ :

$$p = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{a\lambda_0} = \frac{p_0}{a} = p_0(1+z). \quad (92)$$

^{75.} on rappelle que le redshift z est relié au facteur d'expansion via $a = \frac{1}{1+z}$

Il en résulte une dépendance temporelle de la densité d'énergie relativiste qui est différente de celle trouvée précédemment pour la matière non-relativiste :

$$\rho_r c^2 = \frac{Np_0c}{a^4 V_0} = \rho_{r0} c^2 \frac{1}{a^4}. \quad (93)$$

Comparée à la matière non-relativiste, la densité d'énergie varie ici plus rapidement (et baisse plus rapidement si a croît avec le temps). La raison est simple : en plus de l'effet de dilution géométrique s'ajoute une baisse de l'énergie individuelle portée par chaque particule à cause du rougissement cosmologique.

Calculons maintenant la pression comme taux de variation de l'énergie totale avec le volume :

$$P_r = \frac{dE_r}{dV} = -\frac{d(Npc)}{dV}. \quad (94)$$

Grâce à l'équation 84 la pression peut être réexprimée en fonction de la densité d'énergie :

$$P_r = Nc \frac{d(p)}{dV} = Nc \frac{dp}{da} \frac{da}{dV} = -Nc \frac{-p_0}{a^2} \frac{a}{3V} = \frac{1}{3} \rho_r c^2. \quad (95)$$

Dans ce cas la pression est non nulle et est une fonction simple de la densité d'énergie. A nouveau cela n'est pas une surprise puisque nous avons défini ces particules comme ne possédant qu'une énergie cinétique, qui est la source de pression.

Le "Volume"

De prime abord, le dernier type de fluide est de nature hypothétique et est *défini* par une densité d'énergie constante :

$$\frac{dE_v}{dV} = \Lambda = \text{const.} \quad (96)$$

On appellera ce fluide "volume" car il ne repose pas sur l'existence d'une particule le composant mais davantage sur une quantité d'énergie qu'apporte nécessairement un volume donné. Remarquons que si le volume de contrôle augmente (sous l'effet d'un facteur d'expansion croissant par exemple), la quantité d'énergie présente dans ce volume de contrôle augmente aussi (voir Fig. 11 (c)). On parle aussi d'énergie du "vide", puisqu'une telle énergie est présente y compris en l'absence de matière ou de rayonnement.

Compte tenu de cette définition, la densité d'énergie ne varie pas au cours du temps et vaut :

$$\rho_v c^2 = \rho_{v0} c^2, \quad (97)$$

tandis que la pression vaut

$$P_v = -\frac{dE_v}{dV} = -\rho_v c^2. \quad (98)$$

On constate qu'un tel type de contribution énergétique produit une pression *négative*. A l'inverse du comportement d'un fluide standard, son énergie interne augmente avec son volume, le 'vide' ne subit pas de détente⁷⁶. Cela résulte de la non-variation de la densité d'énergie à l'intérieur du volume de contrôle même si celui-ci évolue sous l'effet du facteur d'expansion.

A nouveau ce fluide est une hypothèse de travail. Toutefois il s'avère que ce type de fluide exotique permet une bonne représentation de la dynamique *observée* des distances dans l'Univers. Ce fluide est la fameuse *énergie noire*, dont la nature nous échappe complètement actuellement et qui permet de rendre compte de l'accélération observée de l'expansion de l'Univers. La densité d'énergie étant constante dans le temps et dans l'espace, on parle aussi de *constante cosmologique*.

⁷⁶. habituellement c'est l'inverse : un gaz chauffe quand on le comprime, son énergie interne augmente quand le volume diminue.

Époques de domination

Le bilan des trois fluides étudiés est donné dans la table suivante. On notera qu'on utilise la nomenclature standard des trois fluides : "matière" pour la matière non relativiste, "rayonnement" pour la matière relativiste et "vide" pour l'énergie de volume.

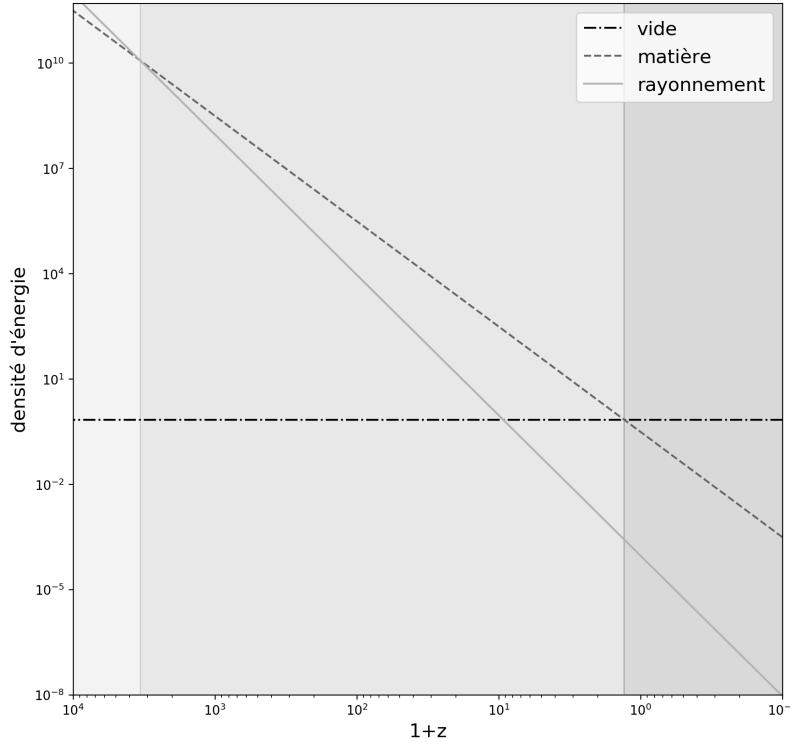


FIGURE 12: Évolution temporelle de la densité d'énergie des 3 fluides cosmologiques pour une cosmologie standard ($\Omega_m \sim 0.31$, $\Omega_v \sim 0.69$ et $\Omega_r \sim 9.1 \times 10^{-5}$, Planck 2015). Le temps s'écoule de la gauche vers la droite, l'époque actuelle correspondant à $1+z = 1$. Les 3 époques de dominations successives sont celles du rayonnement, de la matière et du vide. La première transition, entre rayonnement et matière est l'*équivalence*, avec $z_e \sim 3371$ et la seconde, vers un Univers dominé par l'énergie du vide, prend place vers $z_v \sim 0.3$.

	Caractéristique	Densité d'énergie	Pression
Matière	$E \sim mc^2$	$\rho_m c^2 = a^{-3} \rho_{m0} c^2$	$P_m = 0$
Rayonnement	$E \sim pc$	$\rho_r c^2 = a^{-4} \rho_{r0} c^2$	$P_r = \rho_r c^2 / 3$
Vide	$dE/dV \sim \text{cst}$	$\rho_v c^2 = \rho_{v0} c^2$	$P_v = -\rho_v c^2$

TABLE 1: Les 3 fluides cosmologiques

En réinjectant ces résultats dans l'équation de Friedmann (eq. 77) on obtient une expression détaillée du terme source qui permet déjà d'entrevoir certaines caractéristiques de la dynamique des distances dans l'Univers :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + 2\frac{\rho_{r0}}{a^4} - 2\rho_{v0} \right). \quad (99)$$

Dans un premier temps, il apparaît que la matière et le rayonnement ont un même effet qualitatif et tendent à décélérer la variation du facteur d'expansion (en imposant $\ddot{a} < 0$). Cette décélération est d'autant plus faible que les distances sont grandes (i.e. $\ddot{a} \rightarrow 0$ quand a augmente) et que les densités d'énergies associées sont faibles, permettant d'anticiper sur une sorte de "régulation". A l'inverse, le "vide" produit une accélération de la variation de a (avec $\ddot{a} > 0$) : cela résulte du terme de pression négative qui produit une contribution nette positive de ce fluide au terme source de l'équation de Friedmann. Notons que cette contribution reste constante au cours du temps, avec \ddot{a} augmentant avec a ⁷⁷, indiquant dès à présent un

77. en effet nous avons $\ddot{a} \sim \rho_{v0}a$. Plus a augmente, plus sa croissance accélère et devient 'incontrôlée'

effet "catastrophique" non régulé.

Enfin on constate que les contributions au terme source de l'équation de Friedmann ont des dépendances temporelles différentes en fonction du fluide considéré (voir Fig. 12). En supposant une évolution de a croissante au cours du temps, il apparaît qu'entre le rayonnement (qui varie en $a^{-4} = (1+z)^4$) et la matière (qui varie en $a^{-3} = (1+z)^3$), la première domine aux époques qui correspondent aux faibles valeurs de a (donc généralement au début) tandis que la matière doit prendre le dessus aux plus grandes valeurs du facteur d'expansion (donc généralement plus tard). Il existe donc une époque où ces deux fluides ont exactement la même densité d'énergie : cette époque est appelée *l'époque d'équivalence*⁷⁸. Avant l'équivalence, la matière relativiste domine. Après l'équivalence, la matière non-relativiste dicte la dynamique de l'Univers.

Mais qu'en est-il de la densité d'énergie du vide, dont la valeur est par définition constante ? Le verdict est sans appel : compte tenu du fait que les densités d'énergie des deux autres fluides sont des fonctions décroissantes de a , il existe *toujours* une valeur seuil du paramètre d'expansion au delà de laquelle le vide domine⁷⁹. Tout modèle d'Univers avec une énergie du vide finira par être dominé par cette dernière, pour peu que l'on attende suffisamment longtemps.

Pour finir, disons clairement que les relations obtenues entérinent la non-conservation de l'énergie totale du Cosmos. Pour un Univers dominé par une énergie du vide de densité d'énergie constante, l'expansion implique nécessairement des volumes croissants et donc une énergie totale croissante. Même en l'absence de ce fluide inconnu, le rougissement individuel des photons fait que l'énergie totale stockée dans la matière relativiste doit décroître : la densité d'énergie varie en a^{-4} et le volume en a^3 conduisant à une énergie totale non constante, inversement proportionnelle à a . Seul un Univers contenant uniquement de la matière non-relativiste, par conservation du nombre de particules d'énergie constante, garantit à priori une conservation de l'énergie totale : cet Univers n'est toutefois pas le nôtre qui contient à minima du rayonnement en plus de cette matière. Rappelons que cette non-conservation n'est pas problématique : la relativité générale ne garantit pas de façon générale la conservation du scalaire 'énergie' mais propose une relation plus complexe, plus générale sur le *tenseur énergie-impulsion*⁸⁰. Par ailleurs, on peut se souvenir que la conservation de l'énergie est une traduction de l'invariance par translation temporelle du résultat d'une expérience donnée⁸¹ : dans un Univers où la géométrie possède une évolution, cette invariance n'est bien sûr pas garantie.

78. l'équivalence est en place pour $z \sim 3000$

79. cette transition a eu lieu il y a environ 3 milliards d'années, pour $z \sim 0.3$

80. voir aussi le chapitre sur les fondamentaux

81. de même que l'invariance par translation spatiale implique une conservation de l'impulsion ou l'invariance par rotation implique une conservation du moment cinétique

Paramètre de densité Ω

A ce stade il nous faut introduire une nouvelle expression, le paramètre de densité Ω , qui apparaît naturellement lorsque l'on intègre l'équation 99. Cette intégration se fait naturellement en multipliant l'équation 99 par $2\dot{a}a$, qui permet d'obtenir :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H(a)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_{v0} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (100)$$

Notez l'introduction d'une constante d'intégration k que nous discuterons par la suite. Le terme de gauche n'est autre que le carré de la fonction de Hubble au cours du temps : aussi pour des raisons de symétrie, il est tentant de multiplier le terme de droite par H_0 , ce qui permet d'écrire :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_v - \frac{\Omega_k}{a^2} \right). \quad (101)$$

C'est cette équation qu'il faudra intégrer par la suite pour obtenir l'évolution temporelle du facteur d'échelle a et elle introduit les paramètres de densités (dans l'ordre) de la matière, du rayonnement, du vide et de la constante d'intégration. Ces quantités sont sans dimension et égales à :

$$\Omega = \frac{\rho_0 c^2}{\rho_c c^2}, \quad (102)$$

où ρ_c désigne la *densité critique* dont l'expression est donnée par⁸² :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (103)$$

Les paramètres de densités sont donc l'expression des densité d'énergie mesurées aujourd'hui des différents fluides en unités de cette densité critique.

Si l'on applique l'équation 101 aujourd'hui quand $a = a_0 = 1$ on obtient une contrainte que doivent satisfaire tous les paramètres de densité, à savoir :

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1 + \Omega_k. \quad (104)$$

Que représente Ω_k ? Si l'on remonte à l'expression des équations d'Einstein qui ont servi à produire l'équation de Friedmann, ce terme apparaît comme une courbure constante intrinsèque et est lié au coefficient de courbure K de la métrique FRW (eq. 43). Si $\Omega_k > 0$, donc $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v > 1$ alors cela équivaut à une courbure positive donc sphérique. A l'inverse $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v < 1$ produit une courbure négative de type hyperbolique. Enfin, $\Omega_k = 0$ (correspondant à $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1$) est la marque d'une géométrie plane.

Il est à noter qu'une simple inspection de la contribution de Ω_k au terme source de l'équation 101 nous renseigne sur sa nature. En effet,

82. notons que l'on retrouve les grandeurs obtenus dans le chapitre dédié à la cosmologie Newtonienne

on peut constater que les dépendances en a de tous les paramètres en densité sont liés aux dépendances des densités d'énergies associées : la matière est en a^{-3} (densité d'énergie inversement proportionnelle au volume), le rayonnement en a^{-4} (densité d'énergie inversement proportionnelle au volume + effet de rougissement) et le vide en a^0 (densité d'énergie constante en temps et en espace). Pour Ω_k , on constate une dépendance en a^{-2} comme le serait celle d'une courbure qui a bien la dimension de l'inverse du carré d'une longueur⁸³.

Valeurs expérimentales des paramètres de densité

Il existe plusieurs manières de déterminer ces quantités par l'observation, dont un aperçu a été donné dans la partie dédié à l'état des connaissances. On peut toutefois rappeler les valeurs standards de ces paramètres.

Dans un premier temps, on constate que l'Univers possède une géométrie de courbure nulle. De même la contribution actuelle des espèces relativistes est proche de zéro. Enfin, on constate actuellement que l'Univers est en expansion ($\dot{a} > 0$) et en accélération ($\ddot{a} > 0$) ce qui indique une contribution significative de la densité d'énergie du vide. Au bilan voici qualitativement la répartition des différentes sortes d'énergie aujourd'hui :

- $\Omega_k < 0.001$,
- $\Omega_r \sim 0.0001$,
- $\Omega_m \sim 0.31$,
- $\Omega_v \sim 0.69$.

On peut ajouter à ses paramètres la valeur actuelle du paramètre de Hubble $H_0 = 67 \text{ km/s/Mpc}$ et du paramètre de densité des baryons $\Omega_b \sim 0.049$. Il en résulte un paramètre de densité pour la matière non baryonique de l'ordre de $\Omega_c = \Omega_m - \Omega_b \sim 0.27$. Avec ce jeu de paramètres, le temps nous séparant du Big-Bang (à savoir l'âge de l'Univers) est $t(a=1) = t_0 \sim 13.8$ milliards d'années.

On constate que nous vivons actuellement dans un Univers dominé par l'énergie du vide. L'équivalence entre matière et rayonnement se produit pour $1 + z_e = \Omega_m / \Omega_r$ et donne

$$z_e \sim 3100 \quad (105)$$

correspondant à un Univers âgé de $t_e \sim 60600$ ans. De même l'Univers a commencé à être dominé par le vide quand $1 + z_\Lambda = (\Omega_v / \Omega_m)^{1/3}$ et donne

$$z_\Lambda \sim 0.3 \quad (106)$$

correspondant à un Univers âgé de $t_\Lambda \sim 10.2$ milliards d'années.

83. bien sûr ce n'est pas une démonstration, juste la vérification d'un comportement cohérent avec ceux des fluides cosmologiques

Si l'on rassemble tous ces résultats, on observe que l'Univers est passé par 3 phases successives de domination de chacun des 3 fluides (voir aussi Fig. 12). Dans un premier temps, le bilan énergétique de l'Univers est dominé par le *rayonnement*, au cours des 60 000 premières années. Puis c'est la *matière* qui va être le contributeur majeur de la dynamique de l'Univers pendant quelques milliards d'années. Enfin *le vide* devient le fluide dominant, ce qui est toujours le cas aujourd'hui et dont la primauté ne fera que s'accentuer dans le futur.

Modèles d'Univers

Nous sommes à présent armés pour étudier des modèles simples d'Univers. L'équation maîtresse de ce type d'étude est l'équation 101 et l'objectif est d'obtenir l'expression de $a(t)$, la dépendance temporelle du facteur d'expansion. En toute généralité, cela nécessite de connaître les paramètres de densités et la solution ne peut être obtenue que par intégration numérique. Il existe toutefois toute une classe de modèles simples qui peuvent être résolus analytiquement et qui fournissent un bon aperçu du comportement quantitatif de la dynamique de l'Univers dans des cas plus généraux.

Modèle d'Einstein-de Sitter : $\Omega_m = 1$

Ce modèle a une grande importance historique car il fut long-temps privilégié du fait de son caractère naturel. Le modèle *Einstein-de Sitter*, appelé aussi *Univers poussière*, considère un Univers plat et composé uniquement de matière, $\Omega_m = 1$. L'équation 101 devient alors simplement :

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^{3/2}}. \quad (107)$$

Elle s'intègre facilement pour donner :

$$a(t) = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3}. \quad (108)$$

ou bien

$$t = \frac{2}{3H_0} a^{3/2}. \quad (109)$$

L'équation horaire du facteur d'expansion donne une loi de puissance "faible", décélérée comme attendue. Ce modèle inclut également un Big-Bang :

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0 \quad (110)$$

impliquant des distances faibles et donc un Univers dense aux premiers instants.

L'âge de l'Univers peut également être déterminé en posant simplement $a = 1$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (111)$$

On constate que le temps de Hubble mesuré aujourd'hui $t_H = H_0^{-1}$ est à peu de chose près l'âge de l'Univers. Prenant $H_0 = 67$ km/s/Mpc on obtient alors un âge d'Univers proche de 9.6 milliards d'années, bien en dessous de l'âge estimé de certaines étoiles par exemple ou de certains amas globulaires⁸⁴. Bien que naturel, ce modèle ne permet pas d'expliquer l'âge observé de l'Univers.

Une option longtemps envisagée fut de considérer une Univers à géométrie hyperbolique avec $\Omega_m < 1$ auquel cas l'âge de l'Univers devient :

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_m}}. \quad (112)$$

Pour $\Omega_m \sim 0.3$ comme observé, on obtient un âge d'Univers compatible avec les plus vieux objets astronomiques, mais au prix d'une géométrie non plane⁸⁵. De plus il ne permet pas de produire une accélération de l'expansion, telle qu'observée aujourd'hui.

Univers-Lumière, $\Omega_r = 1$

Dans ce cas, le contenu énergétique de l'Univers est dominé par le rayonnement et nous savons que ce n'est pas le cas aujourd'hui. Toutefois toute la physique de l'Univers primordial ($t < 3$ minutes) se fait dans un régime où les espèces relativistes sont dominantes, comme dans ce modèle d'Univers-Lumière. Le principe est le même que précédemment où le paramètre de Hubble est donné par

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^2}, \quad (113)$$

qui donne après intégration

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \quad (114)$$

Comme pour l'Univers poussière, ce modèle prédit un Big-Bang. L'expansion y est également décélérée avec toutefois une loi de puissance légèrement moins forte pour la variation temporelle du facteur d'expansion $a(t)$ (puissance 1/2 au lieu de 2/3). Cette différence trouve son origine dans une dilution plus rapide du terme source associé au rayonnement, avec une décroissance en a^{-4} au lieu de a^{-3} .

Univers de Sitter, $\Omega_v = 1$

Cet Univers est dominé par le vide avec une densité d'énergie constante et $\Omega_v = 1$. Comme l'Univers lumière, ce modèle dit de

84. ces amas globulaires sont des objets présents dans le halo stellaire des galaxies et contiennent typiquement 10^5 étoiles généralement très vieilles. Les plus anciens de ces amas ont plus de 13 milliards d'années.

85. on parle d'Univers ouvert

de Sitter ne peut être une représentation fidèle du cosmos observé mais il peut nous permettre d'avoir une vue qualitative de la dernière phase de la dynamique de l'Univers, régie par l'énergie du vide. Dans ce modèle, l'intégration de l'équation 101 donne

$$t = H_0^{-1} \int_{\epsilon}^a \frac{da}{a}, \quad (115)$$

où l'on ne peut intégrer que depuis un temps arbitrairement faible mais non nul ϵ et ceci pour garantir la convergence de l'intégrale. La résolution de cette équation donne une loi d'expansion exponentielle

$$a(t) = \epsilon e^{H_0 t}. \quad (116)$$

Contrairement au deux modèles précédents, un tel Univers ne permet pas d'atteindre des distances arbitrairement faibles aux premiers instants et ne prédit pas de Big-Bang. Notons également que le paramètre de Hubble ne varie pas au cours du temps dans ce modèle :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0. \quad (117)$$

Clairement, l'expansion est accélérée et est liée à l'absence de "dilution" de la densité d'énergie associée au vide : bien qu'il y ait expansion, cela ne conduit pas à une diminution du terme source de l'équation de Friedmann. L'expansion ne peut être tempérée sous forme de loi de puissance douce et produit une dépendance exponentielle du facteur d'échelle.

Pour finir, il faut mentionner que les théories de l'inflation suggèrent une histoire d'expansion primordiale (pour un Univers plus jeune que 10^{-34} seconde) de même nature, avec une évolution exponentielle de $a(t)$. Comme expliqué dans le chapitre dédié à la période d'Inflation, cela suggère l'existence d'un champ (pour l'instant inconnu) dont le potentiel varie lentement (et donc une densité d'énergie quasi-constante) et à même d'entretenir cette expansion exponentielle.

Cas général, modèle standard Λ CDM

Dans une cosmologie arbitraire, l'évolution du facteur d'échelle ne peut être obtenue qu'en intégrant numériquement l'équation 101, mais cette tâche ne présente aucune difficulté particulière avec les bons outils.

La figure 13 présente différents modèles de cosmologie. On note par exemple, qu'un modèle extrêmement dominé par Ω_Λ possède une évolution exponentielle typique et repousse le Big-Bang loin dans le passé. A l'inverse, un modèle d'Univers sur-dense conduit à une évolution bornée, où les distances atteignent une distance

maximale pour évoluer ensuite vers un Big-Crunch, où toutes les distances dans l'Univers tendent vers zéro⁸⁶. Les modèles dominés par la matière possèdent tous une décélération caractéristique (qu'on peut remarquer via la courbure négative de $a(t)$).

Parmi ces modèles figure le modèle standard de la cosmologie, dit Λ CDM dont les paramètres de densité sont proches de $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$: ce modèle contient une constante cosmologique Λ non nulle et voit sa matière dominée par une matière noire froide⁸⁷. Dans ce cas précis, le Big-Bang a eu lieu il y a environ 13.5 milliards d'années, suivi d'une période d'accélération décélérée dominée par la matière pour quelques milliards d'années. La courbure de $a(t)$ s'inverse alors pour passer dans un régime d'expansion accélérée et c'est la période dans laquelle nous nous trouvons actuellement. C'est parce qu'il ajuste le mieux les observations et en particulier cette dernière phase d'expansion accélérée que ce modèle Λ CDM constitue la modèle standard de la cosmologie : cet ajustement se fait au prix de l'inclusion d'une énergie du vide dont les effets sont apparents mais dont la nature nous échappe aujourd'hui complètement.

86. ce modèle sert également de base à l'étude de l'effondrement sphérique des petites structures, voir le chapitre dédié à la formation des 'petites' structures

87. *Cold Dark Matter* ou CDM en anglais

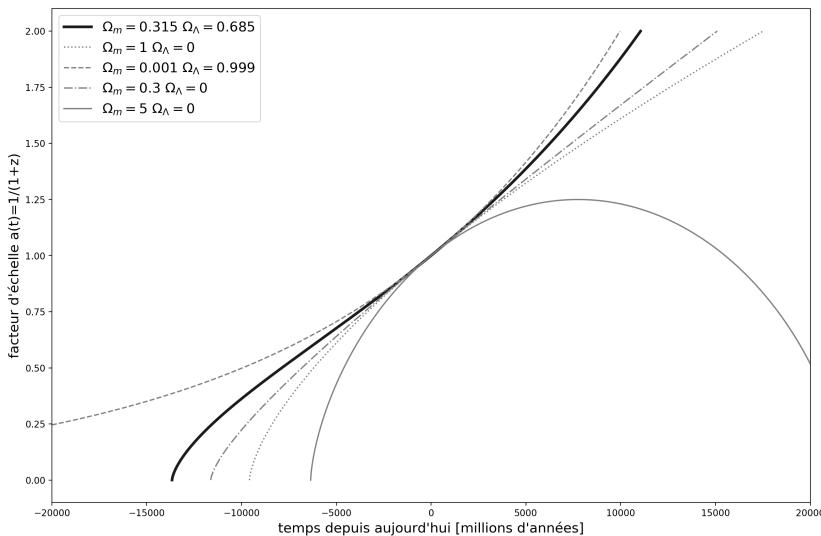


FIGURE 13: Évolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ pour différentes cosmologies. Ici Ω_m désigne le paramètre de densité de la matière et Ω_Λ désigne celui de l'énergie noire. Notez que le facteur d'échelle est normalisé à 1 pour $t = 0$.

Le fait que l'Univers connaissent une phase d'expansion accélérée n'est pas sans conséquences sur notre capacité future à faire de l'astrophysique et de la cosmologie. En effet actuellement, nous avons accès à des galaxies lointaines qui nous fuient, tandis que certaines galaxies proches sont actuellement en train de tomber sur nous et vont fusionner. De même, le rayonnement contribue peu au bilan énergétique de l'Univers mais reste détectable. Dans le futur, les galaxies lointaines vont échapper à nos télescopes : trop lointaines, ou avec des vitesses de fuites trop grandes. Les galaxies proches

auront fusionné avec nos systèmes locaux et nous n'auront qu'une 'méga' galaxie locale, peuplée d'un seul type d'étoile (vieilles et peu brillantes), dépourvue de gaz qui aura flambé lors des multiples fusions. Pour finir la densité de rayonnement deviendra inexorablement trop faible pour pouvoir être détectée, et les recherches actuelles faites sur le fond diffus cosmologique par exemple ne pourront avoir lieu. En résumé, nous sommes actuellement dans une époque 'bénie' pour faire de la cosmologie : l'Univers futur sera 'ennuyant' et beaucoup moins propice à la compréhension des objets astrophysiques et à la cosmologie.

l'Univers Chaud

Dans ce chapitre nous allons étudier de premières bases se rapportant à l'Univers quasi-primordial âgé de quelques minutes au plus. Durant cette période, la dynamique de l'Univers est régie par les espèces relativistes, avec une dépendance temporelle du facteur d'expansion en $a(t) \sim \sqrt{t}$: durant ces époques les influences respectives de la matière et de la constante cosmologique sont faibles. Ces premiers instants sont proches du Big-Bang et l'Univers s'y trouve dense et chaud : ces conditions sont propices aux interactions entre atomes et particules subatomiques. C'est durant cette époque que les abondances des particules reliques et des éléments légers⁸⁸ sont fixées : c'est de ces abondances dont nous allons discuter dans ce chapitre.

Équilibre & Gel de Réactions

Les deux concepts fondamentaux des processus qui règlent les abondance sont les notions *d'abondance à l'équilibre* et de *gel des réactions*. Dans notre cas, le terme d'abondance désigne la densité numérique d'une espèce atomique, subatomique, isotopique, etc... Par exemple l'abondance des atomes d'hydrogène se note n_H et s'exprime en atomes par m^3 . Les réactions qui permettent de modifier ces abondances font généralement intervenir d'autres réactifs. La photoionisation par exemple se caractérise par la réaction suivante :



et dépend non seulement de l'abondance des atomes d'hydrogène mais également de celle du nombre de photons ionisants⁸⁹. Toutefois dans un très grand nombre de cas, la variation d'une espèce peut s'écrire comme ne dépendant que de sa propre abondance à l'équilibre n_e et d'un taux de réaction Γ constant. Soit n une abondance quelconque, son évolution pourra être suivie par une équation différentielle du type :

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma(n - n_e). \quad (119)$$

88. terme qui désigne les éléments de faible nombre de masse tels que H, He, Li ou Be

89. en l'occurrence surtout des photons ultra-violets

Celle-ci est simple à comprendre. Si une abondance est déjà à l'équilibre $n = n_e$ et son abondance, par définition, ne varie pas. Si son abondance est supérieure à l'équilibre, le taux de réaction va agir comme une force de rappel⁹⁰, traduisant de fait une tendance à favoriser les réactions de destruction de l'espèce étudiée. A l'inverse si l'abondance est en déficit par rapport à l'équilibre, les réactions vont avoir tendance à la rétablir à des valeurs plus élevées. Notons que l'inverse du taux de réactions fournit un temps caractéristique de retour à l'équilibre $t_e = \Gamma^{-1}$.

Toutefois il existe une autre manière de faire varier la densité numérique d'une espèce dans le contexte qui est le nôtre : il s'agit de la dilution cosmologique, déjà rencontrée dans le chapitre précédent. En effet, compte tenu de l'expansion de l'Univers, si l'on dispose d'un certain nombre de particules d'un type donné dans un certain volume, sa *densité* va évoluer même en l'absence de réactions (c'est à dire de destructions/creations). Ainsi la densité numérique d'une espèce donnée varie cosmologiquement de la façon suivante :

$$n = \frac{n_0}{a^3}, \quad (120)$$

ce qui ne fait que traduire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn, \quad (121)$$

où H est la fonction de Hubble usuelle , fonction du temps ou du paramètre d'expansion $H = \dot{a}/a$ ⁹¹. Comme déjà indiqué, le temps de Hubble $t_H = H^{-1}$ fournit le temps caractéristique d'évolution significative des distances dans le cosmos.

Dans le cas cosmologique général, les deux procédés se superposent et l'abondance d'une espèce arbitraire est régie par une équation de type :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \Gamma(n - n_e). \quad (122)$$

Cette équation demande en toute généralité à être résolue numériquement. Toutefois 2 cas limites se détachent facilement :

- si $H \gg \Gamma$: l'expansion est beaucoup plus efficace que les réactions. C'est un régime où le second terme de l'équation 122 peut être négligé, on retrouve $n \sim a^{-3}$ et le nombre de particules dans un volume en expansion donné est *constant*. On dit que l'espèce est *gelée*.
- si $H \ll \Gamma$: on peut négliger la dilution cosmologique et les temps de retour à l'équilibre sont très courts. L'abondance est celle de l'équilibre, qui est éventuellement une fonction du temps $n \sim n_e(a)$.

90. on note que l'équation différentielle est similaire à celle décrivant la dynamique d'un ressort

91. le facteur 3 est typique de la dilution cosmologique d'une quantité *volume*, qui dépend du cube (donc à la puissance 3) de la longueur

En règle générale H et Γ sont tous deux fonctions du temps et Γ a tendance à dominer au début de l'histoire de l'Univers (quand les densités et températures sont très élevées) pour être ensuite dominé par H . En effet à ces époques, la dynamique est dominée par le rayonnement et

$$H \sim \frac{1}{a^2} \quad (123)$$

tandis qu'un taux de réaction est du type $\Gamma \sim \sigma v n$ où $v \sim a^{-i}$ est une vitesse typique des réactifs, σ une section efficace et $n \sim a^{-3}$ une densité volumique de réactifs. En supposant une section efficace de réaction constante, on a une dépendance de Γ en facteur d'expansion a qui est au moins de l'ordre de :

$$\Gamma \sim \frac{1}{a^{3+i}}. \quad (124)$$

La vitesse décroît avec la température, dont on verra qu'elle décroît avec le paramètre d'expansion a et donnant $i > 0$: les taux de réactions dépendent plus fortement de l'histoire d'expansion pour dominer puis être dominés par H au cours de la croissance de a . Par conséquent l'histoire typique de l'abondance d'une espèce suit d'abord celle de l'équilibre avant d'être gelée et n'être plus modifiée que par la dilution cosmologique. Cette transition porte le nom de "gel" ou *freeze-out* en anglais.

Statistique d'un gaz

La question qui se pose à présent est celle de déterminer l'abondance à l'équilibre d'une espèce (hydrogène, photons, neutrinos, etc....). Celle-ci nous est donnée par la physique statistique.

On se place dans le cas simple d'une particule libre⁹², auquel cas son énergie ne dépend que de son impulsion \vec{p} , ou bien de façon équivalente que de son vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ ⁹³ :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = \hbar^2 c^2 k^2 + m^2 c^4. \quad (125)$$

Plus précisément l'énergie d'une particule ne dépend que de la norme k du vecteur d'onde. Par conséquent, l'ensemble des points dans l'espace des \vec{k} qui fournissent une énergie donnée sont à l'intérieur d'une coquille de rayon k . De plus, le peuplement de cet espace est quantifié : en effet les nombres d'ondes accessibles (i.e. les impulsions accessibles) doivent être de la forme $\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)2\pi/L$ où L désigne la taille de la "cuve" dans laquelle s'effectue l'étude et où le triplet est un triplet de valeurs entières. Par conséquent, une particule ne peut se trouver que sur les nœuds d'une maille pavant cet espace.

92. non soumise à un potentiel extérieur

93. ici $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ désigne la constante de Planck réduite

Ces considérations nous permet d'évaluer le *nombre d'états accessibles à une énergie E donnée*. Ce nombre est donné par le rapport entre le volume de l'espace des \vec{k} à énergie E donnée (la coquille) :

$$4\pi k^2 dk \quad (126)$$

et le volume occupé par un état unique (le volume de la maille) :

$$(2\pi/L)^3. \quad (127)$$

On obtient alors le nombre d'états accessible à une particule libre d'énergie E à dE près

$$N(E)dE = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3}. \quad (128)$$

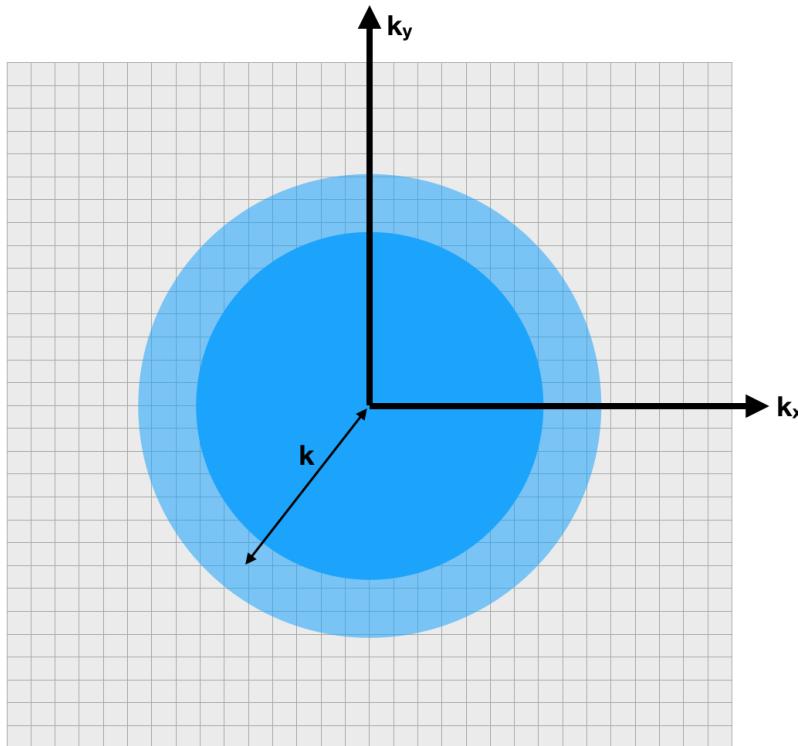


FIGURE 14: Comment calculer le nombre d'états d'énergie donnée ? Les états sont quantifiés et 'positionnés' sur une maille correspondant à des valeurs de k_x et k_y multiples de $2\pi/L$. Tous les états de même énergie partagent le même module k : leur nombre est donc donné par la surface de la coquille ($2\pi k dk$) divisé par la surface d'un élément de la maille ($(2\pi/L)^2$). A 3D, ce nombre devient $4\pi k^2 dk / (2\pi/L)^3$.

L'équation 128 n'est pas suffisante pour calculer l'abondance d'une particule : elle nous renseigne sur la quantité d'états accessible mais reste à déterminer combien de particules résident sur un état donné. Le *niveau d'occupation* dépend du type de particule : si celle-ci est un fermion⁹⁴ alors elle est soumise au principe d'exclusion de Pauli qui stipule qu'un état quantique donné ne peut être occupé, au plus, que par une particule. Si celle-ci est un boson⁹⁵, cette restriction

94. une particule dont le spin est demi-entier comme l'électron ou le proton

95. une particule dont le spin est entier, comme le photon

ne s'applique pas. Plus précisément, les niveaux d'occupation sont donnés par les statistiques de Fermi-Dirac et Bose-Einstein

$$n(E) = \frac{g(E)}{\exp(\beta(E - \mu)) \pm 1}. \quad (129)$$

Le signe positif (resp. négatif) au dénominateur désigne la statistique de Fermi-Dirac (resp. Bose-Einstein). La quantité $\beta = 1/k_B T$ dépend est une représentation de la température, μ est le potentiel chimique de l'espèce étudiée et $g(E)$ est la dégénérescence d'un état d'énergie E . Cette dernière quantité dépend également de la particule considérée. On note que dans le cas d'une statistique de Fermi-Dirac, s'appliquant aux fermions, $n(E) \leq g(E)$ ⁹⁶ : cela découle du principe d'exclusion de Pauli l'occupation est au mieux égale à la dégénérescence du niveau d'énergie. A l'inverse les bosons, soumis à la statistique de Bose-Einstein, peuvent avoir des niveaux d'occupation arbitrairement grands.

A ce stade, l'abondance d'une particule peut être déterminée et le nombre total de particules d'une espèce donnée dans une cuve de volume $V = L^3$ à température T est

$$N = \int_{E_{\min}}^{\infty} n(E) N(E) dE. \quad (130)$$

Notons que cette intégrale porte sur toutes les énergies, depuis la plus faible jusqu'aux infinis. Cette valeur plancher de l'énergie dépend de la particule considérée. Par exemple pour une particule de masse nulle⁹⁷, on aura $E_{\min} = 0$ tandis que pour une particule massive on aura $E_{\min} = mc^2$, correspondant à un état de repos (et donc d'impulsion minimale) absolu.

96. avec un dénominateur supérieur à 1

97. telle le photon

Les photons

Le cas des photons permet d'illustrer le calcul de la section précédente tout en étant d'une grande pertinence cosmologique : ils appartiennent aux particules dites relativistes et c'est elles qui dominent le budget numérique actuel de l'Univers.

Le calcul de l'abondance des photons nécessite de préciser d'abord les quelques nombres nécessaires à sa bonne conduite. Dans un premier temps, les photons sont des particules de masse nulle, donc leur énergie est faite d'impulsion pure :

$$E_\gamma = pc = \hbar c k. \quad (131)$$

On rappelle que la densité d'états accessibles possédant une norme k donnée a pour expression

$$\frac{N(k)dk}{V} = \frac{4\pi k^2 dk}{V} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 = \frac{4\pi (E/\hbar c)^2 dE}{\hbar c V} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3. \quad (132)$$

Par conséquent la densité volumique d'états d'énergie E accessible aux photons est donnée par :

$$\frac{N(E)dE}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{E^2 dE}{(\hbar c)^3}. \quad (133)$$

De plus le photon est sa propre antiparticule et participe par exemple aux équations de désintégrations :

$$A + \bar{A} \leftrightarrow \gamma + \gamma. \quad (134)$$

Or $\mu_A = -\mu_{\bar{A}}$ donc $\mu_\gamma = 0$. Enfin le photon autorise deux hélicités par état d'énergie et possède un spin entier et obéit donc à la statistique de Bose-Einstein. L'état d'occupation d'un niveau d'énergie E est donc donné par :

$$n(E) = \frac{2}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}. \quad (135)$$

D'où son abondance à l'équilibre :

$$n_\gamma = \frac{1}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}. \quad (136)$$

On reconnaît dans l'intégrale la distribution de Planck, qui par définition décrit la distribution spectrale d'énergie d'un gaz de photons à l'équilibre, comme présent par exemple dans un corps noir. Cette intégrale peut être conduite analytiquement conduisant à⁹⁸ :

$$n_\gamma \approx 0.244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 m^{-3}. \quad (137)$$

Aujourd'hui la température du gaz de photons du cosmos est de l'ordre de 2.73 K, correspondant à une densité de photons actuelle de :

$$n_\gamma \approx 410 \text{ cm}^{-3}. \quad (138)$$

Pour mémoire, la densité d'atomes d'hydrogène actuelle (espèce qui domine la population de baryons) est de l'ordre de l'atome par m^3 , on est donc dans un rapport de 10^{8-9} , extrêmement en faveur des photons. Une évaluation plus précise du rapport baryon/photon η est donnée par :

$$\eta \approx 5 \times 10^{-10} \frac{\Omega_b h^2}{0.02} \quad (139)$$

Cette surabondance de lumière résulte du processus de désintégration des particules massives que nous étudieront par la suite.

98. en utilisant l'expression de la fonction zêta de Riemann avec $\zeta(3) = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.

Histoire de la Température

Si l'on examine à nouveau l'expression de la densité de photon (Eq. 137), on constate que celle ci varie en $n_\gamma \sim T^3$. Ainsi si l'on

considère une cuve de volume V elle contient à un redshift z donné le nombre de photons suivant :

$$N_\gamma(z) \sim V(z)T(z)^3. \quad (140)$$

Or compte tenu de leur gigantesque domination numérique, ce nombre de photons doit être *constant* : aucun processus (absorption/émission, à priori par des baryons extrêmement peu nombreux par rapport aux photons) ne peut changer N_γ de façon significative. Toutefois, une cuve de taille donnée verra ses limites évoluer sous l'effet de la dynamique de l'Univers. En particulier $V = V_0a^3$ d'où la loi d'évolution de la température des photons

$$T_\gamma = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z), \quad (141)$$

avec $T_0 = 2.73K$. De plus compte tenu de la domination quasi totale des espèces relativistes sur le bilan numérique des particules du cosmos (comme illustrée par la valeur de η), on peut presque considérer que cette température est celle du cosmos.

Une autre démonstration de cette relation repose sur le fait que le spectre doit conserver sa forme de courbe de Planck, y compris sous l'effet de l'expansion, car c'est effectivement ce qui est observé aujourd'hui. Or le nombre de photons qui tombe dans une bande d'énergie dE est, à une constante multiplicative près⁹⁹,

99. avec $V = a^3V_0$ et $E = \frac{E_0}{a}$.

$$V \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1} = V_0 \frac{E_0^2 dE_0}{e^{\frac{E_0}{k_B a T}} - 1}. \quad (142)$$

Pour que le spectre reste inchangé, il faut 'neutraliser' la dernière dépendance en $a(t)$ qui se trouve dans le terme de l'exponentielle, en imposant que $a(t)T$ reste constant, redonnant ainsi l'expression précédente.

Aujourd'hui l'Univers est froid, mais par le passé celui-ci était plus chaud, en plus d'être plus dense comme expliqué dans les chapitres précédents. Notons pour finir que les photons du cosmos ne sont plus à l'équilibre thermodynamique à proprement parler depuis la production du fond diffus cosmologique : aujourd'hui ces photons n'interagissent plus avec les baryons, interactions qui auraient permis de maintenir le bain de photons à l'équilibre. Toutefois dans le passé plus chaud et plus dense, ces interactions existaient et un régime de fort couplage permettait de garantir un couplage matière rayonnement suffisant pour que la situation "thermodynamique" de l'Univers s'apparente à celle d'un corps noir. Cette situation a cessé (380 000 ans après le Big Bang comme nous le verrons) mais la domination des espèces relativistes est telle qu'aucun processus n'est en mesure de changer significativement la fonction de distribution des

photons : en l'absence de processus permettant cette modification, le gaz de photons a pu conserver la mémoire d'une période antérieure d'équilibre thermodynamique.

Par la suite nous considérerons des époques durant lesquelles le bilan énergétique de l'Univers est dominé par les espèces relativistes durant lesquelles le facteur d'expansion varie en :

$$a \sim \sqrt{t}. \quad (143)$$

Il en découle les lois d'échelles suivantes¹⁰⁰ :

$$T \approx \frac{10^{10} K}{\sqrt{t(\text{sec})}} \approx \frac{1}{k_B} \frac{1 \text{ MeV}}{\sqrt{t(\text{sec})}}. \quad (144)$$

Ces lois permettent déjà de se faire une idée des hautes températures en place durant les phases primordiales de l'Univers et donc permettent d'anticiper que des processus très énergétiques sont en mesure d'être effectifs. Par exemple les énergies typiques du LHC sont de l'ordre du TeV = 10^6 MeV : elles correspondent aux énergies typiques dans un Univers de 10^{-12} secondes. De plus ces lois d'échelles permettent d'anticiper que certaines époques joueront un rôle pour certaines particules quand l'énergie typique du cosmos est de l'ordre de leur énergie de masse : par exemple l'électron possède une énergie de masse proche du MeV (511 keV exactement) et donc il est probable que son abondance soit significativement modifiée lorsque l'Univers aura un âge correspondant à cette masse (à savoir de l'ordre de la seconde).

^{100.} on rappelle que le MeV désigne 1 million d'électrons-volts et constitue une énergie équivalente à $1 \text{ MeV} \sim 1.6 \times 10^{13} \text{ J}$

Évolution des abondances

Pour une "particule" quelconque, l'expression précise de son abondance va dépendre de son caractère relativiste ou non. Il existe des particules pour lesquelles ce caractère reste inchangé au cours du temps, comme les photons par exemple, mais en général, une particule aura tendance à être considérée comme relativiste aux premiers instants de l'Univers puis évoluera plus tard vers le régime non-relativiste, avec comme conséquence une variation, parfois radicale, de son abondance au cours du temps.

L'énergie d'une particule libre est donnée par :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (145)$$

Une particule est dite *ultra-relativiste* si son énergie de masse est considérée comme négligeable devant son énergie cinétique, $pc \gg mc^2$, auquel cas $E \sim pc$. C'est notamment le cas du photon, étudié en détail dans la section précédente. A l'inverse, une particule est

dite *non-relativiste* si son énergie de masse constitue l'essentiel de son énergie totale $pc \ll mc^2$. Cela correspond au fluide "matière" développé dans le chapitre précédent et dans ce cas $E \sim mc^2(1 + p^2/2m) \sim mc^2$. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces expressions pour l'énergie dans l'équation 130 va conduire à des expressions différentes des abondances.

Cas ultra-relativiste Ce cas correspond à celui étudié précédemment pour les photons : en effet, si l'on parle du principe que la masse d'une particule est négligeable, elle en devient quasi similaire à un photon et son abondance n'en diffère que par le facteur de dégénérence et par la statistique à utiliser (BE ou FD). En conséquence, l'abondance d'une particule dans ce régime ultra-relativiste sera proche de celle des photons. Un calcul précis donne l'abondance suivante pour un *boson*

$$n_B = n_\gamma \frac{g_B}{2}, \quad (146)$$

tandis que si la particule étudiée est un fermion

$$n_F = n_\gamma \frac{3g_F}{8}. \quad (147)$$

A un facteur proche de l'unité près, l'abondance d'une particule relativiste est essentiellement celle des photons $n \sim n_\gamma$.

Cas non relativiste Dans ce régime, l'énergie d'une particule est la somme de l'énergie cinétique classique et de son énergie de masse, $E \sim p^2/2m + mc^2$ et l'occupation statistique des énergies (cf. eq. 129) devient la statistique de Maxwell-Boltzmann, donnée par¹⁰¹ :

$$ge^{-\frac{E-\mu}{k_B T}}. \quad (148)$$

L'abondance est alors donnée par l'expression suivante

$$n = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} e^{-\frac{mc^2-\mu}{k_B T}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp. \quad (149)$$

Le calcul de son abondance donne une quantité qui dépend directement de la température¹⁰²

$$n = ge^{\frac{\mu}{k_B T}} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{k_B T}} \sim e^{-\frac{mc^2}{k_B T}}. \quad (150)$$

Compte tenu de l'évolution de la température, qui décroît avec le temps, l'abondance décroît de façon exponentielle. La réaction typique permettant cette décroissance est une réaction de *désintégration* :



avec un déplacement de l'équilibre vers la droite de cette équation, i.e. vers le réservoir de photons.

101. généralement cette statistique devient valable quand $e^{\frac{\min E - \mu}{k_B T}} \ll 1$. Or on verra ci-dessous que ce régime non relativiste est précisément décrit par une température faible devant l'énergie de masse $k_B T \ll mc^2$ avec $\min E = mc^2$

102. on note que l'intégrale porte sur ∞ alors qu'elle devrait être bornée pour satisfaire l'hypothèse non-relativiste. Toutefois, l'intégrande est une gaussienne dont la décroissance est très rapide : l'erreur est donc faible et permet de reconnaître l'expression de la (moitié de la) variance d'une distribution normale.

Transition Se pose alors la question de la détermination du régime dans lequel se trouve une particule. Il s'avère que la température d'un gaz de particule est liée à l'énergie cinétique et $E_c \sim k_B T$. Par conséquent à haute température, $k_B T \gg mc^2$, une particule tend à être ultra-relativiste¹⁰³ tandis qu'à basse température $k_B T \ll mc^2$, celle-ci tend à être non relativiste. On sait également que la température de l'Univers décroît au cours du temps, donc pour une particule massive donnée, il se trouvera toujours une époque reculée où cette particule est relativiste, suivie par une époque où elle basculera dans le régime non-relativiste. La transition entre les deux régimes opère lorsque l'énergie cinétique typique est de l'ordre de l'énergie de masse

$$k_B T(z^*) = mc^2. \quad (152)$$

Sachant que la température du rayonnement varie en $T_\gamma \sim (1+z)$ et qu'à l'équilibre un fort couplage existe, la transition opère à un redshift z^* donné par :

$$1 + z^* = \frac{mc^2}{k_B T_0}. \quad (153)$$

On constate ainsi qu'une particule passera dans le régime non relativiste d'autant plus rapidement qu'elle sera massive. A l'inverse, une particule de masse nulle ne pourra jamais, comme attendu, basculer dans le régime non relativiste.

Abondances résiduelles

En résumé, l'abondance à l'équilibre d'une particule passe par 2 étapes distinctes :

- à grand $z > z^*$, nous avons $k_B T \gg mc^2$ et $n \sim n_\gamma$
- à bas $z < z^*$, nous avons $k_B T \ll mc^2$ et l'abondance décroît de façon exponentielle. Elle se désintègre et son abondance devient très inférieure à l'abondance des photons, $n \ll n_\gamma$.

Or nous avons vu précédemment que les réactions qui permettent le maintien de cet équilibre vont "geler"¹⁰⁴ et peuvent découpler une espèce de la "soupe" de particules en interaction : après ce gel, l'abondance d'une espèce va rester celle de l'équilibre au moment du découplage. Ce gel peut opérer avant ou après z^* . Si une particule gèle pour $z > z^*$, elle se trouvait dans son régime relativiste, en grande abondance. Une particule de ce type va rester très abondante jusqu'à nos jours et c'est par exemple le cas des neutrinos. Si à l'inverse elle gèle pour $z < z^*$, alors celle-ci avait déjà entamé sa désintégration durant laquelle son abondance décroît de façon exponentielle. Par conséquent la particule est en très faible abondance et aujourd'hui son abondance doit être très faible devant celle des

^{103.} on a la vitesse $v \sim \sqrt{k_B T}$ qui tend à devenir non-négligeable devant c .

^{104.} appelé aussi *Freeze-out*

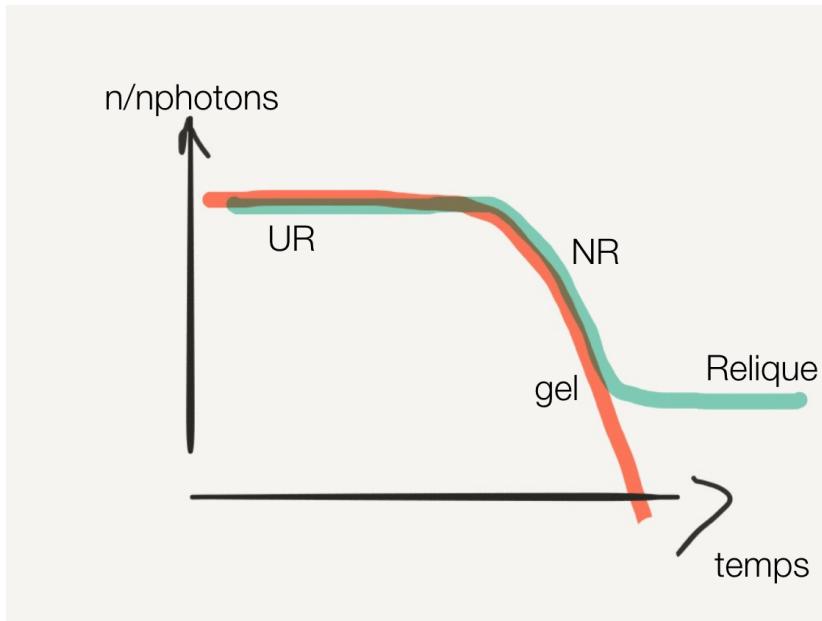


FIGURE 15: Évolution schématique de l'abondance d'une particule relique. Dans le régime ultra-relativiste (UR), la particule se comporte comme un photon et son abundance est similaire. Le passage au régime non relativiste (NR) provoque la décroissance de l'abondance, exponentielle, typique d'une particule massive. Son abundance deviendrait négligeable sans le 'gel' (freeze-out) : la dilution cosmologique ainsi que l'absence de réactifs ou la baisse de température vont stabiliser la densité numérique de la particule à une abundance non nulle.

photons (et donc des neutrinos). C'est le scénario essentiellement de toutes les particules massives, que l'on appelle aussi *particules reliques* car elles auront survécu à ce processus.

Asymétrie Matière-Antimatière

Pour conclure ces considérations sur la physique de l'Univers chaud et énergétique, quelques mots sur l'asymétrie matière-antimatière. Les baryons ont un nombre quantique baryonique de valeur +1 et on peut leur associer des *antibaryons*, de nombre baryonique -1 : le proton et le neutron possèdent ainsi des antibaryons que sont l'antiproton et l'antineutron¹⁰⁵. Au delà de ces considérations sur ces nombres quantiques, l'assemblage d'antibaryons permet de faire de l'antimatière qui en tout autre point ressemble beaucoup à la matière normale : ces 2 types opposés partagent par exemple la même masse et toute réaction de type matière peut en principe être réalisée dans sa version antimatière¹⁰⁶.

Lorsque les particules reliques sont en phase de désintégration et voient leurs abondances chuter de façon exponentielle, l'un des canaux privilégié de cette baisse est précisément le processus d'annihilation matière-antimatière. Soit une particule A et son antiparticule \bar{A} , leur éventuelle rencontre conduit à la production d'énergie pure sous forme de photons :



105. dans le cas de l'antiproton, cela se manifeste notamment par une charge électrique opposée et donc négative

106. on parle de réaction conjuguée

Ce processus est extrêmement efficace et on peut montrer qu'en cas d'abondance initiale égale entre particules et antiparticules, l'abondance des particules reliques devraient être de l'ordre de :

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 10^{-18}. \quad (155)$$

Or nous venons de voir que l'ordre de grandeur observé actuellement du rapport baryons sur photons $\eta \sim 10^{-9}$ est environ 10^9 plus grand. Ceci suggère fortement que le gel des abondances des baryons a été dicté par l'absence de réactifs de type antibaryons plutôt que par une perte d'efficacité de la réaction, avec un excès en faveur de la matière de l'ordre de :

$$\frac{n_A - n_{\bar{A}}}{n_A + n_{\bar{A}}} \sim 10^{-9}. \quad (156)$$

Par ailleurs, nous constatons autour de nous une absence d'abondance significative d'antimatière, qui autrement se manifesterait par la production de photons gamma à très haute énergie lors de rencontre avec la matière¹⁰⁷. Tout indique qu'il existait une asymétrie dans les abondances initiales de particules et d'antiparticules, faible mais non nulle et suffisante pour que notre Univers soit aujourd'hui dominé par la matière.

Ceci étant posé, comment expliquer une telle asymétrie ? Une première possibilité est qu'il s'agisse simplement d'une des caractéristiques de notre Univers. Une seconde possibilité est qu'il existe des mécanismes qui sont capables de transformer une situation initialement symétrique en situation présentant une légère surabondance de matière : ces processus auraient été à l'œuvre lors d'un événement que l'on nomme la *Baryogénèse*. Aujourd'hui, nous ne savons pas quand elle a eu lieu¹⁰⁸ et sous quelles modalités exactes. Par contre dès 1967, Sakharov posa 3 conditions qui doivent être satisfaites à minima pour que la Baryogénèse ait pu prendre place :

1. il faut des réactions qui ne conservent pas le nombre baryonique :



C'est une condition minimale pour qu'une situation symétrique puisse évoluer vers une asymétrie.

2. il faut que les réactions conjuguées aient des taux de réactions différents.



En effet, pour une réaction qui ne conserve pas le nombre baryonique, la réaction conjuguée est également possible : si elles sont toutes aussi efficaces, le nombre baryonique global reste nul et la symétrie n'est pas brisée.

^{107.} les photons produits par les annihilation emportent une énergie mc^2 , donc de l'ordre du GeV pour des protons-antiprotons par exemple.

^{108.} si elle a eu lieu

3. si les 2 conditions précédentes sont réalisées, nous obtenons une population en C et \bar{C} asymétrique. Toutefois, il ne faut pas que l'équilibre thermodynamique soit maintenu : comme vu précédemment l'abondance d'une particule à l'équilibre ne dépend que de sa masse, qui est identique pour les 2 types de matière. Il faut figer le déséquilibre créé et par exemple empêcher que nos réactions puissent retourner à l'état initial symétrique :

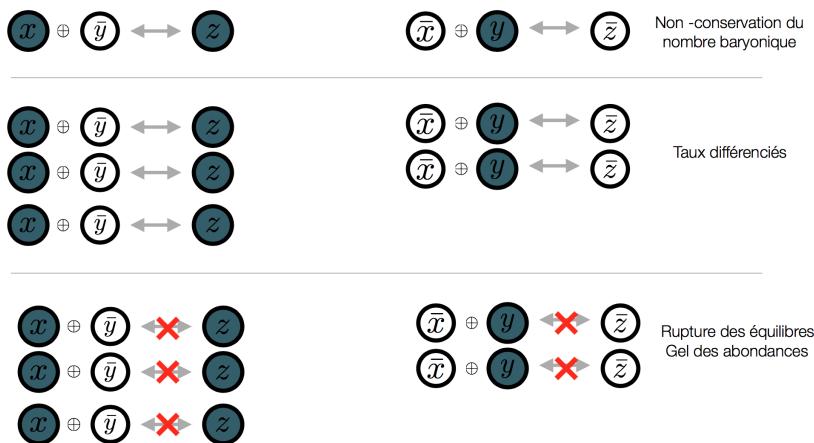


FIGURE 16: Les conditions de Sakharov, nécessaires à l'existence d'une Baryogénèse à l'origine de l'asymétrie matière-antimatière. Il faut des réactions qui ne conservent pas le nombre de baryons, qui opèrent à des taux différents quand elles sont réalisées avec de l'antimatière et un procédé qui gèle l'équilibre thermodynamique et conserve l'asymétrie conservée. Initialement, l'abondance des particules x, \bar{x}, y, \bar{y} présentait une symétrie matière-antimatière, symétrie qui est brisée pour l'abondance finale des particules z et \bar{z} .

Il s'avère que ces 3 conditions sont réunies dans la nature. Il existe des réactions qui ne conservent pas le nombre baryonique (condition 1), les taux de réaction des transformations conjuguées sont différencier (condition 2)¹⁰⁹ et pour finir l'Univers, en particulier à cause de la baisse de température induite par l'expansion, fait régulièrement sortir des particules de l'équilibre thermodynamique en gelant les interactions. Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes : aujourd'hui la Baryogénèse apparaît comme une possibilité de principe mais dont on ne sait pas actuellement si elle a eu lieu et dans quelles conditions.

109. c'est notamment ce qui est testé lors des mesures de violations de conjugaison-parité (CP) dans les grands accélérateurs

Histoire thermique de l'Univers et Nucléosynthèse primordiale

Dans ce chapitre nous allons voir comment les processus à l'œuvre dans l'Univers chaud vont conduire aux abondances observées actuellement des principales particules élémentaires et des éléments légers. Ces processus se déroulent pour $t < 3$ minutes, dans un Univers dont la dynamique est dominée par les espèces relativistes. On rappelle que la température décroît avec le temps, tout comme les énergies $k_B T$ caractéristiques associées¹¹⁰ :

$$T \approx \frac{10^{10} K}{\sqrt{t(\text{sec})}} \approx \frac{1}{k_B} \frac{1 \text{ MeV}}{\sqrt{t(\text{sec})}}. \quad (162)$$

On note que ces températures varient en $1/\sqrt{t}$, reflétant ainsi la dépendance en $1/a$ de la température du CMB et le comportement en $a \sim \sqrt{t}$ du facteur d'expansion dans les époques dominées par le rayonnement.

^{110.} on rappelle que le *MeV* désigne 1 million d'électrons-volts constitue une énergie équivalente à $1 \text{ MeV} \sim 1.6 \times 10^{13} \text{ J}$

Quelques étapes

On rappelle que 2 processus sont en compétition : la désintégration qui tend à faire décroître de façon exponentielle l'abondance d'une particule donnée et le gel qui tend à figer l'abondance de cette particule en la soustrayant au bain de réactions environnant. La séquence suivante donne un aperçu de la cascade de processus qui opèrent lors de la baisse de température de l'Univers, induite par l'expansion, $T = T_0(1+z)^{111}$. La séquence suivante démarre au confinement des quarks dans les nucléons.

- $T \sim 3 \cdot 10^{12} \text{ K}$: ($t \sim 10^{-5} \text{ sec}$, $kT \sim 250 \text{ MeV}$) : confinement des quarks. Particules présentes $p, n, \pi^+, \pi^0, \pi^-, e, \bar{e}, \mu, \bar{\mu}$ + neutrinos ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$).

Les particules $\tau, \bar{\tau}, \bar{p}, \bar{n}$ ¹¹² sont déjà annihilées à ce stade et les neutrinos associés $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ sont gelés.

- $T \sim 10^{12} \text{ K}$: désintégration des pions

^{111.} Cette température est celle du rayonnement de fond diffus avec $T_0 \sim 2.73 \text{ K}$

^{112.} les τ , malgré leur statut de leptons qui devrait les qualifier comme légers sont des particules substantiellement massives $mc^2 \sim 1.8 \text{ GeV}$.

- $T \sim 10^{11}$ K : désintégration des muons et gel des neutrinos associés
- $T \sim 6 \cdot 10^9$ K : ($kT \sim 500$ keV, $t \sim 1$ s) désintégrations des électrons. Gel des ν_e et gel des abondances relatives de n et p .
- $T \sim 10^9$ K : démarrage de la nucléosynthèse
- $T \sim 3000$ K : Recombinaison, production du fond diffus

Entropie et fond neutrino Parmi les étapes mentionnées précédemment on constate que les neutrinos se découpent de la 'soupe cosmique' en des époques très reculées, environ 1 seconde après le Big-Bang, et toujours dans leur régime relativiste. Comme expliqué au chapitre précédent, le découplage se met en place lorsque le taux d'expansion, codé par le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a$, devient plus important que le taux de réaction de l'interaction Γ que l'on cherche à étudier. Dans ces époques dominées par le rayonnement, le paramètre de Hubble est donné par :

$$H^2 \sim H_0^2 \frac{\Omega_r}{a^4}. \quad (163)$$

Durant ces époques dominées par le rayonnement le facteur d'expansion croît comme l'inverse de la température, $a \sim 1/T$ et le taux d'expansion varie en :

$$H \sim H_0 T^2 \sqrt{\Omega_r} \quad (164)$$

avec $H_0 \sim 70 \text{ km/s/Mpc}$ et $\Omega_r \sim 10^{-4}$. Par ailleurs les neutrinos interagissent avec les électrons en accord avec les processus d'interaction faible dont le taux d'interaction¹¹³ typique varie comme :

$$\sigma v \sim G_F^2 E^2 \sim G_F^2 T^2 \quad (165)$$

où G_F désigne la constante de Fermi. Comme la densité d'une espèce relativiste varie comme T^3 , le taux de réaction impliquant les neutrinos varie très rapidement avec la température, et décroît plus rapidement que le taux d'expansion au cours du temps¹¹⁴ :

$$\Gamma = n_\nu \sigma v \sim G_F^2 T^5. \quad (166)$$

Il arrive donc un instant où les neutrinos se découpent des électrons, donné numériquement par :

$$T \sim 1 \text{ MeV} \quad (167)$$

donc dans un Univers âgé environ $t = 1$ sec .

Par conséquent, lors du passage des électrons dans le régime non relativiste (qui opère plus tard pour $T \sim 511 \text{ keV}$), ces mêmes neutrinos ne peuvent donc servir de canaux de désintégration car ils

113. défini par le produit de la section efficace σ et de la vitesse typique de rencontre des particules v pour conduire à un volume d'interaction par seconde

114. on rappelle que la température décroît avec le temps

n'interagissent plus avec ceux-ci via l'interaction faible. Cette désintégration se fait donc uniquement suivant :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma \quad (168)$$

Ce processus opère à entropie constante, donc l'entropie des électrons est reversée sur les photons et non vers le neutrinos. On peut montrer que les densités d'entropie de bosons et fermions sont reliées par :

$$s_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} s_B \quad (169)$$

Par conséquent la nouvelle entropie des photons après l'annihilation des électrons est :

$$s'_\gamma = s_\gamma + s_{e+} + s_{e-} = \frac{11}{4} s_\gamma. \quad (170)$$

De plus l'entropie d'une espèce relativiste est une fonction directe du cube de sa température : en effet l'entropie varie comme le nombre de particules, avec $n \sim T^3$ comme vu précédemment¹¹⁵. Donc nous avons d'une part une espèce relativiste qui aura évolué de façon passive (les neutrinos avec $s'_\nu = s_\nu$) et une autre qui aura augmenté son entropie grâce aux électrons. Donc en fin de désintégration :

$$s'_\gamma = \frac{11}{4} s_\nu \quad (171)$$

ou bien

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_\gamma \quad (172)$$

Le gaz de neutrino doit être plus froid que celui de photons. Le fond neutrino peut en principe être mesuré aujourd'hui (même si cela reste encore pratiquement impossible) et doit donc présenter une température de $T_{\nu,0} = 1.95K$. L'enjeu est important : le fond diffus cosmologique de rayonnement nous permet de cartographier l'Univers âgé de 380 000 ans, celui des neutrinos nous permettrait d'atteindre des périodes bien plus reculées, de l'ordre de la seconde après le Big-Bang.

¹¹⁵. alternativement on a l'entropie qui est le rapport de l'énergie interne sur la température $S \sim \frac{U}{T}$ avec $U \sim T^4$ pour un corps noir par exemple.

Synthèse de l'hélium

La synthèse de l'hélium constitue l'évènement majeur de la production des éléments légers lors de la phase chaude du Big-Bang. L'abondance finale de cet élément va essentiellement dépendre du matériau à disposition et donc de la quantité de nucléons disponibles.

Rapport neutron/proton Environ 1 seconde après le Big-Bang, les nucléons (protons et neutrons) ne sont plus relativistes et leurs abondances (notées p et n respectivement pour les protons et neutrons) sont régies par une statistique de type Maxwell-Boltzmann

$$p \approx n \sim e^{-\frac{m_p^2}{k_B T}}. \quad (173)$$

Les abondances des deux nucléons suivent des évolutions similaires car leurs masses sont proches : le proton est constitué du triplet de quarks uud et possède une masse de $m_p = 938.27$ MeV, tandis que le neutron est composé du triplet udd , pour une masse $m_n = 939.56$ MeV. En toute rigueur néanmoins, l'écart de masse $\Delta m = m_n - m_p = 1.3$ MeV suffit pour favoriser l'abondance du proton par rapport à celle du neutron, dont l'évolution en abondance est plus rapide. Le rapport d'abondance est donné par :

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{\Delta m}{k_B T}}, \quad (174)$$

Le gel des réactions impliquant neutrons et protons se produit environ 2 secondes après le Big-Bang. A cet instant le rapport neutrons sur protons vaut :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{gel}} \approx \frac{1}{6}. \quad (175)$$

Synthèse du Deutérium Le Deutérium est un noyau composé d'un proton et d'un neutron¹¹⁶ et il fait office d'étape intermédiaire vers la production d'hélium. La production de cet élément se fait via la réaction :



cette équation doit satisfaire l'équilibre des potentiels chimiques :

$$\mu_p + \mu_n = \mu_D(+0). \quad (177)$$

A partir de l'équation 150, ces potentiels chimiques peuvent être extraits pour chaque espèce. En appliquant alors l'égalité des potentiels on obtient l'équation de Saha

$$X_D = n \times \frac{g_D}{g_n g_p} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{m_D}{m_n m_p} \right)^{3/2} \times e^{\frac{B}{kT}}, \quad (178)$$

où $X_D = \frac{n_D}{n}$ est le rapport deutérium sur proton et $B = 2.22$ MeV est l'énergie de liaison de l'élément. Il est d'usage d'exprimer l'abondance de neutrons n en fonction de l'abondance de photons $n \sim \eta n_\gamma$:

$$n \approx 0.244\eta \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3. \quad (179)$$

116. c'est un isotope de l'hydrogène à partir duquel est fabriquée l'eau lourde D_2O par exemple

La dépendance globale de l'abondance du deutérium peut alors se résumer à :

$$X_D \sim (k_B T)^{3/2} \eta e^{\frac{B}{k_B T}}. \quad (180)$$

Il apparaît une énergie caractéristique donnée par l'énergie de liaison $B \approx 2$ MeV : à première vue, en se plaçant quelques secondes après le Big-Bang, la température a suffisamment baissé pour que le deutérium devienne suffisamment abondant, via le terme exponentiel de l'équation de Saha. Toutefois les réactifs sont peu abondants ou à l'inverse les photons sont extrêmement nombreux¹¹⁷ et empêchent un déplacement significatif de l'équation 176 vers la production de deutérium : dans l'équation 180 cela se manifeste par le terme $\eta \ll 1$ qui amortit le terme exponentiel. Il faut donc attendre une évolution significative de la température pour que finalement le deutérium puisse être produit en quantité abondante. Ce blocage au niveau du deutérium au cours de la chaîne de synthèse de l'hélium constitue un 'goulot d'étranglement', on parle de *deutérium bottleneck*.

radioactivité β En pratique il faut attendre environ 100 secondes, au bout duquel $k_B T \sim 0.1$ MeV pour que l'abondance de deutérium soit suffisante pour poursuivre la synthèse des éléments légers. Pendant ce délai, le rapport n/p continue de décroître sous l'effet de la radioactivité β qui conduit à la transformation de neutrons en protons via l'émission d'électrons. La durée de vie du neutron étant de l'ordre de 15 minutes, la modification du rapport est faible mais réelle. A la fin du deutérium bottleneck, nous avons :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{bottleneck}} \sim \frac{1}{7} \quad (181)$$

synthèse de l'hélium et autres éléments légers Le deutérium devenant disponible, l'hélium peut être synthétisé. L'énergie de liaison de ce noyau est très importante $B_{He} \sim 30$ MeV, la synthèse est quasi immédiate et quasi totale quand les températures typiques sont de l'ordre de $k_B T < 0.1$ MeV : l'intégralité des neutrons se trouvent piégés dans les noyaux d'hélium (2 protons + 2 neutrons). Disposant à cet instant de 7 protons pour chaque neutrons, cela conduit à une fraction de masse sous forme d'hélium donnée par

$$Y_{He} \sim 25\% \quad (182)$$

En nombre, l'hélium représente seulement 10% des noyaux, le reste étant quasi-exclusivement des protons, i.e. des noyaux d'hydrogène.

Quelques éléments supplémentaires sont également produits. Par exemple le Li⁷ est un élément produit en faible quantité à partir de l'hélium, ainsi que He³ qui est un résidu des réactions de production

¹¹⁷. on rappelle le rapport baryon sur photon $\eta \sim 10^{-9}$.

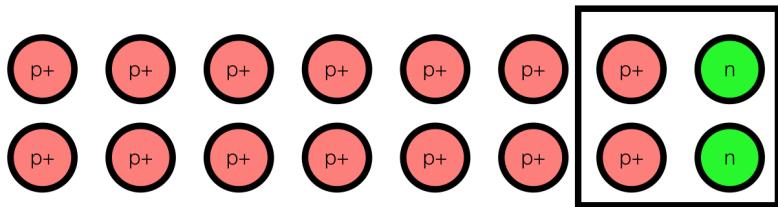


FIGURE 17: La situation après la fin du goulot du 'Deutérium'. Chaque groupe de 8 nucléons contient environ 1 neutron : un noyau d'hélium peut donc être fabriqué pour 16 nucléons, donnant un rapport de masse final d'environ 25%.

de He^4 . D'autres éléments comme Be^7 et H^3 sont également synthétisés mais leurs temps de vie courts par rapport à l'âge de l'Univers font que ces éléments ne sont plus présents aujourd'hui.

De façon générale c'est la grande stabilité du noyau d'hélium standard qui lui confère ce rôle prédominant. La Figure 18 présente une mesure de la stabilité des différents éléments en fonction de leur masse. Dans ce diagramme on constate que l'élément le plus stable de la nature est le Fer. Si l'on part des éléments les plus lourds (tels l'uranium) et que l'on réalise de la fission nucléaire pour fabriquer des éléments plus légers (en se déplaçant vers la gauche dans ce diagramme), des éléments plus stables sont créés produisant ainsi de l'énergie. De même si l'on part des éléments les plus légers (tels l'hydrogène) et que l'on en fabrique de plus lourds, on gagne en stabilité et donc on produit de l'énergie : c'est le principe de fusion nucléaire. Toutefois l'on constate que l'hélium constitue un îlot de stabilité : il n'y a donc pas d'incitation naturelle à produire des éléments plus lourds à partir de celui-ci en fabriquant l'élément plus lourd qui lui succède immédiatement, à savoir le Lithium. Les autres éléments de masse voisine sont beaucoup plus instables (avec des énergies de liaison plus faibles) et sont donc peu enclin à se former. Il est ainsi communément dit que la nucléosynthèse primordiale s'arrête avec He^4 , 3 minutes (i.e. une grosse centaine de secondes) après le Big-Bang. Les éléments plus lourds ne pourront être produit que via des processus stellaires, notamment via la réaction triple α : le produit de cette réaction conduit à la création d'un élément à $3 \times 4 = 12$ nucléons, à savoir le carbone, dont on constate dans la figure 18, qu'il est le premier élément plus stable que l'hélium. Les conditions thermodynamiques de l'Univers quelques minutes après le Big-Bang ne permettront toutefois pas de synthèse du carbone dans ces premiers instants.

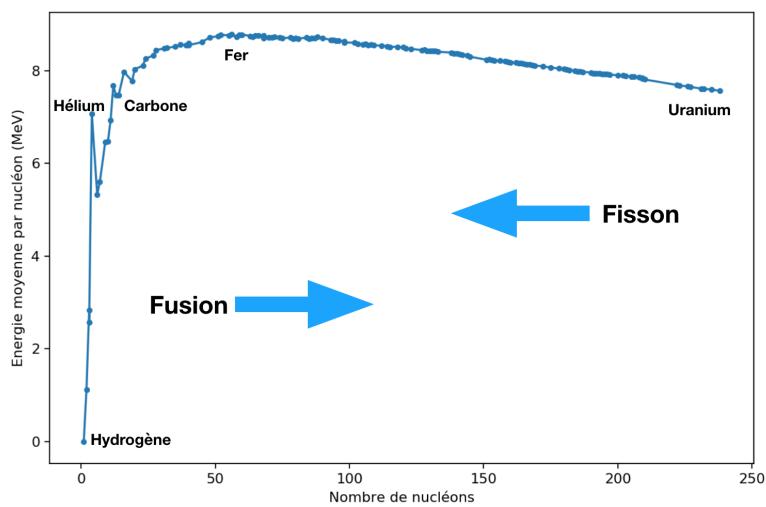


FIGURE 18: L'énergie de liaison moyenne par nucléons des différents éléments et isotopes en fonctions de leur nombre de nucléons. Plus un élément est placé haut dans ce diagramme, plus il est stable. Si l'on fabrique des éléments en se déplaçant vers la droite, on fait de la *fusion nucléaire* et vers la gauche si l'on fait de la *fission*.

Nucléosynthèse et Cosmologie

La nucléosynthèse primordiale aboutit à la production de quelques éléments légers, dont en particulier l'hélium. Cette production va dépendre du nombre de baryons à disposition, permettant ainsi de contraindre le paramètre Ω_b ou de façon équivalente le rapport baryons sur photon η . La figure 19 présente la comparaison entre les mesures d'abondances et les modèles de nucléosynthèse primordiale. Les modèles prédisent par exemple que plus l'abondance de baryons est importante, plus la production d'hélium est efficace. En corollaire, l'abondance de deutérium décroît avec la quantité de baryons disponible car précisément cette conversion Deutérium vers hélium se fait plus facilement. Pour le lithium, la situation est plus complexe : dans un premier temps, augmenter le nombre de baryons a tendance à détruire plus facilement cet élément qui est fragile. Dans un second temps, son abondance augmente avec la quantité de baryons car ceux-ci permettent une fabrication plus importante de Hélium-3, He^3 et par la suite de Béryllium qui décroît en Lithium. On constate que pour He^4 et D, il y a un régime de concordance pour $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$ et $\Omega_b h^2 \sim 0.022$. L'absence d'accord avec le Lithium s'explique quand à lui par la difficulté d'estimer l'abondance *primordiale* de cet élément, cet élément pouvant être détruit au sein des intérieurs stellaires.

Ces mesures d'abondances issues des théories de nucléosynthèse sont des contraintes très fortes sur la quantité de baryons disponibles : il est aujourd'hui extrêmement difficile de considérer cette quantité comme un paramètre libre. Il est intéressant de constater

que ces contraintes sur la quantité de baryons universelle est en accord quasi parfait avec celles issues de l'étude du fond diffus cosmologique (WMAP et Planck). Cet accord est d'autant plus remarquable que ces estimations reposent sur des études très différentes :abondance primordiale d'éléments d'une part, spectre des fluctuations des baryons de l'autre.

Remarquons enfin que les abondances dépendent également de la variation temporelle de la température, régie par l'évolution du facteur d'expansion et donc in fine sur les paramètres cosmologiques. Ainsi les processus de nucléosynthèse se déroulent dans une époque où la dynamique de l'Univers est dominée par les espèces relativistes et dans l'absolu les abondances permettent de contraindre la densité d'énergie des espèces relativistes Ω_r . Par exemple, le nombre d'espèces de neutrinos peut être contraint par cette mesure et les résultats actuels ne permettent pas de dévier du nombre de neutrinos prédit par le modèle standard, à savoir 3.

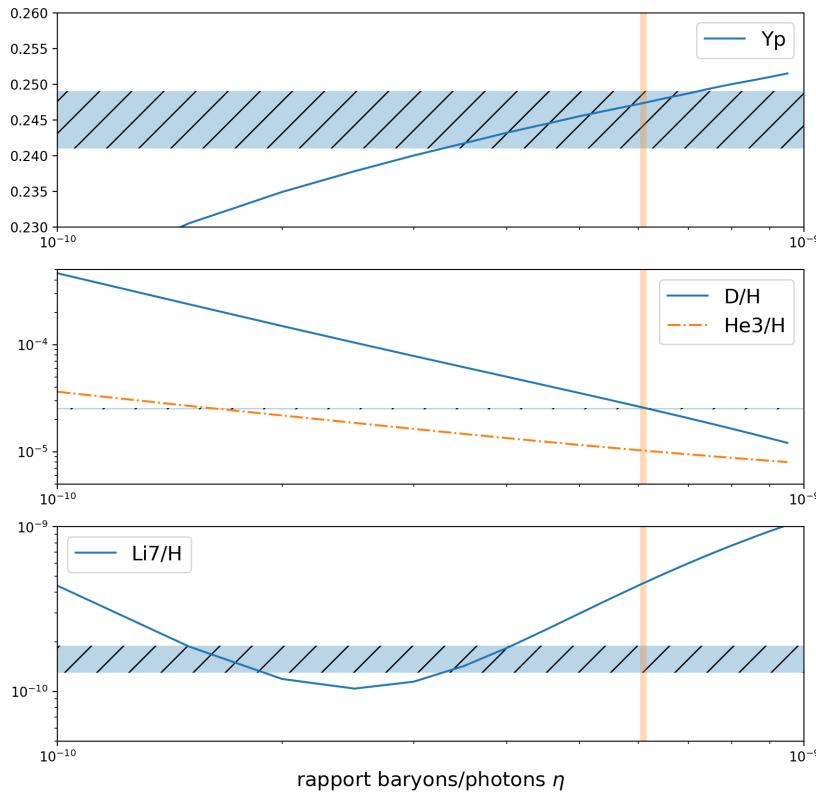


FIGURE 19: Comparaison des abondances observées des éléments légers (régions hachurées horizontales, Fields et al. (2015)), des modèles (lignes) et des contraintes Planck (région non hachurée verticale). Ces abondances sont données en fonction du rapport baryon sur photon η . Abondances théoriques calculées avec *AlterBBN* (A. Arbey).

Le Fond Diffus Cosmologique

Le fond diffus constitue la pierre angulaire de la cosmologie actuelle et se présente comme l'un des objets astrophysiques les mieux connus et les plus étudiés. C'est la conjonction d'une excellente compréhension théorique de cet objet avec l'avalanche de données de grande qualité¹¹⁸ qui ont contribué à installer le fond diffus comme l'un des plus grands succès de la cosmologie.

Le fond diffus cosmologique est communément appelé CMB (pour *cosmic microwave background*) et est constitué des photons "libérés" lors du processus de dernière diffusion. Ce processus a opéré 380 000 ans après le Big Bang¹¹⁹ et ces photons sont toujours détectables aujourd'hui car présents en grande quantité. Ils sont les reliques d'une époque où l'équilibre matière-rayonnement régnait et présentent une distribution spectrale de corps noir. Ce corps noir possède une température caractéristique d'environ 3K. Il se caractérise également par une intensité sur le ciel qui est uniforme à un très grand niveau de précision. Une étude détaillé de ce rayonnement fait ressortir des fluctuations qui tracent la distribution de matière à l'époque de son émission, donnant ainsi accès à une vue sans égal sur le cosmos à ces époques reculées.

118. notamment avec le satellite européen *Planck*

119. à un redshift équivalent $z \sim 1100$

Recombinaison

Si l'on se place après la fin de la nucléosynthèse primordiale ($t > 3$ minutes), protons, photons et électrons sont en interaction via 2 types de réactions, la recombinaison et la diffusion Thomson



Ces 2 couplages vont disparaître de façon simultanée sous l'effet de la baisse de la densité cosmique d'électrons (ou de protons libres). On définit la fraction d'ionisation x de la façon suivante :

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_H} \quad (185)$$

qui vaut 1 lorsque que le gaz cosmique est complètement ionisé et 0 lorsqu'il est complètement neutre. Notons qu'en raison de la neutralité électrique, la densité de protons libres n_p est égale à la densité d'électrons libres n_e ¹²⁰. De même, le nombre d'atomes d'hydrogène (créé par l'assemblage d'un proton et d'un électron) est donné par $n_H = (1 - x)(n_p + n_H)$.

L'équation de recombinaison peut être équilibrée via les potentiels chimiques $\mu_p + \mu_e = \mu_H$ et on rappelle que pour chaque espèce son abondance n_i est donnée par :

$$n_i = g_i e^{\frac{\mu_i}{k_B T}} \left(\frac{m_i k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}}. \quad (186)$$

On obtient alors l'équation décrivant l'évolution temporelle de la fraction ionisée

$$\frac{1-x}{x^2} = n_B \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} m_e^{-3/2} e^{\frac{\chi}{k_B T}}, \quad (187)$$

où $n_B = n_p + n_H$ désigne la densité de baryons et $\chi = 13.6$ eV est l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène. Notons également que la densité de baryons peut s'écrire en fonction du nombre de photons $n_B = \eta n_\gamma \sim T^3$ et l'équation de l'état d'ionisation peut s'écrire :

$$\frac{1-x}{x^2} = A\eta \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\chi}{k_B T}} \quad (188)$$

où A est un pré-facteur fonction notamment des facteurs de dégénérence. Notons que le terme de droite de l'équation 188 ne dépend que du temps, par conséquent elle se résume à une équation du second degré sur x à un instant donné. On rappelle que cette évolution manifeste *un déplacement de l'équilibre* vers la droite de l'équation 183.

La figure 20 présente l'évolution de la fraction ionisée pour différentes valeurs de Ω_b . Dans tous les cas, l'Univers voit la quantité d'atomes ionisés divisée d'un facteur 100-1000 entre $z=1500$ et $z=1000$, correspondant à un âge d'Univers $t=380$ 000 ans. On peut constater que ce processus opère plutôt tardivement : l'époque correspondant à l'énergie caractéristique $\chi = 13.6$ eV s'est mise en place à $t = 180$ ans. De manière analogue au deutérium bottleneck, c'est la grande quantité de photons par rapport au nombre de baryons¹²¹ qui empêche une mise en place plus rapide. Si l'on examine la figure 20 plus en détail on constate d'une part qu'une plus faible densité de baryons (Ω_b plus faible) conduit à une mise en place moins efficace de la recombinaison. Elle opère plus tardivement et est moins complète dans un Univers moins riche en baryons.

^{120.} par simplicité, on ignorera ici la présence d'hélium, qui ne représente que 10% des éléments

^{121.} on rappelle que les contraintes de la nucléosynthèse primordiale indiquent que le rapport baryons/photon vaut environ $\eta \sim 10^{-9}$, très largement en faveur des photons

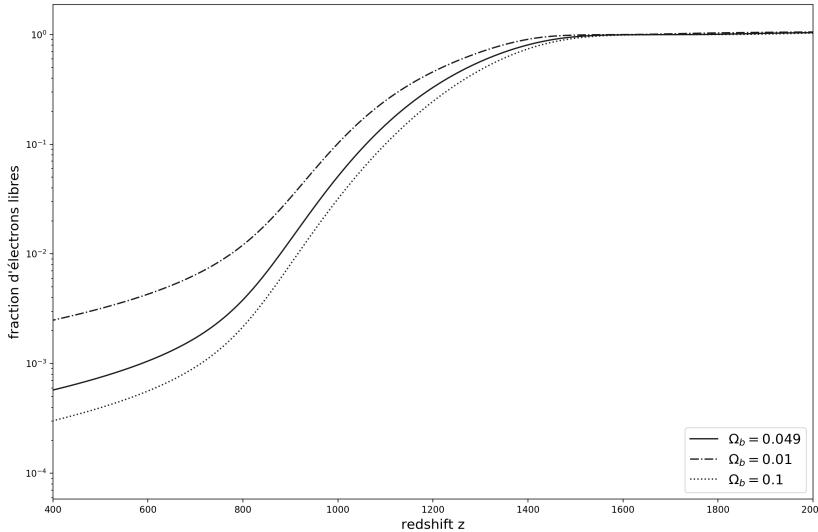


FIGURE 20: Évolution temporelle de fraction d’ionisation x_e pour trois valeur de Ω_b . L’âge typique de l’Univers aux redshifts concernés est d’environ 380 000 ans. Les atomes sont totalement ionisés, $x_e = 1$ aux grandes valeurs de z , et le gaz cosmique est sous la forme d’un plasma. Progressivement, sous l’effet de la baisse de température, les atomes vont recombiner pour donner un Univers neutre, optiquement mince au rayonnement du fond diffus.

Surface de dernière diffusion

Fin de la diffusion Thomson La baisse de la densité électronique qui accompagne la formation d’atomes neutres conduit également à réduire l’efficacité de la diffusion Thomson. Dans un environnement riche en électrons libres, la diffusion force un court libre parcours moyen des photons et empêche le rayonnement de se propager sur de longues distances¹²² : c’est la marque d’un Univers opaque, dans lequel l’information ne peut provenir de régions lointaines. Toutefois lorsque $x \sim 0.01\%$, la diffusion gèle, et se produit alors la *dernière diffusion* à un redshift $z=1100$. A partir de cet instant, le rayonnement n’interagit plus avec les électrons et de fait se découpe de la matière : ce rayonnement peut dorénavant se propager librement et est détecté aujourd’hui sous la forme du CMB. Notons pour finir que la baisse de la densité électronique va également conduire au gel des réactions de recombinaison vers $z=1100$, avec un ionisation résiduelle de l’ordre de 0.01%.

surface de dernière diffusion A partir de $z = 1100$ les photons du fond diffus vont pouvoir se propager librement et de façon essentiellement rectiligne¹²³. Les photons du fond diffus qui nous parviennent aujourd’hui sont donc issus de toutes les régions à une distance telle que le rayonnement mette environ 13.8 milliards d’années à nous parvenir. L’ensemble de ces régions définit une coquille, centrée sur l’observateur et de distance de parcours lumineux égale à l’âge de l’Univers. Cette coquille possède une faible épaisseur, correspondant à la durée qu’aura mis la diffusion Thomson à geler, comparable à

122. on a une situation analogue à l’intérieur du Soleil qui est aussi un plasma. Les photons produits au centre de l’étoile ont des libre parcours moyens de l’ordre du cm

123. plus précisément en épousant la géométrie de l’espace-temps, qui s’avère être plane en moyenne dans le cas de notre Univers

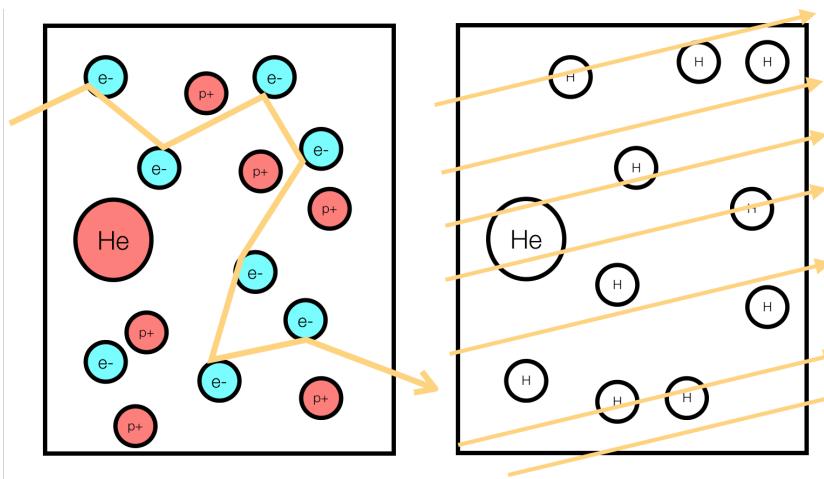


FIGURE 21: Avant la recombinaison, la présence d'électrons libres dans le plasma cosmique est à l'origine d'un processus de diffusion des photons important. Le plasma peut alors être considéré comme opaque, compte tenu de l'impossibilité d'extraire de l'information sur des grandes distances. La seule information disponible provient de la dernière diffusion. Après la recombinaison, l'absence d'électrons libres permet enfin au rayonnement de se propager librement, l'Univers devient transparent pour les photons du fond diffus cosmologique.

la durée qu'à mis la recombinaison à se mettre en place ($\Delta z \sim 100$). Vu depuis l'observateur, cette coquille apparaît donc comme une surface sphérique perçue depuis l'intérieur, *la surface de dernière diffusion*. Les régions au delà de cette surface de dernière diffusion nous sont inaccessibles par l'intermédiaire des photons, puisque ces derniers n'emportent que l'information de la dernière diffusion : les régions au delà de cette sphère sont opaques à toute observation et les régions en deçà (à l'intérieur) de cette sphère constituent l'Univers observable de l'observateur placé en son centre.

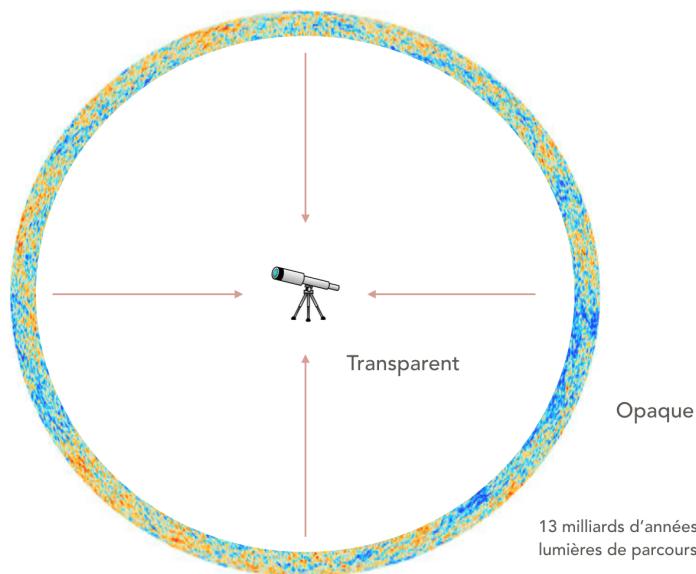


FIGURE 22: Les photons du fond diffus ont pu se propager librement à partir du même instant, correspondant à un Univers âgé de 380 000 ans. Un même instant correspond à une même distance : tous les photons reçus aujourd'hui proviennent de régions situées sur une surface sphérique, dont nous sommes le centre. Son rayon est tel que le parcours des photons est d'environ 13 milliards d'années de vol. Les régions plus distantes que cette 'surface de dernière diffusion' sont opaques, celle moins distantes sont transparentes à ce rayonnement.

Rappelons que ces photons sont ultra-dominant en nombre, avec

par exemple un rapport baryon/photon $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$. Cela a plusieurs conséquences : d'une part cela signifie qu'aucun processus astrophysique n'est en mesure de faire disparaître ce rayonnement et il est de fait toujours mesurable aujourd'hui. D'autre part cette domination est telle que l'impression même de signatures de processus astrophysiques entre $z=1100$ et aujourd'hui ne peut se faire qu'à des niveaux très faible. Par conséquent ce rayonnement possède toujours un spectre de corps noir (décalé vers le rouge) même si il n'est plus en situation d'équilibre avec la matière. De même les éventuelles marques des propriétés de l'Univers âgé de 380 000 ans s'y trouvent toujours. L'observation de la surface de dernière diffusion est donc une fenêtre incomparable sur l'état du cosmos à ces époques lointaines.

Corps noir cosmologique

Le fond diffus cosmologique est issu d'une époque où matière et rayonnement étaient couplés et par conséquent possédait à ces époques reculées un spectre de corps noir. La densité volumique de photons dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ est donné par :

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (189)$$

Comme indiqué précédemment, la surabondance de ces photons est telle que ce signal a conservé les caractéristique d'un tel corps noir, même dans un régime de faible couplage entre matière et rayonnement. Aujourd'hui la température de ce 'corps noir' est mesurée avec une très grande précision¹²⁴ (voir aussi la figure 23) :

$$T_0 = 2.7255 \pm 0.0006 K. \quad (190)$$

124. notamment grâce aux mesures du satellite américain COBE dans les années 90

Ce spectre va conserver sa forme, malgré le redshift des photons concernés et malgré la modification de leurs fréquences ν selon :

$$\nu(a) = \frac{\nu_0}{a}. \quad (191)$$

Dans un volume de contrôle de volume $V = V_0 a^3$ et dans un intervalle de fréquence $d\nu = d\nu_0/a$, le nombre de photons doit rester identique quel que soit l'instant considéré :

$$\frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} V = \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{h\nu_0/k_B T_0} - 1} V_0, \quad (192)$$

qui ne peut être satisfait que si la température caractéristique du corps noir suit la relation :

$$T = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z) \quad (193)$$

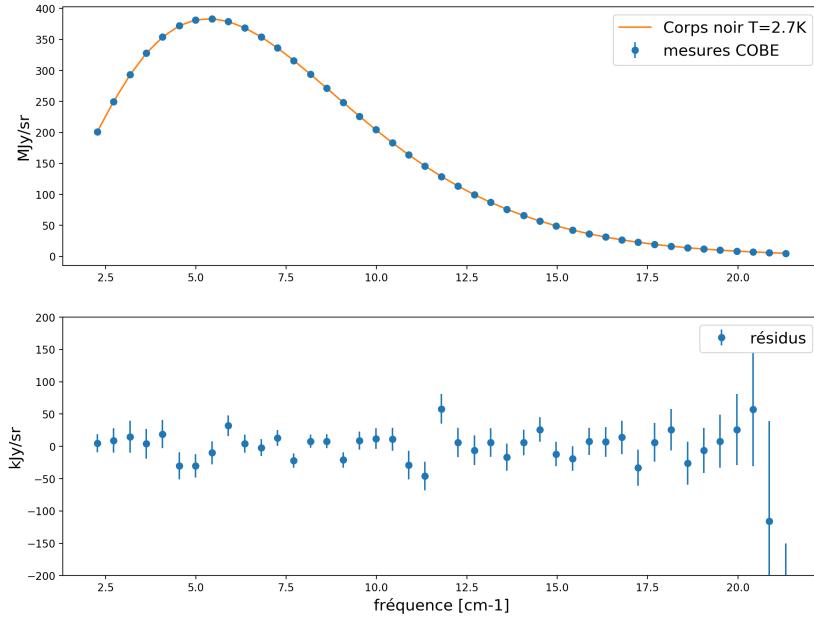


FIGURE 23: Le spectre du fond diffus cosmologique. Dans le panneau supérieur, les symboles représentent les mesures de l'instrument FIRAS, la ligne le spectre de corps noir pour une température de $T_0 = 2.725\text{K}$. Dans le panneau inférieur, les écarts au spectre théorique. Notez l'amplitude très faible des incertitudes. Figure produite à partir des données de Fixsen et al. 2009.

que nous avions déjà établi. On remarque ainsi que la Recombinaison opérant à $z \sim 1100$, la température du gaz de photon cosmique était proche des 3300 K.

Anisotropies du CMB

Le fond diffus est représentatif d'un Univers jeune ($t=380\text{ 000 ans}$) et donc très proche de l'homogénéité parfaite. Par conséquent sa mesure fait apparaître une très grande stabilité du signal sur tout le ciel, sans fluctuations de température détectable jusqu'à des niveaux de 0.001 K. Au delà, commence toutefois à apparaître des anisotropies dans le signal : celles-ci sont essentiellement générées par la physique des baryons à l'œuvre au moment de la Recombinaison et par des processus astrophysiques qui affecte le rayonnement au cours de son vol jusqu'à l'observateur. L'étude de ces anisotropies est extrêmement riche d'informations pour la physique fondamentale, la cosmologie et l'astrophysique. Notons que nous allons nous concentrer sur les fluctuations de température et implicitement le mot "fluctuation" ou "signal" désigne ce type de donnée. Il existe également des études en *polarisation* que nous n'aborderons pas ici.

Principe de l'analyse des anisotropies du CMB

Dans cette section, nous allons exposer rapidement les grands principes de l'analyse du signal du fond diffus. Le CMB se manifeste

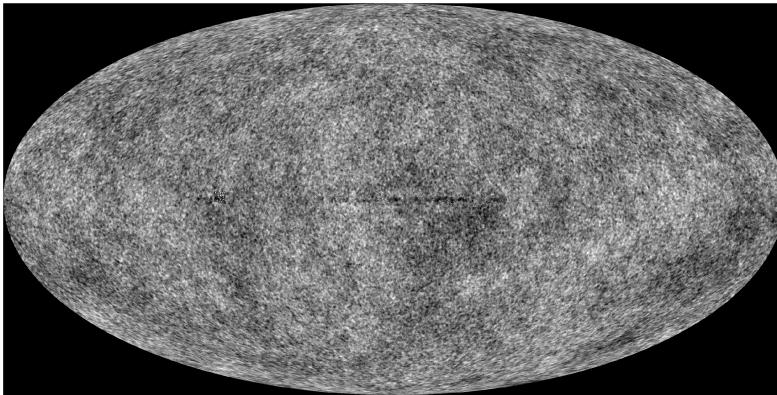


FIGURE 24: La carte des anisotropies du fond diffus obtenue par la mission européenne *Planck*. Les zones claires sont plus chaudes que les zones sombres. Le niveau des fluctuations représentées est de l'ordre de 0.001%.

pour l'observateur comme un signal sur tout le ciel, généralement sous la forme d'une carte de température $\delta T(\theta, \phi)$, mesurée dans un repère sphérique. Afin de pouvoir extraire de l'information de ce type de données, l'on raisonne généralement sur la transformée de Fourier de ce signal. Cette opération permet d'une part de séparer les contributions des différentes échelles angulaires. D'autre part, nous verrons que la théorie qui permet de prédire les propriétés de ces fluctuations se fait naturellement dans l'espace de Fourier, où les différentes échelles angulaires évoluent de façon découplées en très bonne approximation.

Dans un espace sphérique, les opérations de transformées de Fourier s'effectuent via la base des harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ et la carte de températures se décompose de la façon suivante :

$$\delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (194)$$

où les coefficients (complexes) $a_{\ell,m}$ sont obtenus par projection de la carte sur la base vectorielle composée des harmoniques¹²⁵ :

$$a_{\ell,m} = \int \int d\theta d\phi \sin \theta Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \delta T(\theta, \phi). \quad (195)$$

Les coefficients $a_{\ell,m}$ constituent ainsi la contribution de chaque harmonique à la carte de température.

Échelles angulaires Les harmoniques sphériques sont les analogues des modes de Fourier sur la sphère, à savoir une base de sinus et cosinus adaptée à une géométrie sphérique :

$$Y_{\ell,m} \sim e^{im\phi} P_{\ell,m}(\cos \theta). \quad (196)$$

Le coefficient ℓ trace l'échelle angulaire de l'harmonique qui possède ainsi une taille angulaire caractéristique $\theta \sim \pi/\ell$: on parle également

125. les harmoniques sphériques apparaissent aussi en mécanique quantique car elles sont les fonctions propres de la partie angulaire du Laplacien, qui encode l'opérateur de moment angulaire

de fréquence angulaire où les bas ℓ désigne les grandes échelles sur le ciel et les grands ℓ les petites échelles. Le coefficient m peut varier entre $-\ell$ et ℓ et désigne les différentes orientations indépendantes pour chaque taille angulaire caractéristique : celle-ci sont d'autant plus nombreuses que la fréquence angulaire est élevée. L'harmonique $\ell = 0$ correspond au monopole, à savoir un signal uniforme sur toute la sphère et dont le coefficient a_{00} renvoie directement à la moyenne sur tout le ciel. Les harmoniques $\ell = 1$ sont des dipôles, avec un côté 'chaud' et un côté 'froid' diamétralement opposés. Celles avec $\ell = 2$ désignent un quadrupôle, etc...

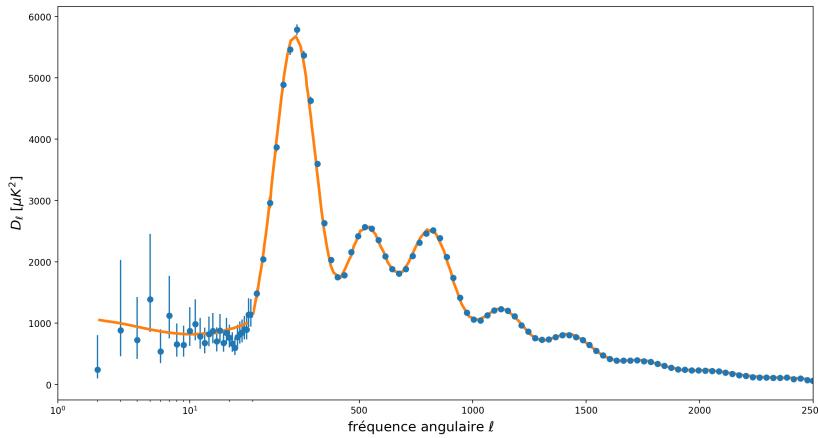


FIGURE 25: Le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique obtenu par *Planck*, $D_\ell = \ell(\ell+1)C_\ell$. Les points sont les données et la ligne représente le spectre prévu pour un modèle ΛCDM . Notez le changement d'échelle horizontale à partir de $\ell = 30$.

Spectre de puissance Armé de la collection des coefficients $a_{\ell,m}$ d'une carte du ciel, on évalue les contributions relatives de chaque échelle par le spectre de puissance angulaire :

$$C_\ell = \langle |a_{\ell,m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell,m}|^2 \quad (197)$$

Ce faisant, on rassemble pour chaque échelle angulaire ℓ les contributions de toutes les orientations m associées. Si toutes les directions sont à priori équivalentes et aucune n'est privilégiée, alors cette opération ne produit pas de perte d'information. C'est le cas du CMB, celui-ci étant à priori isotrope. D'autre part, une grande classe de modèles d'Inflation prédisent que les fluctuations du fond diffus doivent appartenir à la classe des *champs aléatoires gaussiens* qui sont entièrement définis par leur 'variance', ce qui est précisément la nature du spectre de puissance angulaire.

Avant-plans

Avant toute chose, il est important de réaliser qu'une carte brute du ciel aux longueurs d'ondes sondées par les missions CMB est soumise à une forte contamination par des avant-plans astrophysiques. Parmi ces avant-plans, le plus spectaculaire est sans contexte la Voie Lactée dont par exemple l'émission par les poussières ou le rayonnement synchrotron empêchent d'accéder aux fluctuations du CMB en arrière plan¹²⁶. Ces avant-plans peuvent être ajustés, modélisés et pris en compte dans des modèles d'inversion, afin d'extraire le signal d'origine cosmologique des portions du ciel affectées. Notons que ces avant-plans sont également source de recherches dédiées, notamment à propos des propriétés des poussières dans la Voie Lactée.

Dipôle Le premier niveau d'anisotropie est constitué par le dipôle du CMB. Il possède une amplitude de l'ordre de 3 mK et résulte du mouvement de l'observateur par rapport à la surface de dernière diffusion. Ce mouvement induit un effet Doppler, fonction de la vitesse de déplacement et qui fait apparaître des zones plus chaudes et plus froides que la moyenne, diamétralement opposées et alignées avec la direction de déplacement. Au premier ordre, la variation de température dans la direction du dipôle obéit à la relation :

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{dipole}} \sim \frac{v}{c} \quad (198)$$

et donne une valeur de vitesse de déplacement $v \sim 330 \text{ km/s}$ pour le barycentre du système solaire. Cette vitesse est la somme notamment de la vitesse de déplacement du Soleil dans la Galaxie et de la Galaxie dans le Groupe Local¹²⁷.

Anisotropies Intrinsèques

Les fluctuations de température du CMB tracent des fluctuations de densité de matière. Plusieurs modèles de couplage entre matière et rayonnement existent, mais un grand nombre d'évidences observationnelles pointent vers des fluctuations de type *adiabatiques*. Dans ce mode de couplage, le rapport entre la densité de matière et celle de rayonnement reste constant y compris au sein des fluctuations locales : le fluide de matière ne dérive pas par rapport au fluide de photons. Dans ce cas le rapport des densités reste constant :

$$\frac{n}{n_\gamma} = \text{cste} \rightarrow \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} \quad (199)$$

Pour la matière, densité de matière et d'énergie sont directement reliées $\epsilon = nmc^2$ ¹²⁸ et

126. les régions du ciel couvertes par la Voie Lactée sont par ailleurs fréquemment ignorées lors des études faites sur le fond diffus, à cause des incertitudes générées par sa présence

127. Par Groupe Local, on désigne le groupe de galaxies auquel la Voie Lactée appartient et constitué de la Voie Lactée, de la galaxie d'Andromède et du Triangle ainsi que de tout un ensemble de galaxies moins massives et galaxies satellites

128. avec $\rho = nm$

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (200)$$

Pour les photons, nous avons déjà vu que $n_\gamma \sim T^3$:

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T}. \quad (201)$$

D'où il apparaît que les fluctuations de températures tracent les fluctuations de densité via :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{adiab}} = \frac{1}{3} \frac{\delta n}{n} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (202)$$

Dans un régime de fluctuations adiabatiques, les régions plus chaudes (respectivement plus froides) que la moyenne correspondent aux régions les plus dense (respectivement moins denses) au même moment.

Toutefois les fluctuations de densité produisent également des fluctuations de potentiel gravitationnel qui devront être gravie ou dévalées par les photons du fond diffus au moment de leur émission. Les photons en train de sortir d'un puits (correspondant à une surdensité) seront décalées vers le rouge (perte d'énergie) et ceux en train de dévaler un pic de potentiel (correspondant à une sous densité) seront décalés vers le bleu (gain d'énergie)¹²⁹. Cet effet se nomme *effet Sachs-Wolf*

^{129.} cette sensibilité des photons au champ gravitationnel local est un effet standard de la relativité générale

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{SW}} = -\delta \phi \quad (203)$$

où $\delta \phi$ est la fluctuation de potentiel. Par ailleurs on peut montrer que la variation de potentiel est liée à la fluctuation de densité via $\delta \rho / \rho = 2\delta \phi$ ce qui implique que la variation de température *totale* est donnée par :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{total}} = \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{SW}} + \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{adiab}} = -\frac{1}{3} \delta \phi = -\frac{1}{6} \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (204)$$

Les points chaud du CMB correspondent à des régions sous-denses de l'Univers au moment de l'émission. La carte de température du CMB est donc une carte de la distribution de matière au même instant. Ces fluctuations se situent à des niveaux de 0.001%, indiquant par la même que l'Univers était extrêmement homogène au moment de la recombinaison.

Grandes échelles Reste à expliciter l'origine des fluctuations de densité qui conduisent aux fluctuations de températures. L'examen de la figure 25 permet de distinguer 2 régimes. Le premier régime correspond aux grandes échelles $\ell < 30$: ces modes sont plus grands que

l'Horizon¹³⁰ au moment de la recombinaison et tracent les fluctuations les plus primordiales, dont on pense qu'elles sont issues d'une période inflationnaire présente aux tous premiers instants après le Big-Bang. L'étude de ces régions du spectre permet notamment de mesurer l'amplitude des fluctuations inflationnaire ainsi que le spectre de ces fluctuations. En particulier, les théories inflationnaires indiquent que le spectre de puissance tridimensionnel des fluctuations primordiales doit être invariant d'échelle et de la forme :

$$P(k) \sim k^{n_s} \quad (205)$$

avec n_s proche mais différent de 1. Les résultats de *Planck 2015* indiquent que $n_s = 0.968 \pm 0.006$ en accord avec ces théories.

Petites échelles Au delà de $\ell \sim 30$, le spectre présente un ensemble de modes correspondant à des échelles caractéristiques et qui se manifestent sous forme de pics : on en dénombre 3 principaux suivis d'environ 6 pics d'amplitude décroissante. Ces pics indiquent l'existence d'échelles privilégiées dans la carte des fluctuations : ces échelles résultent d'ondes sonores se propageant dans le plasma au moment de la recombinaison. Ces ondes sonores sont appelées *oscillations baryoniques acoustiques*¹³¹ : leur production sera décrite en détail dans le chapitre dédié à la croissance des grandes structures. Ces oscillations se mettent en place pour des échelles sub-horizon d'où leur présence seulement aux petites échelles : la position du premier pic permet ainsi de tracer la taille sur le ciel de l'horizon sonore. Connaissant la taille *intrinsèque* de cet horizon, la mesure de sa taille apparente sur le ciel permet de déduire la géométrie du cosmos le long du parcours des photons (et donc $\Omega_m + \Omega_\Lambda$). Connaissant, le rayon de la surface de dernière diffusion r_{LSS} (donnée par le redshift de la recombinaison) et la taille de l'horizon sonore L_H à cette époque, l'angle qui sous-tend ces fluctuations est simplement donné par :

$$\theta = \frac{L_H}{r_{LSS}}. \quad (206)$$

Si $\theta \neq \frac{L_H}{r_{LSS}}$ la trajectoire des photons du fond diffus est incurvée (cf. Fig 26), traçant une géométrie courbée de l'Univers contenu dans la surface de dernière diffusion : au niveau actuel de précision, on ne détecte aucun départ à la géométrie plane.

Les pics suivants tracent la taille des modes ayant effectué un nombre de battement de plus en plus important entre leur production et l'émission du fond diffus. En particulier leurs amplitudes relatives permettent de contraindre précisément le couplage entre la matière et le rayonnement et la force de rappel qui permet d'entretenir ces battements. Cette force de rappel est induite par la gravité

130. comme on le verra par la suite, ce terme désigne la plus grande distance sur laquelle un phénomène physique peut se propager : c'est essentiellement le produit de la plus grande vitesse accessible à un processus avec l'âge de l'Univers à l'instant considéré

131. BAO en anglais pour *baryonic acoustic oscillations*

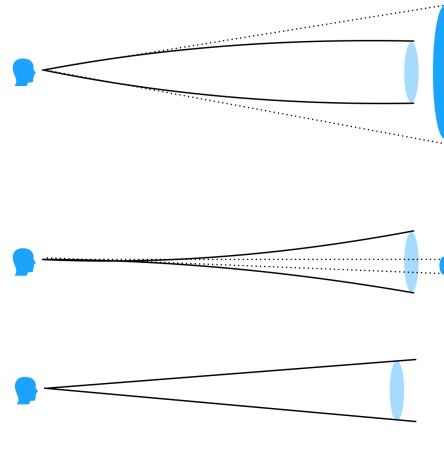


FIGURE 26: Les fluctuations les plus grandes sont de l'ordre de la taille de l'horizon au moment de la dernière diffusion, représenté sous la forme d'une ellipse claire. L'observateur perçoit ces fluctuations avec une certaine taille angulaire, représentée par l'ouverture des rayons en tirets. Si la trajectoire des rayons lumineux est incurvée à cause de la géométrie globale de l'Univers, cette taille apparente va sur-estimer (cas du haut, où la géométrie est sphérique) ou sous-estimer (cas du bas, où la géométrie est hyperbolique) la taille angulaire des fluctuations par rapport à celle attendue. Cette comparaison permet d'estimer le départ à la platitude de la géométrie de l'Univers.

crée par la matière et la mesure de l'entretien de ces battements permet de contraindre la quantité de matière totale (Ω_b et Ω_m).

L'une des grandes leçons apprise par l'étude du CMB est la constatation que $\Omega_m > \Omega_b$: en particulier la grande amplitude du 3ème pic (et des suivants) ne peut s'expliquer par une matière purement baryonique. Elle nécessite une matière non couplée avec le rayonnement, en quantité significative, *la matière noire*. En l'absence de matière noire, le couplage entre matière et rayonnement n'est pas suffisamment important pour garantir un entretien maximal des oscillations baryoniques. Ce couplage imparfait conduit à un amortissement de ces dernières au cours des battements successifs : les échelles les plus petites, celles-qui oscillent le plus rapidement voient donc leur amplitude décroître. Dans le spectre de puissance angulaire, ce la se manifeste par des pics d'amplitudes de plus en plus faibles pour les hautes fréquences angulaires : on parle d'amortissement Silk¹³². Or l'amplitude du 3ème pic (et des suivants) est supérieure à celle attendue dans le cas d'une matière purement baryonique, i.e. en présence uniquement de matière capable d'interagir avec le rayonnement (qui fournit le support de pression). Cet excès d'amplitude peut s'expliquer si il existe une force de rappel gravitationnelle supplémentaire, créée par de la masse qui n'est pas sensible à ce couplage rayonnement matière imparfait. Cette masse qui n'interagit pas avec le rayonnement est la *matière noire*.

Cette matière noire, pèse, entretient les BAOs et n'interagit pas avec le rayonnement : si elle existe, elle nous est actuellement inconnue. On retrouve également trace d'un effet similaire dans la masse des amas de galaxies, dans la dynamique des galaxies et dans les effets de lentille gravitationnelle.

^{132.} du nom du physicien qui a mis en évidence cet effet

Anisotropies secondaires

En plus des anisotropies imprimées dans le plasma au moment de la Recombinaison, il existe tout un ensemble d'anisotropies créées par différents processus qui affectent les photons du CMB le long de leur parcours entre la surface de dernière diffusion et leur réception. Nous n'en citerons que 3 ici.

La Réionisation La Réionisation désigne l'époque à laquelle les premières sources de rayonnement ionisant apparaissent dans l'histoire du cosmos entre 400 millions et 1 milliard d'années après le Big-Bang. Ces sources (essentiellement les premières étoiles et quasars¹³³) vont ioniser à nouveau le gaz cosmique, dans un court laps de temps et vont produire une nuée d'électrons libres susceptibles d'interagir avec les photons du CMB par effet Thomson. Cette interaction va influer sur l'amplitude des fluctuations de température et affecter le spectre du CMB en polarisation aux grandes échelles. Cette interaction se mesure via la profondeur optique Thomson τ :

$$\tau = \int_{z_{\text{rec}}}^0 c \sigma_t n_e(z) \frac{dt}{dz} dt \quad (207)$$

qui est une mesure du nombre d'interactions entre un photon du CMB et les électrons de la Réionisation. Notons que si la Réionisation est précoce, la densité d'électrons n_e est grande et τ est grand tandis que si elle est tardive, cette densité sera plus faible par simple dilution cosmologique conduisant à une faible valeur de τ . Les mesures du CMB indiquent que la mi-Réionisation a eu lieu pour $z_{\text{reion}} \sim 8$. Pour l'anecdote, les premières estimations de l'effet de la Réionisation sur le fond diffus cosmologique prédisaient des époques de mi-Réionisation bien plus reculées¹³⁴, vers $z \sim 17$: depuis, les estimations successives tendent à faire diminuer cette valeur vers celles que nous connaissons actuellement et plus en accord avec les mesures d'opacité du milieu inter-galactique qui mettent une fin de Réionisation vers $z \sim 6$. Paradoxalement, ces mesures de plus en plus précises font du CMB une sonde de moins en moins sensible à la Réionisation : une Réionisation tardive implique une densité électronique plus faible et donc une diffusion Thomson secondaire plus faible, réduisant d'autant l'empreinte du processus sur les photons du fond diffus.

L'effet SZ des amas Les amas de galaxies sont les plus grandes structures virielisées de l'Univers actuel. Ils ont été formés récemment, vers $z \sim 1$, et contiennent typiquement plusieurs centaines ou milliers de galaxies pour des masses totales approchant les $10^{14} - 10^{15} M_\odot$. La masse très importante de ces objets font que le gaz piégé dans leurs

¹³³. les quasars sont des objets très brillants, visibles en particulier à très grande distance. Ils résultent de l'énergie rayonnée par l'accrétion de matière par les trous noirs supermassifs qu'on trouve au centre de certaines galaxies.

¹³⁴. par le satellite américain WMAP par exemple

puits de potentiel gravitationnel est chauffé à des températures de l'ordre du million de degrés : à ces températures le gaz devient un fort émetteur X et est l'objet par exemple de processus d'ionisation collisionnelle. De façon analogue à la Réionisation, les amas constituent des îlots denses d'électrons libres avec lesquels les photons du CMB peuvent interagir à des redshifts $z \sim 1$. On parle d'effet Sunyaev-Zeldovich, qui produit de légères distorsions du spectre du CMB, en redistribuant l'énergie des photons vers de plus hautes valeurs. Les amas de galaxies présents sur le ciel produisent ainsi des anisotropies localisées, permettant même leur découverte dans le fond diffus avant confirmation par des observations X par exemple.

Quantitativement, le spectre du fond diffus cosmologique subit une modification en intensité qui suit :

$$\Delta I \sim g\left(\frac{h\nu}{k_B T_0}\right)y \quad (208)$$

où g est une fonction connue qui donne la dépendance en fréquence de la distorsion spectrale et où y désigne le facteur de 'comptonisation' de l'amas de galaxie :

$$y = \int n_e \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \sigma_T d\ell. \quad (209)$$

Cet facteur y décrit la physique interne de l'amas, comme sa densité électronique interne n_e ou sa température électronique T_e . Pour un amas typique ce facteur est petit et de l'ordre de 0.0001. La forme fonctionnelle de la dépendance spectrale de l'effet SZ, $g(x)$ ¹³⁵, présente un pivot pour une fréquence de l'ordre de 200 GHz, quelle que soit le redshift de l'amas : en deçà de cette fréquence, les photons du fond diffus peuvent être redistribués à des énergies supérieures. Une mesure précise des propriétés du CMB doit donc prendre l'effet SZ des amas en compte, tandis qu'à l'inverse cette distorsion spectrale peut être utilisée pour détecter ces amas dans une carte du fond diffus. Pour finir, notons que si l'amas de galaxie est en mouvement, une distorsion supplémentaire due s'ajoute à la précédente à cause de l'effet Doppler qui modifie la perception de la fréquence des photons du CMB. Cet effet est connu sous le nom d'effet SZ *cinétique* tandis que le précédent est connu sous l'effet d'effet SZ *thermique*. L'effet thermique est lié à l'agitation cinétique des électrons libres de l'amas, tandis que l'effet cinétique est lié au mouvement global de ces électrons, piégés dans l'amas en mouvement. Cet effet cinétique est typiquement au moins 10 fois plus faible que le précédent.

Le lentillage gravitationnel cosmique Les grandes structures croisées par les photons du CMB au cours de leur parcours entre l'émission et leur réception vont modifier subtilement la distribution sur le

^{135.} on peut montrer que $g(x) = x^4 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left(\frac{x}{\tanh(x/2)} - 4 \right)$.

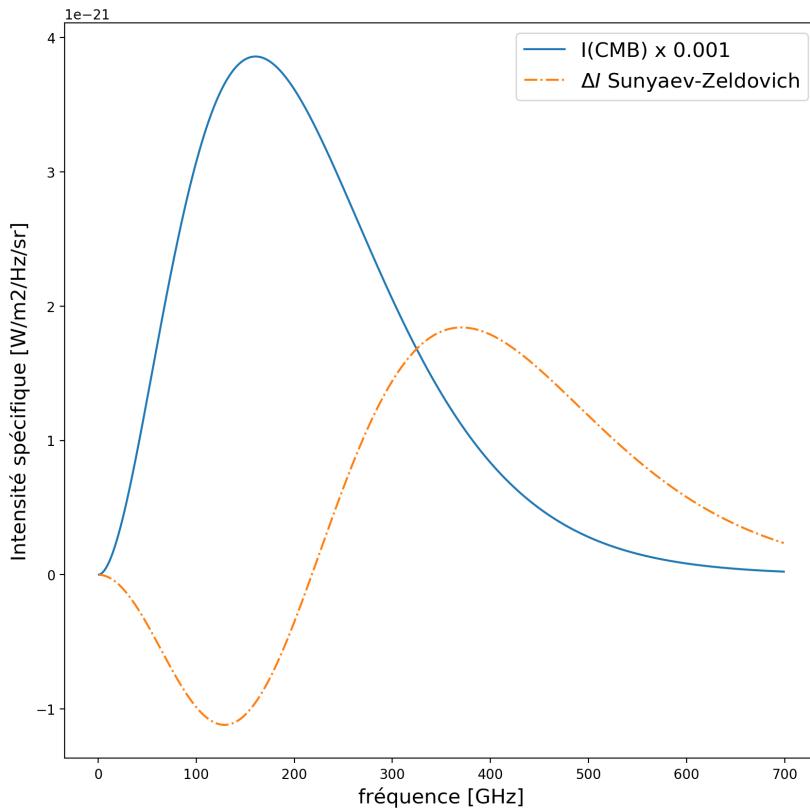


FIGURE 27: La présence de gaz chaud et ionisé dans les amas de galaxies à $z \sim 1$ est à l'origine d'une distorsion du spectre du fond diffus, appelé *effet Sunyaev-Zeldovich*. L'interaction entre les électrons énergétiques dans le gaz chaud intra-amas et les photons du fond diffus redistribue l'énergie de ces derniers vers les hautes énergies. La distorsion associée en intensité spécifique est représentée ici pour un amas de galaxie typique avec une température électronique typique de $k_B T_e \sim 10$ keV. On note que l'amplitude de la distorsion est faible, de l'ordre du millième par rapport à l'intensité non-modifiée du fond diffus (divisée ici par 1000 pour une meilleure visibilité)

ciel des anisotropies primaires par effet de lentille gravitationnelle. Une lentille résulte d'une déformation locale de la métrique par une lentille faite de matière (galaxie, amas, filaments, etc..) qui courbe la trajectoire des rayons lumineux et modifie donc l'apparence des sources d'arrière plan. Dans le cas du CMB, la lentille est constituée de toutes les grandes structures rencontrées au cours de l'histoire de l'Univers tandis que la source d'arrière-plan est la source la plus reculée imaginable. Cet effet de lentille se manifeste essentiellement aux petites échelles et dans le spectre angulaire en polarisation¹³⁶, il nécessite donc des expériences CMB de grande résolution pour pouvoir être extrait. Il a récemment été mesuré par les expériences sol tels que le *South Pole Telescope* ou dans l'espace par *Planck*. Cette mesure est extrêmement importante car elle permet de mesurer de façon quasi indépendante les paramètres cosmologiques à partir de la croissance des grandes structures qui opère à des redshifts différents ($z \sim 2$) de ceux concernant la physique du CMB. Elle permet une forte levée de dégénérescence des paramètres mesurés par les fluctuations de température. Pour l'essentiel les paramètres contraints par le lentillage du CMB confirment les paramètres Λ CDM obtenus par le fond diffus.

¹³⁶. obtenu à partir de l'intensité du rayonnement polarisé du CMB

La Matière Noire

Dans le modèle standard Λ CDM de la cosmologie, environ 80% de la contribution énergétique de la matière est due à une matière invisible sans interaction avec le rayonnement électromagnétique¹³⁷ : on la désigne sous le nom de *matière noire*. Elle est nécessaire pour expliquer notamment la distribution de matière aux plus grandes échelles, telle qu'elle est sondée par exemple par le fond diffus cosmologique ou les grands relevés de galaxies. Elle est de fait un ingrédient essentiel du processus de formation des grandes structures de l'Univers, étudié plus en détail dans un chapitre dédié. Mais avant d'étudier cette formation, nous allons dédier un court chapitre aux indices en faveur de l'existence de cette matière noire et les quelques propriétés dont on pense qu'elle est pourvue. Cette matière n'est toutefois pas sans poser problèmes, en particulier aux échelles galactiques : on décrira quelques-unes de ces difficultés ainsi que les pistes possibles d'une réduction des tensions que pose cette matière noire.

^{137.} on rappelle que la composition énergétique approximative de ce modèle est $\Omega_m \sim 0.3$; $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ et $\Omega_b \sim 0.045$

Matière noire et dynamique interne des structures

L'une des indications les plus populaires de l'existence de cette matière noire est la différence quasi-systématique entre la dynamique interne observée des grandes structures (galaxies, amas de galaxies) et celle prédictive par son contenu lumineux.

Courbe de rotation des galaxies

L'exemple le plus connu est celui de la courbe de rotation plate des galaxies. La courbe de rotation désigne la façon dont la vitesse de rotation de la matière dans un système auto-gravitant varie en fonction de la distance au centre de ce système. Par exemple, considérons une masse M ponctuelle : un corps en orbite circulaire de rayon r aura une vitesse de rotation donnée simplement par¹³⁸ :

$$V_r(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (210)$$

^{138.} il suffit de se rappeler que la force d'inertie centrifuge compense la force de gravitation $r\theta^2 = v^2/r = GM/r^2$

Ce comportement en $1/\sqrt{r}$ est par exemple celui observé dans le système solaire, où les corps les plus éloignés du Soleil sont aussi ceux qui orbitent le plus lentement (cf. Figure 28).

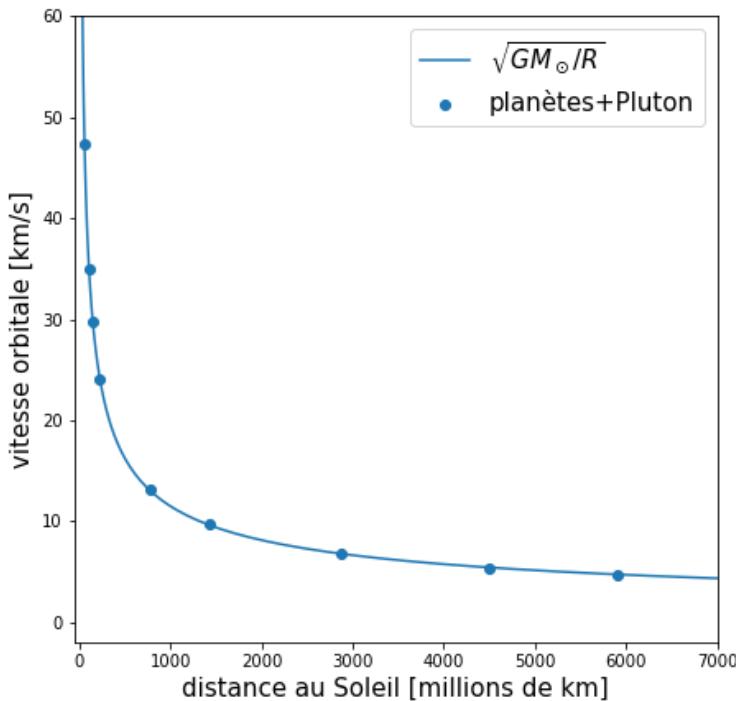


FIGURE 28: La vitesse de rotation des planètes du système solaire + Pluton en fonction de leur distance au Soleil : les points indiquent ces quantités pour les 9 corps en orbite autour du Soleil tandis que la ligne trace la vitesse attendue en fonction du rayon, compte tenue de la masse du Soleil. On obtient un comportement classique en $1/\sqrt{r}$.

Pour un système étendu avec un profil de masse la relation reste inchangée :

$$V_r(r) = \sqrt{\frac{GM(< r)}{r}}. \quad (211)$$

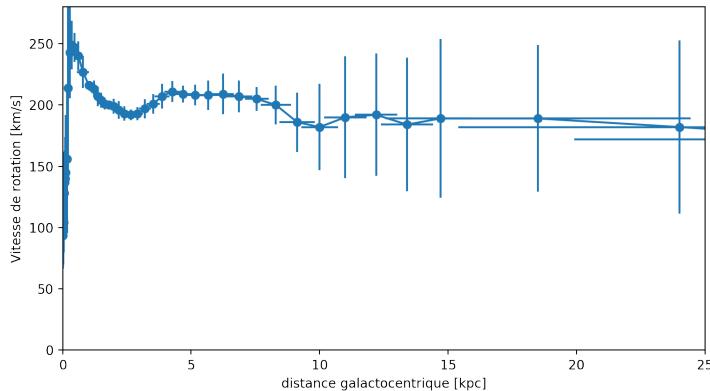
C'est la masse comprise à l'intérieur de l'orbite qui rentre en jeu : celle-ci peut augmenter avec le rayon¹³⁹, mais si il existe une distance au delà de laquelle cette masse ne varie plus¹⁴⁰, on retrouve la décroissance standard en $1/\sqrt{r}$ de la vitesse de rotation.

On peut faire le même exercice dans une galaxie ou dans la Voie Lactée, en mesurant la vitesse de rotation des étoiles ou de la composante gazeuse du disque. Le résultat obtenu pour la Voie Lactée est présenté dans la figure 29 : ce que l'on constate aisément c'est l'absence de décrochage de la vitesse de rotation dans la Galaxie et le maintien d'une vitesse constante, de l'ordre de 200 km/s, quelle que soit la distance considérée et ceci bien au delà de la limite du disque galactique (de l'ordre de 10 kpc). Ce type de courbe de rotation plate

^{139.} par exemple un système de densité homogène voit $M(< r) \sim r^3$ et donc $V_r \sim r$

^{140.} comme attendu pour un système de taille finie

est représentatif de la cinématique d'un grand nombre de galaxies de type disque dans l'Univers et indique que la distribution de la matière ne s'arrête pas aux limites du disque galactique mais s'étend au delà¹⁴¹. Cette matière est invisible, plus étendue que la matière visible et permet le maintien de vitesses de rotation importantes de par son influence gravitationnelle : cette masse supplémentaire est nommée *matière noire*.



141. c'est l'interprétation la plus standard, d'autres possibilités sont discutées en fin de chapitre

FIGURE 29: La vitesse de rotation de la matière dans la Voie Lactée en fonction de sa distance au centre, avec leurs incertitudes. Les points de données sont issus de Sofue (2013). Cette *courbe de rotation plate* est représentative de la cinématique de la très grande majorité des galaxies de type disque dans l'Univers.

Un calcul rapide nous indique une masse dynamique pour la Voie Lactée de quelques $10^{11} M_{\odot}$, tandis que l'on estime la masse lumineuse (étoiles + gaz) à environ 10 fois moins : non seulement la cinématique oblige à considérer une masse supplémentaire invisible mais sa contribution se doit d'être dominante.

Amas de galaxies et théorème du viriel

Les galaxies de type disques ne sont pas les seules à présenter un désaccord entre la quantité de matière estimée par la production lumineuse et les sondes dynamiques. Historiquement¹⁴² ce type de désaccord a d'abord été mis en évidence dans les amas de galaxies : ces structures dont la taille typique est de l'ordre du Mégaparsec¹⁴³ sont les plus grandes ayant pu se former au cours des 13 milliards d'années d'âge de l'Univers et peuvent contenir plusieurs centaines de galaxies.

Chacune de ces galaxies est animée d'une vitesse propre permettant d'estimer la dispersion de vitesse σ au sein de tels amas. Dans une situation d'équilibre, cette dispersion de vitesse est directement reliée à la masse totale du système. En effet, soit un système de N particules en interaction gravitationnelle¹⁴⁴, la particule i obéit au

142. dès 1933, par Zwicky

143. donc environ 100 fois plus grandes que les galaxies

144. chaque particule représente une galaxie de notre amas

principe fondamental de la dynamique

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}. \quad (212)$$

Cette relation est satisfaite pour toutes les particules. Multiplions-la par \vec{r}_i et additionnons toutes ces relations¹⁴⁵ :

$$\sum_i^N m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = - \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} \quad (213)$$

$$= - \sum_i^N \sum_j^{i-1} \frac{G m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \quad (214)$$

$$= E_{p,\text{total}}. \quad (215)$$

On obtient l'énergie potentielle totale du système, définie comme étant la somme de toutes les énergies potentielles créées par les paires individuelles, sans redondance. Le terme de gauche peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_i^N m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i^N m_i \vec{r}_i^2 - \sum_i^N m_i \left(\frac{d \vec{r}_i}{dt} \right)^2 \quad (216)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \sum_i^N m_i \vec{r}_i^2 - 2E_{c,\text{total}}. \quad (217)$$

On reconnaît l'énergie cinétique totale du système ainsi que la dérivée seconde du tenseur d'inertie par rapport au temps¹⁴⁶. Cette dernière quantité décrit la 'forme' du système : à l'équilibre la répartition des masses au sein du système doit rester constante et la dérivée du tenseur d'inertie doit être nulle. On obtient alors une expression du théorème du viriel

$$2E_{c,\text{total}} + E_{p,\text{total}} = 0. \quad (218)$$

Cette relation obtenue dans le cadre d'un système en interaction gravitationnelle n'est qu'une des multiples déclinaisons de ce théorème, que l'on retrouve dans de multiples contextes ayant trait à des systèmes à l'équilibre, en thermodynamique ou même dans le cadre de la mécanique quantique.

En supposant l'équilibre, on peut estimer la masse totale d'un système si l'on est capable d'estimer son énergie cinétique. Par exemple pour l'amas de Coma, on mesure une dispersion des vitesses $\sigma \sim 1000$ km/s pour ses galaxies membres dans un rayon d'environ 3 Mégaparsecs. Une application rapide du théorème de viriel permet d'écrire¹⁴⁷ :

$$3M\sigma^2 \sim \frac{3GM^2}{5R} \quad (219)$$

^{145.} le passage de la 1ère à la 2ème ligne s'obtient en considérant la double somme comme la somme des deux parties triangulaires identiques au signe près d'une matrice NxN de diagonale nulle

^{146.} plus précisément la dérivée de la trace du tenseur d'inertie

^{147.} le facteur 3 dans l'énergie cinétique suppose une dispersion de vitesse isotrope dans les 3 directions tandis que l'énergie potentielle est celle d'un corps homogène

conduisant à une estimation de sa masse de l'ordre de :

$$M \sim \frac{5R\sigma^2}{G} \sim 3 \times 10^{15} M_{\odot}. \quad (220)$$

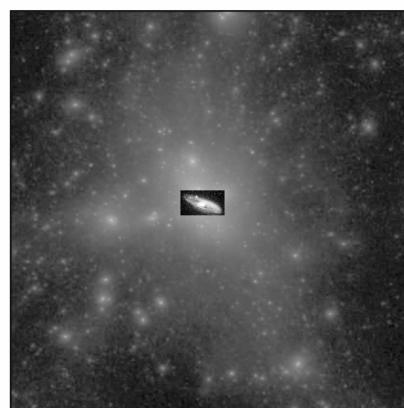
Or on estime la masse lumineuse (dans les galaxies et sous la forme de gaz intra-amas) totale de l'amas de Coma à environ 1/10ème de cette valeur. Ce désaccord entre masse dynamique et masse lumineuse est systématique dans les grands amas et illustre à nouveau le besoin d'une matière pesante non lumineuse en grande quantité.

Halos de matière noire

Les deux courts exemples précédents impose une image multi-phases des galaxies et des amas de galaxies : schématiquement une galaxie se compose d'une partie lumineuse composée d'étoiles, de gaz, de poussière et une partie sombre composée de matière noire. L'ajustement de modèles sur la dynamique observée des galaxies et des amas indique que cette matière est organisée en une composante plus étendue et moins dense que celle qui rayonne : les galaxies sont entourées d'un *halo de matière noire*. Par exemple pour une galaxie comme la Voie Lactée, la masse de son halo est de l'ordre de $10^{11} - 10^{12} M_{\odot}$ et son étendue est de l'ordre de quelques centaines de kiloparsecs. Rappelons qu'à proximité se trouve la galaxie d'Andromède légèrement plus massive et à une distance de 800 kiloparsecs environ : compte tenu de la faible séparation entre ces 2 objets, il est probable que les halos de ces 2 galaxies soient en contact.



Ce que l'on voit



Ce qui serait

FIGURE 30: Vue schématique d'une galaxie et de son halo de matière noire. A gauche la partie lumineuse d'une galaxie, à droite la galaxie avec son halo de matière noire environnant (issue d'une prévision de simulation numérique), invisible et représentant environ 90% de sa masse totale. La figure n'est pas tout à fait à l'échelle puisque les modèles prédisent des halos de matière noire environ une dizaine de fois plus étendus que les galaxies qu'ils hébergent.

Le rapport de masse entre la composante lumineuse et noire est d'environ 1/10ème en défaveur de la matière lumineuse. Ce chiffre

n'est pas si étonnant si l'on considère le rapport cosmique de la densité d'énergie de la masse baryonique et de la masse totale :

$$f_b = \Omega_b / \Omega_m \sim 0.15. \quad (221)$$

Ce rapport est appelé *la fraction baryonique* on retrouve le même ordre de grandeur que celui estimé précédemment. Pour l'essentiel, galaxies et amas ne font que conserver ce rapport universel. Ce n'est toutefois pas le cas des galaxies de très faible masse ($< 10^{10} M_\odot$)¹⁴⁸ : les modèles et les observations indiquent des fractions baryoniques plus faibles que la fraction universelle pour ces objets qui ne parviennent pas à piéger le gaz de façon aussi efficace que les structures plus massives. Ces petits objets sont particulièrement sensibles

^{148.} par exemple la petite galaxie de *Draco* possède une masse totale environ 400 fois supérieure à ce qui est attendu compte tenu de sa luminosité

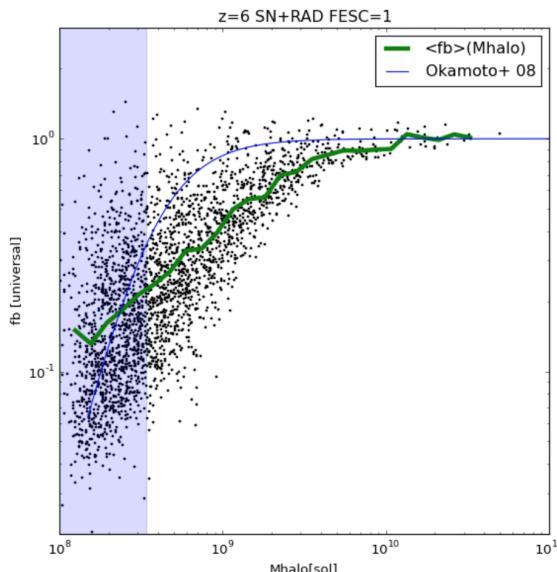


FIGURE 31: La fraction baryonique prédicta par une simulation numérique (points) et par un modèle de Okamoto+08 (ligne) environ 1 milliards d'années après le Big-Bang. On note le départ de cette fraction à la valeur universelle pour les objets de petite masse.

aux effets astrophysiques tels que l'éjection de gaz par l'explosion d'étoiles en supernovæ ou le chauffage par le fond de rayonnement UV cosmique¹⁴⁹. Ils sont fortement dominés par la matière noire et sont donc des lieux idéaux pour l'étude de ses propriétés.

^{149.} cf. le chapitre simulation

Matière Non-Collisionnelle

On sait peu de choses sur la matière noire, si ce n'est qu'elle n'interagit pas avec le champ électromagnétique (par définition) et ne ressent que la force de gravitation. Par conséquent, un ensemble de particules de matière noire se comporte de façon similaire à un ensemble d'étoiles en interactions mutuelles et tous les outils de la dynamique des systèmes stellaires peut s'appliquer à un système composé de matière noire.

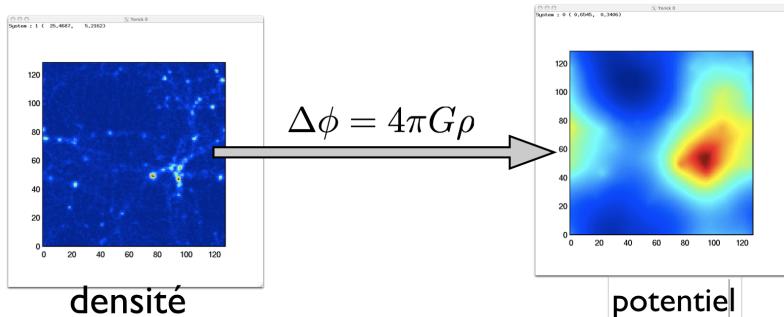
Ces systèmes dont la cohésion et la dynamique sont régies par la gravitation partagent la particularité d'être *non collisionnels*. La non collisionnalité est une propriété assez générique des systèmes auto-gravitant¹⁵⁰ et dont on peut saisir la nature par un examen de l'équation de Poisson¹⁵¹ :

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = 4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (222)$$

Cette équation constitue l'équation de champ de la gravitation newtonienne et décrit explicitement la densité comme étant la dérivée seconde du potentiel. Cette relation n'est pas sans conséquences sur la forme du potentiel : une telle relation implique que le potentiel est une version *lissée* de la densité. En effet, la dérivée seconde d'une fonction quelconque est toujours plus 'bruitée' que la fonction d'origine. On peut aussi s'en rendre compte en prenant la transformée de Fourier de l'équation de Poisson pour trouver la relation entre un mode de fréquence $k = 2\pi/\lambda$ du potentiel et celui de la densité¹⁵² :

$$-k^2\phi_k = 4\pi G\rho_k. \quad (223)$$

La relation gagne en simplicité en devenant scalaire et on constate que chaque mode de densité est *amplifié* d'un facteur k^2 et cette amplification est d'autant plus forte que k est grand : le poids des modes à grande fréquence spatiale va s'en trouver augmenté par rapport à ceux aux basses fréquences et le signal de la densité est plus bruité que celui du potentiel. Inversement, le potentiel est une version lissée de la densité de matière.



^{150.} car il existe des exceptions, comme les amas stellaires dits globulaires qui peuplent les halos stellaires des galaxies et qui ne rentrent pas dans le cadre qui nous intéresse ici

^{151.} ϕ désigne le potentiel gravitationnel tandis que ρ désigne le champ de densité de matière

^{152.} si $\tilde{f}(k)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$, on rappelle que $\tilde{f}'(k) = ik\tilde{f}(k)$

Le potentiel étant lisse, la dynamique ressentie par une particule de matière noire est sensible aux grandes échelles et non pas aux aspérités locales du champ de densité. La trajectoire d'une particule parmi ses semblables ne sera pas heurtée (comme elle le serait si elle était l'objet de *collisions*) mais tendue et sans à-coups. On parle de système non-collisionnel.

FIGURE 32: Une illustration du lien entre densité et potentiel, via l'équation de Poisson. La vignette de gauche montre la densité de matière dans une simulation cosmologique de 12 Mpc de côté, celle de droite montre la carte du potentiel gravitationnel produite par cette densité. Le potentiel est une version filtrée de la densité.

On peut avoir une estimation un peu plus quantitative de cette non-collisionnalité. Considérons d'abord un système de N particules chacune de taille r . La section efficace d'interaction directe est $\sigma = 4\pi r^2$. Le libre parcours-moyen¹⁵³ est donné par :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{4\pi R^3}{3N\sigma} \quad (224)$$

où R désigne la taille du système. Si la vitesse typique d'une particule est v , le temps entre 2 collisions est donné par :

$$t_c = \frac{\lambda}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{t_{\text{crois}}}{N} \quad (225)$$

où le temps de croisement $t_{\text{crois}} = R/v$ est la durée nécessaire pour traverser le système. Pour un 'gaz d'étoiles' comme la Voie Lactée on a $t_c \sim 10^{21}$ ans¹⁵⁴ : comme ce temps est très supérieur à l'âge de l'Univers, il n'y a pas de collisions entre étoiles dans un système comme la Voie Lactée. Pour la matière noire, à priori faite de particules élémentaires très nombreuses, le temps de collision est encore plus grand. Bien sûr, cela concerne uniquement les collisions directes et il faut également prendre en compte les interaction à grande distance qui sont susceptibles de modifier la trajectoire des particules massives via la gravitation. De fait on peut montrer qu'il suffit qu'une étoile passe à une distance b donnée par¹⁵⁵ :

$$b \sim \frac{2Gm}{v^2} \sim R/N \quad (226)$$

pour que la variation de vitesse induite par la gravitation soit du même ordre que la vitesse v elle-même. Cette quantité est un paramètre d'impact qui augmente avec la vitesse : des étoiles rapides nécessitent des approches à courte distance pour ressentir une déviation substantielle, tandis que des étoiles lentes se font plus facilement perturber à plus grande distance. Si l'on remplace r par b dans l'expression du temps de collision (Eq. 225), on obtient une estimation du temps entre 2 interactions de ce type :

$$t_b = \left(\frac{R}{b}\right)^2 \frac{t_{\text{crois}}}{N} \sim N t_{\text{crois}}. \quad (227)$$

Pour une galaxie comme la Voie Lactée, t_{crois} est de l'ordre de 10^8 ans, donc ce temps t_b reste toujours extrêmement long. Enfin, on peut également refaire cette évaluation en ne considérant pas une seule interaction à une distance b mais toutes les interactions plus faibles mais plus nombreuses qui se produisent à une distance comprise entre b (le cas le plus intense) et R (la plus grande distance possible entre une particule et sa voisine). Le temps nécessaire pour que cela

¹⁵³. la distance parcourue entre 2 interactions, qui est d'autant plus courte que les interactions sont fortes (σ élevé) ou les densités importantes (n élevé)

¹⁵⁴. on peut prendre $R = 10$ kpc, $v \sim 200$ km/s, $r \sim 700000$ km comme rayon solaire et $N \sim 10^{10}$.

¹⁵⁵. la deuxième équivalence s'obtient en appliquant le théorème du viriel

conduise à une variation de vitesse équivalente à la vitesse typique est appelé *temps de relaxation* et il est légèrement plus court que le précédent :

$$t_{\text{relax}} = \frac{N}{10 \log N} t_{\text{crois.}} \quad (228)$$

Pour une Voie Lactée on obtient $t_{\text{relax}} \sim 10^{15}$ ans pour sa composante stellaire : cela reste largement supérieur à l'âge de l'Univers et les étoiles n'ont pas perdu la mémoire de leur vitesses initiales, le système est non-collisionnel. Comme les particules de matière noire sont supposées bien plus nombreuses que les étoiles, la même conclusion s'impose à cette composante et la matière noire est non-collisionnelle.

Cela n'est pas sans conséquence sur la dynamique interne des halos de matière noire. A cause de la non-collisionnalité, les temps de mélange sont extrêmement longs et bien moins efficaces que les mélanges hydrodynamiques qui opèrent dans le gaz par exemple. On s'attend par exemple à ce que les structures de matière noire persistent sur des temps longs ou bien qu'elle puissent se croiser lors de fusions sans trop de dégâts. Les baryons (présents sous forme de gaz) possèdent une pression qui est la manifestation macroscopique de collisions microscopiques¹⁵⁶ : cette composante peut présenter des chocs hydrodynamiques et se mélanger fort efficacement. Compte tenu de sa nature non-collisionnelle, ce n'est pas ce qui est attendu de la part de la matière noire.

^{156.} qui découlent de l'interaction électromagnétique entre atomes ou molécules

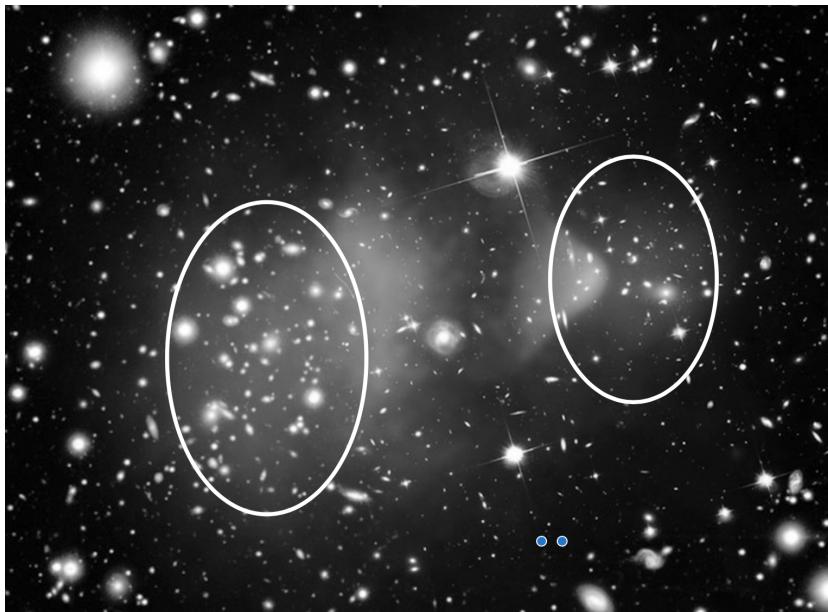


FIGURE 33: Le *Bullet Cluster*. Cette image superpose l'image optique de 2 amas en collisions, la carte de la distribution de masse et la carte de la distribution de gaz. On distingue parfaitement le choc hydrodynamique de forme triangulaire dû à la collision. Les ellipses indiquent la position de la masse dominante, mesurée via les effets de lentilles gravitationnelles. On constate que les ellipses sont décalées par rapport au gaz comme attendu pour la matière noire non collisionnelle. Figure inspirée de l'image NASA (M. Markevitch et al. ; D.Clowe et al.).

Cette différence de comportement a peut-être été observée dans le *Bullet cluster* présenté dans la Figure 33. C'est une région du ciel

dans laquelle 2 amas de galaxies sont entrés en collision. On y a superposé la distribution de gaz (sondée par son rayonnement X) et la distribution de masse totale (gaz+autre). On distingue aisément dans la composante gazeuse le choc hydrodynamique dû à la collision avec une forme en arc caractéristique. On constate également aisément que la masse n'est pas superposée à l'émission du gaz, comme si l'essentiel de la masse avait pu parcourir une distance plus grande que celle des baryons lors du choc : c'est exactement le comportement attendu pour la matière noire non-collisionnelle dont on rappelle qu'elle doit dominer largement le bilan en masse. Lors de leur collision, la partie gazeuse des 2 amas a choqué et freiné tandis que la composante matière noire non collisionnelle a pu poursuivre sa route et se découpler des baryons.

Lentilles gravitationnelles

Nous venons de mentionner que la masse totale du Bullet Cluster ne présente pas la même distribution que celle de la masse baryonique : mais au fait comment fait-on pour trouver la distribution de masse totale ? La réponse se trouve dans l'utilisation de l'effet de *lentilles gravitationnelles*. Ce terme désigne les déformations créées par un objet massif sur la trajectoire des rayons lumineux émis par des objets d'arrière-plan : ces déformations vont induire une modification de la perception de ces objets de fond.

Il existe toute une littérature dédiée à ce phénomène, nous allons ici présenter rapidement quelques bases dans le régime simple des lentilles minces. On considère 2 plans à 2 dimensions : le plan source où se trouvent les objets d'arrière-plan sur le ciel et à l'intérieur duquel les positions sont déterminées à l'aide d'un vecteur 2D $\vec{\beta}$, et le plan de la lentille, à l'intérieur duquel les déflections des rayons lumineux vont avoir lieu et où les positions sont déterminées à l'aide d'un autre vecteur 2D sur le ciel $\vec{\theta}$. Une image à la position $\vec{\theta}$ peut être reliée à un point du plan source via *l'équation des lentilles*

$$\vec{\beta}(\vec{\theta}) = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \quad (229)$$

Ici $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ désigne l'angle de déflection subi par le rayon lumineux qui tape le plan de la lentille à cette position : cet angle est lié à la distribution de matière dans la lentille et l'étude de la déformation des images d'arrière-plan permet de remonter à cette quantité et donc à la structure de la lentille. En effet, on peut écrire l'angle de déflection comme le gradient d'un potentiel 2D de lentille $\psi(\vec{\theta})$:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \nabla \psi(\vec{\theta}). \quad (230)$$

Ce potentiel satisfait également un analogue à l'équation de Poisson

$$\Delta\psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta}) \quad (231)$$

où $\kappa(\vec{\theta})$ s'appelle la convergence : cette quantité mesure la déformation isotrope des sources de fond et est directement reliée à la densité de matière 2D projetée $\Sigma(\vec{\theta})$ ¹⁵⁷ :

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_c}. \quad (232)$$

In fine, la mesure des déformations permet de remonter à la densité de matière projetée, via la modélisation de lentilles gravitationnelles.

Le cœur de cette modélisation est le potentiel 2D projeté $\psi(\vec{\theta})$ et au vu de la relation entre l'angle de déflection et ce potentiel, $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ apparaît comme l'analogue du champ de 'force' 2D. Au passage, le fait que l'on travaille à 2 dimensions n'est pas sans conséquences : par exemple une masse projetée ponctuelle va produire un champ de déflection $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \sim 1/\theta$ et un potentiel $\psi \sim \log \theta$. En 3D, la même masse ponctuelle aurait produit respectivement un champ de force en $1/r^2$ et un potentiel en $1/r$: le fait de projeter les masses et par extension toutes les quantités va 'lisser' les comportements auxquels nous sommes habitués à trois dimensions.

On peut montrer que si la convergence est telle que $\kappa > 1$ une même source peut avoir de multiples images : on parle alors de régime de lentilles fort¹⁵⁸, le cas inverse étant celui de faibles déformations dit de lentilles faibles¹⁵⁹. Par ailleurs, on peut définir une matrice de déformation $A_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j}$: le grossissement est alors donné par :

$$\mu(\vec{\theta}) = \frac{1}{(1 - \kappa(\vec{\theta}))^2 - |\vec{\gamma}(\vec{\theta})|^2} \quad (233)$$

où γ désigne le cisaillement¹⁶⁰, c'est à dire une mesure de la déformation anisotrope¹⁶¹. On note que le grossissement peut être infini et l'ensemble des points du plan lentille où $1/\mu = 0$ est appelé *lignes critiques* : lorsque l'on ramène ces lignes critiques dans le plan source, via l'équation des lentilles, on obtient ce qu'on appelle les caustiques. A chaque fois qu'une source traverse un jeu de caustiques, son nombre d'images augmente de 2, tandis qu'une source placée exactement sur une caustique va voir son image extrêmement déformée.

Notons qu'il existe des configurations sources-lentilles qui donnent des images particulièrement spectaculaires. Par exemple, dans le cas d'une lentille à symétrie de révolution autour de l'axe optique, la présence d'une source d'arrière plan exactement sur cet axe conduit à un *anneau d'Einstein* où la déformation de la source est telle qu'elle apparaît comme un anneau, continu, le long d'une ligne critique. Toute

¹⁵⁷. Ici Σ_c désigne une densité surfacique 'critique' qui dépend de la configuration du banc optique (distance observateur-lentille, lentille-source) ainsi que de la cosmologie

¹⁵⁸. strong lensing

¹⁵⁹. weak lensing

¹⁶⁰. on parle de 'shear' en anglais

¹⁶¹. les 2 composantes du cisaillement sont données par $\gamma_1 = (A_{11} - A_{22})/2$ et $\gamma_2 = A_{12} = A_{21}$.

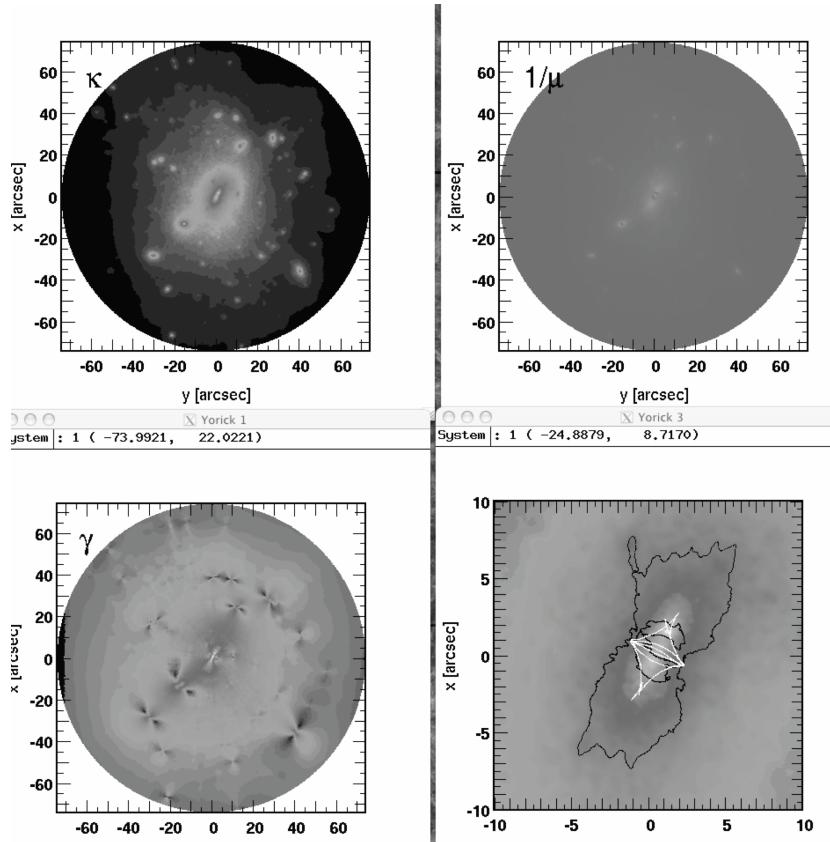


FIGURE 34: Exemple de quantités calculées pour une lentille arbitraire. Le panneau supérieur gauche montre la densité projetée de la lentille créée par un halo de matière noire simulé, analogue à sa convergence κ . Le panneau inférieur gauche montre la distribution du cisaillement tandis que le panneau supérieur droit montre l'inverse du grossissement. Les lieux où l'inverse du grossissement est nul constituent les lignes critiques dans le plan lentille (montrées en noir sur le panneau inférieur droit) tandis que les lignes caustiques associées, dans le plan lentille, sont indiquées en blanc.

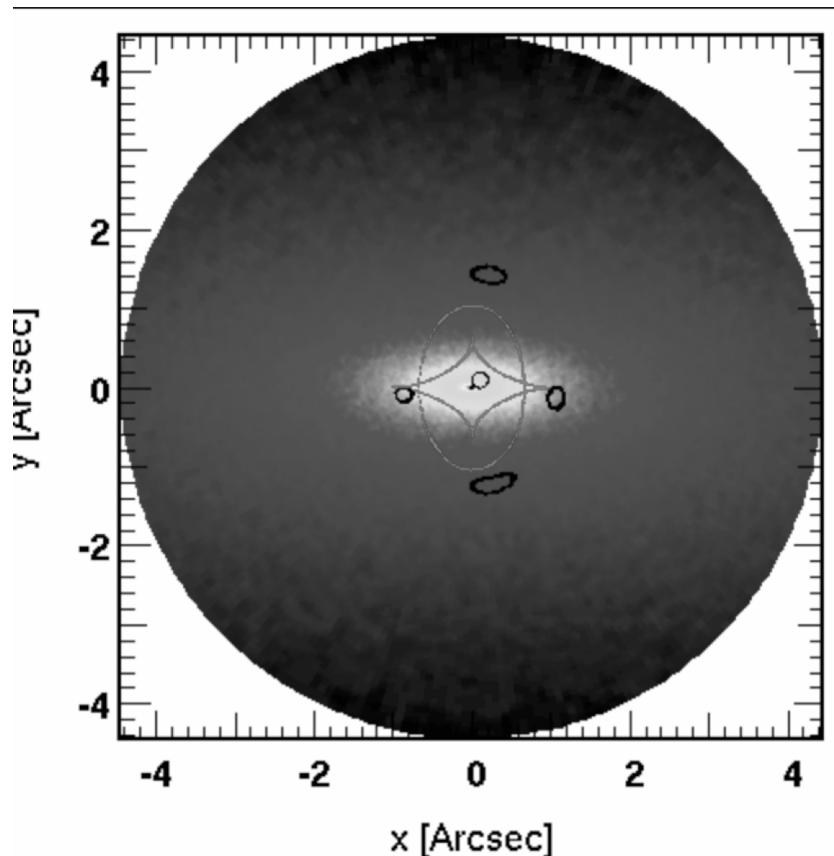


FIGURE 35: Cette image montre les images produites par la source circulaire placée au quasi-centre de l'image (contours noirs). Cette source produit 5 images, les 4 situées en croix + une centrale quasi indistinguable. Les teintes de fond indiquent la distribution de matière dans une lentille elliptique, tandis que les lignes claires montrent les positions des caustiques dans le plan source. Dans ce cas précis, la source, le centre de la lentille et l'observateur sont tous quasiment alignés le long de l'axe optique.

spectaculaire qu'elle soit, ce type de configurations est régulièrement observé dans le ciel. Si le même alignement se présente pour une lentille anisotrope (aplatie dans une direction par exemple), cet anneau se 'brise' et produit de multiples images de la source d'arrière-plan : on peut alors obtenir l'effet de 'croix d'Einstein', où chaque image se trouve aux extrémités d'une croix fictive centrée sur l'axe optique (voir figure 35).

Matière noire et fond diffus cosmologique

Les discussions précédentes ont porté sur l'influence dynamique de la matière noire sur les structures telles que les galaxies ou les amas. Il s'avère que l'évidence la plus forte quant à l'existence d'une telle matière est plutôt à trouver du côté du fond diffus cosmologique. Comme indiqué dans le chapitre dédié, la structure spatiale du fond diffus cosmologique trace la structure spatiale des baryons, du gaz ionisé, au moment de la Recombinaison. Cette structure révèle la présence d'ondes sonores parcourant le plasma à ces époques¹⁶². Ces ondes sont supportées par la pression de rayonnement, support autorisé par le fort couplage entre les baryons et le rayonnement avant la Recombinaison. Ce couplage est toutefois imparfait, les photons possèdent un libre parcours moyen non-nul qui conduit à un amortissement progressif de ces ondes, notamment celles associées aux plus petites échelles spatiales et aux plus grandes fréquences temporelles d'oscillation. Cet effet, connu sous le nom *d'amortissement Silk*, efface les surdensités de petites tailles et doit en principe empêcher l'émergence de structures de masse inférieure à $M \sim 10^{13} M_{\odot}$: une structure comme la Voie Lactée n'aurait ainsi pas dû apparaître ! La matière noire fourni un contrepoint à cet amortissement car elle agit comme un fond de potentiel gravitationnel en effondrement continu : tandis que la distribution de gaz voit ses surdensités se faire effacer, la distribution de matière noire voit ses surdensités croître car insensibles aux effets de pression radiative et d'amortissement Silk. Au moment de la perte du support de pression radiative, les baryons trouvent un champ de gravitation plus fort que celui qu'ils auraient créé s'ils avaient été seuls et profitent de ce champ pour faire ré-émerger des surdensités fortement amorties : le gaz 'coule' dans les trous de champ gravitationnel créés par la matière noire.

LA STRUCTURE DU FOND DIFFUS, telle qu'elle est mesurée sur la surface de dernière diffusion, laisse transparaître ce rôle important de la matière noire (voir Fig. 36). Son spectre de puissance angulaire C_{ℓ} mesuré par Planck présente ainsi des pics secondaires d'amplitudes substantielles, bien plus importantes que celles qui auraient

162. ces ondes sont les oscillations baryoniques acoustiques décrites à plusieurs reprise dans cet ouvrage

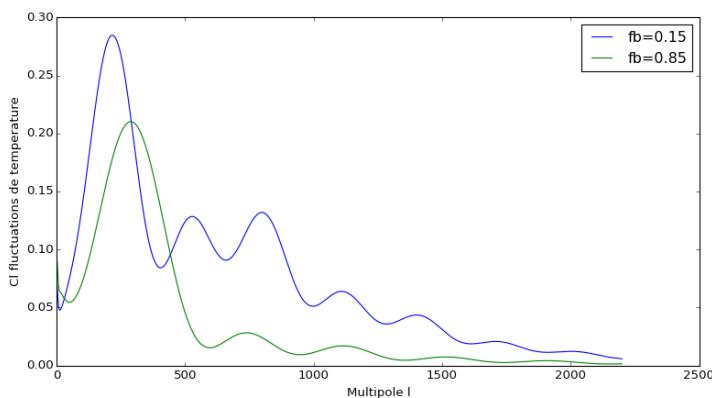


FIGURE 36: Deux modèles de spectre de puissance angulaire du fond diffus cosmologique. L'un possède une fraction de baryons faible, conforme au modèle standard Λ CDM, l'autre possède une fraction de baryons forte, où la contribution de la matière noire et celle des baryons est inversée par rapport au modèle standard. On note l'effet de l'amortissement Silk important aux petites échelles angulaires (grand ℓ) dans le cas d'un Univers dominé par les baryons. A l'inverse, le modèle standard présente des pics secondaires importants traduisant l'entretien des oscillations baryoniques par le champ de gravité de la matière noire.

été obtenues dans une Univers avec seulement des baryons. On note en particulier la hauteur importante du troisième pic, qui est une forte indication sur la présence d'une matière non couplée par le rayonnement et qui ne subit pas d'amortissement spectaculaire. Remarquons enfin que l'amortissement Silk reste présent, mais sa force est atténuée par rapport à un modèle composé uniquement de baryons. Cette amplitude importante de pics secondaires est très difficile à expliquer sans invoquer une matière à faible interaction avec le rayonnement et de fait la structure spatiale du fond diffus cosmologique est un argument très important en faveur de l'existence de cette matière inconnue : la physique qui y opère est relativement simple, proche du régime linéaire et très bien connue au contraire de la physique plus complexe des galaxies et des amas, qui laissent plus de place à des interprétations alternatives.

Matière Noire Froide

LE MODÈLE STANDARD de la cosmologie considère également que la matière noire est *froide*¹⁶³. Ce terme permet d'indiquer que la vitesse typique de ces particules est faible, les qualifiant de fait comme des particules non-relativistes. Le qualificatif 'froid' provient de l'analogie entre dispersion de vitesse et température des particules dans un gaz, où l'énergie cinétique typique vaut :

$$m\sigma^2 \sim k_B T. \quad (234)$$

Le régime non-relativiste, où $\sigma \ll c$ implique par extension une température basse et donc froide. Ce terme de matière noire froide est à mettre en opposition avec la matière noire chaude, composée de

163. en anglais on parle de CDM, *Cold Dark Matter*

particules relativistes possédant des vitesses caractéristiques proches de celle de la lumière. Un candidat naturel à de la matière noire chaude aurait été le neutrino : cette particule interagit peu avec les autres particules, n'interagit pas avec le rayonnement, satisfaisant ainsi les qualités fondamentales de la matière noire. Le neutrino est aussi une particule très légère et relativiste, lui conférant des vitesses caractéristiques élevées et une cinématique 'chaude'¹⁶⁴.

^{164.} en anglais on parle de HDM, *Hot Dark Matter*

Masse de Jeans : cas d'un système non-collisionnel

LE CARACTÈRE CHAUD ou froid de la matière noire a des conséquences sur le type de structures que l'on peut construire avec cette matière. En effet les grandes dispersions de vitesses attendues dans le cas d'une matière noire chaude l'empêche de former des petites structures peu massives sous l'effet de la gravitation : il faut qu'une structure ait une masse suffisante pour que son 'poids' puisse s'opposer à l'effet de dispersion dû aux vitesses de particules. Cette masse critique se nomme la masse de Jeans¹⁶⁵.

L'expression de la Masse de Jeans pour un système non collisionnel peut s'obtenir en considérant l'équation qui décrit l'évolution dynamique d'un tel système, *l'équation de Boltzmann* :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (235)$$

Cette équation est juste la traduction de la conservation dans l'espace des phases de la *fonction de distribution* $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ de notre fluide non-collisionnel. Cette fonction décrit la distribution des éléments de notre système au cours du temps, à différentes vitesses et positions. Par exemple la densité de particules et l'impulsion à une position \vec{x} sont données par :

$$\rho(x, t) = \int d\vec{v} f, \quad (236)$$

$$\rho\vec{v}(x, t) = \int d\vec{v} \vec{v} f. \quad (237)$$

L'équation de Boltzmann est très générique et son intégration peut conduire par exemple à l'équation de conservation de la masse¹⁶⁶ ou de l'impulsion¹⁶⁷. L'absence de collisions est à l'origine du terme source égal à zéro et de la conservation de la fonction de distribution.

^{165.} on la retrouvera dans une approche fluide dans le chapitre sur les grandes structures

DANS LE RÉGIME DES FAIBLES PERTURBATIONS, on peut linéariser l'équation de Boltzmann en ne considérant que de faibles perturbations $f_1 \ll f_0$ à la fonction de distribution, où $f_0(\vec{v}, t)$ est la fonction de distribution homogène à l'équilibre. On obtient¹⁶⁸ :

^{166.} en intégrant sur les vitesses $\int d\vec{v}$

^{167.} en intégrant sur les vitesses en $\int d\vec{v}\vec{v}$

^{168.} en pratique on obtient l'équation linéarisée en injectant $f_0 + f_1$ dans l'équation de Boltzmann, tout en tenant compte du fait que f_0 par définition satisfait sa propre équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (238)$$

Le potentiel gravitationnel perturbé $\Phi_1(\vec{x}, t)$ apparaît en considérant le principe fondamental de la dynamique¹⁶⁹.

Dans quel cas a-t-on une perturbation stable ? Intuitivement, on peut considérer que la situation est stable si f_1 oscille autour d'une valeur nulle. La transposition de cette intuition consiste à développer la perturbation (et le potentiel associé) comme une onde plane¹⁷⁰ et considérer les conséquences de cette hypothèse au travers de l'équation de Boltzmann

$$f_1 = F_1(\vec{v}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (239)$$

$$\Phi_1 = P_1 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}. \quad (240)$$

L'équation de Boltzmann linéarisée devient alors :

$$(\vec{k}\vec{v} - \omega)F_1 - P_1 \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (241)$$

Par ailleurs le potentiel satisfait l'équation de Poisson¹⁷¹ donc la relation suivante s'applique :

$$-k^2 P_1 = 4\pi G \int d\vec{v} F_1. \quad (242)$$

On obtient alors une relation de dispersion reliant la fréquence spatiale k et la pulsation ω sous forme intégrale :

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}}{\vec{k}\vec{v} - \omega} d\vec{v} = 0. \quad (243)$$

En principe, la résolution de cette équation doit nous permettre de dégager les solutions stables (avec ω réel) et les solutions instables (avec ω imaginaire¹⁷²). Toutefois, cette résolution est complexe et technique, en particulier du fait de la présence du terme $\vec{k}\vec{v} - \omega$ au dénominateur de l'intégrande qui rend possible l'apparition de solutions 'catastrophiques' ou résonantes. Ce type de situation est typique de la dynamique de systèmes non collisionnels et nécessite un traitement mathématique rigoureux que nous n'allons pas faire ici. Ceci étant, on peut considérer que la solution $\omega = 0$ doit constituer la transition entre régime stable et instable.

Posons $\omega = 0$ et mettons nous dans le cas simple d'une fonction de distribution 'thermique'¹⁷³ à l'équilibre :

$$f_0(v) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2} \quad (244)$$

où ρ_0 désigne la densité de matière moyenne et $\sigma \sim \sqrt{k_B T}$ sa dispersion de vitesse. Prenons arbitrairement le mode $\vec{k} = (k_J, 0, 0)$ en cartésien et l'on obtient alors¹⁷⁴ :

169. $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi_1$

170. de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et de période $T = 2\pi/\omega$

171. $\Delta\Phi_1 = 4\pi G\rho$

172. qui transforme l'exponentielle complexe oscillante en exponentielle réelle croissante

173. Maxwellienne

174. Rappel $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1$

$$1 - \frac{4\pi G\rho_0}{k_J^2\sigma^2} = 0. \quad (245)$$

La transition vers le déséquilibre, donc la perte du comportement oscillant qui conduit vers l'effondrement gravitationnel, est donc caractérisée par :

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \frac{\pi\sigma}{\sqrt{G\rho_0}}. \quad (246)$$

Il existe une longueur typique λ_J où l'onde passe dans un régime d'instabilité. C'est la longueur de *Jeans* pour un système non collisionnel qui constitue la taille *minimale* que doit avoir une fluctuation pour être instable et donc s'effondrer gravitationnellement.

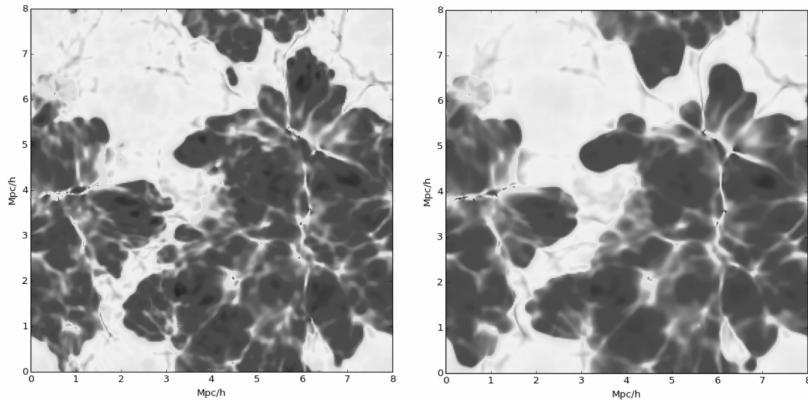


FIGURE 37: Deux simulations de la densité de gaz dans un volume d'Univers de 8 Mpc de côté, l'un avec de la matière noire froide (à gauche) l'autre avec de la matière noire chaude (à droite). On constate une granulosité plus importante dans le cas de la matière noire froide. Les régions sombres sont ionisées et les claires sont neutres, sans impact pour la discussion ici.

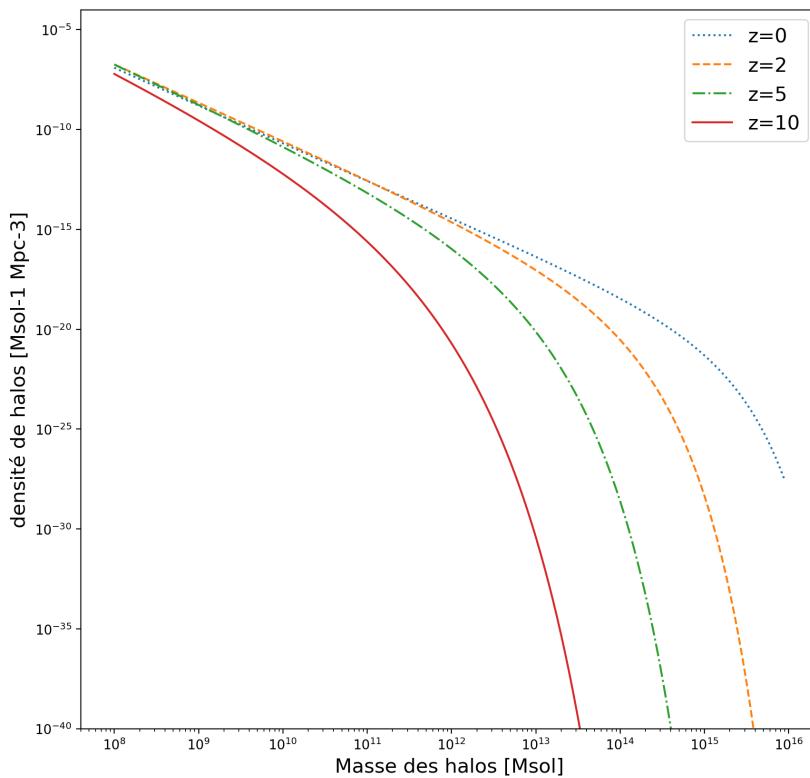
On voit aisément que cette taille λ_J augmente si la dispersion de vitesse augmente, par conséquent un système chaud créera des structures de grande taille. A l'inverse un système froid pourvu d'une faible dispersion de vitesse, à densité moyenne équivalente, sera capable de produire des structures instables de plus petites taille car la longueur de Jeans est plus faible. De la matière noire froide fera des petites structures, la matière noire chaude plutôt des grandes car elles seules sont assez massives pour contrer la grande dispersion de vitesse.

C'est une propriété que l'on peut reproduire dans des simulations numériques par exemple (voir Fig. 37) et le confrontation des modèles avec les observations permet de mettre une contrainte sur la température de la matière noire. Les résultats sont sans appel : la matière noire doit être froide et non relativiste. En effet le défaut de petites structures dans les modèles de matière noire chaude, en particulier ceux à base de neutrinos, ne permettent pas de reproduire l'abondance des galaxies observées autour de nous.

Halos de matière noire et galaxies : difficultés

LES HALOS DE MATIÈRE NOIRE HÉBERGERAIENT LES GALAXIES en leur sein. Par conséquent, il apparaît naturel d'extrapoler les prédictions faites sur les populations de halos (invisibles) aux populations de galaxies (visibles). Ceci est d'autant plus tentant que la physique de la matière noire est simple, car uniquement régie par la force de gravitation, tandis que celle devant conduire à la partie visible des galaxies fait intervenir une physique beaucoup plus complexe¹⁷⁵. Toutefois, le succès des modèles à base de matière noire aux grandes échelles (structure du CMB, distribution de masse dans les amas) ne se transposent pas facilement aux échelles galactiques, et nous allons mentionner ici quelques-uns des défis posés à l'hypothèse de l'existence d'une matière invisible pesante.

La fonction de masse des halos



¹⁷⁵. gravitation, hydrodynamique, chimie, physique stellaire au minimum doivent être ainsi invoquées pour prédire la lumière produite par une galaxie

FIGURE 38: La fonction de masse des halos de matière noires pour différents redshifts. On constate que les halos les plus massifs n'apparaissent que pour des époques tardives : les structures nécessitent du temps pour se mettre en place.

L'une des prédictions des modèles de formation des grandes structures¹⁷⁶ est la distribution des masses des halos de matière noire.

¹⁷⁶. voir le chapitre suivant

L'obtention de cette distribution est trop complexe pour être abordée ici : elle repose sur la statistique des 'pics' de densités de matière d'amplitude suffisante pour s'effondrer en halos¹⁷⁷. Cette statistique est définie par son spectre de puissance, $P(k)$. La *fonction de masse* dépend de la cosmologie, du type de matière noire, de l'instant considéré et donne le nombre de halos de masse donnée, par unité de volume :

$$dN = f(M, z) dM. \quad (247)$$

La fonction de masse possède une forme caractéristique, décroissante avec la masse considérée : elle indique simplement que les objets peu massifs sont beaucoup plus nombreux que les objets de grandes masses (voir Fig. 38). De fait, même si les objets peu massifs ont une contribution individuelle faible au bilan total de masse, en terme de *populations*, ces objets dominent ce bilan. De même son évolution temporelle indique que les objets massifs deviennent de plus en plus nombreux, au détriment relatif des plus légers : c'est le modèle de formation hiérarchique qui est à l'œuvre où les petites structures fusionnent pour en donner de plus grandes au cours du temps. Cela indique également clairement qu'une structure massive de type amas de galaxies par exemple, ne peut apparaître que dans un Univers suffisamment évolué : il faut laisser du temps au processus de formation des structures pour qu'il puisse produire des halos lourds. Une autre façon de considérer cette distribution de masse est la mesure de l'échelle typique qu'il faut considérer pour trouver un halo de masse donnée (cf. Fig. 39) : dans ce cas plus un halo est rare, plus l'échelle considérée, plus le volume d'Univers à sonder est important. Par ailleurs, aux époques reculées, on peut constater qu'il est impossible de trouver les halo les plus lourds au sein de l'Univers observable : la raison en est simple, ces objets n'existent pas encore et n'ont pas eu le temps de se former.

Une première difficulté émerge lorsque l'on compare la distribution des masses des halos avec la distribution des luminosités des galaxies. Au premier ordre, il apparaît intuitif de penser que la lumière produite par les galaxies suit la masse des halos sous-jacents : plus un halo est lourd, plus il est mesure de contenir du gaz et plus il est susceptible de contenir des étoiles. Toutefois lorsque l'on compare les distributions de masse des halos et de luminosité, il apparaît que la fonction de luminosité présente un déficit d'objets à la fois aux grandes et aux basses masses¹⁷⁸. Cet effet est schématisé dans la figure 40. Il faut donc invoquer des mécanismes pour modérer la formation d'étoiles de part et d'autre d'une masse 'pivot' de $10^{10} M_{\odot}$. Au masses plus faibles que ce pivot, un mécanisme possible est l'injection d'énergie par les supernovæ¹⁷⁹ : celles-ci injectent de l'énergie dans le gaz qui les entoure et le chauffage ou l'éjection de matériau

^{177.} de surdensité environ $\delta_c \sim 1.68$, voir le chapitre sur la formation des petites structures

^{178.} La courbure de la fonction est plus prononcée en luminosité qu'en masse

^{179.} qui sont des explosions d'étoiles en fin de vie

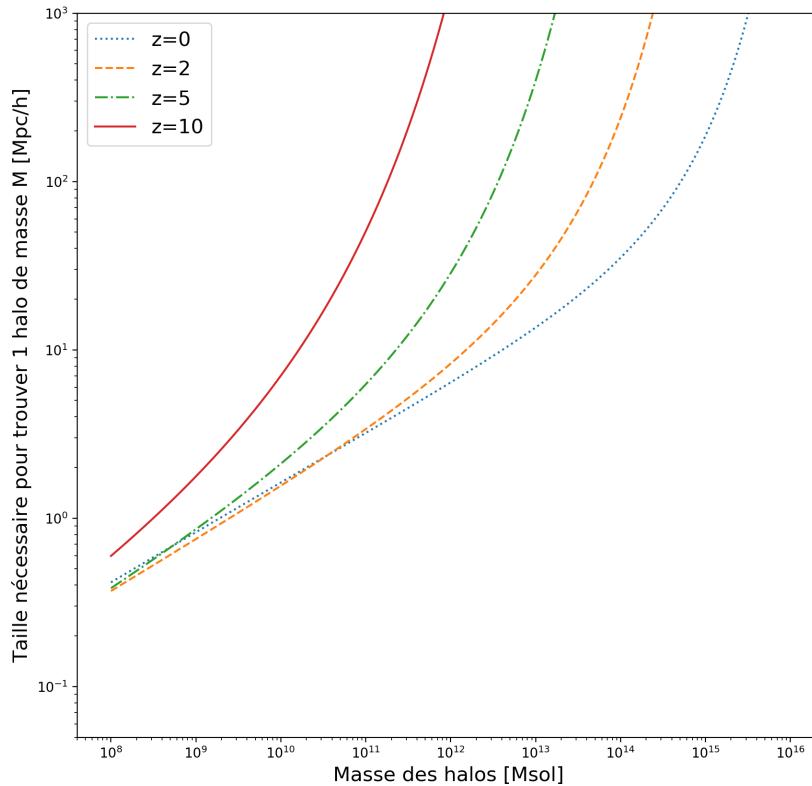


FIGURE 39: Quelle échelle d'Univers faut-il sonder pour trouver un halo de masse donnée à un redshift donné. Cette courbe indique que plus un halo est léger, plus il est facile de le trouver et plus la taille d'Univers à sonder est petite.

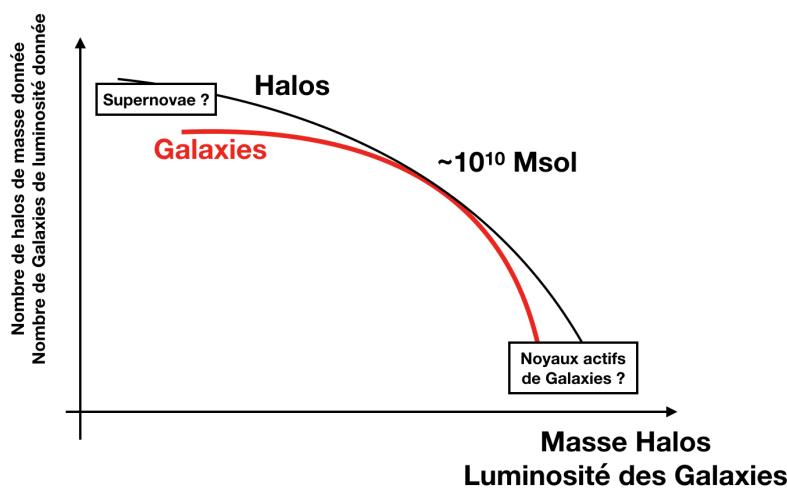


FIGURE 40: Schéma illustrant la différence entre la fonction de masse des halos et la distribution des luminosités des galaxies. Deux mécanismes sont susceptibles de prévenir la formation d'étoile : les explosions de supernovæ aux faibles masses et les noyaux actifs de galaxie aux grandes masses. Schéma inspiré de Silk & Mamon.

ainsi produits empêchent la formation immédiate d'étoiles de la génération suivante. Aux masses les plus importantes, un mécanisme similaire est envisagé mais cette fois dû aux noyaux actifs de galaxies, dont l'énergie produite est lié à l'accrétion de matière sur un trou noir supermassif. Dans tous les cas, il faut donc invoquer des processus astrophysiques complexes pour réconcilier la prédition 'simple' issue de la dynamique de la matière noire avec les propriétés lumineuses des galaxies. Or ces processus sont complexes à appréhender, difficiles à contraindre quantitativement et le modèle de matière noire se trouve ainsi confrontée à un défi particulièrement important à cause de notre compréhension imparfaite de ces phénomènes.

Le problème des sous-structures

Une autre difficulté présentée au modèle de halos de matière noire est liée aux galaxies satellites présents autour des grandes galaxies. Les objets comme la Voie Lactée ou la galaxie d'Andromède possède un cortège de galaxies plus légères, dites 'satellites', en orbite autour de la galaxie principale. Au nombre de quelques dizaines par systèmes, ces cortèges posent un défi majeur au modèle de matière noire froide. En effet, ces modèles¹⁸⁰ prédisent des milliers de satellites pour de tels systèmes alors que leur nombre observé se limite à quelques dizaines. Même si la possibilité existe que tous ces objets ne soient pas détectés, il n'en demeure pas moins que l'écart entre théorie et observation est particulièrement frappant dans ce cas (cf. Fig.41). Pour expliquer cette différence, il faut à nouveau invoquer des processus qui limitent la création d'étoiles dans la très grande majorité de ces satellites. Ces procédés sont néanmoins extrêmement mal connus et ne permettent pas toujours de résoudre cette tension de façon entièrement satisfaisante.

Plus récemment est également apparu le fait que la distribution spatiale de ces satellites n'est pas isotrope mais est organisée sous la forme de grands disques de satellites, fins et en rotation. C'est notamment le cas autour de la Galaxie d'Andromède : sur une trentaine d'objets actuellement connus, 15 sont présent dans un grand disque dont 13 en rotation dans le même sens (cf. Fig. 42). Or il s'avère que les prédictions à base de matière noire ne parviennent pas à prédire ce type de configuration, tout au moins dans des régimes aussi extrêmes.¹⁸¹ A nouveau, on peut invoquer des processus qui limitent la formation d'étoile de façon différenciée en fonction de la distance ou de la position de ces satellites pour expliquer cet état de fait¹⁸²

Ces 2 problèmes, nombre de satellites ou configuration spatiale de ces derniers, ne sont que deux des exemples les plus critiques auxquels est confronté le modèle des halos de matière noire. Il en existe

180. reposant essentiellement sur des simulations numériques

181. ces prédictions reposent sur des simulations et ces simulations ne parviennent pas à reproduire des disques de satellites aussi fins, aussi étendus et dont la cinématique est aussi cohérente.

182. le rayonnement provenant de la galaxie d'Andromède elle-même pourrait par exemple éteindre les satellites de façon plus ou moins efficace en fonction de leur distance, expliquant l'étendue des disques.

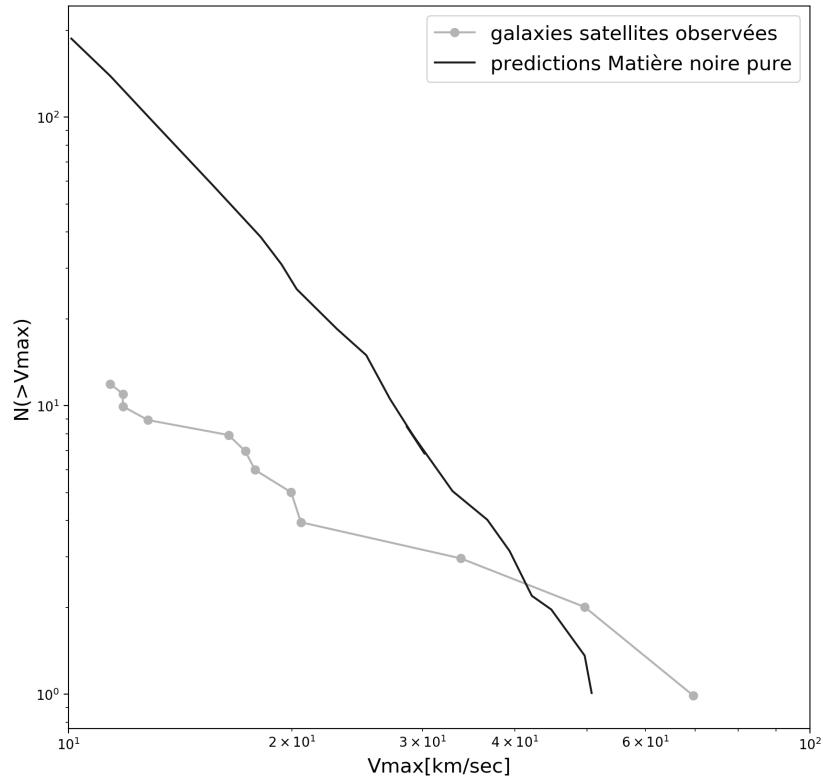


FIGURE 41: Distribution du nombre de galaxies satellites de la Voie Lactée possédant une masse supérieure à une masse donnée (la quantité v_{\max} est une mesure directe de la masse d'un satellite). Les observations sont présentées par les points gris tandis que la prédition théorique à base de matière noire est donnée par la courbe noire. On constate que les modèles surestiment très largement le nombre observé d'objet. Figure inspirée de Pawłowski et al. (2015).

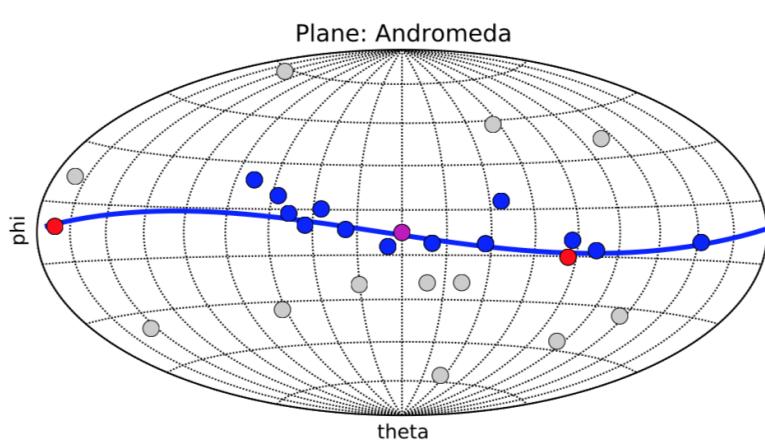


FIGURE 42: Distribution des satellites de la Galaxie d'Andromède, vue sur le ciel d'un observateur qui serait placé en son centre. Une quinzaine de satellites sont très proches d'un grand cercle sur le ciel, indiquant que ces objets sont distribués dans un plan.

d'autres et de façon générale il faut invoquer des processus astrophysiques complexes et mal connus de modération de la formation stellaire pour expliquer les différences entre modèle et observation. Pour ces raisons, il est également possible d'envisager qu'il *n'existe pas* de matière noire et il faut donc trouver d'autres raisons pour expliquer par exemple les courbes de rotations plates des galaxies : c'est l'objectif que se fixent par exemple les modèles de gravitation modifiée¹⁸³. Toutefois, ces difficultés rencontrées aux échelles galactiques par le modèle de matière noire froide sont à comparer aux succès réels obtenus par ce même modèle aux échelles cosmologiques, pour expliquer la structure du CMB notamment. Pour toutes ces raisons, une grande partie de l'activité actuelle de la communauté vise à tester notre compréhension des processus baryoniques et stellaires pour voir si ils parviennent à réconcilier le modèle de matière noire avec les observations aux échelles galactiques. Cette compréhension est toujours aujourd'hui grandement incomplète.

^{183.} voir par exemple le modèle phénoménologique MOND (pour *M*odified *N*ewtonian *D*ynamics) qui inclut les effets d'une accélération limite dans le régime des faibles champs de gravitation, similaire à l'effet d'une distribution de matière noire

Formation des grandes structures

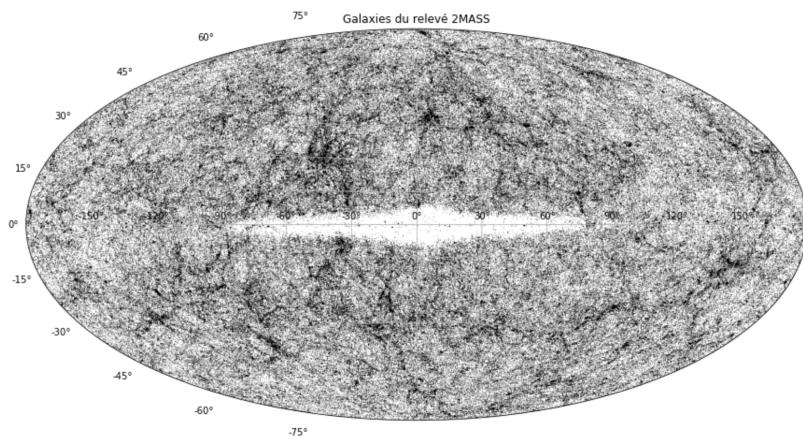


FIGURE 43: La distribution sur le ciel de 550 000 galaxies du grand relevé infrarouge 2MASS, telle qu'elle serait vue par un observateur au centre de la Voie Lactée. Chaque point est une galaxie distante : ces galaxies sont distribuées le long des *grandes structures de l'Univers* qui combinent régions denses, grands vides et filaments de matière. On note un déficit d'objets au centre de l'image, due à la présence de la Voie Lactée qui bloque les lignes de visée.

Les grandes structures de l'Univers désignent de façon générique et tout à la fois la matière diffuse, les galaxies et amas de galaxies qui s'organisent sous l'effet de la gravitation. Aujourd'hui ces grandes structures produisent une distribution de matière 'filamentaire' où des surdensités côtoient des vides, reliées entre elles par des ponts de matériau. Elles résultent de l'action du mécanisme d'instabilité gravitationnelle sur les faibles fluctuations de densité présentes dans l'Univers jeune et tracées par exemple par le CMB. Au cours des 13.8 milliards d'années, des surdensité de 0.001% parviennent ainsi à croître pour atteindre des contrastes de densité mesurés d'au moins plusieurs centaines dans les galaxies aujourd'hui. Si une grande partie des processus à l'œuvre lors de la formation des grandes structures peuvent être saisis par une approche analytique, le problème ne peut être abordé dans toute sa complexité que via l'utilisation de simulations numériques, dites simulations cosmologiques.

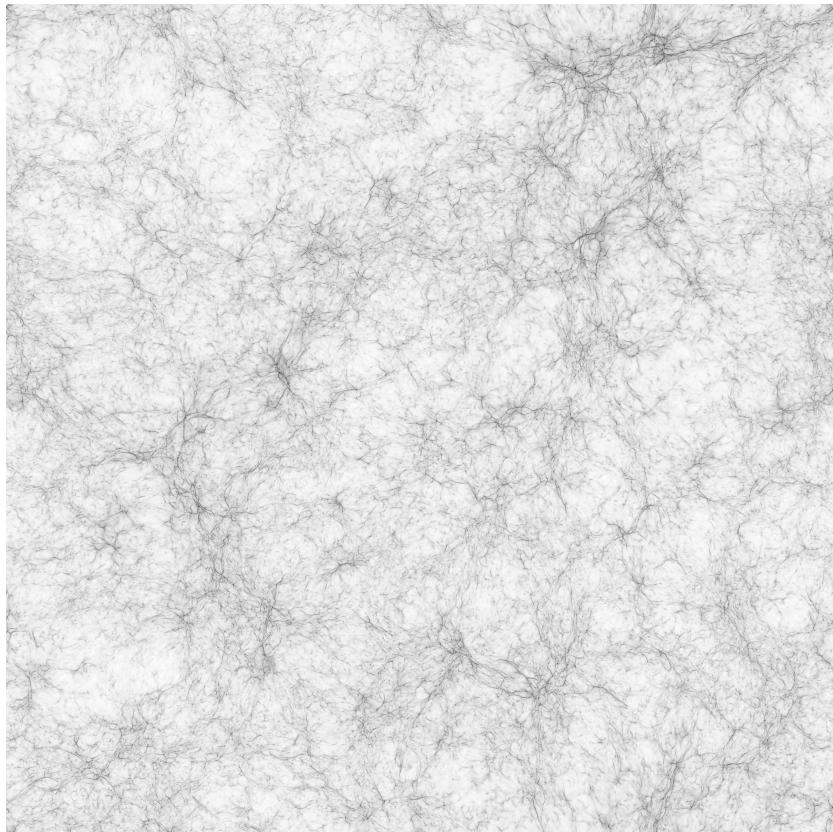


FIGURE 44: La distribution de la matière telle qu'elle est prédict par une simulation cosmologique de formation des grandes structures. Ce carré fait environ 100 Mpc de côté et correspond à un Univers jeune, 1 milliard d'années après le Big-Bang ($z \sim 6$). On retrouve la distribution typique en vides, amas et filaments qui est observée dans le ciel

Densité et spectre de puissance

L'un des objectifs de l'étude de la formation des grandes structures est de prédire comme la matière va s'organiser au cours de l'histoire de l'Univers. La quantité généralement suivie est le contraste de densité :

$$\delta(x, t) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (248)$$

En l'absence de création de masse et dans un Univers homogène et isotrope, la densité moyenne $\bar{\rho}$ est une quantité de référence constante dans l'espace et pour laquelle la variation temporelle est seulement due à la dilution cosmologique¹⁸⁴

Toutefois, le contraste de densité à une position x donnée et à un instant donné t est finalement porteur d'assez peu d'information cosmologique, puisque l'on cherche à obtenir des contraintes qui ont des valeurs globales et génériques. La première étape vers un traitement cosmologique consiste à raisonner dans l'espace de Fourier et à considérer les *modes* $\delta_k(t)$ d'une réalisation donnée de $\delta(x, t)$:

$$\delta(x, t) \sim \int_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(t) e^{ikx} dk. \quad (249)$$

L'équation 249 représente la décomposition en série de Fourier du contraste de densité : en pratique cela revient à décomposer le champ de densité en une série de modes sinusoïdaux et dont les contributions des différentes fréquences sont données par δ_k . En plus d'un intérêt mathématique, cette décomposition constitue une mise en pratique de 'cosmologisation' de la densité : on se met à suivre des modes sinusoïdaux délocalisés, de taille caractéristique $\lambda = 2\pi/k$ ¹⁸⁵ et la position x perd de l'importance en tant que telle. L'amplitude d'un mode k est donné tout simplement par $|\delta_k|^2$: l'étude de cette amplitude et son éventuelle évolution temporelle nous renseigne globalement sur l'évolution des structures d'échelle caractéristique λ au cours du temps et sur leurs contribution relatives. Cette amplitude est aussi appelée *puissance* et l'ensemble des puissances de tous les modes k est appelé *spectre de puissance*.

184. dont on rappelle qu'elle fait varier la densité en a^{-3} .

185. λ qui est donc la longueur d'onde

Champ aléatoire Gaussien Le champ de matière cosmologique appartient semble-t-il à la classe des champs aléatoires gaussiens. C'est une prédition des théories inflationnaires et il semble observationnellement que ce soit le cas : in fine cela constitue une base de travail et éventuellement on pourra être amené à mesurer des départs à cette gaussianité. Un champ aléatoire gaussien $\delta(\vec{x})$ se caractérise par une densité de probabilité (PDF) de type :

$$p(\delta(\vec{x})) \sim \exp(-\delta(\vec{x})C^{-1}\delta(\vec{x})), \quad (250)$$

où C est une matrice de corrélation, généralement non diagonale. Cette matrice encode les corrélations qui peuvent apparaître dans le champ de matière : celui-ci possède généralement des structures possédant une certaine cohérence spatiale et cette dernière se manifeste en couplant le champ δ entre différentes positions via C ¹⁸⁶. Une propriété intéressante est que la densité de probabilité de la transformée de Fourier de $\delta(\vec{x})$ suit le même type de PDF :

$$p'(\delta_{\vec{k}}) \sim \exp(-\delta_{\vec{k}}^* \tilde{C}^{-1} \delta_{\vec{k}}). \quad (251)$$

Une propriété encore plus intéressante est que \tilde{C} est diagonale si $\delta(\vec{x})$ est un champ aléatoire gaussien : chaque mode de Fourier peut être suivi statistiquement indépendamment des autres. Par simple inspection, il apparaît que les composantes de cette matrice de corrélation sont les variances des modes¹⁸⁷ :

$$\langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle = P(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle. \quad (252)$$

Cette mesure de la variance ne dépend que la norme $k = |\vec{k}|$ du mode considéré (plusieurs modes de directions différentes mais de modules identiques partagent donc la même variance du fait de l'isotropie) et constitue le spectre de puissance $P(k)$ du champ de matière.

Cette quantité est destinée à être mesurée au cours du temps et nous renseigne sur la croissance des structures. Si certaines échelles bénéficient d'une croissance plus rapide que d'autres, cela se manifestera par une déformation du spectre de puissance aux échelles concernées. Si le champ est vraiment un champ aléatoire gaussien, la connaissance de sa variance et donc de $P(k)$ suffit à complètement le définir : si des corrélations anisotropes sont détectées (dans les relevés de galaxies ou dans le CMB), elles confirmeront soit la nature non-gaussienne des fluctuations primordiales soit l'existence de processus physiques qui génèrent de la non-gaussianité¹⁸⁸.

Une quantité reliée au spectre de puissance est la fonction de corrélation à deux points $\xi(r)$: elle exprime l'excès de probabilité de trouver de la matière en deux points séparés d'une certaine distance r par rapport à une distribution aléatoire. On peut démontrer que la fonction de corrélation à deux points est simplement la représentation du spectre de puissance dans l'espace des positions (donc sa transformée de Fourier) :

$$\xi(r) \sim \int d\vec{k} P(k) e^{ikr}. \quad (253)$$

Notons qu'à nouveau cette excès de probabilité ne dépend que de la distance r et non pas d'une orientation ou de positions spécifiques des 2 points considérés. Généralement, la fonction de corrélation à 2 points est utilisée si l'on a une description discrète du champ de densité : c'est le cas par exemple lorsque l'on utilise des galaxies comme

186. par exemple la structuration de la matière dans l'Univers est telle que les régions denses se trouvent plutôt à proximité d'autres régions denses.

187. ici δ_D désigne la fonction de Dirac, nulle partout sauf en 0, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_D(x) = 1$

188. notons que le spectre de puissance ne permet pas de mesurer la non-gaussianité. Deux champs, l'un gaussien l'autre non, peuvent partager les mêmes variances. Il faut utiliser des statistiques d'ordres supérieurs pour pouvoir faire cette distinction.

traceurs de la matière dans les grands relevés. Si l'on travaille avec un champ continu (comme dans des travaux analytiques), on passe directement dans une représentation en mode de Fourier en utilisant le spectre de puissance $P(k)$: ce dernier présente l'avantage d'explicitement séparer les modes de tailles différentes, là où la fonction de corrélation à 2 points "mélange" les modes et peut donc être dominé par une échelle au détriment des autres, qui peuvent pourtant contenir une information pertinente.

Longueur de Jeans

Une quantité centrale dans l'étude de l'instabilité gravitationnelle est la longueur de Jeans¹⁸⁹, notée λ_J . Elle correspond à la longueur minimale que doit avoir une structure pour s'effondrer sous l'effet de la gravitation. On y associe également une masse (la masse de Jeans) M_J donnée simplement par :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \lambda_J^3, \quad (254)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne du milieu : une structure de masse supérieure à la masse de Jeans va s'effondrer. L'existence d'une grandeur critique pour que l'effondrement se réalise traduit l'existence d'une compétition entre la gravité et un autre processus que la gravité doit 'vaincre'. En général cet autre processus est l'existence d'un support thermique qui fournit une pression à même de s'opposer à la gravitation. Pour du gaz, il s'agit généralement de la pression interne du gaz, pour des systèmes non-collisionnels (type gaz d'étoiles) c'est la dispersion de vitesse interne qui agit comme une barrière à l'effondrement¹⁹⁰.

L'expression de la longueur de Jeans peut s'obtenir avec un simple raisonnement : pour qu'une structure s'effondre il faut que l'information gravitationnelle se répartisse plus rapidement au sein d'une structure que l'information de support thermique. Dans un milieu de densité ρ l'information gravitationnelle est transportée en un temps dynamique

$$t_G \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (255)$$

Pour un gaz la transmission de l'information de support thermique dépend de la vitesse du son c_s et de la taille de la structure λ :

$$t_p \approx \frac{\lambda}{c_s}. \quad (256)$$

L'effondrement a lieu si $t_G < t_p$, donc si la taille de la structure considérée obéit à la condition :

$$\lambda > \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \equiv \lambda_J. \quad (257)$$

189. voir aussi le chapitre dédié à la matière noire

190. voir aussi le chapitre dédié à la matière noire

Faire baisser λ_J revient à favoriser l'effondrement gravitationnel, le cas limite étant $\lambda_J \rightarrow 0$ où toute structure s'effondre. Ce régime s'obtient dans un milieu très dense ou bien très froid, i.e. sans support thermique. A l'inverse, une grande valeur de λ_J réduit la possibilité d'effondrement et $\lambda_J \rightarrow \infty$ revient à empêcher toute structure de s'effondrer : cela correspond à un milieu sous-dense, donc très léger, ou bien très chaud avec une grande vitesse du son. Pour un système non-collisionnel, la même expression existe pour la longueur de Jeans en remplaçant la vitesse du son par la dispersion de vitesse du milieu.

Une dérivation plus rigoureuse peut être obtenue par un traitement perturbatif au premier ordre. On considère un gaz de densité moyenne $\bar{\rho}$ et d'équation d'état reliant¹⁹¹ :

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2. \quad (258)$$

Ce gaz obéit aux équation de Poisson, qui est l'équation de champ de la gravité newtonienne liant potentiel ϕ et densité :

$$\Delta\phi(x, t) = 4\pi G\rho \quad (259)$$

et aux équations fluides, conservation de la masse¹⁹²

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{u} = 0, \quad (260)$$

et conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \vec{\nabla}\phi. \quad (261)$$

On réalise un traitement perturbatif (à 1D par simplicité)¹⁹³ :

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}(1 + \delta(x, t)) \quad (262)$$

$$u(x, t) = v_1(x, t) \quad (263)$$

$$\phi(x, t) = \phi_1(x, t) \quad (264)$$

$$P = P_0 + P_1(x, t) \quad (265)$$

En injectant ces développements, on parvient aisément à écrire :

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = -\bar{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (266)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = 0 \quad (267)$$

d'où l'équation maîtresse de l'instabilité :

$$\ddot{\delta} - c_s^2\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (268)$$

^{191.} ici P désigne la pression du gaz.

Notons par exemple que dans le cas du gaz parfait $P = \rho k_B T$, nous avons $k_B T \sim c_s^2$ qui est conforme à cette formulation d'une équation d'état

^{192.} ici u désigne la vitesse du fluide

^{193.} notons qu'on considère ici que le milieu n'est pas animé d'une vitesse globale à l'équilibre $v_0 = 0$ et que le milieu à l'équilibre ne présente pas de variations spatiales de potentiel : ce potentiel ϕ_0 constant dans l'espace est sans influence dynamique et est donc ignoré. Les quantités δ, v_1, ϕ_1, P_1 sont des petites quantités

Effondrement et Oscillations

Cette équation s'analyse plus facilement en prenant sa transformée de Fourier spatiale :

$$\ddot{\delta}_k + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}) \delta_k = 0. \quad (269)$$

Deux régimes peuvent être facilement distingués :

- si $c_s^2 k^2 > 4\pi G \bar{\rho}$ c'est une équation d'oscillateur harmonique.

Le mode correspond à une onde sonore en $e^{i\omega t}$ de pulsation¹⁹⁴ $\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}}$. Cela correspond à des grandes fréquences spatiales, donc des petites structures : notons que la pulsation est d'autant plus grande que ces structures sont petites.

- si $c_s^2 k^2 < 4\pi G \bar{\rho}$, la solution est hyperbolique avec une contribution exponentielle croissante en $e^{t/\tau}$, qui correspond à l'instabilité gravitationnelle. Ce régime correspond aux faibles valeurs de k donc aux grandes échelles. Le temps caractéristique d'instabilité est $\tau = (4\pi G \bar{\rho} - c_s^2 k^2)^{-1/2}$ qui se résume au temps dynamique¹⁹⁵ si k est suffisamment faible donc si le mode étudié est suffisamment grand.

On remarque que le cas critique $\frac{4\pi^2 c_s^2}{\lambda^2} = 4\pi G \rho$ nous redonne la longueur de Jeans

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho}} \quad (270)$$

Cas cosmologique

LE CAS COSMOLOGIQUE se doit de prendre en compte l'expansion de l'Univers. Comme on le verra en fin de démonstration, cela change finalement peu de choses par rapport au cas exposé précédemment. Toutefois cette étude présente un intérêt technique en rapport avec la manipulation de grandeurs comobiles dans des équations différentielles couplées. Pour cette raison le calcul sera décrit en détail.

LES ÉQUATIONS IMPORTANTES sont les mêmes que dans le cas d'un Univers statique¹⁹⁶ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (271)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \quad (272)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{r}^2} = 4\pi G \rho. \quad (273)$$

194. et donc de fréquence temporelle $\nu = 2\pi/\omega$

195. c'est à dire $1/\sqrt{G\rho}$

196. ρ est la densité de matière, \vec{u} la vitesse, \vec{r} la position physique, P la pression et ϕ le potentiel gravitationnel

La principale difficulté découle de la dépendance temporelle de la distance physique $\vec{r} = a(t) \vec{x}(t)$ où \vec{x} désigne la position comobile :

la dérivée par rapport à \vec{r} doit donc être prise avec précaution. Par commodité on préfère généralement écrire ces équations en fonction de données comobiles pour extraire au moins l'effet de flot cosmologique encodé par le facteur d'expansion $a(t)$.

La première étape consiste à transformer les dérivées temporelles prises à \vec{r} constant en dérivée prises à \vec{x} constant¹⁹⁷ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right)_t, \quad (274)$$

de même les dérivées spatiales deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}. \quad (275)$$

Pour finir, il faut établir que la vitesse comporte une partie liée au flot de Hubble¹⁹⁸ :

$$\dot{u} = \dot{a} \vec{x} + a \dot{\vec{x}} = \dot{a} \vec{x} + \vec{v} \quad (276)$$

où \vec{v} désigne une vitesse particulière superposée au flot cosmologique. Enfin la densité sera également exprimée en fonction de la densité de fond, $\bar{\rho} \sim a^{-3}$ qui subit l'expansion cosmologique :

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\vec{x}, t)). \quad (277)$$

LA CONSERVATION DE LA MASSE est modifiée comme suit : nous allons prendre les différents termes un par un. La dérivée temporelle de la densité comprend 2 termes, le premier¹⁹⁹ :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_r, \quad (278)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho}(1 + \delta), \quad (279)$$

et le second :

$$\frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial \vec{x}}. \quad (280)$$

Le terme de flux de cette même équation devient quant à lui :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)(\vec{v} + \dot{a} \vec{x})) \quad (281)$$

$$= \frac{\bar{\rho}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{v}) + \frac{\bar{\rho} \dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{x}) \quad . \quad (282)$$

Le dernier terme de cette égalité peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\bar{\rho} \dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{x}) \quad (283)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\dot{a}}{a} 3(1 + \delta) + \bar{\rho} \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \vec{x}}. \quad (284)$$

En rassemblant le tout on obtient l'équation de conservation de la masse dans sa formulation comobile :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} ((1 + \delta)\vec{v}) = 0 \quad (285)$$

197. on rappelle que pour $f(r) = a(t)x, t$, alors $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_r + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t}$

198. le terme $\dot{a}\vec{x}$ peut facilement se réécrire sous la forme $H\vec{r}$, i.e. la loi de Hubble

199. notez la dérivée temporelle de $\bar{\rho} \sim a^{-3}$ qui intervient ici

L'ÉQUATION D'EULER COMOBILE²⁰⁰ se dérive de la même manière.
Prenons le premier terme de dérivée temporelle de la vitesse :

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}. \quad (286)$$

La dérivée temporelle à \vec{x} constant donne :

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \ddot{a} \vec{x}, \quad (287)$$

tandis que le terme de Hubble donne²⁰¹ :

$$\frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \frac{\dot{a}^2}{a} \vec{x}. \quad (288)$$

Le terme d'advection ne présente pas de difficulté particulière²⁰² :

$$\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad (289)$$

$$+ \frac{\dot{a}^2}{a} \vec{x} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}. \quad (290)$$

En rassemblant tous ces premiers termes on obtient une expression comobile pour le membre de gauche de l'équation d'Euler :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \ddot{a} \vec{x}. \quad (291)$$

Le terme correspondant aux forces de pression ne pose pas de difficultés tandis que le terme correspondant aux forces de gravitation peut être modifié en lui incluant le terme en $\ddot{a} \vec{x}$ de l'équation 291 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} + a \ddot{a} \vec{x} \right) \quad (292)$$

$$= \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}}, \quad (293)$$

où $\Phi(\vec{x}, t)$ est un potentiel gravitationnel effectif, prenant en compte les effets de fonds changeant :

$$\Phi = \phi + \frac{a \ddot{a} \vec{x}^2}{2}. \quad (294)$$

En rassemblant partie différentielle et termes sources, on obtient une équation d'Euler comobile qui ressemble beaucoup à sa contrepartie physique avec l'inclusion d'un terme de friction de Hubble²⁰³ :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = - \frac{1}{a \bar{\rho}(1+\delta)} \frac{\partial P}{\partial \vec{x}} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}}. \quad (295)$$

L'ÉQUATION DE POISSON doit également être reformulée en faisant notamment intervenir le potentiel effectif Φ ²⁰⁴ :

200. qui n'est autre qu'une équation de conservation de l'impulsion

201. on utilise $\vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{x} = \vec{e}$

202. on utilise $\vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{x} = \vec{e}$

203. le second terme du membre de gauche contenant $H = \dot{a}/a$

204. en utilisant $\frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} \vec{x}^2 = 6$

$$\Delta\phi = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \quad (296)$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}^2} - 3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (297)$$

$$= 4\pi G \bar{\rho} (1 + \delta). \quad (298)$$

Or l'équation de Friedmann²⁰⁵ permet de relier l'évolution du facteur d'expansion avec la densité du fond et permet notamment d'établir que :

205. $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \bar{\rho}$

$$4\pi G \bar{\rho} a^2 + 3a\ddot{a} = 0, \quad (299)$$

d'où l'équation de Poisson comobile :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{x}^2} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad (300)$$

EN PRÉSENCE D'EXPANSION, l'équation maîtresse devient (pour chaque mode de Fourier) :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho})\delta_k = 0. \quad (301)$$

où toutes les quantités sont des quantités comobiles²⁰⁶. On retrouve essentiellement la même équation qu'en l'absence d'expansion et les mêmes conclusions s'imposent, à savoir instabilité si $\lambda > \lambda_J$ et oscillations sonores dans le cas inverse. On note toutefois la présence du terme $2H\dot{\delta}_k$ qui s'apparente à un terme d'amortissement dû à l'expansion. On montrera qu'à cause de ce terme qui tempère les solutions, les modes instables ne seront plus exponentiels mais en loi de puissance et les modes stables oscillants seront amortis sur des temps caractéristiques de l'ordre du temps de Hubble²⁰⁷.

206. avec $k = 2\pi/\lambda$ et λ est comobile

A ce stade il faut rappeler, que le traitement décrit juste ici est approché. Par exemple la matière noire²⁰⁸ ne peut pas, à priori, être correctement décrite par les équations 'fluides' utilisées ici. Comme ses particules sont non collisionnelles, on ne peut réduire la pression²⁰⁹ à un scalaire et elle peut être anisotrope. La question se pose dans les mêmes termes pour le rayonnement. Un traitement rigoureux doit passer par l'utilisation de l'équation de Boltzmann qui encode directement l'évolution de la fonction de distribution des ces fluides dans l'espace des phases et non simplement celle des ses moments (densité, impulsion, etc...). Heureusement le résultat obtenu reste très similaire à celui présenté dans l'équation 301 et elle fera donc l'affaire pour les raisonnements à suivre.

207. temps donné par H^{-1}

L'autre difficulté est liée à la nature multi-fluides des perturbations. Nous avons :

208. qui compose 80% du bilan énergétique de la matière

- les photons : relativistes, avec une pression de rayonnement associée,

209. qui est une mesure des propriétés du tenseur des dispersions de vitesses

- les baryons : non-relativistes mais couplés avec le rayonnement avant la Recombinaison. Les photons vont donc leur fournir une source de support dynamique bien plus importante que la simple pression thermique,
- la matière noire : non-relativiste et sans pression.

Ces 3 fluides vont évoluer selon des termes donnés par l'éq. 301. Par ailleurs ces fluides sont couplés et s'influencent l'un l'autre : c'est vrai via la pression de rayonnement pour les baryons et les photons mais également via le terme $4\pi G\bar{\rho}\delta_k$. Ce terme trace une source gravitationnelle de perturbation et doit donc inclure toutes les contributions au bilan énergétique de l'Univers, photons compris. C'est notamment vrai durant les époques avant l'Équivalence²¹⁰ durant lesquelles la source principale de potentiel est la contribution des photons. En pratique, nous avons donc un jeu d'équations multiples couplées qu'on ne peut résoudre de façon analytique : les grands principes peuvent toutefois être explorés en appliquant des hypothèses raisonnables comme décrit dans les parties suivantes.

^{210.} correspondant à $z > 3000$ ou $t < 60000$ ans où matière et rayonnement contribuent de manière égale au bilan énergétique du cosmos

Croissance des perturbations : cas sub-horizon

LES ÉCHELLES EXPLORÉES dans cette partie sont suffisamment compactes pour être plus petites que l'Horizon à un instant donné. Cela permet en particulier le transport d'une information dynamique au sein des structures en jeu, autorisant effondrement ou ondes de pression par exemple. L'équation à interpréter est celle donnée par l'éq. 301 et nous allons être amenés à distinguer 2 époques, avant l'Équivalence (dominée par le rayonnement RD) et après l'équivalence (dominée par la matière MD). Les facteurs d'expansion et la fonction de Hubble²¹¹ durant RD sont donnés par :

^{211.} avec $H = \dot{a}/a$

$$a \sim \sqrt{t}, \quad (302)$$

$$H = \frac{1}{2t}, \quad (303)$$

tandis que les relations équivalentes durant MD sont données par :

$$a \sim t^{2/3}, \quad (304)$$

$$H = \frac{2}{3t}. \quad (305)$$

Matière sans pression

Prenons d'abord le cas d'une matière sans pression, correspondant à celui de la matière noire : la vitesse du son est négligeable et pourra donc être annulée dans Eq. 301.

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LE RAYONNEMENT, le terme source de gravitation est dominé par la contribution des photons. Toutefois, on considèrera ce terme comme négligeable : les photons possèdent une pression intrinsèque élevée et une grande longueur de jeans. Ils ne peuvent se structurer et leur densité ne peut croître de façon substantielle²¹² :

212. de fait elle aura un comportement oscillant, voir section suivante

$$\bar{\rho}\delta_k \sim (\bar{\rho}\delta_k)_\gamma \sim 0. \quad (306)$$

L'équation résultante pour la matière sans pression est donc :

$$\ddot{\delta}_k + \frac{1}{t}\dot{\delta}_k \sim 0 \quad (307)$$

dont la solution est de type logarithmique :

$$\delta_{k,RD} \sim \log(t). \quad (308)$$

Dans le cadre qui est le nôtre, une croissance logarithmique peut être assimilée à une absence de croissance, au mieux à une croissance très lente.

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LA MATIÈRE, le terme source est dominé par la matière elle-même : toute croissance sera donc entretenu par une croissance du potentiel, conduisant naturellement à une augmentation de la perturbation. L'équation à traiter est donnée par :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k = 4\pi G\bar{\rho}\delta_k. \quad (309)$$

En introduisant explicitement les dépendances temporelles on obtient²¹³ :

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k = 0. \quad (310)$$

Cette équation possède une solution croissante donnée par²¹⁴ :

$$\delta_{k,MD} \sim t^{2/3} \sim a(t). \quad (311)$$

213. en utilisant $\bar{\rho} \sim \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

214. il existe aussi une solution décroissante en $\delta = 1/t$, qui est de peu d'intérêt car dominée par la solution croissante

Le contraste avec la solution précédente est frappant : la présence d'un terme source de gravitation permet à la fluctuation de prospérer tandis que précédemment son absence conduit à une non-croissance de la perturbation.

Matière avec pression

Ce cas correspond à celui des baryons : durant ces époques pré-Recombinaison, le couplage important entre les photons et les baryons confère à ces derniers une pression importante²¹⁵ et une vitesse proche de la vitesse de la lumière $c_s \sim c$.

215. via la pression de radiation

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LE RAYONNEMENT, on continuera à négliger le terme source induit par les photons. Par contre le terme de pression ne peut plus être omis et l'équation des perturbations devient :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta} + c_s^2 k^2 \delta \sim 0. \quad (312)$$

La solution est oscillante avec un amortissement induit par l'expansion²¹⁶. De notre point de vue, c'est également une solution 'sous contrôle', non-croissante. En l'absence de gravitation, les fluctuations baryoniques s'organisent en ondes de pression, en ondes acoustiques stables.

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LA MATIÈRE, le terme source de gravitation devient non négligeable mais n'est pas dominé par les baryons²¹⁷. L'équation à résoudre devient alors²¹⁸ :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta} + c_s^2 k^2 \delta = 4\pi G \bar{\rho}_{DM} \delta_{k,DM} \quad (313)$$

On a donc un terme source de fond, mais ce terme n'est pas en mesure de produire une augmentation de l'amplitude des oscillations : ce terme évolue lentement par rapport aux temps caractéristiques d'oscillations et ne peut donc produire de résonances par exemple. Ce terme de forçage n'implique pas de croissance incontrôlée de l'amplitude des fluctuations baryoniques qui sont toujours dans un régime oscillant comme précédemment.

CES OSCILLATIONS constituent de notre point de vue une 'absence de croissance' : les ondes de pressions passent mais ne 'grossissent pas' de façon incontrôlée. En pratique c'est même l'opposé qui va se produire : à cause du couplage imparfait entre photons et rayonnement, la pression apportée par les photons ne garantit pas un entretien perpétuel des oscillations et elles vont s'amortir²¹⁹. L'effet d'amortissement est même catastrophique au sens où toute structure baryonique contenant une masse inférieure à $10^{13} M_\odot$ ²²⁰ doit être 'effacée' du spectre des fluctuations. Cette masse est supérieure à celle de la Voie Lactée actuellement : il faut donc trouver un mécanisme pour entretenir les fluctuations de masse inférieure à cette limite pour pouvoir expliquer les structures observées aujourd'hui.

LA MATIÈRE NOIRE va fournir ce mécanisme : comme vu précédemment, la matière sans pression va voir ses fluctuations croître de façon permanente durant l'époque dominée par la matière. Au moment de la Recombinaison, les baryons auront vu une grande partie de leurs fluctuations être réduites par l'amortissement que nous venons juste de mentionner. Toutefois la Recombinaison s'accompagne de la

216. avec un temps caractéristique $\tau \sim 1/2H$.

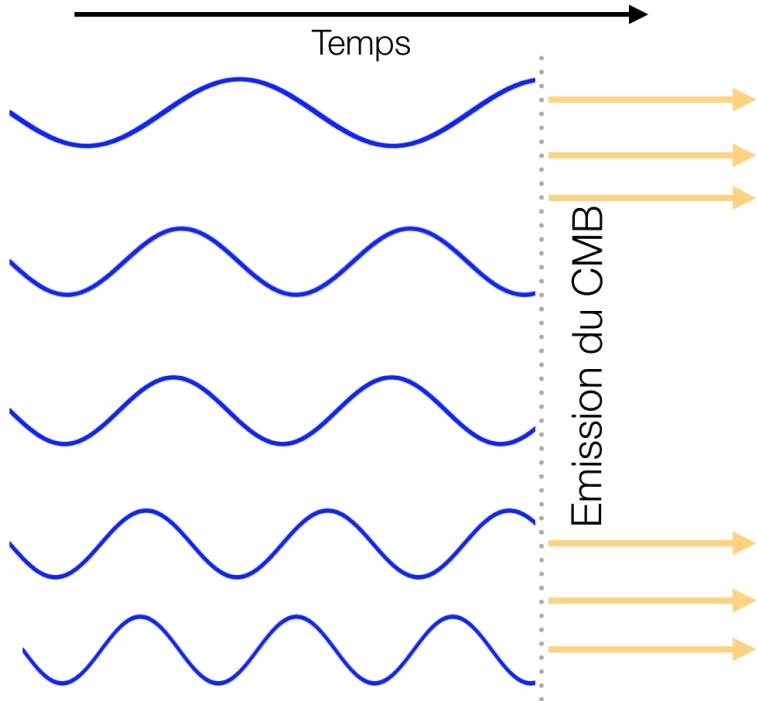
217. qui ne représente que 20% de la matière totale

218. ici DM dénote la matière noire pour *dark matter*.

219. on parle aussi d'amortissement Silk, du nom du physicien anglais à l'origine de la découverte de cet effet

220. et donc de taille inférieure à une certaine taille critique

perte de support de pression offert par les photons²²¹ : les baryons sont alors libres de s'effondrer dans les trous de potentiel créés par la matière noire. Vers un redshift $z \sim 100$ les fluctuations baryoniques ont convergé vers les fluctuations de la matière noire, autorisant la formation de structures de masses moins importantes que la masse limite mentionnée précédemment.



CES OSCILLATIONS BARYONIQUES sont des ondes acoustiques (BAOs, de l'anglais *baryonic acoustic oscillations*) car elles sont entretenues par l'entrejeu entre gravité et pression (de rayonnement dans le cas présent). Par simple inspection de l'équation différentielle maîtresse, on peut constater que la fréquence d'oscillation dépend de la taille du mode étudié²²² : un mode à grande fréquence spatiale implique une fréquence temporelle élevée et vice-versa. Par conséquent, l'amplitude du mode au moment de la Recombinaison va dépendre du mode en question : au moment de l'émission du fond diffus, certains modes seront en amplitude maximale, d'autres en amplitude plus modérée. En simplifiant (voir Fig. 45), on peut imaginer que certains modes vont osciller un nombre de fois exactement entier entre leur déclenchement et la Recombinaison, parvenant ainsi à un extrémum d'amplitude tandis que d'autres seront dans une phase quelconque avec des amplitudes moins remarquables. Les échelles

221. le découplage matière-rayonnement permettant aux photons de s'échapper sous forme du fond diffus

FIGURE 45: Les oscillations baryoniques évoluent sur des fréquences différentes, dépendant de leur taille. Les grandes structures oscillent lentement, les petites rapidement. Certains modes vont être en extrémum d'amplitude au moment de la Recombinaison et donc au moment de la dernière diffusion du fond diffus cosmologique. Ces modes vont donc être privilégiés dans la carte du CMB.

222. avec $\omega \sim 2\pi c_s / \lambda$

qui se détachent sous la forme de 'pics' dans le spectre de puissance du fond diffus cosmologique (voir Fig. 46) sont la manifestation de ces modes qui parviennent en extremum d'amplitude au moment où le rayonnement fossile est produit.

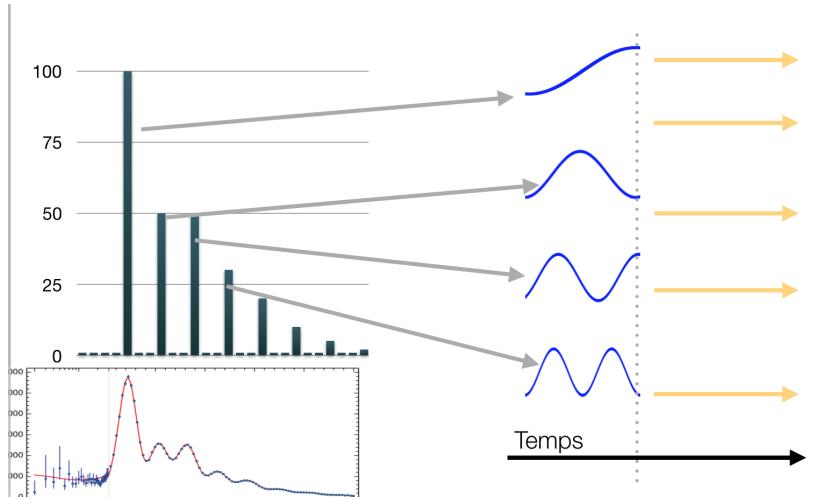


FIGURE 46: Les pics acoustiques du spectre de puissance du fond diffus cosmologique correspondent aux modes qui sont en extremum d'amplitude au moment de la Recombinaison. Le premier pic correspond à une compression, le second une compression + une détente, le troisième une compression + une détente + une compression, etc.... Au premier ordre, nous voyons des harmoniques d'un même mode fondamental.

Croissance des perturbations : cas super-horizon

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur les petites échelles. Regardons à présent le comportement d'un mode de très grande taille, dont la longueur caractéristique est plus grande que l'*horizon cosmologique* à l'instant considéré. Ces modes sont appelés super-horizon, tandis que les modes de petite taille précédemment étudiés sont par analogie désignés comme étant sub-horizon.

L'**HORIZON** désigne la plus grande échelle sur laquelle un phénomène de propagation peut opérer. Sa valeur est simplement donnée par :

$$L_H = \frac{c}{H} \quad (314)$$

où H^{-1} apparaît comme une mesure de l'âge de l'Univers à un instant donné. L'horizon est donc le produit de la plus grande vitesse par la plus grande durée. Son expression comobile présente une évolution temporelle qui dépend de la période de domination. Durant la période dominée par le rayonnement on a comme horizon comobile²²³ :

$$\ell_{H,RD} = \frac{c}{aH} \sim a \quad (315)$$

et durant la période dominée par la matière²²⁴ :

223. avec $H \sim a^{-2}$

224. avec $H \sim a^{-3/2}$

$$\ell_{H,MD} \sim \sqrt{a}. \quad (316)$$

Dans les 2 cas, l'horizon grandit avec le temps et un mode de taille comobile donnée va donc successivement être plus grand que l'horizon (super-horizon) puis plus petit (sub-horizon) : usuellement, on désigne cette transition par l'expression *passer sous l'horizon*. Le cas super-horizon demande un traitement en relativité générale complet donnant l'équation de croissance des structures suivantes :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k = \frac{3}{2}H^2(1+w)(1+3w)\delta_k \quad (317)$$

où $w = 0$ durant l'époque MD et $w = 1/3$ durant l'époque RD²²⁵.

Cette équation est similaire à celle obtenue dans le cas sub-horizon. Pour l'époque de domination de la matière on retrouve le même taux de croissance que celui obtenu pour la matière noire :

$$\delta_{k,MD} \sim t^{2/3} \sim a(t), \quad (318)$$

tandis que durant l'époque de domination du rayonnement on obtient :

$$\delta_{k,RD} \sim t \sim a(t)^2. \quad (319)$$

Dans ce cas, le comportement est substantiellement différent de celui obtenu dans le cas sub-horizon : les modes croissent au lieu de stagner. Ceci reflète l'absence d'influence des forces de pression sur ces échelles hors de leur horizon et équivaut à négliger la vitesse du son c_s .

^{225.} pour ces échelles plus grandes que l'horizon, la pression ne peut jouer un rôle significatif : baryons et matière noire ont le même comportement

Croissance des perturbations : synthèse et spectre de puissance

La synthèse des résultats précédents pour le cas de la matière noire est présenté dans la figure 47. On constate qu'une petite perturbation peut voir son histoire de croissance gelée si elle passe sous l'horizon durant l'époque dominée par le rayonnement. A l'inverse un mode de grande longueur d'onde devra attendre la période dominée par la matière pour changer de régime et ne connaîtra pas la phase de non-croissance qu'auront connu les plus petites structures.

Grâce à cette synthèse on peut prédire l'amplitude d'un mode au moment de la Recombinaison δ_f en fonction de son amplitude δ_i bien avant l'équivalence matière-rayonnement. Considérons d'abord le cas d'un grand mode, sans période de gel de croissance, son amplitude au moment de l'équivalence est donné par²²⁶ :

$$\delta_e = \frac{a_e^2}{a_i^2} \delta_i. \quad (320)$$

^{226.} l'indice e désigne une valeur prise au moment de l'Équivalence

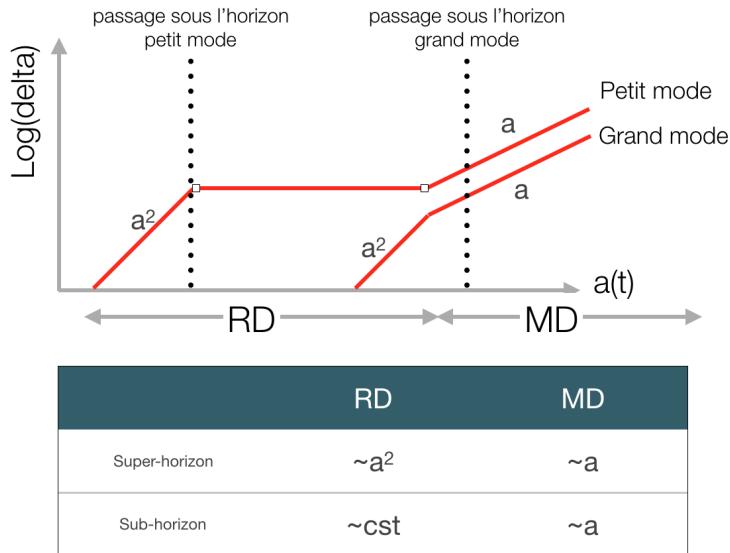


FIGURE 47: Synthèse de la croissance des perturbations. Un petit mode possède une taille caractéristique suffisamment petite pour passer sous l'horizon durant l'époque dominée par le rayonnement.

Son amplitude finale est alors donnée par :

$$\delta_f = \frac{a_f}{a_e} \delta_e = \frac{a_f a_e}{a_i^2} \delta_i. \quad (321)$$

La chose à noter est l'indépendance du facteur reliant l'amplitude initiale et finale vis à vis de la taille du mode²²⁷ : tous les modes vont croître dans les même proportions entre les instants i et f .

Pour les petits modes la situation est différente. L'amplitude au passage sous l'horizon est donnée par

$$\delta_L = \frac{a_L^2}{a_i^2} \delta_i. \quad (322)$$

où a_L est l'instant de passage sous l'horizon. L'amplitude au moment de l'équivalence est identique à δ_L car la croissance est gelée et l'amplitude finale est alors donnée par :

$$\delta_f = \frac{a_f}{a_e} \delta_e = \frac{a_f}{a_e} \delta_L = \frac{a_L^2 a_f}{a_i^2 a_e} \delta_i. \quad (323)$$

Ici le facteur de lien entre δ_f et δ_i dépend de a_L et donc de la taille du mode considéré. En effet cet instant est déterminé par $\lambda = L_{H,RD} \sim a_L$ donc

$$\delta_f \sim \frac{1}{k^2} \delta_i. \quad (324)$$

On a une coupure d'autant plus forte que la fréquence spatiale du mode est élevée, d'autant plus forte que la taille du mode considéré est petite.

²²⁷. bien sûr a_e ne dépend pas du mode considéré

POUR LE SPECTRE DE PUISSANCE, les conséquences sont simples.

Pour les k suffisamment faibles, donc les grands modes, on a

$$P_f(k) \sim \delta_k^2 \sim P_i(k), \quad (325)$$

par contre pour les hautes fréquences, donc les petits modes, le spectre de puissance est filtré suivant la relation :

$$P_f(k) \sim \frac{1}{k^4} P_i(k) \quad (326)$$

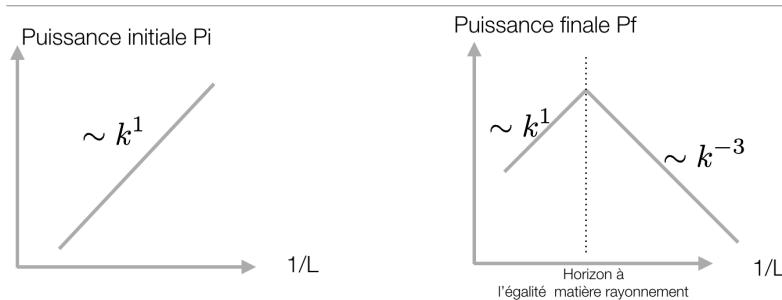
Comme le spectre de puissance primordial est en loi de puissance tel que²²⁸ :

$$P_i(k) \sim k \quad (327)$$

on obtient un spectre caractéristique aux hautes fréquences en

$$P_f(k) \sim \frac{1}{k^3}. \quad (328)$$

Le spectre de puissance résultant possède donc 2 régimes caractéristiques, l'un aux grandes échelles en $P(k) \sim k$ et l'autre aux petites échelles en $P(k) \sim k^{-3}$. La transition entre les deux correspond à l'échelle qui passe sous l'horizon exactement au moment de l'Équivalence (cf. Fig 48).



228. on parle de spectre invariant d'échelle, comme prédict par exemple par les théories d'Inflation

FIGURE 48: Schématique du filtrage du spectre de puissance des fluctuations initiales. Le spectre primordial est invariant d'échelle en $P(k) \sim k$ et le gel de la croissance des fluctuations sous l'horizon durant l'époque de domination du rayonnement produit un filtrage au hautes fréquences qui produit une pente caractéristique en $P(k) \sim k^{-3}$.

POUR RÉSUMER, le spectre de puissance de la matière est une version filtrée du spectre de puissance primordial. Ce filtre opère sur les échelles suffisamment petites pour passer dans l'Horizon cosmologique tôt dans l'histoire de l'Univers, durant l'époque dominée par le rayonnement. Les échelles plus grandes ne permettant pas ce passage ont crû de façon indifférenciée et ont donc conservé les caractéristiques du spectre primordial. L'ensemble des prédictions développées dans ce chapitre, et notamment la mise en place du spectre de puissance $P(k)$ est fermement confirmée par de multiples observations (voir Fig. 49) : c'est un des grands succès du modèle Λ CDM aux grandes échelles.

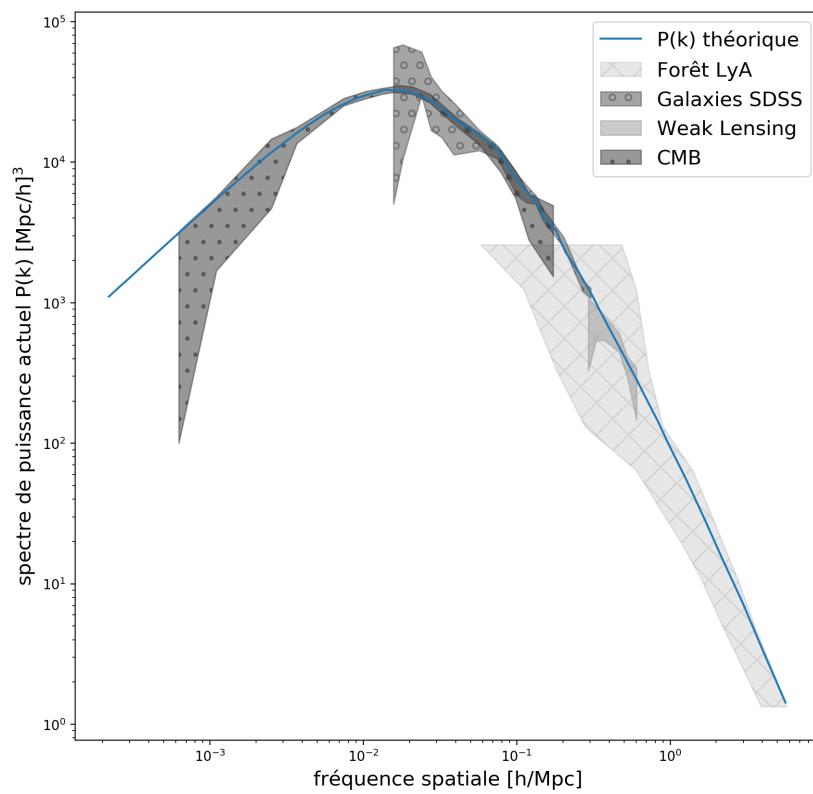


FIGURE 49: Le spectre de puissance $P(k)$ Λ CDM théorique est représenté ici avec une compilation des estimations observationnelles issues de différentes sondes : lensing, relevés de galaxies, CMB, Forêt Lyman- α . On note l'excellent accord en théorie et prédiction. Figure inspirée de Tegmark et al. 2003.

LES OSCILLATIONS BARYONIQUES, mentionnées dans le cas de la matière avec pression et vues dans le CMB, se manifestent également dans le spectre de puissance de la matière totale. Ces ondes sonores se propageant dans le gaz vont légèrement modifier la structure globale de la matière : même si les baryons ne représentent qu'une faible fraction²²⁹ de la masse totale, cette fraction est non nulle et joue sur la dynamique globale à l'œuvre. Ces oscillations se manifestent à nouveau comme des modes légèrement privilégiés dans le spectre de puissance $P(k)$. Par ailleurs, ces modes privilégiés vont persister dans la distribution de matière bien au delà de la Recombinaison, jusqu'à nos jours. Par exemple, le spectre de puissance de la distribution actuelle des galaxies²³⁰ présente des modes privilégiés aux fréquences attendues à des niveaux faibles de l'ordre du % mais non nuls(voir Fig. 50). De même, la distribution du gaz diffus intergalactique à $z=2$ ²³¹ manifeste ces mêmes modes privilégiés. Ces ondes de pression primordiales, ont laissé leur empreinte dans toutes les structures qui ont émergé tout au long de l'histoire de l'Univers.

$$229. \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \sim 0.15$$

230. mesurée à $z=0$ dans des grands relevés de millions de galaxies comme le Sloan Digital Sky Survey (SDSS)

231. sondée dans les spectres de Quasars distant

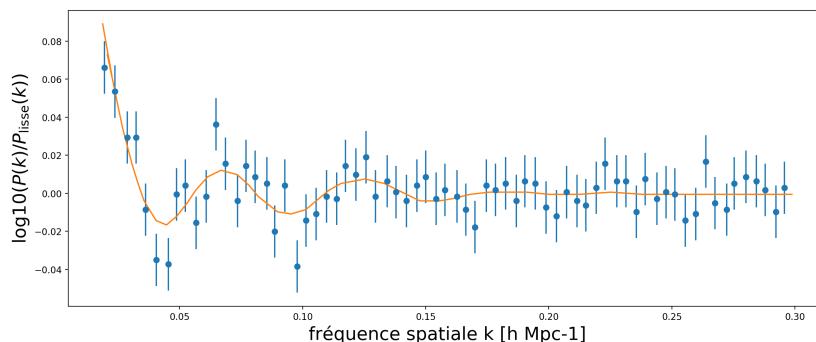


FIGURE 50: Détection des BAOs dans le spectre de puissance du grand relevé de galaxies SDSS. La courbe représentée est le rapport du spectre mesuré dans les données au spectre lissé sans BAOs. Les BAOs sont très clairement apparent (points) aux positions prédictes par la théorie (ligne). Figure inspirée de Percival et al. 2007.

Et après ?

Une fois le mécanisme d'instabilité déclenché, tous les modes vont parvenir à des régimes de surdensité qui vont au delà du régime linéaire et qui sortent du cadre dans lequel nous nous sommes placés. Dans certains cas académiques, le régime non-linéaire peut être abordé analytiquement mais en toute généralité il requiert l'utilisation de simulations numériques. La culmination de ce régime non linéaire est la création de structures denses, dominées par les baryons et au sein duquel se forment les sources de rayonnement : ce sont les galaxies qui nous entourent. L'apparition de ces objets est donc conditionnée par un contexte cosmologique et par extension il n'est pas illogique d'affirmer que l'étude de la formation des galaxies est une extension naturelle de la cosmologie. Toutefois, des phénomènes

astrophysiques commencent à rentrer en jeu aux échelles considérées : thermodynamique du gaz, processus physico-chimique de refroidissement, champ magnétique, formation et rétroaction stellaire, production et impact des éléments plus lourds que l'hélium, etc.... Chacun de ces phénomènes est un objet d'étude à part entière et chacun de ces phénomènes est compris de façon toute relative. On en décrira quelques-uns par la suite, mais de façon générale on peut aisément avancer qu'aujourd'hui l'extension de la théorie cosmologique à celle de la formation des galaxies présente des défis majeurs. Ces défis, à l'heure où ces lignes sont écrites ne sont pas résolus.

Formation des 'petites' structures

UNE SURDENSITÉ DE MATIÈRE va nécessairement sortir du régime des faibles valeurs au bout d'un certain temps : le mécanisme d'instabilité gravitationnelle va condenser les structures vers des grandes densités et le jeu d'équations linéarisées utilisé dans le chapitre précédent n'est plus valable. Nous allons ici développer un modèle simple de surdensité qui permet de suivre l'évolution d'une telle structure en effondrement . Le destin d'une telle structure est de finir en halo de matière²³² à l'équilibre, dont on exposera aussi les propriétés de base. A des fins de simplification, nous allons par la suite nous limiter au cas d'un Univers rempli uniquement de matière noire, non-collisionnelle, avec $\Omega_m = 1$. Comme vu précédemment, cet Univers de Einstein-de Sitter est régi par une expansion en :

$$a(t) \sim t^{2/3}. \quad (329)$$

Au-delà du régime linéaire : le modèle d'effondrement sphérique

Considérons une surdensité, sphérique de rayon r , baignant dans un Univers de densité $\bar{\rho}$. A l'intérieur de cette surdensité, la densité est initialement légèrement plus grande que celle du fond avec $\rho = (1 + \delta)\bar{\rho}$ et uniforme à l'intérieur de ce rayon²³³. Ce modèle ressemble grandement au modèle de cosmologie newtonienne abordé en début d'ouvrage : dans ce modèle de cosmologie et pour la surdensité qui nous intéresse, sa dynamique est régie uniquement par la matière qui se trouve à l'intérieur et la couche la plus externe de la surdensité suit le principe fondamental de la dynamique :

$$\ddot{r} = -\frac{GM(< r)}{r^2}. \quad (330)$$

Rappelons que $r(t) = a(t)r_0$ et dans le cas où cette couche est en expansion infinie²³⁴, on peut facilement intégrer l'équation différentielle précédente pour obtenir :

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{2GM(< r)}{ar_0^3}} \quad (331)$$

232. et donc dominé par la matière noire

233. On parle aussi de modèle 'chapeau haut-de-forme' à cause du profil de densité en crête associé

234. avec $\dot{a} > 0$

$$r(t) = \left(\frac{9GM(< r)}{2} \right)^{1/3} t^{2/3} \quad (332)$$

avec une dépendance temporelle en $t^{2/3}$ conforme au modèle Einstein - de Sitter. Toutefois, cette dépendance ne peut représenter l'effondrement d'une structure, puisqu'on attend d'elle que son rayon diminue au delà d'un certain temps²³⁵.

UN BON POINT DE DÉPART est l'équation de conservation de l'énergie spécifique de la couche externe de notre structure :

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r} \quad (333)$$

où $M = M(< r)$ désigne la masse à l'intérieur de la couche la plus externe. Rappelons que dans ce type de modèle les couches ne se croisent pas²³⁶ et cette masse interne M reste constante. Enfin, notre structure est vouée à s'effondrer, son énergie mécanique totale est donc négative, $E < 0$. Dans ce type de situation, on peut montrer que la solution $r(t)$ s'exprime sous forme *paramétrique* (voir aussi la figure 51) :

$$r(\theta) = A(1 - \cos \theta) \quad (334)$$

$$t(\theta) = B(\theta - \sin \theta) \quad (335)$$

où θ est un paramètre tel que $\theta \in [0, 2\pi]$. La vitesse de la couche peut également s'écrire sous forme paramétrique²³⁷ :

$$v(\theta) = \dot{r} = \frac{A \sin \theta}{B(1 - \cos \theta)}. \quad (336)$$

Ici, A et B sont respectivement des rayons et temps caractéristiques du problème traité avec :

$$A = \frac{GM}{2|E|} \quad (337)$$

$$B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} \quad (338)$$

$$A^3 = GMB^2 \quad (339)$$

où la dernière relation est similaire à la troisième loi de Kepler qui relie période et rayon des orbites autour d'un corps massif.

Ces relations paramétriques permettent de caractériser les grandes étapes du processus d'effondrement. D'abord, on constate que l'évolution du rayon n'est pas monotone, celui-ci croît, atteint un maximum et décroît pour devenir nul : notre surdensité évolue d'abord avec le fond, suivant l'expansion globale, puis elle atteint une extension maximale avant de se *découpler* du flot global. La structure se réduit en taille avant d'atteindre une extension nulle et par conséquent

^{235.} donc l'hypothèse $\dot{a} > 0$ ne tient plus et nous empêche d'intégrer simplement l'équation différentielle

^{236.} comme indiqué par $r(t) = a(t)r_0$: une couche externe reste toujours une couche externe

^{237.} obtenue en dérivant l'équation sur le temps puis en l'injectant dans celle sur le rayon

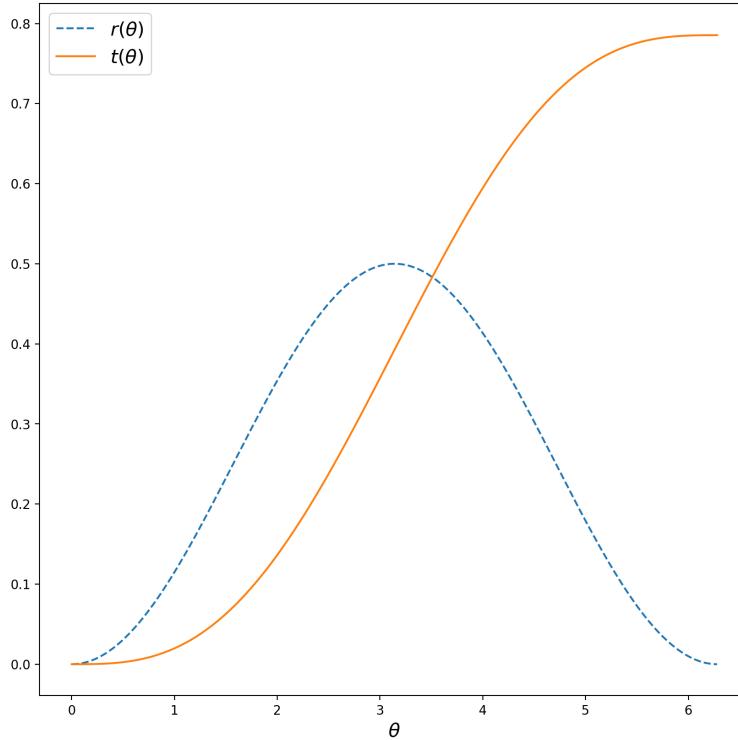


FIGURE 51: Les solutions du modèle d'effondrement sphérique en fonction du paramètre θ . Le temps t est une fonction monotone de ce paramètre tandis que le rayon de la surdensité passe par un maximum, correspondant au découplage de la structure par rapport au fond cosmologique, avant de tendre vers 0 à la fin de l'effondrement.

sa densité devient infinie ! Cette évolution²³⁸ conduit naturellement à des régimes de densité non linéaires. Par simple inspection, on constate que le découplage, correspondant au maximum de r , opère pour $\theta = \pi$ et

$$r_d = 2A \quad (340)$$

$$t_d = \pi B. \quad (341)$$

L'effondrement final correspond quant à lui à $\theta = 2\pi$ et

$$r_e = 0 \quad (342)$$

$$t_e = 2\pi B. \quad (343)$$

Le temps nécessaire à l'effondrement²³⁹ total de la structure est le double de celui nécessaire au découplage : $t_e = 2t_d$.

LA SURDENSITÉ VARIE AUSSI DE FAÇON PARAMÉTRIQUE. La densité à l'intérieur de la structure est donnée par :

$$\rho = \frac{M}{4/3\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3(1 - \cos \theta)^3}, \quad (344)$$

tandis que la densité du fond, égale à la densité critique dans notre modèle est donnée par²⁴⁰ :

238. qui est la même que celle d'un Univers de densité supérieure à la densité critique

239. on utilise aussi fréquemment les termes anglais de *turn-around* pour le découplage et de *collapse* pour l'effondrement

240. on rappelle que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ et $a \sim t^{2/3}$ dans Einstein- de Sitter

$$\bar{\rho} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{B^2 6\pi G (\theta - \sin \theta)^2}. \quad (345)$$

On obtient alors la formulation paramétrique de l'évolution de la surdensité :

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = 1 + \delta = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3}. \quad (346)$$

Bien sûr, cette équation ne rend pas compte des phases ultimes de l'effondrement : cet effondrement doit s'arrêter lorsqu'un équilibre est atteint après réorganisation de la matière et des vitesses. Les coquilles se croisent, la masse à l'intérieur de la coquille change et de l'énergie est échangée entre les couches.

Toutefois, une bonne approximation du processus à l'œuvre peut être obtenue en invoquant le théorème du viriel. Une fois l'équilibre atteint, notre couche externe doit satisfaire

$$2T + U = 0, \quad (347)$$

où T et U désignent respectivement l'énergie cinétique et potentielle de notre couche externe après virialisation. Comme par ailleurs l'énergie reste conservée, l'énergie totale en fin de virialisation est donnée par :

$$E = \frac{U}{2} = -\frac{GM}{2r_v} \quad (348)$$

où l'on considère que la masse interne n'a pas été modifiée significativement par la redistribution. A l'équilibre, la couche ne bouge plus et son énergie totale est complètement définie par son énergie potentielle. C'est également le cas lors du découplage, durant lequel l'énergie cinétique est nulle par définition et²⁴¹

$$E = -\frac{GM}{r_d}. \quad (349)$$

Par conservation de l'énergie de la couche et en combinant ces deux derniers résultats, on obtient une relation entre le rayon de la couche externe à l'équilibre r_v et celui lors du découplage r_d :

$$r_v \sim \frac{1}{2} r_d, \quad (350)$$

le rayon de la structure se stabilise autour d'une valeur correspondant à la moitié du rayon lors du découplage. Ce rayon final est aussi appelé *rayon de viriel*, et est utilisé de façon générique pour désigner les bords 'externes' d'un halo de galaxie.

On peut également évaluer la valeur de la surdensité finale après la phase de virialisation. On cherche à évaluer

$$1 + \delta_v = \frac{\rho(t_v)}{\bar{\rho}(t_v)}, \quad (351)$$

^{241.} en effet le découplage correspond au maximum d'extension de la surdensité avec $\dot{r} = 0$ par définition

ce qui nécessite d'évaluer les deux densités ρ et $\bar{\rho}$ post-viréalisation. La densité du fond est simple à obtenir, car la viréalisation opère au temps $t_v = t_e = 2t_d = 2\pi B$, on obtient donc :

$$\bar{\rho}(t_v) = \frac{1}{6\pi G t_v^2} = \frac{1}{4}\bar{\rho}(t_d). \quad (352)$$

De même, sachant que le rayon de viriel est la moitié du rayon de découplage, il existe une relation simple²⁴² entre la densité à l'équilibre et celle lors du découplage :

$$\rho(t_v) = \frac{3M}{4\pi r_v^3} = 8\rho(t_d) \quad (353)$$

d'où la relation :

$$1 + \delta_v = \frac{8\rho(t_d)}{\frac{1}{4}\bar{\rho}(t_d)} = 32(1 + \delta_d). \quad (354)$$

Sachant que le découplage opère pour $\theta = \pi$, l'évaluation de l'équation 346 pour cette valeur donne $\delta_d \sim 5.55$ et une valeur de densité à l'équilibre

$$1 + \delta_v \sim 178. \quad (355)$$

En résumé, une structure qui s'effondre sous l'effet de l'instabilité gravitationnelle voit sa densité se stabiliser autour de 200 fois celle du fond. Pour cette raison, on désigne fréquemment le rayon de viriel r_v sous le terme de r_{200} et par exemple, c'est comme cela qu'on détermine l'extension d'un halo de galaxie dans une simulation numérique : son extension est choisie de telle façon à ce que la surdensité interne soit proche de 200.

ON PEUT ÉGALEMENT PROPOSER UNE EXTRAPOLATION LINÉAIRE du calcul qui vient d'être réalisé. Il s'agit de calculer la surdensité au moment de l'effondrement mais telle qu'elle est prédite dans le régime linéaire. L'intérêt d'un tel calcul est qu'il permet de prédire simplement les régions qui vont s'effondrer sans avoir à réaliser un calcul non-linéaire complet : en se donnant un champ de densité, on peut prédire aisément sa croissance linéaire et désigner quelles régions vont s'effondrer et à quel instant. Si l'on reprend notre modèle paramétrique, le régime des faibles perturbations est celui qui opère au début, donc quand $\theta \ll 1$. Ce paramètre devient alors une simple fonction de t ²⁴³ :

$$\theta \sim \left(\frac{6t}{B}\right)^{1/3}. \quad (356)$$

De même dans ce régime et en utilisant les bons développements limités²⁴⁴, l'équation 346 peut être réécrite :

$$1 + \delta = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \sim 1 + \frac{3}{20} \theta^2. \quad (357)$$

^{242.} sachant que $r_v = r_d/2$

^{243.} obtenu via un développement limité de $t(\theta)$

^{244.} on rappelle que $\cos \theta \sim 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24$ et $\sin \theta \sim \theta - \theta^3/6 + \theta^5/120$.

D'où l'expression de δ_l dans le régime linéaire en fonction du temps :

$$\delta_l = \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B} \right)^{2/3} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left(\frac{t}{t_d} \right)^{2/3}. \quad (358)$$

On note d'ores et déjà que l'on retrouve la fameuse dépendance en $t^{2/3}$, propre aux modèles dominés par la matière. Au moment de l'effondrement, $t = t_e = t_v = 2t_d$, ce qui donne $\delta_l = 1.69$. Cette valeur revêt un caractère un peu 'magique' pour les cosmologues : si on évolue un champ de densité linéairement, les régions qui dépassent ce seuil vont s'effondrer. Ce type de raisonnement permet de prédire quelles régions vont former des structures et à quel instant : c'est ce qui permet par exemple de faire des prédictions analytiques sur la fonction de masse des halos de matière noire²⁴⁵ ou bien sur leur histoire de formation. Ce types de prédictions sont à la base de modèles *analytiques* de formation des galaxies où la connaissance de l'histoire de formation de ces objets obtenue par cette méthode peut être utilisée pour prédire l'évolution des baryons en leur sein et les propriétés des galaxies qui s'y forment.

245. voir le chapitre dédié à la matière noire

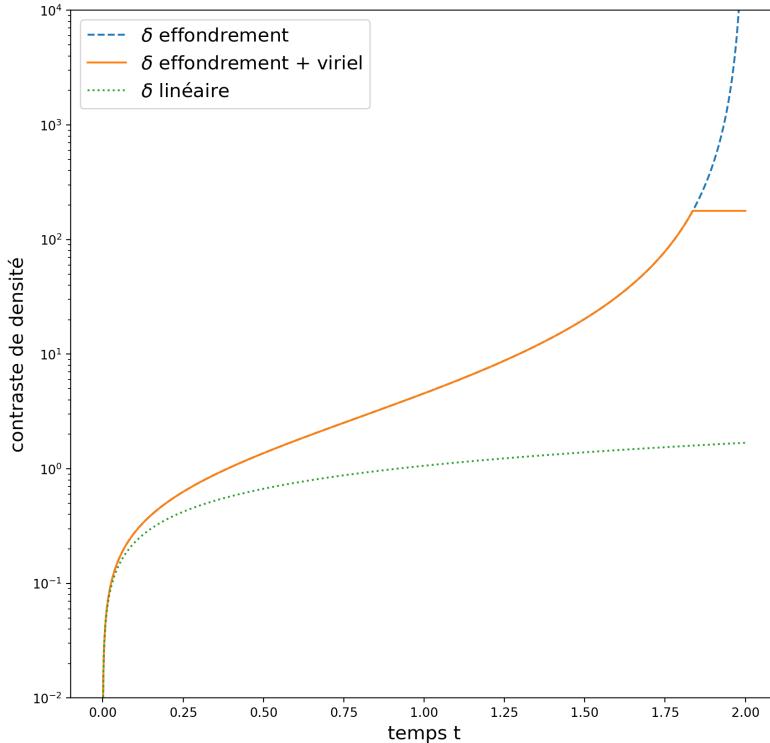


FIGURE 52: Les différentes solutions pour le contraste de densité $\delta = \rho/\bar{\rho} - 1$ au cours du temps. On constate que le contraste non-linéaire évolue vers une singularité au moment de l'effondrement, la densité tend vers l'infini. Pratiquement, la surdensité va se stabiliser autour d'un contraste d'environ 200, correspondant à un état d'équilibre issu d'une redistribution de la matière et des vitesses appelée viréolisation. L'approximation linéaire suit la solution non-linéaire dans le régime des petits contrastes mais évolue plus lentement aux temps ultérieurs pour atteindre une valeur de 1.68 au moment où la structure devrait s'effondrer.

Propriétés générique des halos post-effondrement

Les structures effondrées étudiées ici sont de fait les halos de matière noire qui entourent les galaxies. Nous venons par exemple de prédire que la densité typique interne à ces objets doit être de l'ordre de 200 fois celle du fond, mais qu'en est-il du profil de densité de ces halos ? Les simulations cosmologiques montrent que le profil résultant de la viréalisation est de forme *universelle* et qu'une forme fonctionnelle simple permet d'ajuster le profil de la distribution de matière sur des grandes gammes de masses d'objet. La plus célèbre de ces formes fonctionnelles est le profil NFW²⁴⁶ :

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}. \quad (359)$$

246. du nom de ses découvreurs Navarro, Frenk et White

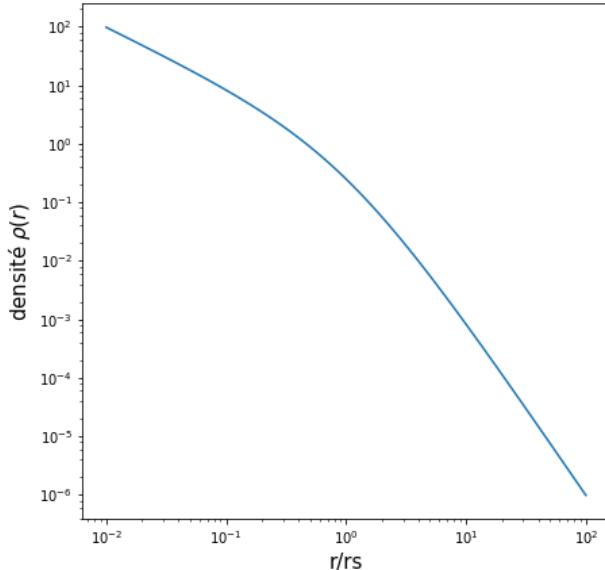


FIGURE 53: Le profil de densité de NFW est le profil universel des halos de matière noire mesuré dans les simulations de formation des grandes structures. Ce profil se caractérise par le 'pic' en r^{-1} au centre : ce type de distribution de matière n'est pas observé dans la cinématique des étoiles centrales des galaxies naines par exemple, posant difficulté aux prédictions des modèles de matière noire. L'injection répétée d'énergie dans le gaz central pourrait conduire à une redistribution de la matière dans ces régions, y compris dans la composante matière noire, pour 'aplatir' ce profil.

Ce profil se comporte en r^{-3} à grande distance et en r^{-1} près du centre du halo et on qualifie ce profil de 'piqué'²⁴⁷. Le rayon r_s est le rayon de transition entre ces deux régimes de pentes à courte et grande distance. Les mêmes simulations montrent que le rapport entre ce rayon de transition et le rayon de viriel étudié précédemment, appelé aussi concentration, est de l'ordre de :

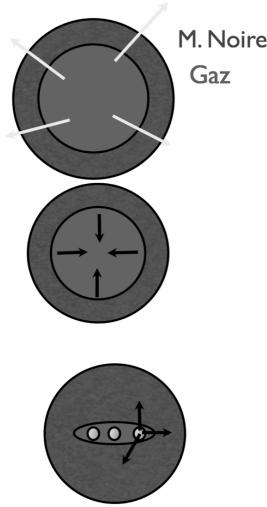
$$c = \frac{r_v}{r_s} \sim 10 \quad (360)$$

sachant que les petits halos sont plutôt plus concentrés que cette valeur et les plus massifs sont plutôt moins concentrés. Ce comporte-

247. d'autres profils avec davantage de degrés de liberté qui ajustent mieux le comportement central (profil d'Einasto par exemple) montrent que ce comportement piqué tend tout de même à s'affaiblir dans les régions les plus internes

ment piqué au centre n'est pas sans poser problèmes car les observations de la cinématique du centre des galaxies naines semblent indiquer un profil de densité possédant plutôt un cœur plat²⁴⁸. Bien que cela soit encore un sujet de recherche actif, le consensus grandissant est que la physique baryonique, et notamment les processus d'injection d'énergie répétée dans le gaz par les générations successives de supernovæ au centre des halos, conduirait à une redistribution des profils centraux de matière vers des profils à 'cœur' : c'est l'absence de prise en compte de ces effets dans les simulations qui conduirait à cette différence entre modèles et observations.

- Le gaz rayonne et refroidit dans le puit de potentiel de la matière noire
- Le gaz se contracte en rotation pour former un disque
- Les étoiles se forment et réinjectent de l'énergie dans le gaz en explosant en fin de vie



248. avec des profils en $\rho \sim r^0$

FIGURE 54: Schéma de la formation d'une galaxie. Dans un premier temps, le gaz évacue de l'énergie interne (refroidissement) dans son halo de matière noire en rayonnant. Ensuite il se contracte pour atteindre des hautes densités : la rotation initiale du gaz est conservée et conduit naturellement à des disques tournants. Enfin, les régimes de densité permettant la formation stellaire se mettent en place dans la galaxie et en fin de vie les étoiles explosent en supernovæ et réchauffe le gaz.

LE GAZ N'EST PAS EN RESTE dans le processus de viréolisation. Une fois l'équilibre atteint, le gaz va aussi s'organiser dans le potentiel gravitationnel du halo dominé par la matière noire. On peut par exemple lui assigner une température d'équilibre appelée aussi température de viriel. Conformément au théorème du viriel, l'équipartition entre énergie cinétique et potentielle des baryons peut s'écrire :

$$3 \frac{M_g k_B T}{\mu m_p} - \alpha \frac{GM_v M_g}{r_v} = 0. \quad (361)$$

Ici μm_p désigne la masse typique d'une particule (atome d'hydrogène, hélium, électron), M_g est la masse de gaz totale et α est un facteur de forme proche de l'unité dépendant du profil de masse du gaz. La température de viriel du gaz est donc une fonction simple de la masse et de la taille du halo : $T_v \sim M_v / r_v \sim V_v^2$ ²⁴⁹, et pour une masse de halo donnée cela implique que si un processus quelconque (comme l'arrivée de rayonnement) chauffe le gaz au dessus de cette

249. ici $V_v = \sqrt{GM_v/r_v}$ désigne la vitesse du viriel, la vitesse circulaire au rayon de viriel, qui est une mesure de sa masse.

température, celui-ci ne peut rester à l'équilibre et éventuellement s'évaporer. Bien sûr la température du gaz à l'intérieur d'une vraie galaxie n'est pas constante et cette température de viriel n'est qu'une estimation des régimes typiques des températures atteintes au sein des halos.

Toutefois, un gaz dispose d'un canal d'évacuation d'énergie interne inaccessible à la matière noire : les processus baryoniques régis par les interactions électromagnétiques, dont en particulier la production de rayonnement qui peut emporter de l'énergie interne du gaz. On appelle ces processus des *processus de refroidissement*, caractérisé par une fonction de refroidissement $\Lambda(x, T)$ qui dépend de la température du gaz T et de sa fraction d'ionisation x ²⁵⁰. La quantité d'énergie évacuée par le gaz, en $J/m^3/s$, est donnée par :

$$\Delta e_{\text{int}} = n_H^2 \Lambda(x, T), \quad (362)$$

où n_H désigne la densité d'atomes disponibles. Cette fonction de refroidissement dicte la quantité d'énergie évacuée à chaque instant par les processus atomiques d'excitation collisionnelle, d'ionisation, de recombinaison et de brehmstrahlung : tous ces processus dépendent du nombre d'atomes neutres et d'électrons disponibles, d'où la dépendance de la fonction de refroidissement en fraction d'ionisation et en n_H . Ces processus de refroidissement produisent de la lumière, font diminuer l'énergie interne du gaz qui perd en support thermique et peut donc se contracter davantage : le gaz va devenir de plus en plus dense dans un halo de matière noire qui lui va rester à l'équilibre de viriel. Par ailleurs, la conservation du moment angulaire du gaz fait que toute rotation initiale de ce dernier, même faible, est maintenue et conduit naturellement à la formation de disques en rotation. La conséquence ultime de ce processus de condensation est la formation d'une galaxie et au sein de celle-ci la formation d'étoiles. Bien sûr, si le refroidissement n'est pas assez efficace, le gaz va retrouver son équilibre hydrostatique et l'effondrement du gaz n'aura pas lieu : la compétition entre ces deux effets s'évalue en comparant les temps de refroidissement et de rééquilibrage

$$t_{\text{ref}} \sim \frac{n_H k_B T}{n_H^2 \Lambda} \quad (363)$$

$$t_{\text{eq}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (364)$$

On note que le temps d'équilibrage n'est rien d'autre que le temps d'effondrement dynamique, qui est le temps typique de réorganisation de la matière sous l'effet de la gravitation. Si $t_{\text{eq}} \ll t_{\text{ref}}$ le refroidissement n'est pas assez efficace, l'effondrement baryonique s'arrête. Dans le cas inverse, l'énergie peut être évacuée par rayonnement assez rapidement et la contraction devient catastrophique

²⁵⁰ $x = 1$ désigne un gaz dont tous les atomes sont ionisés, $x = 0$ où ils sont tous neutres

pouvant finalement mener à la formation de galaxie et d'étoiles. On note que le refroidissement varie comme ρ^{-1} tandis que l'équilibrage varie en $\rho^{-1/2}$: plus le milieu est dense, plus le refroidissement est efficace par rapport à l'équilibrage et favorise ainsi l'effondrement.

Quand on inspecte rapidement la fonction de refroidissement (voir la figure 55), on note celle-ci est maximale pour des températures comprises entre 10^4 et 10^6 degrés : en-dessous, les énergies ne sont pas suffisantes pour enclencher les processus atomiques, au dessus le gaz est trop ionisé, limitant les possibilités en termes de processus atomiques disponibles. Par conséquent, les halos trop légers, avec des températures de viriel trop faibles ($M_v < 10^9 M_\odot$), ne peuvent refroidir efficacement. De même les objets très lourds ($M_v > 10^{13} M_\odot$) présentent en principe les mêmes limitations car possédant des températures caractéristiques trop élevées. En pratique toutefois, les plus gros objets disposent de sous régions denses qui refroidissent efficacement. De même, les plus petits objets bénéficient également de la possibilité de refroidir via les processus *moléculaires* du H_2 notamment, qui étend les capacités de refroidissement à de plus faibles températures. De même la présence d'éléments plus lourds que l'hélium, désignés sous le terme de métaux, fournit de multiples transitions atomiques et multiplie les canaux d'évacuation de l'énergie : l'enrichissement du gaz par les générations successives d'étoiles favorise le refroidissement du gaz.

Pour finir, on a rapidement réalisé que lorsqu'il était actif, ce processus de refroidissement devenait trop efficace en particulier à grand redshift lorsque la matière était très dense, donnant des petites galaxies trop abondantes, un nombre trop important d'étoiles ou des galaxies de trop petites tailles, trop concentrées²⁵¹. Il faut donc ré-injecter de l'énergie dans le gaz pour qu'il arrête ce refroidissement catastrophique, via par exemple l'énergie injectée par les explosions d'étoiles en fin de vie en supernovæ ou par la présence d'un fond de rayonnement ultra-violet. On reviendra sur ces sujets dans la partie dédiée aux simulations numériques.

²⁵¹. par exemple dans les travaux de White & Rees à la fin des années 70 ou Navarro & White dans les années 90s

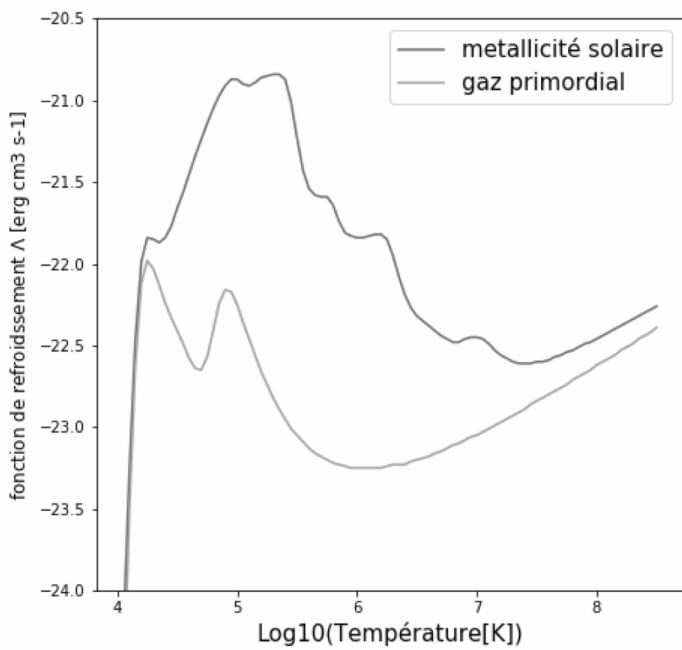


FIGURE 55: La fonction de refroidissement du gaz de Sutherland et Dopita, pour un gaz sans métaux, dit 'primordial' et un gaz avec une métallicité solaire. Dans les 2 cas, le refroidissement n'est efficace qu'au dessus de 10 000 K tandis que les hautes températures présente un comportement en \sqrt{T} typique du Brehmstrahlung. Pour le gaz primordial on observe les 'bosses' caractéristiques des processus d'excitation collisionnelle de l'hydrogène et de l'hélium. Le gaz enrichi en métaux est globalement plus efficace car disposant des multiples canaux de refroidissement des éléments plus lourds que l'hélium. Les cas présentés ici supposent un équilibre d'ionisation.

Simulations Cosmologiques

CET OUVRAGE EST UN OUVRAGE DE THÉORIE. Il s'agit d'exposer les quantités physiques pertinentes, les temps ou échelles caractéristiques importantes à l'évolution et l'établissement des propriétés de l'Univers : à cette fin, nous posons et analysons les équations que nous croyons pertinentes pour extraire ces informations. C'est une tâche qui généralement ne peut se faire que sous certaines hypothèses dont on sait qu'elle ne sont qu'imparfaitement satisfaites dans la réalité. Par exemple, le principe cosmologique présuppose une distribution homogène de la matière or nous savons que cela est n'est plus vrai sur des petites échelles²⁵². De même, la théorie de l'instabilité gravitationnelle présentée dans le chapitre sur la formation des structures n'est valable que dans le régime des petites perturbation, autorisant une description linéaire de leur croissance : pour autant nous savons qu'une galaxie présente un contraste de densité $\delta \sim 200$ qui va bien au-delà des limites du régime linéaire. Il existe certes des approches permettant de dépasser le régime des petites perturbations mais elles nécessitent des conditions précises de symétries par exemple²⁵³.

Pour toutes ces raisons, il est tout un domaine de la cosmologie physique qui vise à développer des outils de simulations numériques permettant notamment de suivre la structuration de la matière dans des régimes arbitraires de symétries et de non linéarités. Ces simulations sont essentiellement dédiées à l'étude de la *dynamique* de la matière dans l'Univers en produisant des portions d'Univers synthétiques en évolution depuis les premiers instants jusqu'à nos jours. Elles reproduisent ce que nous pensons être l'histoire complexe de croissance et d'assemblage des structures : en comparant les prédictions de ces outils à la 'réalité terrain', il s'agit de tester les lois physiques qui sont utilisées et nos hypothèses sur l'état initial de l'Univers et ses propriétés. Par ailleurs ces simulations fournissent des histoires de croissances des structures qui peuvent être enrichies de modèles supplémentaires pour explorer des physiques qui ne se limitent pas à la dynamique. Elles sont aussi utilisées à des fins pra-

^{252.} on peut mentionner les oscillations baryoniques acoustiques dans le fond diffus ($\lambda < 200$ Mpc comobile) ou bien la présence d'amas de galaxies dans l'Univers actuel ($\lambda < 1$ Mpc comobile)

^{253.} tel le modèle d'effondrement sphérique

tiques pour mettre au point des relevés, préparer des observations ou simuler des instruments. Ces outils numériques sont appelés *simulations cosmologiques* et leurs principes les plus importants sont décrits dans ce chapitre.

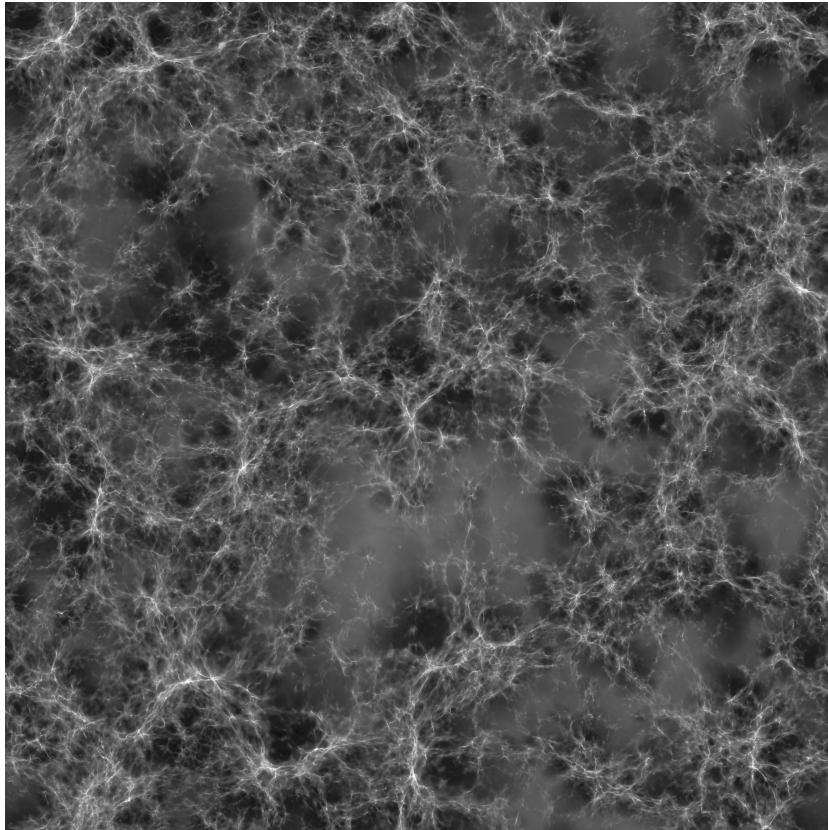


FIGURE 56: Un exemple de produit de simulation cosmologique. Cette image montre une prédiction numérique de l'état de l'Univers 1 milliards d'années après le Big-Bang : les structures filamentaires tracent la densité du gaz et le 'brouillard' désigne les régions à température élevée (> 20000 K). L'image fait 90 Mpc de côté.

De la discréétisation et de la résolution

Ces simulations sont produites par des codes informatiques devant tourner sur des ordinateurs. Ces machines possèdent des ressources finies et manipulent des quantités *discrètes*, ce qui est en contradiction avec notre description habituelle du monde qui repose généralement sur une description *continue* : un volume permet une infinité de positions possibles ou bien tous les instants sont accessibles à l'intérieur d'un intervalle temporel donné. Même une quantité à priori dénombrable peut donner l'apparence d'une infinité, tel un nombre de particules qui dans des volumes cosmologiques peut être tout simplement gigantesque. Un traitement informatique implique donc de discréteriser le temps, l'espace, la distribution de matière, etc... pour pouvoir être envisageable. Par la suite, nous considé-

rons la densité de matière dans l'espace $\delta(\vec{x})$: ce champ scalaire est défini en tout point de l'espace et possède donc une infinité de valeurs possibles tout en étant mesurable dans une infinité de positions possibles.

UN PREMIÈRE FAÇON de segmenter ce champ consiste à l'évaluer à des positions discrètes, par exemple sur une grille cartésienne de taille de maille Δx : cette façon de faire est dite *eulérienne* et permet de réduire le nombre de points où le champ est évalué tout en lui permettant toujours d'accéder à un spectre continu de valeurs en chacun de ces points. Cette façon de faire introduit en revanche un paramètre de résolution spatiale Δx qui va limiter notre capacité à décrire des phénomènes d'échelles caractéristiques proches ou inférieures à cette longueur. On pourra limiter l'influence de ce paramètre de résolution en adoptant par exemple des grilles non cartésiennes, non homogènes ou non statique mais on ne pourra jamais la faire disparaître complètement.

UNE SECONDE FAÇON de procéder consiste à découper la matière en quanta souvent appelés *particules*, qui représente une quantité prédefinie de matière se déplaçant librement dans l'espace. Cette description est dite *lagrangienne* et permet d'accéder à tous les points de l'espace de façon continue. En revanche elle introduit également un élément de résolution, en masse cette fois-ci, correspondant à la masse de la particule m : en un point de l'espace, la quantité matière ne pourra augmenter progressivement depuis zéro qu'en 'empilant' des particules à cet endroit, d'abord m puis $2m, 3m$ etc... Par ailleurs cette discrétilisation en quanta peut introduire du bruit si une quantité de matière donnée n'est représentée que par un faible nombre de particules. Enfin, comme pour la résolution spatiale mentionnée précédemment, cette résolution en masse nous limite dans la description de phénomènes opérant dans des objets de masse inférieure à cette valeur.

CONCERNANT LE TEMPS le même problème se pose : les techniques de résolution approchée d'équations différentielles nécessitent généralement de raisonner sur des durées courtes, par exemple pour satisfaire au mieux des approximations d'ordre linéaire ou de bas ordre. Il faut donc découper les durées d'intérêt en *pas de temps* Δt qui à nouveau nous limitent quant à la description de phénomènes plus rapides que cette résolution temporelle. Une simulation numérique tâchera donc de suivre l'évolution de champs discrétilisés sur des grilles (dans une approche eulérienne) ou en particules (dans une approche lagrangienne), en les mettant à jour tous les Δt jusqu'à ce

que la durée voulue soit couverte. Notons que les 2 approches mentionnées (grille ou particules) possèdent chacune leurs avantages et leurs inconvénients en fonctions des champs considérés et des équations différentielles qui leurs sont associées.

Dynamique Non-Collisionnelle : Matière Noire et étoiles

Considérons dans un premier temps la composante non-collisionnelle de la matière, à savoir la matière noire et les étoiles. Dans la plupart des cas, une simulation cosmologique va décrire ces composantes sous forme de particules possédant une masse m , une position \vec{x}_i et une vitesse \vec{v}_i (i désignant la particule parmi N autres). La masse ne varie pas, tandis que positions et vitesses subissent des mises à jour régulières via la résolution du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_i) \quad (365)$$

où $\vec{F}(\vec{x}_i)$ désigne la résultante des forces à la position \vec{x}_i . Pour une composante non-collisionnelle, cette résultante est uniquement le fruit de la force de gravitation. Un schéma de mise à jour simple peut prendre pour point de départ la discrétisation suivante²⁵⁴ :

$$\frac{v_i^{p+1} - v_i^p}{\Delta t} = \frac{1}{m} F(x_i^p) \quad (366)$$

et permet d'évaluer la vitesse v_i^{p+1} à l'instant $t^{p+1} = t^p + \Delta t$ comme suit :

$$v_i^{p+1} = v_i^p + \frac{\Delta t}{m} F(x_i^p). \quad (367)$$

Par ailleurs, ayant $dx/dt = v$, on obtient aisément la formule de la mise à jour de la position :

$$x_i^{p+1} = x_i^p + \Delta t v_i^{p+1}. \quad (368)$$

Ce schéma d'avancement simple est l'une des formes du *schéma d'Euler* : s'il a le mérite de la simplicité, à l'usage il présente des inconvénients en terme de stabilité ou de précision qui nécessitent de manipuler des pas de temps Δt particulièrement courts. D'autres schémas plus complexes existent, garantissant une meilleure stabilité ou précision, par exemple le *leapfrog*²⁵⁵

$$v_i^{p+1/2} = v_i^{p-1/2} + \frac{\Delta t}{m} F(x_i^p) \quad (369)$$

$$x_i^{p+1} = x_i^p + \Delta t v_i^{p+1/2} \quad (370)$$

où l'on voit que vitesse et position sont évaluées de façon désynchronisée avec un décalage de $\Delta t/2$. L'un des mérites de cette méthode

254. par la suite on négligera la forme vectorielle des positions et vitesses en se ramenant à un problème 1D. La généralisation à 3D ne posant pas de difficultés.

255. une traduction possible serait 'saut-mouton'

est son invariance par renversement du temps²⁵⁶ : en appliquant une mise à jour de $-\Delta t$ le leapfrog permet de retrouver la position x^p à partir de x^{p+1} . Le schéma d'Euler ne possède pas la même propriété à cause du terme de force qui passe de $F(x_i^p)$ à $F(x_i^{p+1})$ selon qu'on aille dans un sens ou l'autre.

LA DERNIÈRE INCONNUE est l'expression de la force en tout point de l'espace $F(x_i^p)$. Plusieurs techniques ont été développées depuis les années 70 mais peuvent être rapidement regroupées en 2 familles. La première repose sur un principe de sommation. On dispose des positions x_i de toutes les N particules, on peut donc calculer la force appliquée sur la particule j en sommant toutes les forces individuelles créées par les particules i qui s'appliquent dessus²⁵⁷ :

$$\vec{F}_j = -Gm^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{r_{ij}^2} \vec{e}_{ij}. \quad (371)$$

Cette méthode de sommation directe est simple à mettre en place et est rigoureusement exacte, toutefois elle est extrêmement coûteuse puisqu'elle nécessite d'évaluer $N(N - 1)/2 \sim N^2$ interactions : si l'on décide de multiplier par 10 le nombre de particules (pour gagner en résolution en masse et étudier de plus petits objets par exemple), cela implique 100 fois plus de calculs. Ce type de dépendance en N^2 pour le coût de calcul est tout simplement insoutenable en pratique. Pour cette raison il existe des techniques qui permettent d'accélérer ce type de sommation par exemple en subdivisant hiérarchiquement l'espace suivant une configuration arborescente²⁵⁸. Dans ces approches, une région distante (et donc peu influente) est vue avec peu de détails en regroupant les particules qui s'y trouve en 'macro-particules' moins nombreuses, ce qui réduit le cout informatique de la sommation : on peut montrer que le nombre d'interactions suit une loi en $N \log N$, bien plus soutenable. Pour finir, remarquons que la formule de sommation peut diverger si certaines particules sont trop proches l'une des autres avec $r_{ij} \rightarrow 0$: en pratique il est d'usage de lisser la force de gravitation sur un échelle ϵ . Par exemple on peut écrire

$$\vec{F}_j = -Gm^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{r_{ij}^2 + \epsilon^2} \vec{e}_{ij}. \quad (372)$$

où ϵ empêche la force de diverger aux faibles séparations mais au prix d'une réduction de la résolution spatiale : aux échelles de l'ordre du lissage, la force n'est plus correctement décrite.

La seconde famille de méthode pour l'évaluation de la force passe par l'estimation du champ potentiel gravitationnel $\phi(\vec{x})$ sur une grille (très généralement) cartésienne. Force et potentiel dérivent l'un de

256. on parle de schéma symplectique

257. on suppose que toutes les particules sont de masse m . r_{ij} désigne la distance entre les particules i et j, tandis que \vec{e}_{ij} désigne le vecteur unitaire les reliant

258. on parle usuellement de *tree-code* ou code en arbre

l'autre :

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x}) \quad (373)$$

tandis que le potentiel peut être évalué en résolvant l'équation de Poisson à partir du champ de la densité massique $\rho(\vec{x})$:

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}). \quad (374)$$

Connaissant la position \vec{x}_i de toutes les particules, on peut évaluer la densité $\rho(\vec{x})$ en tous les points d'une grille²⁵⁹ et donc le potentiel $\phi(\vec{x})$ puis la force $\vec{F}(\vec{x})$. Connaissant la force en tous les points d'une grille, on peut alors l'interpoler aux positions désirées à savoir les positions \vec{x}_i de toutes les particules. Pourquoi se donner tant d'effort ?

^{259.} en pratique il s'agit de calculer l'histogramme 3D des positions de ces particules

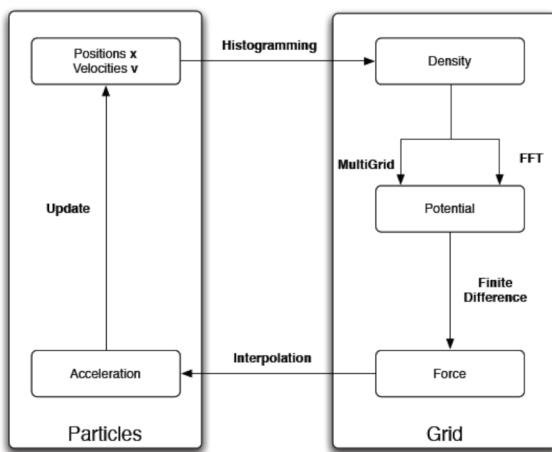


FIGURE 57: schématique de la méthode de calcul des forces sur grilles. Notez la nature hybride du schéma qui fait intervenir une description en termes de particules (ou lagrangienne à gauche) et une description en termes de champs sur une grille (ou eulérienne à droite)

forts pour évaluer la force ou le potentiel de cette façon ? La réponse réside dans la résolution de l'équation de Poisson (eq. 374). Cette équation est fondamentalement une équation de diffusion, et nombre de méthodes ont été développée pour la résoudre efficacement et rapidement dans de nombreux contextes. Par exemple, prenons la transformée de Fourier (TF) de l'équation de Poisson et nous obtenons aisément²⁶⁰ :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) \sim -\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{k^2}. \quad (375)$$

Si nous avons une façon simple d'évaluer les transformées de Fourier de champs connus sur une grille, il suffit d'appliquer l'équation algébrique triviale précédente pour trouver le potentiel à partir de la TF de la densité et du potentiel. Il s'avère qu'il existe des techniques de *transformées de Fourier rapide* ou FFT qui ont été développées durant des décennies à des fins de traitement du signal et qui donc peuvent être facilement reprises.

Par ailleurs, il existe aussi des méthodes dites de 'relaxation' qui permettent de résoudre l'équation de Poisson : si on examine cette

^{260.} voir aussi le chapitre dédié à la matière noire

dernière, on peut considérer qu'elle n'est qu'un cas particulier de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \Delta\phi(\vec{x}, t) = 4\pi G\rho(\vec{x}) \quad (376)$$

dans le régime *stationnaire*, avec $\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \rightarrow 0$. En cherchant cette solution stationnaire, on peut trouver une solution de l'équation de Poisson. Une version de cette équation en différences finies donne²⁶¹ :

$$\frac{\phi_i^{p+1} - \phi_i^p}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+1}^p - \phi_{i-1}^p}{\Delta x^2} = 4\pi G\rho_i^p \quad (377)$$

que l'on peut réarranger sous la forme d'une équation de *relaxation* :

$$\phi_i^{p+1} = \phi_i^p + 4\pi G\rho_i^p - \frac{\phi_{i+1}^p - \phi_{i-1}^p}{\Delta x^2} \Delta t. \quad (378)$$

En se donnant une estimation du potentiel ϕ_i^p à une itération p et en l'utilisant dans cette relation de relaxation, on s'approche en principe d'une estimation encore meilleure ϕ_i^{p+1} . D'itérations en itérations, on peut ainsi converger vers une solution du potentiel : notons que l'on utilise un pas de temps *fictif* Δt dont on peut montrer qu'une convergence optimale est obtenue pour $\Delta t \sim \Delta x^2/2$. La méthode décrite ici est la plus simple de toutes les méthodes de relaxation²⁶² : il en existe d'autres, plus stables, plus efficaces dont les méthodes dites *multigrilles* qui cherchent à faire converger les différentes échelles du potentiel de façon séparées et optimales. Comparées au méthodes à base de FFT, elles sont plus versatiles²⁶³ et légèrement moins rapides.

Que ce soit grâce à la FFT ou aux méthodes de relaxation, on dispose de moyens extrêmement rapides de résolution de l'équation de Poisson : en revanche l'utilisation d'une grille implique que le champ de gravitation n'est décrit qu'au mieux sur une échelle de la taille d'une cellule de la grille. Une telle échelle de coupure est inexistante à priori dans les méthodes de sommation qui permettent donc un suivi plus précis et à plus petite échelle des effondrements par exemple. L'introduction d'un lissage ϵ dans les méthodes de sommation introduisent certes une résolution limite mais ce lissage est généralement bien plus petit que la taille d'une cellule (environ 10 fois plus petit en pratique). De fait, on n'hésite pas parfois à combiner les méthodes de sommation et celles de type grille pour bénéficier de leurs avantages respectifs.

Pour finir, considérons rapidement la différence entre particules de matière noire et étoiles, qui toutes deux sont l'objet de la dynamique non-collisionnelle. Dans les 2 cas, les méthodes exposées ici sont appliquées de façon identiques, les deux espèces diffèrent en ce que leurs membres n'évoluent pas de la même manière. Les particules de matières noires n'évoluent pas, leur masse individuelle reste

261. ici i désigne une cellule donc une position dans la grille tandis que p désigne une estimation du potentiel

262. c'est la méthode de *Jacobi*

263. on peut aussi les utiliser pour des versions modifiées de l'équation de Poisson ou sur des grilles non cartésiennes

constante, leur nombre initial fixe la quantité de matière noire et il n'a pas d'annihilation ni de création de telles particules. Les étoiles évoluent : elles doivent apparaître lorsque les conditions s'y prêtent et elles peuvent voir leur masse évoluer : en effet une particule 'stellaire' constitue en pratique un amas stellaire de plusieurs centaines d'étoiles à plusieurs millions de masse solaires. Elles représentent donc davantage une population qu'une étoile individuelle en tant que tel : lorsque les étoiles les plus massives de ces amas explosent en supernovæ, la masse est rendue au milieu interstellaire au bout de quelques millions d'années et numériquement cela peut correspondre à une masse variable de particule. Notons toutefois qu'il existe toujours au sein de ces particules stellaires une composante 'étoile de faible masse' à durée de vie supérieure au temps de Hubble : de façon générale une particule stellaire voit sa masse diminuer mais ne peut complètement disparaître du fait de cette population à grande durée de vie.

Hydrodynamique

EN CONTREPOINT à la dynamique non-collisionnelle, les codes de simulations numériques peuvent également suivre la dynamique du gaz présent dans l'Univers. Ces baryons ne représentent certes que $\sim 15\%$ de la matière disponible mais ils sont observables ou bien sont à l'origine des étoiles qui sont également observables : par conséquent ils permettent une comparaison plus directe des résultats simulés aux observations. Par ailleurs au centre des galaxies, le gaz peut être dominant et sa dynamique est suffisamment différente de celle de la matière noire et des étoiles pour devoir être modélisée indépendamment.

LE JEU D'ÉQUATION à résoudre est connu, ce sont les équations d'Euler²⁶⁴ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\partial \rho v)}{\partial x} = 0 \quad (379)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (380)$$

La première équation indique que la densité ne varie que sous l'effet du flux de masse ($\frac{(\partial \rho v)}{\partial x}$) tandis que la seconde indique que l'impulsion varie sous l'effet du flux de moment ($v \frac{\partial v}{\partial x}$) et des forces de pression ($\frac{\partial P}{\partial x}$) et de gravitation ($\frac{\partial \phi}{\partial x}$)²⁶⁵.

Ces équations peuvent être toutes deux écrites sous une forme

264. représentées ici à 1D. On y distingue l'équation de la conservation de la masse et de l'impulsion. $\rho(x, t)$ désigne la densité de gaz, $v(x, t)$ sa vitesse, $P(x, t)$ sa pression et $\phi(x, t)$ le potentiel gravitationnel.

265. il s'agit juste d'une formulation alternative du principe fondamental de la dynamique

conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\partial \rho v)}{\partial x} = 0 \quad (381)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{(\partial \rho vv)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (382)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{(\partial Ev)}{\partial x} = -v \frac{\partial P}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (383)$$

auxquelles nous avons ajouté l'équation de conservation de l'énergie E . Ces 3 équations suivent une structure similaire, typique d'équations de conservation d'une quantité A avec un terme source

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial F(A)}{\partial x} = S(A). \quad (384)$$

Dans les 3 cas, une quantité A est modifiée sous l'effet d'un flux $F(A)$, qui déplace la quantité en question, et d'un terme source qui modifie A sans déplacement. Dans le cas de la densité, ce terme source est strictement nul ce qui indique une conservation stricte de la masse, dans le cas de l'impulsion, ce terme source est constitué des forces qui s'exercent sur le fluide et dans le cas de l'énergie il est finalement constitué du travail de ces mêmes forces.

La façon la 'plus naturelle' de résoudre des équations du type de Eq. 384 est de considérer un volume fini, comme celui d'une cellule cubique et de mesurer les flux des quantités conservées (densité, impulsion et énergie) au travers des faces de cette cellule. Intuitivement, le flux mesuré au travers d'une face dépend des valeurs physiques de part et d'autre de cette face : la procédure qui permet de trouver le flux de A connaissant A de part et d'autre de l'interface s'appelle une *réolution de problème de Riemann*.

Il existe nombre de façons de résoudre un problème de Riemann, avec des niveaux d'approximations plus ou moins importants. Soit par exemple $F(A_{i+1/2})$, le flux existant entre 2 cellules successives i et $i+1$: résoudre le problème de Riemann revient à trouver la fonction \mathcal{R} telle que

$$A_{i+1/2} = \mathcal{R}(A_i, A_{i+1/2}). \quad (385)$$

Une façon simple de procéder revient à comparer les 'vents' dans les cellules adjacentes en comparant leurs vitesses : si $v_i > v_{i+1}$ le vent vient de la cellule i et on peut considérer que la valeur de A à l'interface est dominée par A_i . Cette procédure dite *upwind* va par exemple assigner :

$$A_{i+1/2} = \mathcal{R}(A_i, A_{i+1/2}) \sim A_i \quad (386)$$

et donc $F(A_{i+1/2}) \sim F(A_i)$. On peut toutefois montrer que ce type de schéma est soit extrêmement diffusif soit particulière instable et il

existe toute une littérature de schémas de plus haut niveau, plus ou moins adaptés en fonction du problème que l'on cherche à résoudre.

Connaissant le flux en $i - 1/2$ et $i + 1/2$, la quantité A peut être mise à jour par le même type de différence finie que celle utilisée précédemment pour le déplacement de particule non-collisionnelle :

$$\frac{A_i^{p+1} - A_i^p}{\Delta t} = - \frac{F(A_{i+1/2}^p) - F(A_{i-1/2}^p)}{\Delta X} + S(A_i^p) \quad (387)$$

ou bien

$$A_i^{p+1} = A_i^p - \Delta t \frac{F(A_{i+1/2}^p) - F(A_{i-1/2}^p)}{\Delta X} + \Delta t S(A_i^p). \quad (388)$$

Notez que cette mise à jour à l'instant $p + 1$ ne nécessite la connaissance que des données à l'instant p et tous les termes du membre de droite sont évalués à cet instant. Cette approche est dite *explicite* et n'est que conditionnellement stable. Si le pas de temps Δt est trop important, une amplification des erreurs s'opère et la stabilité n'est garantie que si la condition de Courant est satisfaite :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > v. \quad (389)$$

Cette équation traduit que la vitesse numérique, la vitesse de mise à jour, doit être supérieure à la vitesse typique du processus physique que l'on cherche à reproduire : pour une résolution spatiale Δx donnée cela équivaut à mettre une limite supérieure au pas de temps Δt choisi²⁶⁶. Notons qu'il existe aussi une approche dite *implicite* où tous les termes de mise à jour sont exprimés à l'instant $p + 1$: toutefois ces termes sont inconnus au moment du calcul et la mise à jour implique dès lors un problème typique d'inversion, souvent compliqué, en lieu et place de la simple expression algébrique obtenue ici. En revanche l'approche implicite est généralement inconditionnellement stable, ce qui permet l'utilisation de pas de temps plus grands pour simuler un problème donné.

UNE AUTRE MÉTHODE POPULAIRE existe pour traiter les équations hydrodynamique et qui repose sur une description particulière des éléments de fluides. Nommée *SPH* (pour *smoothed particle hydrodynamics*) elle repose sur l'utilisation de particules d'extension finie et non-nulle. Cette extension est formalisée par un noyau dont la valeur dépend de la distance au centre de la particule, $W(|x - x_p|)$, valeur qui tend vers zéro au delà d'une certaine *distance de lissage*. Ce noyau fait office de poids et toute quantité intensive (densité, moment, énergie...) associée à une particule s'obtient en additionnant les contributions pondérées de ses i voisines :

$$A = \sum_i m_i \frac{A_i}{\rho_i} W(|x_i - x_p|). \quad (390)$$

266. Notons que la même chose existe pour les particules de la partie précédente. Si l'on souhaite qu'une particule ne parcourt pas une trop grande distance durant un pas de temps, il faut limiter ce dernier.

Cette somme se fait généralement sur un nombre de particules voisines prédéterminé : si la matière est dense, les distances impliquées seront courtes tandis qu'un état diffus implique naturellement une sommation sur des plus grandes distances.

L'intérêt de cette méthode est sa simplicité : par exemple toute dérivée spatiale de A se propage linéairement au noyau de pondération, dont la dérivée est généralement simple et connue. De plus, cette description sous forme de particule n'implique pas de géométrie d'échantillonnage à priori, au contraire d'une grille qui fixe d'emblée des directions ou des points de mesures privilégiés. Les particules de fluides se déplacent librement et peuvent par exemple sur-échantillonner les régions denses ou sous échantillonner les régions vides : par rapport à une grille, on a ainsi un échantillonnage de l'espace au plus près des contrastes de densité. Son inconvénient majeur est sa plus grande diffusivité comparées aux meilleures formulations sur grille : dans ses versions les plus communes, la méthode SPH ne parvient pas à capturer certains types chocs ou de discontinuités et ne lui permet pas de reproduire certaines instabilités hydrodynamiques standard.

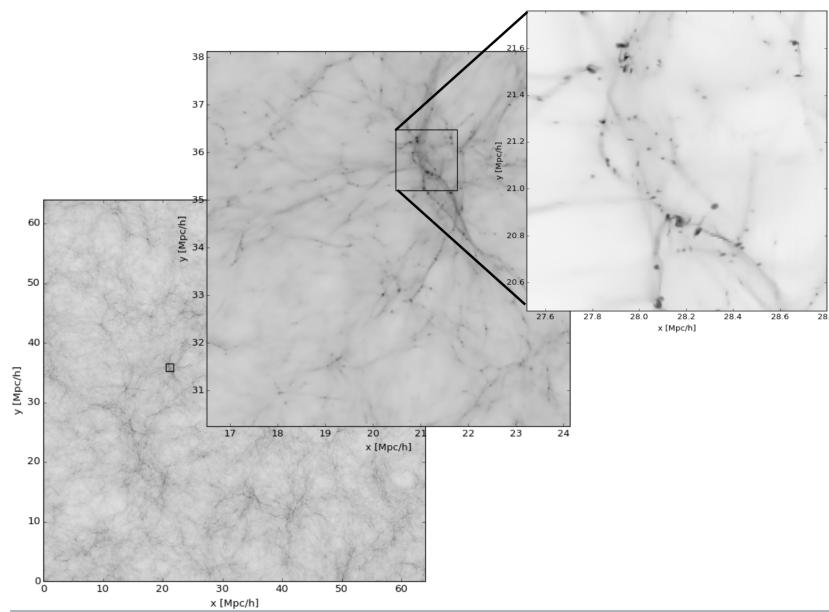


FIGURE 58: Exemple de dynamique dans une simulation hydrodynamique avec refroidissement. L'image de droite représente la distribution de gaz dans les 2 cadres de gauche. On note la présence de disques gazeux en rotation créés par le gaz effondré sous l'effet du refroidissement.

Processus Physico-Chimiques

Comme expliqué dans la partie dédiée à la formation des structures, le gaz cosmique ne peut s'organiser sous la forme de galaxies

que si ce dernier peut évacuer de l'énergie via des processus de refroidissement. L'équation qui régit l'évolution de l'énergie interne est²⁶⁷ :

$$\frac{de}{dt} = H - \Lambda. \quad (391)$$

La fonction de chauffage H est régie par le rayonnement ionisant.

La fonction de refroidissement Λ peut être plus ou moins sophistiquée et faire intervenir des espèces moléculaires, des métaux²⁶⁸ ou se limiter aux éléments H et He. Dans ce dernier cas, les processus impliqués sont le refroidissement par ionisation, par émission de rayonnement de recombinaison, de désexcitation collisionnelle ainsi que le rayonnement synchrotron et Compton inverse avec les photons du CMB. Tous ces processus sont tabulés et dépendent de la température du gaz, de sa densité et de son état d'ionisation.

L'ÉTAT D'IONISATION DU GAZ doit également être connu pour chaque élément de résolution afin de calculer son refroidissement. Dans le cas d'un gaz composé uniquement d'hydrogène, l'état d'ionisation du gaz est régi par²⁶⁹ :

$$\frac{dn_{HI}}{dt} = \alpha(T)n_{HII}n_e - \beta(T)n_{HI}n_e - \Gamma n_{HI}. \quad (392)$$

Cette équation lie la variation de l'abondance d'atomes neutres à la recombinaison atomique²⁷⁰ qui tend à faire augmenter cette abondance en fonction du nombre d'électrons libres et d'atomes ionisés, à l'ionisation collisionnelle²⁷¹ qui tend à diminuer cette abondance en fonction du nombre d'électrons libres à nouveau et enfin par la photoionisation²⁷² qui encode la destruction d'atomes neutres par le rayonnement ionisant. Ce type d'équation doit être résolue en chaque élément de résolution à chaque pas de temps. Elle peut être résolue dans le régime hors-équilibre ou plus simplement en supposant que cette abondance converge très rapidement vers l'équilibre²⁷³ en posant arbitrairement $\frac{dn_{HI}}{dt} = 0$.

LES TAUX physico-chimiques de recombinaison ou de collisions dépendent uniquement de la température et sont tabulés. Le taux de photoionisation dépend lui de la quantité de photons n_γ ionisants présents en chaque point de l'espace simulé²⁷⁴ :

$$\Gamma = c\sigma n_\gamma. \quad (393)$$

Ce rayonnement ionisant est produit par les étoiles et les quasars pour l'essentiel et dépend dans l'absolu du lieu considéré (à proximité ou éloigné des sources de rayonnement) et de l'instant puisque les populations d'étoiles et de quasars évoluent au cours de l'histoire de l'Univers. En pratique, la plupart des simulations cosmologiques

267. e désigne l'énergie interne du gaz tandis que H et Λ désignent respectivement les fonctions de chauffage et de refroidissement

268. éléments plus lourds que l'hélium

269. n_{HI} désigne la densité numérique de gaz d'hydrogène neutre, n_{HII} celle d'hydrogène ionisé et n_e la densité d'électrons libres

270. contrôlée par le taux de recombinaison α (en $m^3 s^{-1}$)

271. contrôlée par le taux de collisions β (en $m^3 s^{-1}$)

272. contrôlée par le taux de photoionisation $\Gamma = c\sigma n_\gamma$ (en s^{-1})

273. ce qui est une bonne approximation compte tenu des temps courts impliqués dans les processus physico-chimiques par rapports aux temps dynamiques

274. σ désigne la section efficace d'ionisation et dépend très fortement de la fréquence du rayonnement étudié.

considère que le rayonnement ionisant est assimilable à un fond uniforme : après la Réionisation²⁷⁵, l'Univers est 'transparent' aux rayonnements UV et cela constitue donc une approximation raisonnable. L'évolution temporelle de ce 'fond UV' peut être tabulé et injecté dans l'équation 393. Un exemple couramment utilisé est le fond dit de 'Haardt & Madau', reposant sur une description réaliste de l'évolution des différentes populations de sources et dont l'évolution est donnée dans la figure 59. Ce taux intervient également dans le terme de chauffage H de l'équation 392 : chaque ionisation s'accompagne d'un dépôt d'énergie de la forme²⁷⁶ :

$$H = c\sigma n_\gamma n_{HI}(E_\gamma - E_i). \quad (394)$$

Donc non seulement le rayonnement influe sur le refroidissement du gaz en réglant le taux d'ionisation du gaz (et donc sa capacité à rayonner) mais également sur son chauffage. Depuis un peu moins de 10 ans, un nouveau type de simulations prenant en compte la propagation du rayonnement et les effets d'opacités²⁷⁷ est apparu : extrêmement coûteuses ces simulations sont pour l'instant limitées à l'étude de l'époque de Réionisation²⁷⁸ mais permettent de s'affranchir de l'hypothèse d'un fond UV uniforme.

Formation et rétroaction stellaire

L'objectif des simulations cosmologiques est d'explorer le processus de croissances des structures dans ses régimes les plus non-linéaires et l'un des aboutissement de ces régimes est la formation d'étoile. Par ailleurs, la comparaison entre résultats de modélisation et observations se fait invariablement par la composante lumineuse des galaxies et à ce titre l'inclusion de modèles de formation stellaire est indispensable pour pouvoir comparer une vraie galaxie avec la composante stellaire d'une galaxie simulée.

LA RÉSOLUTION SPATIALE nécessaire à modéliser la formation stellaire est néanmoins difficilement compatible avec les échelles cosmologiques. La formation stellaire opère dans des nuages moléculaires géants, aux tailles caractéristiques de l'ordre du parsec, tandis que les effets cosmologiques qui nous intéressent se manifestent sur des échelles supérieures au Mégaparsec : le rapport d'échelle est très important et à vrai dire hors de portée des machines actuelles de calcul. En effet, une haute résolution spatiale dans un grand volume cosmologique implique un grand nombre d'éléments de calculs (particules, cellules) et donc un grand nombre de données à traiter sur une très grande durée. Par exemple, un volume de 100 Mpc traité avec des cellules au parsec de résolution implique un nombre de cellules total

^{275.} qui prend place environ 1 milliard d'années après le Big-Bang, correspondant à $z \sim 6$.

^{276.} où E_γ désigne l'énergie portée par chaque photon et E_i désigne l'énergie d'ionisation (13.6 eV pour H)

^{277.} physique que l'on regroupe sous le terme de *transfert radiatif*

^{278.} donc limité au premier milliard d'années de l'histoire de l'Univers

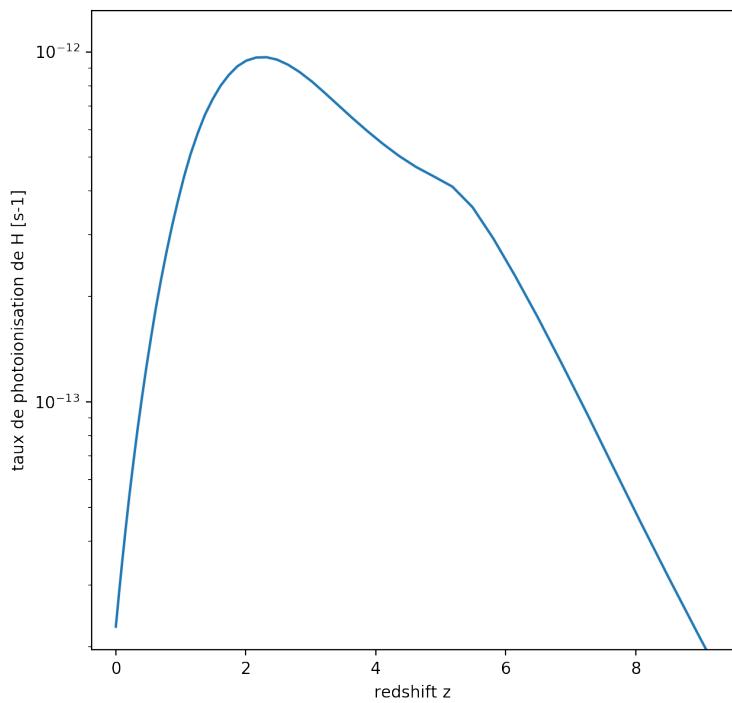


FIGURE 59: Évolution en redshift du taux de photoionisation créée par le fond ultra-violet du modèle de Haardt & Madau. Ce modèle suppose un Univers optiquement mince et sort de son domaine d'hypothèse pour $z>6$, lorsque l'Univers n'est pas complètement réionisé. On note une augmentation suivie d'une baisse du taux de photoionisation qui trace l'histoire cosmique de formation d'étoile.

de l'ordre de $(10^8)^3 = 10^{24}$. En 2017, les plus grandes simulations cosmologiques produites sur les plus grands calculateurs mondiaux traitent avec difficulté de problèmes échantillonnés sur 10^{11-12} cellules, bien en deçà de l'exigence que nous venons de formuler.

LA FORMATION STELLAIRE ne peut donc être simulée à partir de 'principes premiers'²⁷⁹ et il faut donc avoir recours à des modèles. Une des approches les plus communes repose sur l'idée que la formation stellaire est régie par l'effondrement gravitationnel du gaz et opère donc sur des temps dynamiques²⁸⁰ :

$$\frac{d\rho_*}{dt} = \frac{d\rho_g}{dt} \sim \epsilon \frac{\rho_g}{t_g}. \quad (395)$$

Ici ϵ désigne l'efficacité de formation stellaire et manifeste le fait que le temps caractéristique de formation d'étoile n'est pas exactement le temps dynamique mais plutôt t_g/ϵ : l'efficacité est un paramètre libre du modèle.

Or le temps dynamique est lui même dépendant de la densité de gaz en effondrement :

$$t_g \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_g}}. \quad (396)$$

Le taux de formation stellaire (SFR²⁸¹) est alors décrit par une loi de puissance sur la densité de gaz présente localement :

$$\text{SFR} \sim \epsilon \rho_g^{3/2}. \quad (397)$$

Cette relation est appelée *Loi de Schmidt* et traduit en des termes simples qu'une région dense et riche en gaz produit naturellement plus d'étoiles : l'efficacité du processus est contrôlée par ϵ et opère sur des échelles de temps t_g/ϵ . Observationnellement, on constate toutefois que le processus de formation stellaire est hautement inefficace avec des temps caractéristiques de conversion de l'ordre de quelques milliards d'années alors que les temps d'effondrement attendus sont environs 100 fois plus courts. L'efficacité de formation stellaire est donc de l'ordre de 1% et traduit l'impact macroscopique de processus non résolus qui empêche une formation d'étoile soutenue²⁸².

EN PRATIQUE, un code de simulation va passer en revue tous ses éléments de résolution et convertir une partie du gaz conformément à la Loi de Schmidt. Cette conversion va se manifester sous la forme de création de particules stellaires : ces particules n'interagissent que via la gravitation et se découpent du gaz comme de vrais étoiles. Ces "étoiles" possèdent un âge, éventuellement une composition chimique synthétique qui permet de leur assigner une luminosité ou un

^{279.} dans des volumes cosmologiques. Il existe des simulations à l'échelle du nuage moléculaires qui ont la résolution suffisante mais qui se restreignent à des volumes physiques simulés bien insuffisants pour faire de la cosmologie.

^{280.} ρ_* désigne la densité de masse stellaire formée, ρ_g désigne la densité de gaz convertie en étoile et t_g est le temps dynamique gravitationnel

^{281.} de l'anglais *Star Formation Rate*

^{282.} on ne connaît pas bien la source précise de cette inefficacité. Champs magnétiques, turbulence, vents stellaires sont souvent invoqués sans que leurs rôles relatifs et quantitatifs ne soient exactement connus.

spectre pouvant amener des comparaisons entre ces populations stellaires simulées et celles observées dans les vraies galaxies. Rappelons pour finir que ces particules stellaires ont des masses typiques de l'ordre de $1000 M_{\odot}$ à quelque millions et représentent donc des amas ou des populations stellaires et non pas des étoiles individuelles : nos machines actuelles ne sont pas capables de gérer le nombre réel d'étoiles présentes dans un volume cosmologique et doivent donc les regrouper en 'macro-étoiles'.

UNE ÉTOILE MEURT, parfois de façon spectaculaire si elle est massive, de l'ordre de la dizaine de masses solaire ou plus. Cette mort s'accompagne d'une explosion en supernova qui va injecter de l'énergie dans le gaz environnant, le chauffer et donc prévenir au moins momentanément l'apparition de générations ultérieures d'étoiles (voir Fig. 6o). Une population existante va donc modérer l'apparition de populations suivantes dans un mécanisme de rétroaction²⁸³. Les codes de simulations vont modéliser cette rétroaction en injectant de l'énergie dans le gaz à proximité des particules stellaires qui atteignent l'âge correspondant à l'apparition des premières explosions. Notons que toute la population stellaire d'une particule stellaire n'est pas concernée : une population contient des étoiles massives, qui explosent, et des étoiles légères de type solaire qui ont des durées de vie de l'ordre de l'âge de l'Univers. La répartition des masses au sein d'une population est donnée par la *fonction de masse initiale*. Observationnellement cette répartition est souvent décrite par une *loi de Salpeter* dans un grand nombre de contextes²⁸⁴ :

$$N(m)dm \sim m^{-2.35}dm \quad (398)$$

qui traduit le fait qu'une population naissante possède un grand nombre d'étoiles de faible masse et un nombre plus faible d'étoiles massives susceptibles de réinjecter de l'énergie dans le gaz environnant. Cette fonction de masse initiale, comme toutes les autres, permet de contraindre la fraction d'étoiles qui vont exploser ainsi que la répartition temporelle (durée, instant) de cette réinjection d'énergie.

LES TROUS NOIRS SUPERMASSIFS ont aussi un rôle à jouer dans ces modèles à base de simulation. Ils sont en effet les moteurs des *noyaux actifs de galaxies*, les AGNs²⁸⁵, qui renvoient dans les galaxies plus massives et leur proche environnement une partie de l'énergie acquise par l'accrétion de matière par le trou noir central. Le taux d'accrétion d'un trou noir de masse M_{\bullet} est souvent approximée par la formule d'accrétion de Bondi

$$M_{\text{Bondi}} \sim \pi \rho v R_s^2. \quad (399)$$

283. en anglais on parle aussi de *feedback*

284. $N(m)$ désigne le nombre d'étoiles de masse m à dm près

285. pour *active galactic nuclei*

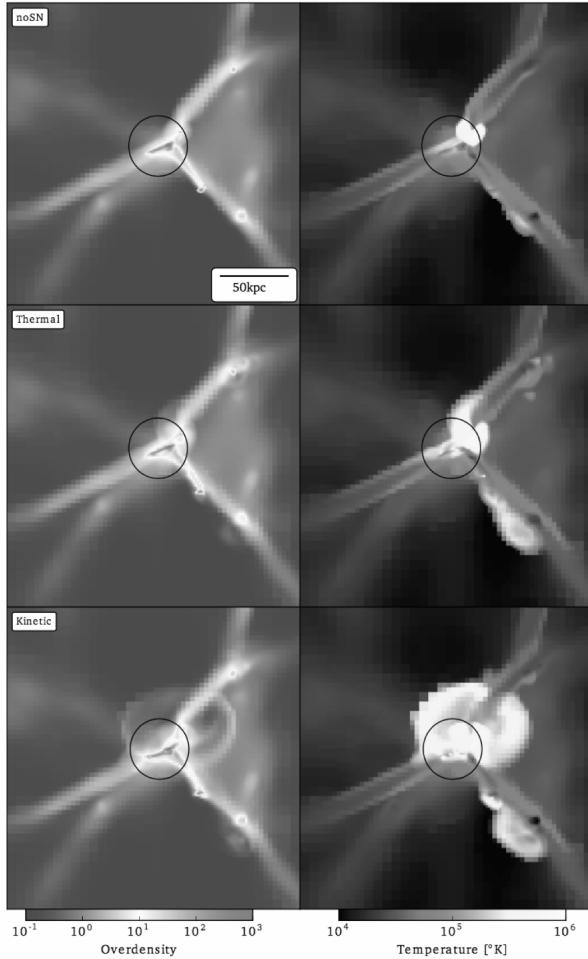


FIGURE 60: Exemples d'injection d'énergie par une particule stellaire modélisant l'explosion d'une supernova. La colonne de gauche montre la densité de gaz autour d'une galaxie pesant $1/10$ ème de la masse de la Voie Lactée. La colonne de droite montre la température du gaz. La ligne supérieure montre une simulation sans explosion tandis que les 2 lignes inférieures montrent 2 modèles d'explosion. On note la montée en température du gaz lors de la présence d'explosion ainsi que la création de fronts produits par le gaz expulsé.

Cette formule est une approximation simple du taux d'accrétion autour d'un trou noir se déplaçant à une vitesse v dans un milieu de densité ρ : l'accrétion se fait au travers d'une surface de rayon $R_s = 2GM_\bullet/c_s^2$ ²⁸⁶, qui est la distance où la vitesse du son c_s du milieu environnant n'est pas suffisante pour s'opposer à l'attraction. Des particules 'trous noirs' sont ainsi parfois ajoutées dans les simulations cosmologiques et dont la masse va grandir sous l'effet de l'accrétion de matériau pour atteindre parfois des masses de l'ordre du million de masses solaires. Une partie de l'énergie ainsi accumulée va être réinjectée dans le gaz environnant, produisant un effet similaire à la rétroaction des supernovæ créées par les étoiles :

$$E_{TN} = \epsilon M_{\text{Bondi}} c^2. \quad (400)$$

Contrairement aux étoiles, cette accrétion, et donc cette injection d'énergie, dépend des conditions locales d'accrétion. Ce type de rétroaction est nécessaire pour expliquer par exemple l'abondance des galaxies brillantes, qui est plutôt plus faible que celle attendue par une simple extrapolation du nombre de halos de matière noire²⁸⁷ très massifs : l'énergie produite par les AGNs, par effet thermique ou mécanique, réduit l'efficacité de formation stellaire dans ces objets.

TOUS CES MODÈLES SOUS-GRILLES sont susceptibles de multiples variations dans toutes les étapes, traduisant notre manque de connaissance actuel sur les processus à l'œuvre autour de la formation stellaire ou bien la vue nécessairement grossière de phénomènes fins vus depuis les échelles cosmologiques. Par conséquent les simulations, qui visent à reproduire l'Univers et les galaxies observées, disposent de multiples leviers sur lesquels agir et qui constituent autant de paramètres libres. Par ailleurs, on sait que d'autres physiques sous-estimées ou non modélisées ont peut-être leur rôle à jouer et de fait tout accord entre simulations et observations peut être critiqué²⁸⁸ et tout désaccord peut être minimisé en invoquant une physique mal ou non résolue. La section dédiée à la matière noire survole les quelques problèmes rencontrés par les prédictions numériques : ces problèmes sont la conséquence du caractère beaucoup plus complexe, plus non-linéaire et multiforme des physiques en jeu lorsque l'on quitte le domaine de la cosmologie à proprement dit pour aborder celui de la formation des galaxies. Il n'en reste pas moins que les simulations sont les seuls outils de modélisation nous permettant d'étudier ces processus dans leur plus grande complexité.

286. c'est tout simplement la distance où la vitesse de libération est égale à celle du son

287. voir le chapitre dédié à la matière noire

288. comme étant dépendant de l'expérience réalisée ou accidentel par exemple

Entropie et Univers

LA NOTION D'ENTROPIE EST PROFONDÉMENT LIÉE à la cosmologie. En thermodynamique classique, l'entropie est la quantité centrale liée au *second principe* qui stipule que toute transformation d'un système physique s'accompagne d'une création d'entropie S ²⁸⁹ :

289. notée ainsi en hommage à Sadi Carnot

$$\Delta S \geq 0. \quad (401)$$

Au mieux, l'entropie reste constante dans le cas d'une transformation dite réversible mais dans tous les cas elle ne peut diminuer : si cela est malgré tout constaté, cela signifie qu'il existe un autre système, en contact avec celui étudié, qui voit son entropie augmenter d'au moins d'autant que la diminution²⁹⁰

290. avec $\Delta S_1 < 0$ et $\Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$

L'une des découvertes fondamentales de la cosmologie est l'affirmation que notre Univers évolue et possède donc une histoire. Conformément à sa définition, cela implique que l'entropie de l'Univers fut plus basse dans le passé qu'elle n'est aujourd'hui. Par ailleurs, l'Univers possède clairement une capacité d'évolution future et son entropie est donc amenée à augmenter. Nous sommes donc aujourd'hui dans un niveau d'entropie intermédiaire, ni à son niveau le plus bas ni à son niveau le plus élevé et cela pose donc naturellement question.

Configurations et probabilités

L'ENTROPIE EST UNE MESURE du nombre d'états microscopiques correspondant à un état macroscopique donné. Dans l'ensemble micro-canonical, décrivant des systèmes isolés à énergie constante, cette brève définition est rigoureusement exacte. L'entropie micro-canonical S est donnée par :

$$S = k_B \log \Omega \quad (402)$$

où Ω désigne le nombre de configurations correspondants à un état macroscopique donné. Le second principe de la thermodynamique

stipule que tout système isolé tend à voir son entropie augmenter avec le temps, au pire elle stagnera si le système atteint un état d'équilibre. Par extension, la flèche du temps est régie par le sens d'évolution de l'entropie : si 2 possibilités s'offrent à un système, l'une avec une augmentation de l'entropie, l'autre avec une diminution de celle-ci, c'est la première qui sera privilégiée.

Cette croissance imposée à l'entropie peut paraître ad hoc, mais émerge naturellement quand on considère l'entropie micro-canonical. Prenons par exemple un système composé de 4 particules avec 2 éléments gris et 2 éléments rouges (cf. Figure 61) : ce système peut être *ordonné*²⁹¹, un état macroscopique atteint par 2 configurations différentes, ou bien *désordonné*, un autre état macroscopique atteint lui par 4 configurations différentes. Dans l'ensemble micro-canonical, chacune de ces 6 configurations est équiprobable et étant dans une certaine configuration de départ, notre système peut passer dans n'importe quelle autre avec une égale probabilité. Par contre ce raisonnement ne tient pas lorsqu'on considère les états macroscopiques. En particulier, si le système est dans un état ordonné, il a dans ce cas 2 fois plus de chances d'évoluer vers un état désordonné que de rester ordonné. A l'inverse, si il se trouve dans un état désordonné, il a deux fois plus de chances de rester désordonné.

²⁹¹. ordonné désigne dans notre un exemple un état où les couleurs sont séparées

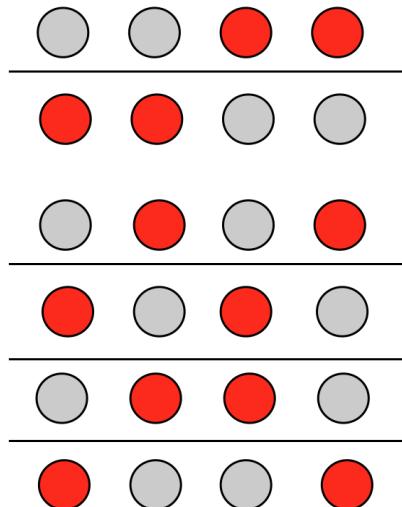


FIGURE 61: Tous les micro-états disponibles dans un système simple comprenant 2 paires de boules de couleurs identiques. On note que le macro-état 'couleurs séparées' est moins probables que le macro-état 'couleurs mélangées'.

IL N'Y A PAS DE MAGIE NOIRE : le système évolue vers l'état qui a le plus de chance d'être réalisé. Dans notre cas, l'état mélangé est plus probable que l'état rangé. A l'inverse, l'état rangé est mieux connu que l'état mélangé : si le système est dans l'état rangé et que l'on s'interroge sur la 'vraie' configuration sous-jacente, on ne peut guère se tromper car il n'en existe que 2. A l'inverse si le système

est dans l'état mélangé, la probabilité de deviner la configuration exacte sous-jacente est 2 fois plus faible : globalement nous avons une meilleure connaissance de la configuration exacte du système si il est dans un état de faible entropie. C'est pour cette raison que l'entropie est également une mesure du niveau d'information ou de méconnaissance que nous avons du système : un système avec une entropie élevée est moins bien connu qu'un système à basse entropie et cette connaissance à tendance à se dégrader avec le temps. C'est la contrepartie d'une évolution qui va naturellement vers les états à grands nombre de configurations.

Ces constatations restent applicables pour des systèmes plus complexes ou plus réalistes. Par exemple, le nombre de configurations correspondant à un verre brisé excède de très loin celui correspondant à un verre intact : ce dernier nécessite un arrangement précis des atomes et tout départ léger à cet arrangement conduit à le casser. Par conséquent, l'évolution naturelle d'un verre est d'évoluer vers un état cassé, de plus grande entropie. De même si l'on veut recoller un verre (et donc baisser son entropie), cela est quasi-impossible si celui-ci est isolé : il faudrait que spontanément les atomes trouvent l'unique configuration qui corresponde au verre intact parmi toutes celles qui sont associées à un verre brisé. Reconstituer le verre nécessite d'ouvrir le système afin que la baisse d'entropie du verre soit compensée par une augmentation plus globale de l'entropie²⁹².

LA TEMPÉRATURE ET L'ENTROPIE sont souvent associées et à nouveau on retrouve dans cette association la notion d'ordre et de désordre, d'information et de méconnaissance. Pour un gaz parfait confiné dans une enceinte, la température est liée à la dispersion de vitesses des particules le composant : on peut montrer que celle ci est de l'ordre de

$$\sigma \sim \sqrt{k_B T} \quad (403)$$

et la distribution de vitesse des particules suit une loi normale²⁹³ d'écart-type donné par cette dispersion (voir Fig. 62). Si le gaz possède une température élevée, la dispersion de vitesse est importante et par conséquent le spectre des valeurs de vitesses atteignables par une particule est très étendu. A l'inverse, un gaz froid implique une gamme de vitesses accessibles beaucoup plus contrainte. Si on considère que ces gaz chauds et froids sont dans la même cuve (donc dans un volume donné), la portion d'espace des vitesses accessible au gaz chaud est plus grande que celle accessible au froid : le nombre d'états correspondant à un gaz chaud est plus important que celui du gaz froid et possède donc une plus grande entropie. Prenant le point de vue inverse, il est plus difficile de prédire la vitesse d'une particule du gaz chaud que pour celle d'un gaz froid.

292. Par exemple, pour recoller un verre il faut qu'un individu s'attelle à cette tâche. La réflexion de cet individu va nécessairement produire de la chaleur, chaleur qui va globalement augmenter l'entropie

293. type distribution de Maxwell-Boltzmann

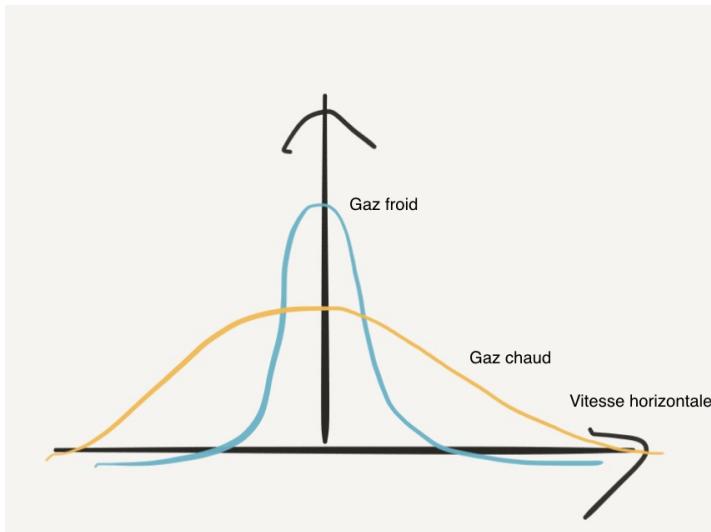


FIGURE 62: Le lien entre la dispersion de vitesse et la température du gaz. En général la distribution des vitesses suit une courbe gaussienne, centrée en zéro (la particule n'a pas choisi si elle va à gauche ou à droite) avec des ailes décroissantes. La température est une mesure de la largeur de la distribution : une grande température est la marque de particules à très grande vitesse.

Par ailleurs, on dispose d'un certain niveau d'information sur ce mélange : si on prend au hasard une particule et que l'on mesure sa vitesse comme étant élevée, on peut sans trop se tromper l'associer au gaz chaud et à l'inverse si sa vitesse est faible, il y a de plus grandes chances qu'elle appartienne au gaz froid. Par conséquent l'évolution naturelle du système est vers une plus grande méconnaissance, vers la thermalisation des deux gaz vers une même température, intermédiaire entre les 2 températures initiales où le mélange devient tiède. Dans ce cas là, il y a une perte d'information : la mesure de la vitesse ne permet plus de distinguer les 2 gaz originaux. C'est aussi pour cela que les 2 gaz n'évoluent pas vers une plus grande différence de température, le froid devenant encore plus froid et le chaud encore plus chaud : cela augmenterait notre capacité à distinguer les 2 gaz en tirant les particules au hasard, en contradiction avec la dégradation de l'information posée par le second principe.

Entropie et perception du temps

L'ENTROPIE AUGMENTE irrémédiablement lorsqu'un système évolue de manière isolée, toutefois cette augmentation peut ralentir voir s'arrêter. Dans ce dernier cas, le système a atteint un état stationnaire ou d'équilibre : cet état macroscopique est le plus probable parmi tous les possibles et possède donc la plus grande chance d'être sélectionné parmi tous ceux accessibles. Un exemple est donné dans la figure 63. La configuration initiale correspond à un gaz confiné à un sous-volume d'une cuve plus grande : l'évolution naturelle du système

va amener le gaz à s'étendre et occuper la cuve dans sa totalité. En supposant que la température du gaz n'évolue pas (et donc que le spectre des vitesses atteignables par les particules reste inchangé), la configuration "cuve remplie" fournit davantage de configurations possibles que lorsque que le gaz est confiné dans une sous-partie : dit simplement le nombre de positions accessibles est plus important lorsque le gaz est étendu. L'entropie de la configuration finale est plus importante que celle de départ.

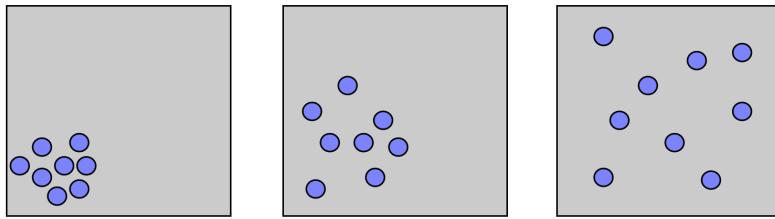


FIGURE 63: Le gaz initialement confiné en bas à gauche remplit peu à peu la cuve. La dernière situation a une entropie plus importante que la première car le nombre de positions accessibles aux particules est plus important. Par contre arrivé à ce stade, l'entropie ne peut plus augmenter de façon significative, on a donc un maximum d'entropie.

Une fois la cuve remplie, le système ne peut cependant plus évoluer et cela correspond à une maximisation des configurations atteignables : le système a atteint un maximum d'entropie. Une représentation schématique de l'évolution temporelle de l'entropie est donnée en figure 64 : au delà d'une durée caractéristique²⁹⁴, $S(t)$ atteint un plateau, autour duquel la valeur peut éventuellement fluctuer mais jamais redescendre. A ce stade, on constate que le temps est une mauvaise mesure de l'évolution du système : le temps change sans que le système n'évolue. A l'inverse, l'entropie donne une meilleure représentation de la réalité physique du gaz : l'entropie stagne de la même manière que le système n'évolue plus. Un observateur regardant ce système qui n'évolue plus pourra légitimement dire que le temps a gelé ou bien que le temps est long, car plus rien ne se passe. Par rapport à ce vécu empirique, il apparaît clairement que l'entropie joue un meilleur rôle de représentation de l'évolution du monde : elle augmente lorsque les choses changent, elle stagne lorsque le monde se fige.

LE TEMPS POSSÈDE UNE DOUBLE NATURE : c'est d'une part une coordonnée, qui nous permet de nous repérer dans l'espace-temps et une mesure de 'distance' qui permet de quantifier le parcours ou le voyage réalisé par un système au cours du temps. Ces deux concepts ne sont pas nécessairement interchangeables et il s'avère que l'on peut se déplacer sans voyager. Par exemple, le voyageur peut arguer du fait qu'un alpiniste ne voyage pas et que son déplacement vertical, tout important qu'il soit sur les plus hauts sommets himalayens par exemple, ne lui permet pas de voir du monde : déplacement et

294. intuitivement cette durée t^* est liée à la taille de la cuve L et à la vitesse caractéristique $\sigma \sim \sqrt{k_B T}$. Avec $t^* \sim L / \sqrt{T}$, on constate que l'équilibre est d'autant plus rapidement atteint que la température est élevée.

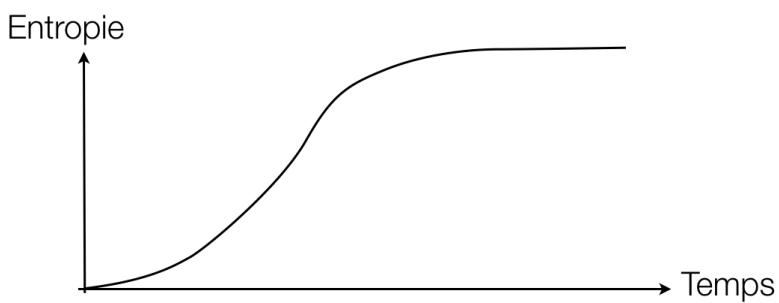


FIGURE 64: Un système peut accéder à un maximum d'entropie, auquel cas il n'évolue plus. Le temps est long, car l'entropie est quasi-constante. À l'inverse la phase où l'entropie varie rapidement traduit un système en évolution rapide, durant laquelle le temps s'écoule rapidement.

voyage ne vont pas forcément de paire. Le temps et l'entropie ont le même type de relation : dans une vision entropique le temps c'est du changement et dans une certaine mesure c'est une définition qui est proche de notre vécu empirique. Lorsqu'il ne se passe rien, le temps s'écoule pas ou peu²⁹⁵. Dans ce régime le temps du chronomètre t , celui qui s'écoule inexorablement, est une piètre mesure de la réalité vécue et dans certaines circonstances on aimerait que le temps passe plus vite : dans ces circonstances, c'est réellement S qui est invoqué, et non pas t . À l'inverse lorsque les systèmes évoluent rapidement, le temps s'écoule rapidement²⁹⁶. Parfois on aimerait plus de temps ou bien l'on explique que le temps passe trop vite : à nouveau ce n'est pas le temps t du chronomètre qui est évoqué ici, mais bien l'entropie S dont on aimerait qu'elle évolue plus lentement.

Entropie et Complexité

ON CONFOND SOUVENT ENTROPIE ET COMPLEXITÉ. L'entropie est une mesure du nombre de configurations correspondant à un état macroscopique donné tandis que la complexité est une mesure du nombre d'informations qu'il faut pour décrire l'état d'un système. La figure 65 illustre la différence entre ces 2 concepts : on y voit le mélange progressif de 2 gaz de couleurs différentes pour aboutir in fine à un ensemble de couleur homogène. Comme vu précédemment, cette évolution implique nécessairement une augmentation de l'entropie : la situation initiale confine chacun des gaz dans un sous-volume et chaque particule dispose d'un ensemble de configurations spatiales limité. Par ailleurs, l'observateur a une bonne connaissance du système : une particule d'une couleur donnée est assignée à un côté donné. Lorsque le mélange procède, la connaissance de l'état du système se dégrade peu à peu : chaque particule a désormais accès à une plus grande portion du volume et dans l'état final, les

295. on dit aussi que l'on trouve le temps long

296. on dit aussi que l'on trouve que le temps passe vite

2 fluides disposent de tout le volume pour s'étendre et donc d'un grand nombre de configurations. Par ailleurs on constate à nouveau une dégradation de l'information puisqu'il est impossible de lier couleur et position.



La complexité évolue différemment et n'évolue généralement pas de manière monotone. Dans l'exemple précédent, les états initiaux et finaux sont globalement 'simples' : l'état macroscopique initial est simple à décrire puisque la position permet de définir la couleur des particules tandis que l'état final l'est encore plus du fait de son homogénéité. L'état intermédiaire en revanche est bien plus difficile à décrire à cause de la zone de mélange : cette zone requiert que l'on établisse un certain nombre de paramètres pour pouvoir être reproduite. Pour cet exemple, la complexité passe par un maximum avant de décroître : l'augmentation de l'entropie nécessite de passer par un pic de complexité. Ce passage par une complexité maximum est souvent la route la plus efficace pour une augmentation de l'entropie. Par exemple la transformation d'une matière première en chaleur passe souvent par l'intermédiaire d'une 'machine' complexe, comme un animal pour de la nourriture ou un moteur pour du carburant.

Désorganisation et complexité sont 2 choses différentes : un système peut être dans un état très désorganisé ou peu contraint sans que sa complexité soit grande. C'est le cas de l'état final de l'exemple de la figure 65 : il est simple à décrire mais pour autant un observateur sait très peu de choses dessus. Sa complexité est faible mais son entropie est élevée.

Entropie et formation des grandes structures

LES LIENS ENTRE COSMOLOGIE ET ENTROPIE sont nombreux et posent parfois problème. Le plus fameux d'entre eux est l'impression que l'Univers s'organise au cours du temps : durant les premiers instants, le cosmos est par exemple peu structuré et la marche du temps s'accompagne de la mise en place d'objets de plus en plus complexes tels que les étoiles, les galaxies et les amas. Le mécanisme d'instabilité gravitationnelle²⁹⁷ donne ainsi l'apparence d'une organi-

FIGURE 65: Représentation schématique du mélange de 2 gaz. L'entropie va augmenter de gauche à droite tandis que la complexité va passer par un maximum, correspondant à l'état intermédiaire. La présence d'une interface complexe, rend la complexité globale de cette étape très importante. La dernière situation est simple (peu complexe à décrire) mais par contre son entropie est maximale.

²⁹⁷. étudiée en détail dans la section dédiée

sation croissante des objets en contradiction apparente avec le second principe de la thermodynamique.

Cette contradiction n'est bien sûr qu'apparente et peut être levée de plusieurs façons. Par exemple, on peut aisément invoquer le fait que le processus qui va transformer un nuage de gaz en galaxie n'est pas gratuit. Comme vu précédemment, une galaxie ne peut se mettre en place que si elle parvient à atteindre des densités très élevées²⁹⁸. Or l'énergie interne du gaz (liée à sa pression) s'oppose à ce que de telles densités soient atteintes et cela n'est possible qu'en évacuant cette énergie hors du gaz : dans l'Univers cette évacuation opère via des processus atomiques ou moléculaires qui convertissent l'énergie cinétique microscopique en rayonnement. Ce rayonnement emporte cette énergie et permet d'atteindre les densités à même de mettre en place des galaxies ou de la formation stellaire en leur sein. Ce processus est producteur d'entropie : des particules (atomes/molécules) en génèrent d'autres, les photons, et parfois en grand nombre. Cette évacuation d'énergie²⁹⁹, que l'on désigne également par le terme de *refroidissement*, fait grandir le nombre de configuration possible accessible par le système par simple production de particules : en augmentant leur nombre, le système augmente le nombre de degrés de libertés et donc son entropie. Par ailleurs les photons occupent naturellement un grand volume, augmentant d'autant le nombre de configurations possibles pour un état macroscopique donné. Pour s'organiser, un sous-ensemble de particules (les atomes) vont désorganiser l'ensemble en produisant un grand nombre de particules supplémentaires (le rayonnement).

Mentionnons toutefois que ce type de mécanisme où l'entropie est générée en évacuant l'énergie vers l'extérieur n'est pas limitée à des processus baryoniques. Pour des systèmes stellaires comme les amas globulaires, où les constituants n'interagissent que via la gravitation, on trouve également des processus similaires comme la *catastrophe gravothermale*. Cette dernière consiste en l'effondrement d'un cœur associé à l'expansion d'une enveloppe dans un système non-collisionnel. Dans ce processus l'énergie gravitationnelle libérée par l'effondrement interne va profiter aux couches externes et générer de l'entropie. De même lors de la virialisation d'un halo, l'effondrement sphérique va 'thermaliser' et redistribuer les orbites des particules de matière noire : initialement toutes ces orbites sont radiales (forte information sur la dynamique, faible entropie) et vont évoluer en un comportement beaucoup plus thermique et désordonné (donc difficile à connaître, forte entropie) après la mise à l'équilibre.

En résumé la complexité croissante des structures apparaît de prime abord comme en contradiction avec le second principe : toutefois, cette complexité s'accompagne dans tous les cas d'une produc-

298. typiquement plusieurs milliers de fois la densité moyenne globale

299. voir le chapitre dédié à la formation des petites structures

tion d'entropie. De plus cette complexité ne peut devenir arbitrairement grande : les petites étoiles s'arrêtent et refroidissent, l'expansion accélérée créée par la constante cosmologique va supprimer les interactions entre galaxies, les planètes vont cesser de produire de la chaleur³⁰⁰, etc... : ces quelques exemples sont autant d'illustration de la *mort thermique* qui attend l'Univers. Cette mort thermique désigne cet état futur où l'entropie ne sera plus en mesure de croître indéfiniment, conduisant de fait à un état d'équilibre de l'Univers. Dans cet Univers, il ne se passe plus rien, l'entropie stagne.

Le défi de l'entropie actuelle

L'ENTROPIE ACTUELLE DE L'UNIVERS EST BASSE. Par définition, elle fut encore plus basse dans le passé mais comparée à ce qu'elle pourrait être, l'entropie actuelle de l'Univers se trouve à de très faibles niveaux³⁰¹. Par conséquent le potentiel d'évolution de l'Univers est grand et se pose naturellement la question *pourquoi l'entropie actuelle est-elle si basse ?* En effet, imaginons que l'Univers que nous connaissons soit le fruit d'un tirage de lois, paramètres physiques, géométries, etc... parmi tous les ensembles disponibles : normalement, un tel tirage doit naturellement tomber sur les états macroscopiques les plus représentés, les plus probables, donc ceux avec l'entropie la plus forte possible. Dit autrement l'Univers aurait eu toutes les raisons d'avoir une capacité d'évolution faible, avec une entropie élevée, si il avait été choisi par hasard ce qui est la définition même de la *perfection* à savoir un système *qui n'a pas besoin de changer*. Or ce n'est pas le cas, notre Univers n'est pas parfait.

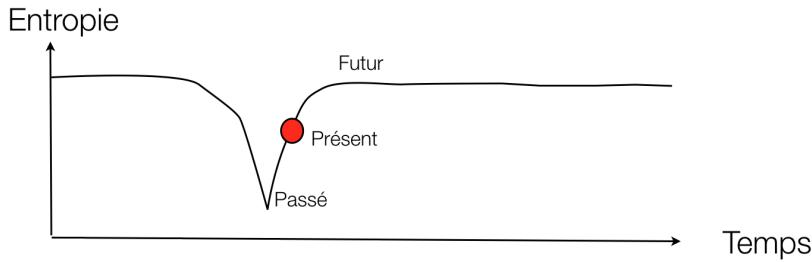
Ce genre de questionnement amène généralement 2 types de réponses : l'entropie est basse du fait d'un mécanisme ou du fait de conditions initiales. Si c'est le fait de conditions initiales, la question est close et le potentiel d'évolution de notre Univers fait partie de ses propriétés intrinsèques au même titre par exemple que les paramètres cosmologiques. Bien que possible, cette hypothèse nous intéresse peu et la tentation est grande d'essayer de trouver un mécanisme qui produit naturellement une entropie basse aux premiers instants.

Il existe un mécanisme simple et non exotique qui permette d'expliquer une entropie initiale basse : ce mécanisme repose sur la nature statistique des quantités macroscopiques. Lorsque qu'un système évolue son entropie augmente : cette affirmation doit s'entendre de façon statistique. L'entropie est une quantité qui est définie de façon statistique via par exemple sa valeur moyenne ou son écart-type : sa valeur moyennée sur une certaine durée va augmenter inexorable-

300. cette production est régie par la présence d'éléments radioactifs qui finissent par s'épuiser, cf. Venus ou Mars qui ne possèdent plus d'activité interne.

301. on peut évaluer l'entropie maximale atteignable par l'Univers et mettant tout son contenu dans un trou noir. L'information ne sort pas de l'objet, la méconnaissance et donc l'entropie est maximale. On en est très loin.

ment dans un système en évolution tout en fluctuant sur des échelles de temps plus courtes. A un instant donné, un système peut voir son entropie baisser ponctuellement avant de reprendre sa croissance³⁰². On peut imaginer que l'entropie basse de l'Univers fut générée par ce type de fluctuations : l'Univers aurait été dans un état de 'pseudo-équilibre' avec une entropie constante sur des temps longs et une fluctuation accidentelle et suffisamment grande aurait octroyé à notre Univers un potentiel d'évolution.



302. nous l'avons vu dans notre exemple simple à base de boules colorées : il est possible de retourner à une situation où les couleurs sont séparées, même si cela est moins probable que de rester dans une situation désordonnée

FIGURE 66: La possibilité d'une fluctuation d'entropie pour expliquer le démarrage de notre Univers. Passé et futur correspondent aux époques où l'entropie était respectivement basse et haute : le Big-Bang serait le résultat d'une fluctuation d'entropie sur une situation globale où cette entropie est constante.

Ce scénario a des implications profondes. Dans un premier temps, le point de départ de l'évolution de notre Univers est par définition le Big Bang : l'instant où cette fluctuation opère correspond donc au début de cette évolution et le Big Bang trouve son origine dans une fluctuation statistique. Par ailleurs, ce scénario suggère que nous sommes dans une phase anormale, précédée et suivie par des états d'équilibres stables qui correspondent aux vrais états naturels de notre Univers : la physique à l'œuvre autour de nous ne serait que la manifestation d'un retour à la normale durant une phase transitoire.

MALHEUREUSEMENT CE SCÉNARIO SOUFFRE D'UN PARADOXE. A titre d'exemple, rappelons la définition de l'entropie S dans le cas micro-canonical :

$$S = k_B \log \Omega, \quad (404)$$

où Ω désigne le nombre de configurations accessibles pour un état macroscopique donné. Le nombre de configurations correspondant à une valeur d'entropie donnée est :

$$\Omega = e^{S/k_B}. \quad (405)$$

Par conséquent, toute fluctuation sur l'entropie est démultipliée exponentiellement et si on compare 2 fluctuations d'entropie d'amplitudes différentes, elles conduisent à des nombres de configurations qui sont *exponentiellement* différentes : 2 états microscopiques d'entropies légèrement différentes peuvent correspondre à 2 états de probabilités qui n'ont rien à voir³⁰³. Une fluctuation d'entropie pro-

303. on comprend aisément qu'un macro-état à grand nombre de configurations est plus probable qu'un autre à moins de configurations disponibles

fonde est donc particulièrement difficile à produire et toute fluctuation d'amplitude intermédiaire est bien plus aisée à mettre en place : l'amplitude de la fluctuation nécessaire à l'évolution constatée autour de nous est de fait quasi-impossible à générer. Souvent on illustre cette difficulté par le *paradoxe des cerveaux de Boltzmann* : il est possible que l'Univers tel que nous l'observons soit le fruit d'une sensation ressentie par un cerveau flottant dans le cosmos. Soit un Univers chaotique, rempli de particules : il est bien plus probable que ces particules s'arrangent brièvement sous la forme de ce cerveau avec ses propres sensations plutôt qu'elles s'organisent par hasard de façon à créer les conditions qui vont être amenée à créer des étoiles, avec des planètes qui hébergent la vie, vie qui va produire une intelligence en mesure d'étudier le cosmos... Rationnellement, ce cerveau flottant a bien plus de chances refléter la réalité du monde que le second scénario. Bien sûr, cette conclusion est insupportable et de fait probablement fausse mais elle est inévitable si l'évolution de l'Univers constatée est le fruit d'une fluctuation statistique.

Pour conclure, nous n'avons pas actuellement d'explication simple et satisfaisante concernant la faible valeur initiale de l'entropie cosmique et par extension pour la mise en route de notre Univers en train d'évoluer. Des mécanismes exotiques sont néanmoins proposés, sans validation observationnelles à ce jour : par exemple, notre Univers est peut-être en communication avec d'autres Univers³⁰⁴, permettant au nôtre d'avoir une entropie faible en augmentant celles des autres cosmos³⁰⁵. Ou bien il s'agit simplement d'un tirage favorable des paramètres de notre cosmos, dont une valeur initiale de l'entropie faible : rappelons que cela fait de notre Univers un monde imparfait, obligé d'évoluer, là où un monde 'parfait' pourrait rester statique du fait de sa perfection initiale. Cet Univers idéal aurait eu des temps caractéristiques d'évolution très longs, durant lesquels rien n'évolue, rien ne se passe ou presque. Et rappelons également qu'une entropie élevée, parfaite, correspond aux configurations les plus nombreuses, les plus probables : nous l'avons échappé belle.

304. on parle aussi de *multivers*

305. à la manière de réservoirs de gaz en communication

L'Inflation

L'**INFLATION** désigne une phase de l'histoire de l'Univers durant laquelle l'espace aurait rapidement 'enflé', avec des taux d'expansion exponentiels. Cet épisode aurait pris place environ 10^{-34} secondes après le Big-Bang et a été suggéré à partir des années 1980 pour expliquer toute une série de défis qui se posent quant à l'état de l'Univers tel que nous l'observons. L'époque Inflationnaire reste pour l'instant une hypothèse non vérifiée expérimentalement mais pour laquelle existe tout un faisceau de présomptions.

Pourquoi l'Inflation ?

Le problème de l'Horizon de causalité

LE PRINCIPE COSMOLOGIQUE repose sur une hypothèse d'homogénéité de l'Univers et cette homogénéité n'est pas remise en question aujourd'hui par les observations. L'une des manifestations les plus spectaculaire de cette homogénéité est la température du fond diffus cosmologique : comme expliqué dans le chapitre dédié, le fond diffus cosmologique présente une température typique $T \sim 2.7\text{K}$ à un très haut niveau de précision (à 10^{-5} près) et ceci quelle que soit la direction vers laquelle on regarde³⁰⁶.

Des anisotropies existent mais elles sont noyées dans l'amplitude du signal du monopole : on peut citer l'empreinte des oscillations baryoniques acoustiques, déclenchées par la compétition entre gravité et pression de rayonnement, qui produisent ces grands pics dans le spectre de puissance angulaire du fond diffus. En particulier, les plus grandes échelles angulaires associées à ces ondes acoustiques sont de l'ordre du degré sur le ciel³⁰⁷. Cette échelle angulaire correspond à *l'horizon sonore* aux époques de l'émission du fond diffus : cet horizon est la plus grande distance qui peut être parcourue à la vitesse du son dans les conditions qui régnait dans l'Univers à ces époques. Cette vitesse du son est régie par la pression du rayonnement et est

^{306.} on rappelle que c'est cette isotropie qui intrigua Penzias & Wilson lors de leur découverte du signal en 1964

^{307.} correspondant à une fréquence angulaire $\ell \sim 1000$

de l'ordre de :

$$c_s \sim \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (406)$$

tandis que l'horizon peut être approximé par :

$$L_H \sim \frac{c_s}{H} \quad (407)$$

On constate donc aisément que l'horizon sonore est proche de l'horizon causal, déterminé lui par la vitesse de la lumière³⁰⁸.

Nous avons donc une surface de dernière diffusion qui est isotrope à un très haut niveau de précision *sur toute la sphère céleste* tandis que les échelles de longueurs en contact causal (donc de tailles inférieures à l'horizon) sont particulièrement ramassées. Par conséquent, on ne peut pas trouver de processus physiques qui soit en mesure de propager une information sur tout le ciel 380 000 ans après le Big-Bang : cette homogénéité et isotropie ne peut trouver son origine dans un mécanisme physique qui aurait établi ces propriétés sur ces très grandes échelles sans lien causal.

308. bien sûr, c étant la plus grande vitesse accessible, l'horizon causal est la plus grande distance sur laquelle information peut se propager

DEUX POSSIBILITÉS s'offrent à nouveau : cette isotropie est une condition initiale, particulière mais établie sans raison aucune ou bien cette isotropie est le fruit de la propagation d'un signal physique mais sur des échelles plus faibles que celles sur lesquelles l'isotropie est aujourd'hui observée. L'*Inflation* intervient dans ce second scénario : une théorie de l'*Inflation* stipule que l'on ne peut extrapoler l'histoire d'expansion de l'Univers vers le Big-Bang à partir de son contenu actuel et donc de sa dynamique actuelle. Il faut invoquer un épisode où le paramètre d'expansion $a(t)$ connaît une variation soudaine, faisant traverser l'horizon à des échelles initialement en lien causal. L'idée est simple : les plus grandes échelles observées sur le ciel étaient sous l'horizon avant l'épisode Inflationnaire et sont passées hors-horizon après ce dernier.

La figure 67 illustre les possibilités ouvertes par une période d'*Inflation*. Pendant les périodes d'expansion 'normale', la taille physique de l'horizon est donnée par :

$$L_H = \frac{c}{H} = a^p \quad (408)$$

avec $p = 2$ durant l'époque de domination du rayonnement puis $p = 3/2$ durant l'époque de domination de la matière. De même une distance donnée L évolue sous l'effet de l'expansion exactement comme le facteur d'échelle, $L \sim a$. Par conséquent, au cours du temps, un mode de taille comobile donnée va d'abord être plus grand que l'horizon puis plus petit que l'horizon : un mode plus grand que l'horizon à un instant donné l'était forcément dans des temps antérieurs, des régions sans lien causal dans le CMB ne l'ont jamais été

dans les 380 000 années précédentes. Il faut donc trouver un processus qui sortent ces régions du lien causal, comme l’Inflation, et qui ne peut correspondre à une phase d’expansion normale.

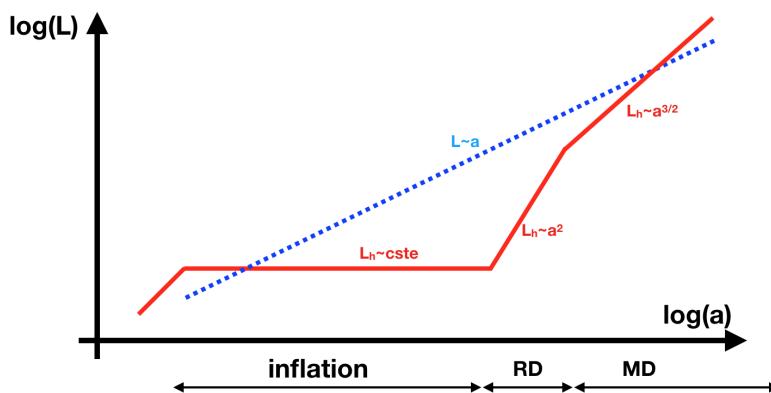


FIGURE 67: Histoire d’évolution de quelques logeurs physiques au cours du temps. L_h désigne l’horizon, dont la taille physique est constante durant l’Inflation, tandis que L désigne la taille physique d’un mode de taille comobile donnée. RD et MD désigne les périodes de domination du rayonnement et de la matière, respectivement.

Compte tenu des échelles en jeu³⁰⁹, cette Inflation doit impliquer des croissances gigantesques. On verra par la suite que les distances doivent s’accroître typiquement d’un facteur 10^{30} .

Le problème de la platitude

LA GÉOMÉTRIE DE L’UNIVERS EST PLANE en moyenne et sur des distances cosmologiques. Dans une telle géométrie, la lumière se propage en ligne droite et la somme des angles d’un triangle fait 180 degrés : comme expliqué dans le chapitre dédié, la taille angulaire des oscillations baryoniques acoustiques mesurée dans le fond diffus à $z \sim 1100$ ou dans les grands relevés de galaxies à $z \sim 0$ est hautement compatible avec ce type de géométrie. Un Univers sphérique a tendance à surestimer ces tailles angulaires, un Univers hyperbolique à les sous-estimer et de fait la réalité terrain semble indiquer que le régime à l’œuvre est exactement entre ces deux situations.

Tout comme le problème de la causalité, le fait d’avoir une géométrie plane peut soit être le fruit d’un mécanisme qui aurait aplati une géométrie arbitraire ou bien la conséquence d’un choix particulier de conditions initiales. A nouveau cette seconde option n’est pas entièrement satisfaisante : en effet le départ à la platitude peut s’exprimer via³¹⁰

$$|1 - \Omega| = \frac{k}{a^2 H^2} \sim t \quad (409)$$

où la dernière approximation suppose un Univers dominé par le rayonnement comme c'est le cas dans un Univers très jeune³¹¹. On

309. on rappelle que l’isotropie est observée sur toute la surface de dernière diffusion, dont le rayon est de l’ordre de plusieurs Gpc

310. en utilisant l’équation de Friedmann

311. on rappelle que dans ce régime $a(t) \sim \sqrt{t}$ et $H(t) \sim a^{-2}$

constate aisément que $1 - \Omega$ tend à s'écartez de zéro avec le temps, donc si l'Univers possède une géométrie plane aujourd'hui, sa platitude devait être encore plus affirmée dans le passé : en supposant par exemple que Ω est de l'ordre de l'unité à l'unité près aujourd'hui alors :

$$\Omega(t = 13.8\text{Gyrs}) \sim \mathcal{O}(1) \rightarrow |1 - \Omega(t = 180\text{sec})| \sim \mathcal{O}(10^{-16}). \quad (410)$$

où 180 secondes correspond à la nucléosynthèse primordiale et le problème va en s'accentuant si l'on s'approche du Big-Bang. Dès lors, il est difficile d'imaginer un tirage aléatoire de ce paramètre qui soit si proche de l'unité dans ces instants reculés. En proposant une augmentation exponentielle des distances, l'*Inflation* fournit naturellement *un mécanisme* pour gommer toute sorte de courbure : l'Univers était peut-être doté d'une courbure non-nulle à une époque reculée mais l'*Inflation* aurait fait tendre toute courbure initiale non nulle vers zéro. Tout rayon de courbure raisonnablement non nul verrait sa valeur augmenter d'un facteur 10^{30} , donnant l'apparence d'une géométrie plane.

L'origine des fluctuations cosmiques

LES GRANDES STRUCTURES DE L'UNIVERS trouvent leur origine dans l'existence de fluctuations dans la distribution spatiale de la densité d'énergie (ou de matière). Ces fluctuations sont observées à de très faibles niveaux dans le fond diffus cosmologique³¹² et ce sont ces 'graines' qui servent de point d'ancre au processus d'instabilité gravitationnelle. Sans ces fluctuations, pas de structures dans l'Univers actuel.

Comme indiqué précédemment, on attend d'une période Inflationnaire qu'elle conduise à un accroissement des échelles de longueurs d'un facteur $\sim 10^{30}$. Si l'on prend une structure de taille 10 Mpc aujourd'hui, un tel facteur conduit à une taille initiale de l'ordre de 10^{-8} m , c'est à dire des échelles soumises à des processus quantiques. Par conséquent, on peut imaginer que les structures observées aujourd'hui sont le fruit du passage à l'échelle macroscopique de fluctuations quantiques, par le biais de l'*Inflation*.

De façon générique, ces fluctuations quantiques sont invariantes d'échelles : il n'existe pas de taille caractéristique dont on attend qu'elle domine 'le bruit' de fluctuations. Les spectre de puissance des fluctuations attendues ne doit pas présenter d'échelle particulière et l'une des prédictions générale des modèles d'*Inflation* est la mise en place de fluctuations dont le spectre de puissance est une simple loi de puissance :

$$P_{\text{Inflation}} \sim k^n \quad (411)$$

^{312.} à des niveaux relatifs de 10^{-5}

où n est entier proche de l'unité.

Les particules reliques

UN PROBLÈME PLUS SUBTIL posé par le modèle d'expansion standard est l'absence aujourd'hui de certaines certaines particules dont la production est pourtant prédictive dans un Univers dense et chaud. C'est le cas par exemple des *monopôles magnétiques*, qui seraient des analogues aux charges électriques³¹³ et il n'existe pas à priori de raisons pour que ces particules 'magnétiques' soient indétectables dans notre Univers. En particulier, leur contribution au bilan énergétique de l'Univers aurait pu, au pire, dominer celle du rayonnement³¹⁴. On cite également souvent les axions ou bien les défauts topologiques, qui souffrent de la même absence aujourd'hui. L'Inflation fournit un mécanisme permettant de faire 'disparaître' ces objets : si ces objets sont produits avant une phase d'Inflation rapide, alors cette phase va provoquer une dilution extraordinaire de leurs abondances.

Modèles d'Inflation

Cherchons à présent à développer un modèle plus quantitatif de l'Inflation. Le point de départ naturel est lié au problème de la platitude de l'Univers : pour mémoire les densités d'énergies des différents fluides cosmiques³¹⁵ sont liées par

$$|1 - (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v)| = |\Omega_k| = \frac{|k|}{a^2 H^2}, \quad (412)$$

où k est lié à la courbure intrinsèque de l'Univers. L'objectif de l'Inflation est de faire tendre Ω_k vers zéro, pour aplatisir la géométrie de l'Univers : idéalement cela peut s'obtenir en augmentant le facteur d'échelle a de façon importante tout en empêchant $H(a)$ de diminuer. Il s'avère que nous avons déjà rencontré ce type de comportement, dans le cas d'un Univers dominé par l'énergie du vide à densité d'énergie constante³¹⁶ et pour lequel nous avions une expansion accélérée avec $H(a)$ constant. Les modèles d'Inflation vont invoquer le même type de comportement, à savoir :

$$a(t) \sim \exp Ht \quad (413)$$

$$H(a) = \text{constante}. \quad (414)$$

Par conséquent, les modèles d'Inflation vont reposer sur une densité d'énergie constante, comme nous l'avions rencontré dans le cas de l'énergie du vide. La difficulté toutefois est le fait que l'Inflation a une durée finie, circonscrite aux premiers instants de l'histoire de

313. ces monopôles magnétiques seraient en mesure de créer des champs magnétiques divergents ou convergents ($\vec{\nabla} \vec{B} \neq 0$). Aujourd'hui seuls les courants de charges électriques sont en mesure de générer un tel champ, configuré en 'boucles de champs magnétiques' ($\vec{\nabla} \vec{B} \neq 0$).

314. la densité d'énergie des reliques décroît en a^{-3} tandis que celle du rayonnement décroît en a^{-4} .

315. matière non-relativiste, matière relativiste, vide

316. la constante cosmologique Λ

l'Univers : il faut donc que le mécanisme garantisse aussi la disparition de cette densité d'énergie Inflationnaire, pour que l'expansion puisse retrouver son comportement standard.

Ce type d'expansion permet de revisiter le problème de l'horizon mentionné précédemment et illustré dans la figure 67. Durant la période d'Inflation, l'horizon possède une taille physique constante :

$$L_H = \frac{c}{H} = \text{constante.} \quad (415)$$

Par conséquent, un mode de taille comobile donnée peut être successivement plus petit que l'horizon, puis plus grand au cours de l'Inflation et éventuellement redevenir plus petit ultérieurement. Des régions sans lien causal au moment de leur observation ont ainsi pu être en contact causal antérieurement.

L'inflaton

LES MODÈLES STANDARDS D'INFLATION reposent sur la description d'un *champ physique* appelé *l'inflaton*. Un champ physique est défini en tout point de l'espace et du temps et peut sous certaines conditions être amené à se manifester sous formes de particules : c'est par exemple le cas du champ électromagnétique qui peut se manifester sous la forme de photons et de la même manière les électrons sont la manifestation d'un champ physique sous-jacent³¹⁷. Ces champs peuvent être scalaires, vectoriels voire tensoriels : cela définit notamment la façon dont leur perception est modifiée en fonction du système de référence utilisé.

Les modèles d'Inflation reposent sur l'inflaton qui est généralement décrit sous la forme d'un champ scalaire, dont la valeur ne change pas sous l'effet d'un changement de système de référence et dans un Univers homogène, sa valeur ne peut dépendre de la position. Ce champ scalaire, qui remplit tout le cosmos, est noté $\phi(t)$. Ce champ, quantique, va créer les fluctuations d'énergie et de densité initiales et va imprimer des irrégularités, y compris sur un Univers parfaitement homogène à ses débuts. On peut également montrer que l'inflaton va imprimer des fluctuations tensorielles sur la métrique de l'espace-temps, qui se manifestent sous la forme d'ondes gravitationnelles primordiales.

Comment décrire l'évolution de ce champ ? La façon naturelle proposée par la théorie quantique des champs est d'associer à l'inflaton un potentiel qui dépend de sa valeur $V(\phi)$: ce potentiel associe une énergie à la valeur du champ et ce champ évolue dans ce potentiel comme dans une énergie potentielle. Par exemple, ce champ va dévaler les pentes du potentiel vers son minimum ou bien osciller dans

³¹⁷. par exemple c'est parce que les électrons sont issus d'un champ unique qu'ils sont strictement indistinguables (masse, charge...) les uns des autres, alors que normalement toute production d'origine physique devrait induire des variations dans ces propriétés.

des vallées de potentiels ou bien rester en équilibre sur les extrema de $V(\phi)$ ³¹⁸. On peut également montrer que la densité d'énergie et la pression de l'inflaton sont données par³¹⁹

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (416)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (417)$$

(418)

Ces expressions peuvent être réutilisées par exemple dans les équations de Friedmann pour calculer l'expansion associée à ϕ . Par exemple on peut montrer que le paramètre de Hubble évolue selon³²⁰ :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (419)$$

De même on peut écrire l'équation de conservation de la densité d'énergie associée :

$$\dot{\rho}_\phi = -3H\rho_\phi - 3Hp_\phi \quad (420)$$

qui explicite simplement que la variation d'énergie au cours du temps est due à la dilution cosmologique (premier terme du membre de droite) et au travail des forces de pression (second terme du membre de droite). En terme d'inflaton, cette équation de conservation devient :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (421)$$

318. de façon tout à fait analogue à la dynamique d'un système dans le champ énergie potentielle

319. on adopte ici le choix d'unité habituel de la théorie des champs qui permet d'écrire $c = \hbar = 1$

320. voir le chapitre dédié à l'Univers homogène

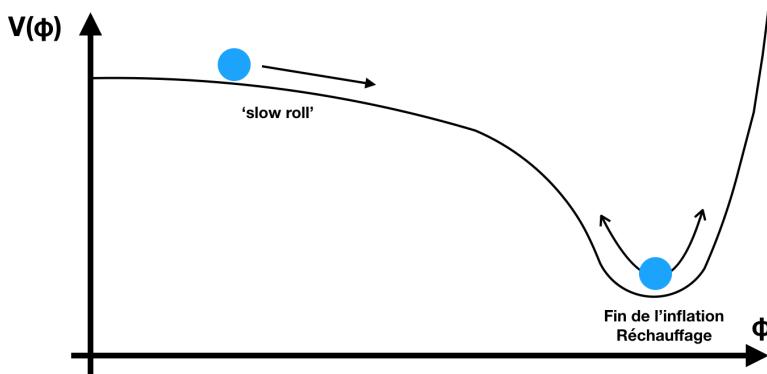


FIGURE 68: Un exemple de potentiel possible pour l'inflaton. On distingue 2 phases. D'abord une phase où le potentiel est très plat et durant laquelle l'inflaton 'roule' doucement pour produire une phase d'expansion exponentielle. Dans un second temps, l'inflaton se trouve piégé dans un puits de potentiel, stoppant l'Inflation et durant laquelle l'énergie libérée est réinjectée dans les autres composantes du cosmos (le réchauffage).

LE POTENTIEL DE L'INFLATON doit donc être choisi avec précaution pour que l'Inflation associée ait les bonnes propriétés. Par exemple, on veut un comportement similaire à celui de l'énergie du vide, pour

laquelle nous avions $p = -\rho$: au vu des expressions obtenues pour ρ_ϕ et p_ϕ cela est possible si le champ scalaire varie lentement

$$\rho_\phi \sim -p_\phi \leftrightarrow \dot{\phi} \sim 0. \quad (422)$$

Or d'après l'équation de conservation précédente, une variation lente de ϕ n'est possible que si le potentiel $V(\phi)$ est suffisamment 'plat' pour que l'inflaton puisse 'rouler' lentement le long de sa pente. On parle de condition de *slow-roll*, condition qui doit être satisfaire par $V(\phi)$ pour que l'Inflation ait lieu. Mathématiquement, on souhaite donc que le potentiel ait une pente et une courbure aussi faible que possible :

$$|V'(\phi)| \equiv \left| \frac{dV}{d\phi} \right| \ll 1 \quad (423)$$

$$|V''(\phi)| \equiv \left| \frac{d^2V}{d\phi^2} \right| \ll 1. \quad (424)$$

De plus, l'Inflation doit s'arrêter à un moment et d'après l'équation 419 on constate que cela peut s'obtenir si le champ reste bloqué au minimum du potentiel : on a alors $V(\phi) \sim 0$ et $\dot{\phi} \sim 0$. Il faut donc que le champ 'roule' lentement vers le minimum du potentiel.

Pour finir, l'Inflation va drastiquement diminuer les densités d'énergie de toutes les composantes autres que le l'inflaton (matière, rayonnement, etc...) et pourtant l'une des conditions d'un modèle d'Inflation satisfaisant est qu'il puisse se raccrocher à un modèle de Big-Bang chaud standard une fois la phase d'expansion exponentielle terminée. Pour ce faire, l'Inflation doit s'accompagner d'une phase de *réchauffage*, durant laquelle, l'énergie de l'inflaton se déverse dans les réservoirs des autres composantes : on peut montrer par exemple que ce processus de réchauffage opère lorsque l'inflaton oscille au fond du puits créé par le minimum de $V(\phi)$.

En résumé, il existe tout un ensemble de potentiels pouvant satisfaire ces conditions et l'un des objectifs de la cosmologie de l'Inflation est précisément de déterminer quel $V(\phi)$ est effectivement à l'œuvre si l'Inflation a bien eu lieu.

Quelques contraintes

Si toutes ces conditions sont satisfaites alors $H = \dot{a}/a \sim \text{constante}$ et l'expansion est quasi exponentielle. L'ensemble des problèmes mentionnés en début de chapitre sont résolus si le facteur d'échelle augmente d'un facteur 10^{30} entre le début et la fin de l'Inflation³²¹ :

$$a_f \sim 10^{30} a_i. \quad (425)$$

Ceci permet de mettre une contrainte sur le potentiel de l'inflaton.

Ayant $H = \dot{a}/a$, nous avons ainsi³²² :

321. ici i et f désignent respectivement les instants initiaux et finaux

322. en utilisant l'équation de conservation de la densité d'énergie en approximation de 'slow-roll'

$$\log \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} H dt \sim \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (426)$$

et au vu de l'expansion souhaitée (10^{30} ici), la pente relative du potentiel est ainsi contrainte.

Par ailleurs, le modèle d'Inflation permet de prédire l'amplitude du spectre de fluctuations de densités, toujours en fonction de la forme du potentiel :

$$\delta_k \sim \left(\frac{V^{3/2}}{|V'|} \right)_{k=aH/c}. \quad (427)$$

L'amplitude du mode k est ainsi déterminée par la valeur du potentiel au moment où le mode sort de l'horizon durant l'Inflation.

L'observation des fluctuations de densité, par exemple dans le CMB, permet de contraindre davantage la forme du potentiel de l'inflaton, ainsi que les valeurs typiques d'énergies associées. Par exemple l'amplitude mesurée des fluctuations du CMB indique que $V^{1/4} \sim 10^{16}$ GeV, bien au delà des énergies accessibles par les accélérateurs terrestre : cela confirme davantage que l'étude de l'époque de l'Inflation permettrait d'accéder à des régimes de physiques bien plus extrêmes que ceux auxquels nous sommes habitués.³²³ En terme d'époques, cela nous place entre 10^{-36} et 10^{-30} secondes après le Big-Bang.

Grâce à cette relation le modèle d'Inflation permet de prédire la pente du spectre primordial, invariant d'échelle, de fluctuations de densité :

$$\delta_k^2 \sim k^n \quad (428)$$

et on peut montrer que

$$n \sim 1 - \epsilon - \eta \quad (429)$$

où $\epsilon \sim (\frac{V'}{V})^2$ et $\eta \sim \frac{V''}{V}$ qui par condition de 'slow-roll' sont de petites valeurs. A nouveau, la mesure de ce spectre dans par exemple les fluctuations du CMB permet de contraindre la forme du potentiel de l'inflaton. On note que la pente du spectre, n est proche de 1 mais différente de l'unité et les mesures du satellite Planck indique par exemple une valeur de $n \sim 0.97$, ce qui est cohérent avec les prédictions du modèle d'Inflation.

Enfin, l'Inflation va aussi générer un train d'ondes gravitationnelles primordiales : ces ondes ne vont pas affecter la croissance des structures mais peuvent se manifester dans les propriétés du fond diffus cosmologique³²⁴. On peut montrer que le rapport d'amplitude entre les fluctuations de densité et ces ondes gravitationnelles est donné par

$$R \sim \epsilon. \quad (430)$$

Comme vu précédemment ϵ est faible devant l'unité, impliquant que ces ondes gravitationnelles sont intrinsèquement difficiles à

^{323.} pour référence les énergies actuellement obtenues au LHC (CERN) sont de l'ordre de 10^4 GeV et celles mesurées pour les rayons cosmiques les plus énergétiques sont de l'ordre de 10^{11} GeV.

^{324.} notamment dans les cartes mesurant la polarisation du rayonnement

mesurer, sans même considérer les difficultés pratiques qu'implique leur détection. La mesure de ces ondes constituent néanmoins un grand défi de la cosmologie future et dans la validation du modèle d'Inflation : ce modèle, quel que soit la forme du potentiel d'inflaton choisi, prédit une relation univoque entre l'amplitude de ces ondes et la forme du spectre de fluctuation :

$$R = -2\pi n_G \quad (431)$$

où $A_k \sim k^{n_G}$ est le spectre des ondes gravitationnelles de l'Inflation. La confirmation (ou l'invalidation) de cette relation serait une étape essentielle pour établir l'Inflation comme étant la bonne solution à tous les problèmes mentionnés en introduction et comme étant la bonne description des processus à l'œuvre dans l'Univers à ses débuts. C'est l'un des grands défis de la cosmologie du futur.

La Réionisation

Chronologiquement parlant, l'époque de Réionisation désigne la dernière grande transition cosmologique vécue par l'Univers. Ce terme de Réionisation désigne la période durant laquelle le gaz d'hydrogène du milieu intergalactique³²⁵ retourne pour l'essentiel à l'état ionisé alors qu'il avait pourtant recombinié lors de l'émission du fond diffus cosmologique. Cette période prend place environ 1 milliard d'années après le Big-Bang³²⁶, et est le produit de l'apparition des premières sources de lumières astrophysiques. Avec la naissance de ces premières sources au sein des précurseurs des galaxies actuelles, la Réionisation marque ainsi le début de l'astrophysique non-linéaire, complexe.

Chronologie de la Réionisation et propriétés globales

Environ 380 000 ans après le Big-Bang, la Recombinaison laisse place à un Univers rempli d'hydrogène neutre qui va refroidir sous l'effet de l'expansion. Cette période est désignée sous le terme 'd'âges sombres' car l'Univers est rempli de gaz n'ayant pas encore réussi à former les premières sources de rayonnement. Ces dernières apparaissent quelques centaines de millions d'années après le Big-Bang³²⁷ : on compte parmi ces sources les premières étoiles et les premiers noyaux actifs de galaxies, dont le moteur central est un trou noir supermassif en accrétion.

Ces sources de rayonnement vont produire entre autre du rayonnement ultra-violet, capable d'ioniser l'hydrogène cosmique, dont l'énergie de liaison vaut 13.6 eV. Chaque source va alors se voir entourée d'une région ionisée, une 'bulle' appelée région HII. Sous l'apport continu de photons ionisants par les sources, ces bulles vont grandir et compte tenu de l'apparition de plus en plus de sources, ces bulles vont devenir de plus en plus nombreuses. In fine, un réseau de région HII va s'établir puis percoler pour conduire à un Univers totalement ionisé, environ 1 milliard d'années après le Big-Bang. Après cette transition, la fraction résiduelle d'atomes neutres est de l'ordre de 0.01%.

^{325.} on distingue aussi la Réionisation de l'hélium, plus tardive et que l'on ne mentionnera pas dans ce chapitre

^{326.} pour un redshift $z \sim 6$

^{327.} probablement vers des redshifts $z \sim 30$

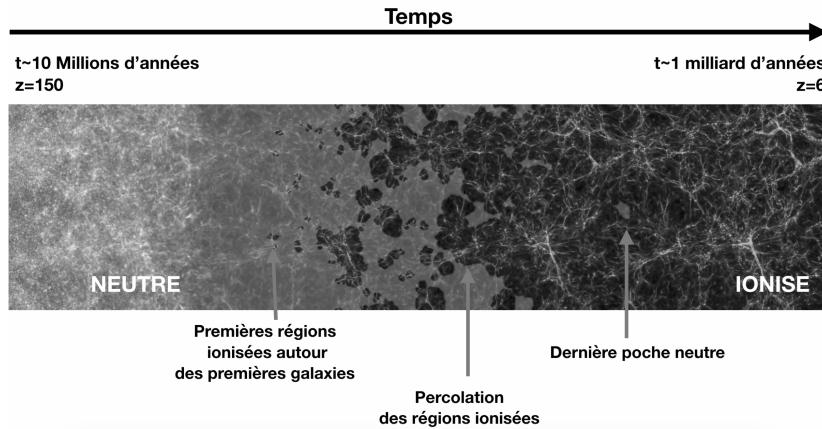


FIGURE 69: La chronologie de l'époque de Réionisation. Les régions neutres sont claires et les régions ionisées sont sombres.

En parallèle, cette ionisation va s'accompagner d'un réchauffement du gaz : chaque ionisation va également transmettre de l'énergie à la matière. La température typique du gaz diffus en fin de Réionisation est de l'ordre de 10 000 K : cette température correspond au seuil de refroidissement de l'atome d'hydrogène³²⁸. Plus chaud, le gaz va évacuer de l'énergie via des processus atomiques, plus froid le gaz est libre de voir sa température augmenter.

Les régions HII

La création de 'bulles' ionisées autour des premières sources est le processus élémentaire à l'origine de la Réionisation complète de l'Univers : ces bulles sont appelées régions HII³²⁹. L'étendue de ces régions est régie par la compétition entre 2 effets aux conséquences opposées :

- d'une part la production de photons ionisants par une source. Ces photons grignotent le gaz neutre et tendent à faire grandir la région HII
- d'autre part la tendance naturelle des électrons libres à recombiner avec les noyaux pour reconstituer des atomes. Cette recombinaison a tendance à réduire la taille de ces régions ionisées.

Une simple équation permet de faire la synthèse de cette compétition³³⁰ :

$$\frac{dn_H}{dt} = \alpha n_{H+} n_e - \Gamma n_H. \quad (432)$$

Ici $\alpha(T)$ est le taux de recombinaison de l'hydrogène : il dépend de la température³³¹ et possède les dimensions d'un volume par unité de temps. Cette quantité, et donc le terme associé dans cette équation différentielle, encode la capacité du gaz ionisé à redevenir

328. voir le chapitre dédié à la formation des petites structures

329. HI étant une dénomination de l'hydrogène neutre. Par analogie on parle de HeI, HeII et HeIII pour désigner l'hélium neutre, ionisé une fois et deux fois.

330. N_H désigne la densité numérique d'atomes d'hydrogène neutres (en m^{-3}), N_{H+} celle d'atomes ionisés, N_e celle des électrons libres

331. un gaz froid a tendance à recombiner plus efficacement

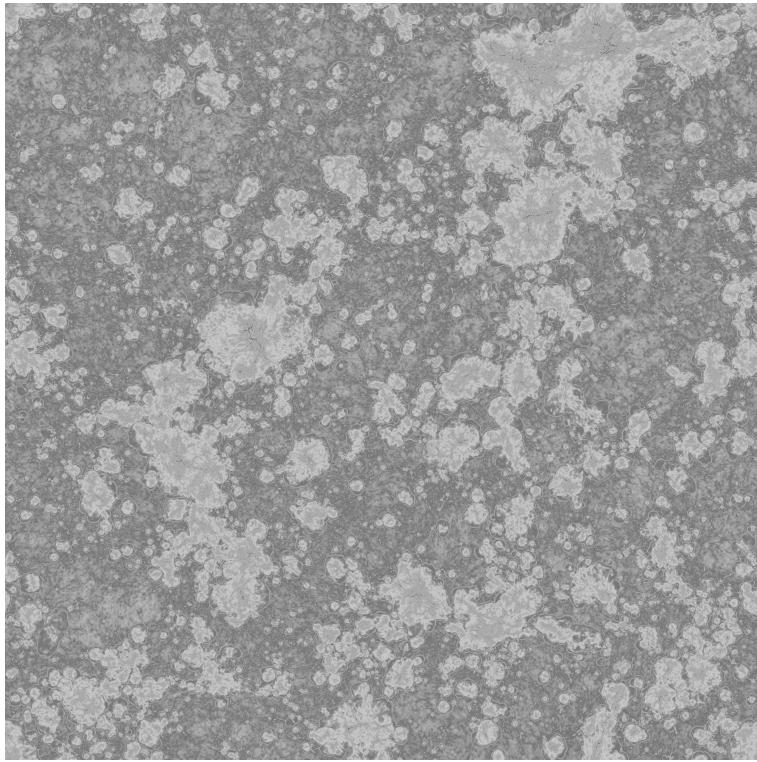


FIGURE 70: La distribution de gaz ionisé dans un Univers en cours de Réionisation d'après un calcul de simulation numérique. Les régions claires sont ionisées et chaudes, centrées autour des régions qui forment des étoiles. L'image fait environ 90 Mpc de côté et représente un Univers à $z=8$ environ à mi-Réionisation.

spontanément neutre. A l'inverse Γ est le taux de photoionisation et dépend du nombre de photons ionisants produits et présents dans la bulle ionisée.

Plutôt que de raisonner en abondance de protons et d'électrons, il est d'usage d'introduire la fraction d'ionisation x :

$$x = \frac{n_{H+}}{n_{H+} + n_H} \quad (433)$$

qui renvoie simplement le fraction d'atomes ionisés par rapport au nombre total de noyaux d'hydrogène disponibles (sous forme atomique ou non). Cette fraction ionisée sera une quantité centrale pour décrire la Réionisation cosmologique. En négligeant la contribution des éléments autres que l'hydrogène au gaz cosmique³³² et en utilisant le principe d'équilibre des charges électrique, le terme de recombinaison peut s'écrire :

$$n_{\text{rec}} = \alpha x^2 n^2 \quad (434)$$

où $n = n_{H+} + n_H$ désigne la densité totale de protons. Si la région est complètement ionisée, $x = 1$ et ce terme devient simplement :

$$n_{\text{rec}} = \alpha n^2. \quad (435)$$

Si on modélise la région HII par une sphère de rayon R , le nombre

^{332.} on rappelle que son abondance est proche de 95% en nombre

total de recombinaisons par seconde à l'intérieur est donné par :

$$N_{\text{rec}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \alpha n^2. \quad (436)$$

Si ce nombre de recombinaisons est égal au nombre de photons ionisant produits par seconde \dot{N}_{ion} , la région ionisée ne peut s'agrandir et on obtient une sphère, stationnaire, dite de *Strömgren*³³³, dont le rayon R_s satisfait :

$$\frac{4}{3} \pi R_s^3 \alpha n^2 = \dot{N}_{\text{ion}}. \quad (437)$$

Cette région HII, stationnaire, possède donc un rayon donné par :

$$R_s = \left(\frac{3 \dot{N}_{\text{ion}}}{4 \pi \alpha n^2} \right)^{1/3}. \quad (438)$$

Plus la production de photons est importante, plus ce rayon est important et à l'inverse un milieu dense en atomes, ou recombinant plus facilement à cause d'une basse température, présentera un rayon stationnaire plus petit.

Le cas non-stationnaire, avec un front en cours de progression, est plus délicate à traiter. Une approche possible consiste à considérer qu'un observateur lié au front d'ionisation voit d'un côté de ce front un flux de masse neutre et de l'autre un flux de masse ionisée, contraint par le flux de photons ionisants local. Ces 2 flux doivent être égaux³³⁴ :

$$m n v = m F_{\text{ion}}. \quad (439)$$

La vitesse du front satisfait donc :

$$v = \frac{1}{n} \frac{\dot{N}_{\text{ion}}(r_f)}{4 \pi r_f^2}. \quad (440)$$

Le taux de photoionisation disponible au niveau du front est le taux de photoionisation total moins le nombre de recombinaison à l'intérieur du front :

$$\dot{N}_{\text{ion}}(r_f) = \dot{N}_{\text{ion}}(0) - \frac{4}{3} \pi r_f^3 \alpha n^2 = \frac{4}{3} \pi \alpha n^2 (R_s^3 - r_f^3), \quad (441)$$

d'où l'équation différentielle sur la position du front r_f :

$$3r_f^2 \frac{dr_f}{dt} = \frac{dr_f^3}{dt} = \alpha n (R_s^3 - r_f^3). \quad (442)$$

La solution sur la position du front³³⁵ est alors donnée par :

$$r_f(t) = R_s (1 - e^{-t/t_{\text{rec}}})^{1/3}, \quad (443)$$

la position du front converge vers le rayon de la sphère de Strömgren, sur une durée caractéristique $t_{\text{rec}} = (\alpha n)^{-1}$, qui n'est autre que

333. du nom du scientifique ayant décrit pour la première fois ce processus

334. m désigne la masse d'un atome d'hydrogène, v la vitesse du front et F_{ion} le flux de photons ionisants

335. en posant $y = (r_f/R_s)^3$, on peut reconnaître une simple équation différentielle du premier ordre avec second membre constant

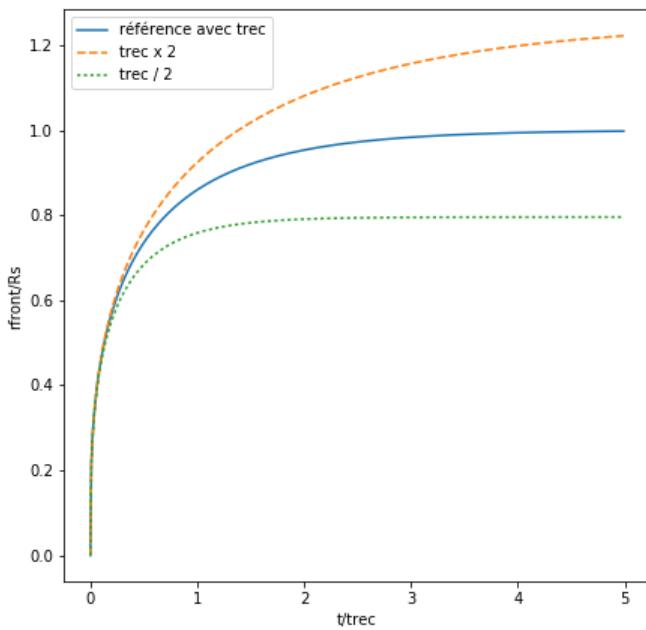


FIGURE 71: Évolution temporelle du rayon d'une région HII. Les rayons sont exprimés en unités du rayon de Strömgren du modèle de référence, correspondant à l'état final stationnaire, tandis que les temps sont exprimés en temps de recombinaison. On constate que les modèles à temps de recombinaison courts, donc efficaces, ont des rayon d'équilibre plus petits et les fronts sont stoppés plus rapidement.

le temps de recombinaison caractéristique du gaz. Si le gaz recombine, le front ionisant stoppe rapidement et le rayon se stabilise. À l'inverse un gaz diffus ou chaud, à faible pouvoir de recombinaison va voir ses fronts se propager aisément. Dans la figure 71, on constate dans tous les cas que la progression initiale des fronts est toujours rapide puis tend à ralentir lorsque les recombinaisons commencent à faire effet (pour $t \sim t_{\text{rec}}$). La température typique du gaz intergalactique est de l'ordre de $T = 10000\text{K}$, tandis que les densités physiques d'atomes pour des filaments de gaz intergalactiques sont environ de $1000 \text{ atomes}/m^3$. Dans ces conditions, les temps de recombinaison typiques sont de l'ordre de la centaine de millions d'années.

Éléments de transfert radiatif

Bien sûr le cas de la région HII décrit précédemment est idéalisé : dans le cas cosmologique la densité d'atomes n'est pas homogène, le gaz réagit dynamiquement à la présence du front, la température n'est pas constante et bien sûr l'expansion de l'Univers conduit à une densité qui n'est pas constante au cours du temps. Par ailleurs, les sources de rayonnement ne sont pas stationnaires, elles vivent des histoires compliquées et s'influencent les unes les autres. Pour résoudre le problème dans toute sa complexité, il faut utiliser des

simulations cosmologiques capables de modéliser la physique du *transfert radiatif*, la physique de l'interaction de la matière avec le rayonnement.

La base du transfert du rayonnement est la résolution de l'équation du transfert radiatif qui décrit l'évolution de l'intensité du rayonnement $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ ³³⁶ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{x}} = S_\nu - \kappa_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{I}^\circ. \quad (444)$$

En plus du temps, cette intensité dépend de la position x , de la fréquence ν et de la direction de propagation \mathbf{n} : on se trouve donc face à un problème de très grande dimensionnalité (7 dimensions) : l'équation du transfert est pour l'essentiel une équation de conservation de la fonction de distribution des photons dans l'espace des phases. Fondamentalement, cette équation est une variation de l'équation de Boltzmann.

Il existe plusieurs manières de 'simplifier' sa résolution, en réduisant sa dimensionnalité. L'une des plus communes consiste à considérer une source à l'origine seulement³³⁷ et à supposer que la lumière est instantanément³³⁸ et partiellement absorbée en chaque point de son trajet depuis l'origine. Le long de la direction de propagation, l'équation du transfert se réduit alors à :

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{x}} = -\kappa_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{I}^\circ, \quad (445)$$

où $\kappa_\nu(\mathbf{x})^{-1}$ apparaît comme une mesure de la distance sur laquelle l'absorption a lieu, tel un libre parcours-moyen.

Le long du rayon, la solution est alors :

$$I_\nu(x) = I_\nu(x=0) e^{-\int_0^x \kappa_\nu dx} = I_\nu(x=0) e^{-\tau}, \quad (446)$$

cette solution est une classique exponentielle décroissante, dont la grandeur caractéristique est l'*opacité* τ mesurée le long du rayon. Plus cette opacité est importante le long de la direction de propagation, plus le rayonnement est atténué. Si on dispose d'un modèle de distribution des sources dans l'espace, on peut donc tracer des rayons dans toutes les directions et calculer cette opacité le long de tous ces rayons : cette donnée permet d'évaluer la quantité de rayonnement partout et donc la distribution spatiale du taux de photoionisation partout pour modéliser la Réionisation.

Une autre approche consiste à prendre les moments³³⁹ de l'équation du transfert radiatif, pour évaluer la densité ou le flux de rayonnement par exemple :

$$N_\nu \sim \int I_\nu d^3 \mathbf{n} \quad (447)$$

$$\mathbf{F}_\nu \sim \int \mathbf{n} I_\nu d^3 \mathbf{n} \quad (448)$$

336. I_ν désigne l'intensité spécifique du rayonnement, S_ν les sources de rayonnement et κ_ν l'absorption

337. on néglige ainsi les sources diffuses, comme celles dues à la recombinaison atomique

338. $c \rightarrow \infty$

339. notons qu'en hydrodynamique la densité et le flux de masse (donc la densité d'impulsion) sont les moments de la fonction de distribution $\rho = \int dv f$ et $\rho v = \int dv v f$

Ces quantités ne dépendent plus que de la position et satisfont leurs propres équations de conservation³⁴⁰ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial N_\nu}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial \mathbf{x}} = -\kappa N_\nu \quad (449)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_\nu}{\partial \mathbf{x}} = -\kappa' \mathbf{F}_\nu. \quad (450)$$

On a donc affaire à un système d'équations dites hyperboliques, similaires aux équations de l'hydrodynamique³⁴¹ et qu'on peut alors résoudre à l'aide des même techniques. Toutefois, cela nécessite de fermer le système d'équation avec une équation d'état du rayonnement liant la pression radiative \mathbf{P} avec la densité de rayonnement par exemple : il existe toute une série de modèles qui fournissent ce type de relation en fonction du problème physique considéré. Plus radicalement, on peut aussi se contenter de l'équation de conservation de la densité de rayonnement et imposer que le flux radiatif soit simplement lié au gradient de cette densité :

$$\mathbf{F}^\circ = -c \nabla N_\nu, \quad (451)$$

pour obtenir une *équation de diffusion* dans laquelle le rayonnement va alors 'couler' des régions brillantes aux régions éteintes :

$$\frac{\partial N_\nu}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 N_\nu}{\partial \mathbf{x}^2} = -\kappa N_\nu. \quad (452)$$

Simple à mettre en place, ce modèle souffre toutefois de l'impossibilité de créer des ombres derrières des absorbants denses.

Observer la Réionisation de l'Univers

L'époque de Réionisation s'achève à $z \sim 6$, correspondant à un Univers âgé environ de 1 milliard d'années. Son début est beaucoup plus incertain : la transition démarre avec l'apparition des premières sources, très probablement des étoiles, mais l'instant de leur apparition n'est pas connu avec certitude. On pense aujourd'hui qu'il faut quelques centaines de millions d'années pour que le gaz puisse acquérir les conditions lui permettant de former ces premières sources, correspondant à des redshift $z \sim 30 - 50$. Ces époques sont particulièrement reculées, donc distantes, et sont donc difficiles à observer. On dispose aujourd'hui de 2 grandes observations qui démontrent que la transition a bien eu lieu : la forêt Lyman- α et l'étude du fond diffus cosmologique.

Le milieu intergalactique, la Forêt Lyman-Alpha

La première observation 'canonique' de la Réionisation est l'étude de la forêt Lyman-Alpha. Ce terme désigne les spectres de sources

340. en négligeant les termes sources

341. conservation de la masse et équation d'Euler

brillantes lointaines (généralement des quasars) qui présentent des systèmes de raies d'absorption denses aux fréquences plus élevées que la raie Lyman-Alpha de l'hydrogène³⁴². Le principe qui conduit à l'apparition de ces raies est simple : ces sources possèdent un spectre continu et une raie Lyman-alpha en émission. Au cours de leur propagation les photons associés vont se décaler vers le rouge à cause de l'expansion cosmique. Après la Réionisation, l'hydrogène cosmique est en très grande majorité ionisé et ne peut en général absorber ces photons. Si toutefois l'un d'entre eux rencontre un nuage d'hydrogène *neutre* au sein du milieu intergalactique, ce dernier va générer une raie en absorption à 121.6 nm dans son référentiel. Toutefois, comme le spectre de la source lointaine perçu par le nuage est décalé vers le rouge, l'absorption va se faire à une fréquence plus élevée que celle de la raie en émission. Si jamais un second nuage se trouve sur la ligne de visée, une autre absorption va s'ajouter : comme le spectre de la source lointaine s'est encore d'avantage rougi, cette raie d'absorption supplémentaire se placera dans les parties plus bleues, à plus haute fréquence que la raie créée par le premier nuage et que celle de la raie en émission. Par extension si de multiples nuages sont présents sur la ligne de visée, chacun d'entre eux va générer une raie en absorption qui prises globalement donne l'apparence d'une 'forêt' de raies.

^{342.} dont la longueur d'onde est 121.6 nm

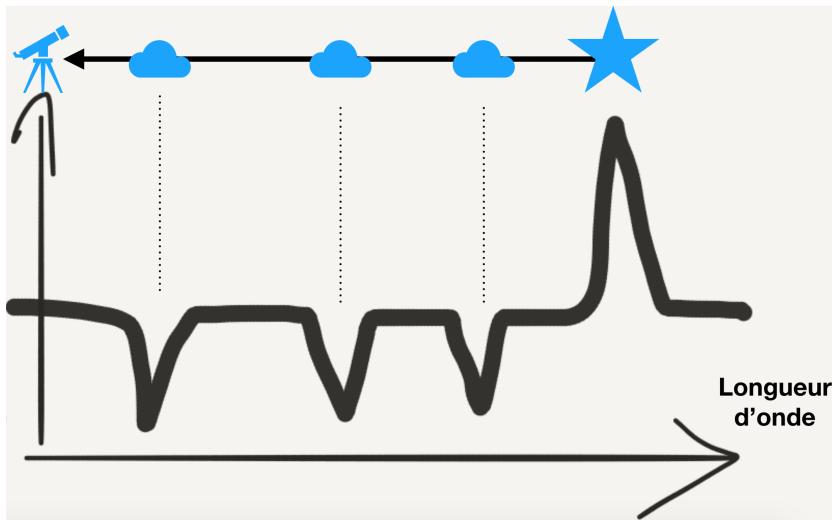
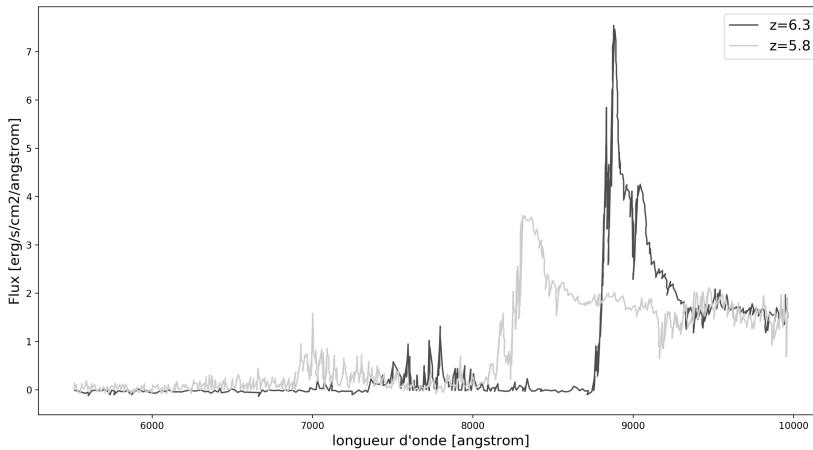


FIGURE 72: La forêt Lyman- α est un ensemble de raies d'absorption créées par des nuages neutres absorbants le long de la ligne de visée vers une source lointaine brillante. Chaque nuage perçoit le spectre de la source de façon décalée à cause de l'expansion cosmologique et va donc placer une raie d'absorption à sa propre fréquence correspondant à 121.6 nm dans son référentiel.

La forêt Lyman-Alpha est un outil particulièrement puissant puisqu'elle permet de tracer la distribution spatiale et les propriétés (température par exemple) des nuages neutres de gaz le long de la ligne de visée. On a donc accès à l'état du milieu intergalactique sur toute une gamme d'époques. Si par ailleurs on dispose de multiples lignes

de visées, il est possible de réaliser de la *tomographie*, c'est à dire une reconstruction 3D de la structure du milieu intergalactique, entre ces sources et nous.

Que se passe-t-il si la source émet ses photons dans une époque antérieure à la Réionisation ? Au lieu d'avoir une discontinuité de nuages neutres absorbants, *l'ensemble* du milieu intergalactique, qui est neutre, est capable de produire une absorption. L'observateur constate alors une continuité d'absorptions aux longueurs d'ondes plus courtes que l'émission Lyman- α et dans les cas les plus extrêmes, la transmission est proche de zéro : le spectre présente alors un *Gunn-Peterson Through*³⁴³, caractérisé par une absence de signal sur une grande gamme de longueurs d'ondes. C'est précisément ce qui est obtenu lorsque l'on observe des spectres de quasars de plus en plus lointains, de plus en plus enfouis dans l'époque de Réionisation : la disparition graduelle de la forêt indique la mise en place d'un Univers rempli de gaz neutre absorbant aux alentours d'un redshift $z \sim 6$.



343. on pourra le traduire par 'Tunnel' Gunn-Peterson

FIGURE 73: Un échantillon de spectres de quasars émettant durant l'époque de Réionisation. Le quasar à grand redshift émet son rayonnement avant que la Réionisation ne soit terminée : aux fréquences plus élevées que la raie en émission, on note un signal très faible voire inexistant, c'est une manifestation du *Gunn-Peterson Through* dû à la présence de gaz neutre en quantité importante. Par contraste, le quasar à plus bas redshift émet après la période de Réionisation dans un Univers déjà ionisé : la transmission est plus importante, le signal de la forêt Lyman-Alpha est plus marqué sans jamais descendre à des niveaux aussi bas pour le premier spectre.

L'opacité Thomson du CMB

La Réionisation va produire des électrons libres aux alentours d'un redshift de 6, un milliard d'années après le Big-Bang. Or ces électrons vont naturellement avoir tendance à interagir avec les photons du fond diffus cosmologique tandis que ces derniers volent vers un observateur terrestre³⁴⁴ : ce processus de diffusion dit Thomson va affecter la structure angulaire du fond diffus cosmologique, particulièrement aux grandes échelles. Cet effet peut-être évalué quantitativement et donc mettre des contraintes sur l'histoire de la Réionisation.

344. de façon analogue à l'effet Sunyaev-Zeldovich où ce sont les électrons libres des amas de galaxies à bas redshift qui font office de cibles

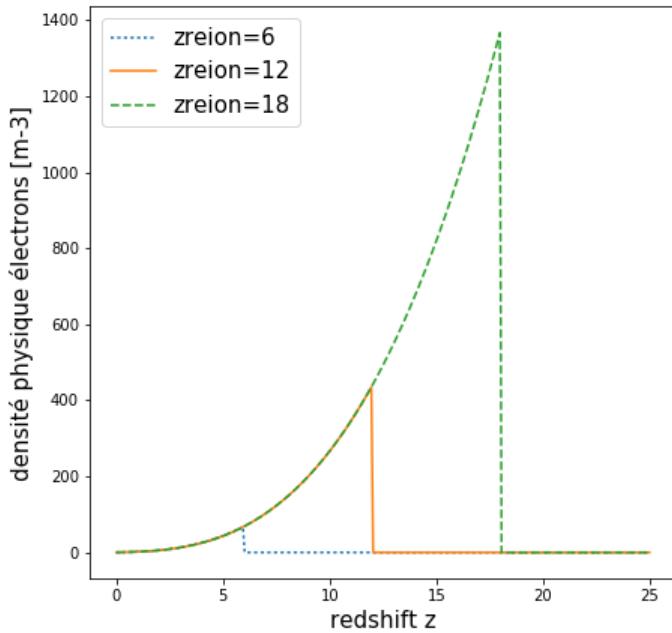


FIGURE 74: La densité physique d'électrons pour 3 modèles simples de Réionisation instantanée et complète. L'opacité Thompson, le taux d'interaction des électrons avec les photons du CMB, est donnée par l'intégrale de cette courbe : plus la Réionisation est précoce, plus l'opacité est importante.

La quantité importante s'appelle l'opacité Thompson et est calculée de la manière suivante :

$$\tau_{\text{th}} = \int_{z_{\text{rec}}}^{z=0} c \sigma_T n_e(z) dt \quad (453)$$

et revient de fait à calculer une histoire intégrée de la production d'électrons libre n_e au cours de l'histoire cosmique. En théorie, le calcul de la valeur de l'opacité dépend de l'histoire détaillée de Réionisation mais il est facile de comprendre le comportement qualitatif de cette quantité à partir d'un modèle simple. En effet, supposons que la Réionisation soit parfaite de telle manière à ce que tous les atomes d'hydrogène soient ionisés et qu'elle soit instantanée. Dans ce cas la densité comobile d'électrons libres est simplement constante et vaut³⁴⁵ :

$$n_{e,\text{com}} = \frac{\Omega_b \rho_c}{m_p}. \quad (454)$$

La densité *physique* d'électrons, celle nécessaire au calcul de τ_{th} , est donc simplement nulle avant la Réionisation et après la Réionisation vaut (voir Fig 74) :

$$n_e(z < z_{\text{reion}}) = \frac{\Omega_b \rho_c}{m_p} \frac{1}{(1+z)^3}. \quad (455)$$

345. on considère que l'hélium est négligeable

La valeur de l'opacité vaut donc :

$$\tau_{\text{th}} = \int_{z_{\text{reion}}}^{z=0} c\sigma_T \frac{\Omega_b \rho_c}{m_p} \frac{1}{(1+z)^3} \left| \frac{dt}{dz} \right| dz. \quad (456)$$

Plus le redshift de Réionisation est élevé (plus la transition est précoce) plus la valeur de τ_{th} est importante. De fait les premières mesures de cette quantité par le satellite WMAP, donnait des valeurs de $\tau_{\text{th}} \sim 0.17$ correspondant à des redshifts de Réionisation proches de 17. Comparés à ceux obtenus par la technique des spectres de quasars, la tension était particulièrement forte entre ces 2 types de sondes de la Réionisation. Depuis, les mesures successives, via le satellite WMAP ou Planck ont ramené cette quantité à des valeurs plus raisonnables, de l'ordre de $\tau_{\text{th}} \sim 0.068$ ce qui correspond à des redshifts de *mi-Réionisation* de l'ordre de 8 : cette valeur est bien plus compatible avec celle mesurée via la forêt Lyman- α . Toutefois, et de façon un peu paradoxale, une faible valeur de τ_{th} , donc une Réionisation plus tardive, a tendance à rendre le CMB moins pertinent pour l'étude de cette époque : en effet, une faible valeur indique un faible couplage entre les électrons de la Réionisation et les photons du CMB, et par extension ces photons sont moins sensibles à cette transition. Physiquement la raison en est simple : une Réionisation tardive implique une densité physique d'électrons libres plus faibles que celle qui aurait été obtenue pour une transition précoce.

le signal à 21 cm

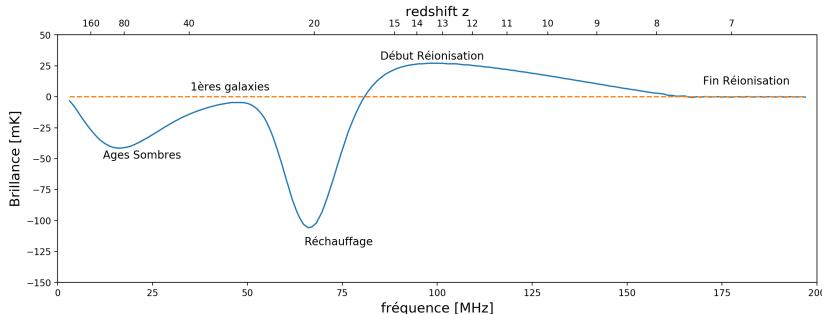
Contrairement aux 2 mesures précédentes, celle-ci n'a pas encore été réalisée dans le cas de la Réionisation mais elle est des plus prometteuses. Il s'agit de détecter le signal émis directement par le gaz d'hydrogène neutre, à la longueur d'onde de 21 cm. Ce signal radio correspond à la transition entre les 2 états de spin de l'électron sur le niveau fondamental³⁴⁶ : clairement l'écart d'énergie entre les 2 configurations doit être très faible, et le rayonnement produit est à très basse énergie. Le signal à 21 cm du gaz neutre peut s'exprimer sous la forme d'une température de brillance :

$$\delta T_b \sim x_{\text{HI}}(1+\delta)\left(1 - \frac{T_{\text{CMB}}}{T_S}\right)\left(1 + \frac{1}{H} \frac{dv_r}{dr}\right)^{-1}. \quad (457)$$

Ce signal est extrêmement riche physiquement. Il dépend de l'état d'ionisation de l'hydrogène : un gaz complètement ionisé ($x_{\text{HI}} = 0$) donne un signal nul, comme attendu, et au cours de la Réionisation, la mise en place d'un réseau de bulles ionisées doit donc directement se manifester dans ce signal radio par sa disparition progressive. Il dépend aussi directement de la densité locale de gaz (via la surdensité δ). Plus subtil, il dépend de la température de spin, c'est à dire

346. on parle de transition hyperfine

du niveau d'occupation des niveaux hyperfins : cette température est une mesure de l'efficacité du pompage des états vers le niveau excité. Le mécanisme de pompage le plus pertinent dans ce contexte est l'absorption et la ré-émission de photons Lyman- α : ce mécanisme couple la température de spin avec celle du gaz mais requiert de tels photons et donc des étoiles. En l'absence de photons Lyman- α , les processus collisionnels au sein du gaz peuvent également produire du pompage, mais le régime de densité requis pour que cela soit efficace n'existe que pour des redshifts au-delà de ce qui est observable dans un futur proche ($z > 40$) : dans cette situation on a à nouveau $T_S \sim T_{\text{gaz}}$. Notons que le signal se mesure comparativement à la température du CMB T_{CMB} : si la température de spin est égale à celle du fond diffus³⁴⁷, le signal à 21 cm est invisible. Si la température de spin est plus élevée que celle du CMB, alors le signal est vu en émission ($\delta T_b > 0$). Il sera vu en absorption dans le cas contraire. Pour finir, il dépend de la vitesse du gaz le long de la ligne de visée, et permet donc potentiellement de remonter à cette dynamique.



Cette richesse physique se traduit par une histoire compliquée pour le signal à 21 cm moyen (cf Fig. 75). Dans un premier temps, durant les âges sombres, ce sont les collisions qui vont réaliser le couplage entre la température du gaz et celle de spin : comme le gaz refroidit plus vite que le CMB³⁴⁸, le signal est vu en absorption. Tandis que la densité de gaz diminue, les collisions deviennent moins efficaces, la température de spin se découpe de celle du gaz et se rapproche de celle du CMB, faisant disparaître le signal. Il faut attendre que les premières sources, et en particulier les premières étoiles, se forment pour que leur production de rayonnement Lyman- α puisse à nouveau écarter la température de spin³⁴⁹ de celle du CMB, pour produire un signal en absorption. Par la suite, la production de rayons X, notamment par les premiers noyaux actifs de galaxies, va alors réchauffer le gaz jusqu'à le faire passer dans un régime en émission. A ce stade, les premières régions HII vont ap-

347. qui est de l'ordre de la dizaine de K aux redshifts considérés avec $T = 2.73(1+z)$ K

FIGURE 75: Les différentes phases de l'émission à 21cm au cours de la Réionisation. Durant les âges sombres le signal est d'abord vu en absorption avant de commencer à disparaître. Il redevient visible lorsque les premières galaxies apparaissent. Dès que le chauffage du gaz par les premières sources de rayons X devient effectif, le signal va basculer dans une phase en émission. Puis il va redisparaître entre le début et la fin de la Réionisation. Figure inspirée de Pritchard & Loeb 2012.

348. la température du gaz évolue en $(1 + z)^{-2}$ tandis que celle du CMB évolue en $(1 + z)^{-1}$

349. en la recouplant à celle du gaz

paraître et grignoter le gaz neutre émetteur, le signal va alors disparaître jusqu'à ce que l'IGM soit complètement réionisé.

La détection de ce signal et la réalisation de cartes de 21cm sur le ciel sont des objectifs majeurs du futur grand interféromètre radio SKA. Prévu pour être installé sur 2 sites à partir de 2020, un en Australie et l'autre en Afrique du Sud, cet instrument sera capable d'imagerie, afin de voir la Réionisation en train de se faire, fournissant autant d'informations sur les sources de rayonnement, sur le milieu intergalactique, sur le processus de croissance des structures à ces époques, etc... On note qu'il suffit de changer de fréquence d'observation pour que l'instrument puisse accéder à un autre redshift et donc à une autre époque : non seulement SKA sera capable de cartographie, mais il sera en mesure d'extraire une évolution temporelle du processus. Pour finir, le même principe que la forêt Lyman- α peut être appliqué à la transition à 21cm, permettant de reconstruire la distribution de gaz le long de la ligne de visée d'une source radio intense : on parle alors de forêt à 21cm, avec les mêmes possibilités de tomographie que celles offertes par la forêt Lyman- α . Cette technique nous est inaccessible pour l'instant, faute d'instruments suffisamment sensibles, mais SKA devrait pouvoir la rendre possible.

Réionisation et physique fondamentale

L'époque de Réionisation est liée à la formation des premières sources et correspond à une époque reculée où se mettent en place les premiers processus d'astrophysique compliquée et non-linéaire. En corollaire, elle est donc proche des 'conditions initiales' et présente une physique qui n'a pas accumulé 13 milliards d'années d'évolution supplémentaire. La Réionisation est le lieu du démarrage de la formation des galaxies, et la compréhension de l'émergence de ces structures au tout début est un défi important : si on ne comprend pas les propriétés des galaxies à leur début quand les choses sont plus 'simples', difficile de prétendre à pouvoir le faire aux époques plus tardives, en particulier aujourd'hui, quand les choses ont eu le temps de devenir compliquées. En regardant comment la Réionisation du cosmos procède, sa géométrie et son évolution, on regarde une manifestation macroscopique, cosmologique, de la façon dont les premières galaxies sont créées aux 'petites' échelles et par extension on teste les modèles de formation des galaxies.

Comme expliqué dans la partie dédiée à la matière noire, le consensus actuel tourne autour d'une matière dynamiquement froide qui a comme conséquence une surproduction de petits halos en dessous de $10^9 - 10^{10} M_\odot$ par rapport aux observations. Une manière de répondre à ce défi est de considérer une matière noire 'tiède'³⁵⁰

350. pouvant consister en un mélange de matière noire froide et chaude (neutrinos)

ou bien une matière noire en auto-interaction ou ayant un couplage avec le rayonnement électromagnétique faible mais non nul : toutes ces solutions diminuent la puissance aux petites échelles, réduisant la surproduction de petits halos et sont susceptibles d'imprimer une géométrie ou une évolution spécifique de la Réionisation. Le déroulé de la transition permettrait ainsi de sonder la nature de la matière noire.

Par ailleurs, la Réionisation affecte les galaxies, en remplissant l'Univers d'un rayonnement chauffant et ionisant. Comme vu précédemment, les petites galaxies de $10^9 M_\odot$ ont une température de vieil de l'ordre de 10^4 K, correspondant peu ou prou à la température à laquelle le gaz est amené par la propagation des fronts ionisants : ces petites galaxies vont se trouver dans l'impossibilité de conserver ce gaz à l'équilibre au sein de leur halo³⁵¹ et ne pourront pas former d'étoiles. Cette suppression de la formation stellaire est une conséquence attendue de la Réionisation sur les petits objets : elle pourrait expliquer le désaccord majeur qui existe actuellement entre le nombre de galaxies satellites observé autour de galaxies comme la Voie Lactée et celui beaucoup plus grand prédict par les modèles de matière noire froide. Cette grande transition pourrait être un ingrédient essentiel du modèle Λ CDM pour le rendre conforme aux observations faites aux échelles galactiques.

Enfin, l'expérience à 21cm américaine EDGES a annoncé avoir détecté le premier signal radio de la Réionisation en 2018 : ce signal correspondrait à celui de la phase de couplage avec le rayonnement Lyman- α et au début du réchauffage, entre 70 et 90 MHz c'est à dire des décalages vers le rouge z compris entre 22 et 14. Si il est confirmé, ce signal est la première signature jamais détectée de l'apparition des premières étoiles, qui produisent le Lyman- α . De façon inattendue, *l'amplitude du signal* en absorption est bien plus importante que prévue, correspondant à une température du gaz cosmique quelques fois plus froid qu'anticipé, d'un facteur 2 ou 3³⁵². Or la physique du gaz à cette époque est très simple et ce dernier ne refroidit que par expansion cosmologique : il faut donc invoquer un mécanisme exotique de refroidissement pour expliquer ces faibles températures. Peut-être s'agit-il de la marque d'une interaction avec la matière noire, qui pompe de l'énergie aux baryons ? Ce résultat et ces conclusions restent à confirmer à ce jour, mais ils montrent bien comment, dans une époque où les processus restent 'simples', un comportement légèrement non-orthodoxe peut conduire à des remises en causes importantes de notre compréhension physique.

351. on parle de photo-évaporation

352. typiquement une température de gaz de 3 K est mesurée alors qu'elle est attendue aux alentours 7-9 K

Bibliographie

La bibliographie ci-dessous liste les principaux ouvrages qui ont permis de construire ce cours. Les articles scientifiques professionnels mentionnés dans le texte principal n'y sont pas détaillés mais peuvent être retrouvé à partir de leurs auteurs sur le site ADS³⁵³. Au delà d'une simple bibliographie, cette liste constitue surtout une recommandation de liste de lecture pour toute personne désireuse d'aller plus loin.

353. <http://adsabs.harvard.edu/>.

Walter Appel. *Mathematiques pour la physique et les physiciens!* H & K.
ISBN 2351410394.

Francis Bernardeau. *cosmologie*. EDP Sciences, 2007. ISBN 2868839541.

James Binney and Scott Tremaine. *Galactic Dynamics : Second Edition (Princeton Series in Astrophysics)*. Princeton University Press, 2011.

Gerhard Börner. *The Early Universe*. Springer, 2004. ISBN 3540441972.

IPAC Caltech. Level 5, a knowledgebase for extragalactic astronomy and cosmology. <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/>.

R.W Hockney and J.W Eastwood. *Computer Simulation Using Particles*. CRC Press, 1989. ISBN 0852743920.

Wayne Hu. Wayne hu's tutorials. <http://background.uchicago.edu/~whu/>.

Landau and Lifchitz. *Cours de physique théorique et de mécanique*. Ellipses Marketing, 2000. ISBN 2729894020.

Abraham Loeb and Steven Furlanetto. *The First Galaxies in the Universe (Princeton Series in Astrophysics)*. Princeton University Press, 2013. ISBN 0691144915.

Houjun Mo, Frank van den Bosch, and Simon White. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521857937.

J. A. Peacock. *Cosmological Physics (Cambridge Astrophysics)*. Cambridge University Press, 1998. ISBN 0521422701.

Phillip Peebles. *Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980. ISBN 0691082405.

Phillip Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993. ISBN 0691074283.

Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan. *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2013.

Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 0521887054.

Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972. ISBN 0471925675.

Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. ISBN 0198526822.

Ned Wright. Ned wright's cosmology tutorial. <http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm>.

Quelques Grandeurs Utiles

Constantes physiques

- vitesse de la lumière $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s
- constante de Newton $G = 6.6726 \times 10^{-11}$ m³/kg/s²
- constante de Planck réduite $\hbar = 1.054572 \times 10^{-34}$ J s
- constante de Boltzmann $k_B = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K

Masses

- masse de l'électron $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg
- masse du proton $m_p = 1.672 \times 10^{-27}$ kg
- masse du neutron $m_n = 1675 \times 10^{-27}$ kg
- masse du Soleil $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg

Distances

- parsec 1 pc = 3.0856×10^{16} m
- Mégaparsec 1 Mpc = 10^6 pc = 3.0856×10^{22} m
- Gigaparsec 1 Gpc = 10^9 pc = 3.0856×10^{25} m

Énergies

- luminosité du Soleil $L_\odot = 3.9 \times 10^{26}$ W
- électron-volt 1 eV = 1.6022×10^{-19} J
- erg 1 erg = 10^{-7} J
- unité naturelle de température 1 MeV = 1.1605×10^{10} K
- unité naturelle de masse 1 MeV = 1.783×10^{-30} kg

Quantités Cosmologiques

- paramètre de Hubble réduit $h = H_0/100\text{km/s/Mpc}$
- temps de Hubble $H_0^{-1} = 9.7776 \times 10^9 h^{-1}$ années
- densité de l'Univers $\rho = 1.8789 \times 10^{-26} \Omega_m h^2 \text{ kg/m}^3$
- densité d'atomes d'hydrogène $n_H = 8.42 \Omega_b h^2 \text{ m}^{-3}$

Planck 2015

Quantités extraites de *Planck Collaboration 2016, A&A, 594, A13 (Paper XIII), Table 4 (TT, TE, EE + lowP + lensing + ext)*

- densité de matière $\Omega_m = 0.3075$
- densité d'énergie noire $\Omega_\Lambda = 0.691$
- densité de photons $\Omega_\gamma = 5.39 \times 10^{-5}$
- densité de neutrinos $\Omega_\nu = 0.0014$
- densité de baryons $\Omega_b = 0.0486$
- paramètre de Hubble $H_0 = 67.74 \text{ km/s/Mpc}$
- âge de l'Univers $t_0 = 13.798$ milliards d'années
- température du fond diffus de photons $T_0 = 2.7255 \text{ K}$
- température du fond diffus de neutrinos $T_{\nu 0} = 1.9454 \text{ K}$
- densité critique $\rho_c = 8.619 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$

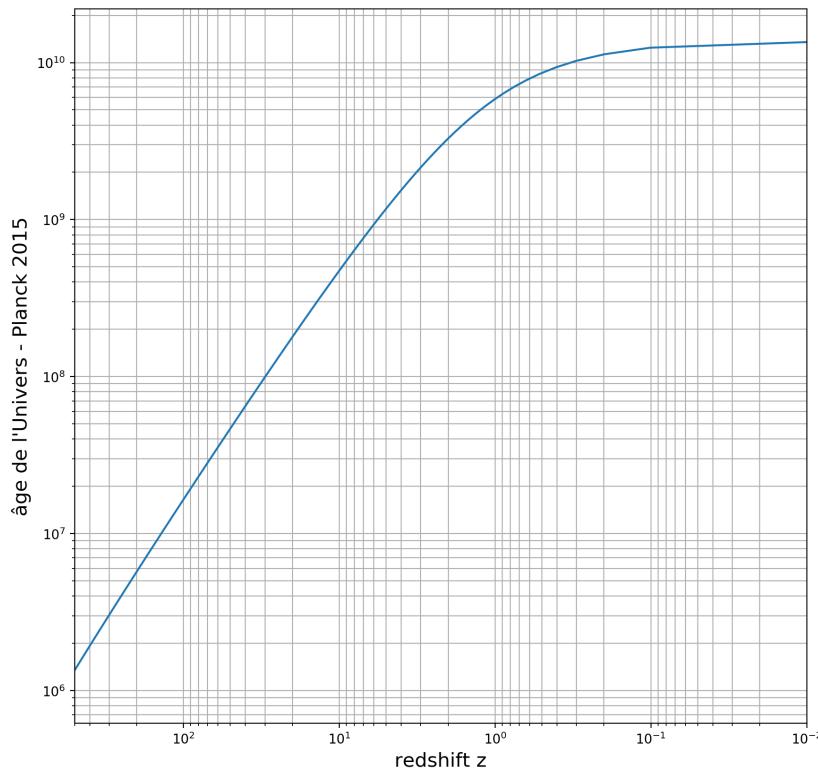


FIGURE 76: La relation entre l'âge de l'Univers (exprimé en années) et le redshift z pour une cosmologie Planck 2015.

Table des figures

1	Le bilan énergétique de l'Univers	18
2	Les grandes étapes dans l'histoire du cosmos	20
3	le modèle cosmologique Newtonien	24
4	Annulation du champ de pesanteur	35
5	Référentiels localement inertiels	36
6	Distance de parcours lumineux	40
7	Coordonnées comobiles et expansion	42
8	Diagramme de Hubble	43
9	loi de Hubble et homogénéité	44
10	Durée des supernovæ en fonction du redshift	45
11	Évolution des fluides cosmologiques	52
12	Époques de domination des fluides cosmiques	57
13	Facteur d'échelle pour différentes cosmologie	64
14	Calcul de la densité d'état libres	70
15	Évolution schématique de l'abondance d'une particule relique.	77
16	Les conditions de Sakharov	79
17	La situation après la fin du goulot du Deutérium	86
18	Énergies de liaisons des différents éléments	87
19	Comparaison des abondances observées des éléments légers	88
20	Évolution temporelle de fraction d'ionisation x_e pour trois valeur de Ω_b . L'âge typique de l'Univers aux redshifts concernés est d'environ 380 000 ans. Les atomes sont totalement ionisés, $x_e = 1$ aux grandes valeurs de z , et le gaz cosmique est sous la forme d'un plasma. Progressivement, sous l'effet de la baisse de température, les atomes vont recombiner pour donner un Univers neutre, optiquement mince au rayonnement du fond diffus.	91
21	Le plasma cosmique avant la recombinaison	92
22	L'Univers devient transparent au CMB	92
23	Le spectre du fond diffus cosmologique	94

24	Les fluctuations de températures vues par Planck	95
25	Le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique obtenu par <i>Planck</i> .	96
26	CMB et géométrie	100
27	L'effet SZ	103
28	La vitesse de rotation des planètes du système solaire	106
29	La vitesse de rotation de la matière dans la Voie Lactée	107
30	Une galaxie et son halo de matière noire	109
31	La fraction baryonique prédite par une simulation numérique	110
32	Une illustration du lien entre densité et potentiel, via l'équation de Poisson.	111
33	Le <i>Bullet Cluster</i>	113
34	Les quantités pertinentes d'une lentille gravitationnelle	116
35	Exemple de calcul de lentilles gravitationnelles	117
36	Deux modèles de spectre de puissance angulaire du fond diffus cosmologique	119
37	Deux simulations de la densité de gaz dans un volume d'Univers de 8 Mpc de côté	122
38	La fonction de masse des halos de matière noires pour différents redshifts	123
39	Quelle échelle d'Univers faut-il-sonder pour trouver un halo de masse donnée à une époque donnée	125
40	Schéma illustrant la différence entre la fonction de masse des halos et la distribution des luminosité des galaxies	125
41	Distribution du nombre de galaxies satellites de la Voie Lactée	127
42	Distribution des satellites de la Galaxie d'Andromède	127
43	Le relevé de galaxies 2MASS	129
44	Simulation des grandes structures de l'Univers	130
45	Les oscillations baryoniques évoluent sur des fréquences différentes, dépendant de leur taille.	142
46	Les pics acoustiques sont des extrema	143
47	Synthèse de la croissance des perturbations	145
48	Schématique du filtrage du spectre de puissance des fluctuations initiales.	146
49	Le spectre de puissance observé	147
50	Les BAOs dans les relevés de galaxies	148
51	Les solutions paramétriques de l'effondrement sphérique	153
52	Évolution temporelle du contraste de densité pour l'effondrement sphérique	156
53	Le profil de densité NFW	157
54	Formation schématique d'une galaxie	158
55	La fonction de refroidissement du gaz	161

- 56 Un exemple de produit de simulation cosmologique 164
- 57 schématique de la méthode de calcul des forces sur grilles. 168
- 58 Exemple de dynamique dans une simulation hydrodynamique avec refroidissement. 173
- 59 modèle de Haardt & Madau 176
- 60 Exemples d'injection d'énergie par une particule stellaire modélisant l'explosion d'une supernova. 179
- 61 micro-états disponibles dans un système simple comprenant 2 paires de boules de couleurs identiques 182
- 62 Le lien entre la dispersion de vitesse et la température du gaz. 184
- 63 Remplissage d'une cuve par un gaz 185
- 64 Évolution vers un maximum d'entropie 186
- 65 Entropie & Complexité 187
- 66 fluctuation d'entropie 190
- 67 Histoire d'évolution de quelques longueurs physiques au cours du temps. 195
- 68 Un exemple de potentiel possible pour l'inflaton. 199
- 69 Chronologie de la Réionisation 204
- 70 Le réseau de bulles ionisées de la Réionisation 205
- 71 Évolution temporelle de la position d'un front ionisant 207
- 72 Principe de la forêt Lyman- α 210
- 73 Spectres de quasars durant la Réionisation 211
- 74 La densité d'électrons cosmique 212
- 75 L'histoire du signal à 21cm de la Réionisation 214
- 76 La relation redshift-age pour une cosmologie Planck 2015 221