

MANUSCRIT ENTAMÉ LE 29 JUIN 2017 À L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE
DE STRASBOURG.

PAUL RAND

DOMINIQUE AUBERT

COSMOLOGIE PHYSIQUE

ELLIPSES

Table des matières

<i>Etat des connaissances</i>	9
<i>Prélude : Cosmologie Newtonienne</i>	17
<i>Concepts Fondamentaux</i>	25
<i>Dynamique de l'Univers Homogène</i>	41
<i>l'Univers Chaud</i>	55
<i>Histoire thermique de l'Univers et Nucléosynthèse primordiale</i>	65
<i>Le Fond Diffus Cosmologique</i>	71
<i>Formation des grandes structures</i>	85
<i>Entropie et Univers</i>	95
<i>L'inflation et les premiers instants</i>	105
<i>Simulations Cosmologiques</i>	109

Bibliographie 119

Index 121

Introduction

This sample book discusses the design of Edward Tufte's books¹ and the use of the `tufte-book` and `tufte-handout` document classes.

1. Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 2001. ISBN 0-9613921-4-2; Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8; Edward R. Tufte. *Visual Explanations*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1997. ISBN 0-9613921-2-6; and Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7

Etat des connaissances

Ce chapitre est tiré de The Cosmological Parameters, Lahav et Liddle, arxiv1401.1389

L'objectif de ce chapitre est de faire un court panorama de l'état de nos connaissances sur les propriétés observées de l'Univers. Les chapitres suivant seront eux consacrés à l'élaboration des concepts et des théories qui permettent de rendre compte de ces propriétés observées.

Concernant notre connaissance des propriétés de l'Univers, elle repose souvent sur *l'interprétation d'observation au travers de théories et de modèles*. Par conséquent les propriétés décrites dans ce chapitre sont essentiellement valable dans le contexte du modèle standard de la cosmologie décrit dans le chapitre suivant. Si un changement de paradigme vient à opérer, rien n'empêche à priori que ces observations soit réinterprétées et donc conduise à modifier ce que nous savons de l'Univers.

Observation fondamentale : le décalage vers le rouge

L'observation première de la cosmologie, à l'origine même de l'émergence de la discipline au début du 20ème siècle, est la constatation que tous les objets observés à grande distance sont plus "rouges" qu'attendus. La mesure du spectre de ces objets indiquent que les systèmes de raies observés, parfois complexes, sont tous à des longueurs d'ondes plus importantes que ce que l'observation de ces mêmes éléments aurait donné dans un laboratoire. On définit le décalage vers le rouge ou "redshift" par la quantité z :

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (1)$$

où λ est la longueur d'onde observée et λ_0 celle mesurée en laboratoire. De plus ce rougissement est d'autant plus grand que la source est éloignée.

Dans le cadre du modèle standard de la cosmologie, ce rougissement est de nature *cosmologique* et traduit le phénomène *d'expansion*

de l'Univers. Dans ce processus d'expansion, toute distance prise entre 2 points de l'Univers est amené à évoluer et en l'occurrence à augmenter. Notons dès à présent que cette augmentation n'est pas le symptôme d'un déplacement des sources par rapport à leur espace local mais plutôt la conséquence d'une dilatation de l'espace entre l'observateur et la source. Cette dilatation agit également sur la longueur d'onde des photons en vol et conduit au rougissement observé. Cette dilatation agit aussi sur les densités, diluant au cours du temps de telles quantités et on peut montrer qu'elle produit des dilatations des durées, en allongeant tout types d'intervalles temporels. Enfin, cette interprétation cosmologique permet également d'expliquer pourquoi ce décalage vers le rouge est d'autant plus important que la source est éloignée.

Notons que comme le redshift croît avec la distance, z est de façon indirecte un indicateur de *distance* et comme la lumière nous parvient avec une vitesse finie et connue, z est également un indicateur de *l'époque* à laquelle la source est observée. En cosmologie, l'action de désigner un objet ou un phénomène par son redshift z implique à la fois une information spectrale, spatiale et temporelle.

Le processus d'expansion a débuté il y a 13.8 milliards d'années : c'est le *Big Bang*. Aux premiers instants, les distances étaient présumément courtes, l'Univers était donc de fait très dense. Régnaient également une température très élevée, qui fut amenée à décroître au cours du temps. De fait le modèle accepté permettant de décrire les origines de l'Univers est parfois dénommé modèle du *Big Bang chaud*.

Propriétés générales de l'Univers

L'Univers dans lequel nous vivons peut, semble-t-il, être décrit par une poignée de paramètres. La connaissance de ceux-ci, ajoutée à la connaissance de ce que nous croyons être les bonnes lois de la physique, permet d'expliquer une très grande partie des propriétés globales de l'Univers et également une grande partie des processus astrophysiques qui subissent la cosmologie qui les entoure.

Paramètres cosmologiques

Comme détaillé dans les chapitres suivant, l'Univers peut être décrit à un haut niveau de précision en considérant qu'il est homogène, isotrope et possédant une dynamique régie par les équations de la relativité générale. Toutefois cette description nécessite la connaissance à priori de certains paramètres qui permettent d'expliquer l'Univers tel qu'il est observé. A l'inverse l'observation de l'état actuel du cosmos met des contraintes sur la valeur de ces paramètres.

Paramètre de Hubble Le premier paramètre est le paramètre de Hubble H_0 , qui caractérise le taux d'expansion actuel. Sa valeur est d'environ 70 km/s/Mpc. On utilise parfois le paramètre de Hubble réduit h tel que $H_0 = 100h$ km/s/Mpc : sa valeur est proche $h \sim 0.7$.

Paramètres de densité Les différents types d'énergie présents dans l'Univers ont une grande influence sur ses propriétés et leurs contribution au budget énergétique total est caractérisé par des paramètres de densité Ω_i . En pratique c'est le rapport de la densité d'énergie de type i à une densité d'énergie de référence appelée *densité critique*. On distingue la densité de matière Ω_m , la densité de baryons (protons+neutrons(+électrons)) Ω_b , la densité de rayonnement Ω_r , la densité d'énergie des neutrinos Ω_ν et la densité d'énergie noire Ω_Λ . Il faut noter que la contribution de la matière contient celle des baryons, par conséquent $\Omega_m \geq \Omega_b$: actuellement on a $\Omega_m \sim 0.3$ et $\Omega_b \sim 0.05$, la différence étant la contribution apportée par une matière *non baryonique*, dite matière noire.

Spectre de fluctuations initiales L'Univers tel qu'observé actuellement n'est pas strictement homogène, en particulier sur des échelles inférieures à la dizaine de Mpc. Les galaxies et amas qui nous entourent trouvent leur origine dans des fluctuations initiales de densité de très faible amplitude. Ces fluctuations sont caractérisées par un spectre $P(k)$ qui donne la distribution des amplitudes des fluctuations de taille $L = 2\pi/k$. On suppose actuellement que celles-ci trouvent leur origine dans la période *d'inflation* qui prédit un spectre primordial de la forme :

$$P(k) \sim k^{n_s}, \quad (2)$$

n_s constitue également un paramètre cosmologique et les modèles inflationnaire lui prédise une valeur *proche mais différente* de 1. L'amplitude globale du spectre doit également être paramétrée, par exemple sous la forme d'une amplitude de fluctuation sur une échelle arbitraire de 8 Mpc, notée σ_8 . Notons enfin que les modèles d'inflations prédisent un fond d'ondes gravitationnelles, caractérisé par un spectre de fluctuations tensorielles, similaire à celui des fluctuations de densité (dites également scalaires). Le rapport d'amplitude entre fluctuations tensorielles et scalaires est noté r et sa valeur est supposée quasi-nulle.

Etat d'ionisation de l'Univers Le dernier paramètre canonique de la cosmologie permet de décrire l'état d'ionisation de l'Univers au cours de son histoire. Cet état se mesure en contraignant le nombre moyen de diffusions des photons sur les électrons libres du cosmos. Cette quantité est notée τ avec une valeur typique $\tau \sim 0.07$. L'essentiel

de ces électrons libres sont produits au cours de la réionisation de l'Univers au redshift $z_{\text{reion}} \sim 8$: dans les modèles les plus simples τ et z_{reion} sont directement liés.

Modèle minimal L'ensemble des paramètres décrit précédemment permettent de rendre compte d'une grande variété de propriétés observables. D'autre part, certaines hypothèses permettent encore de réduire le nombre de paramètres libres. Par exemple, l'inflation prédit une courbure intrinsèque nulle qui se traduit en pratique par $\sum_i \Omega_i = 1$. D'autre part l'amplitude des modes tensoriels (i.e. les ondes gravitationnelles issues de l'inflation) étant attendue comme très faible, on peut aisément poser $r = 0$. Enfin, le paramètre de densité de rayonnement Ω_r est très précisément mesuré, par la mesure de température précise du fond diffus ($T = 2.7255 \pm 0.0006$ K) et ne permet donc plus de latitude significative sur sa valeur. Enfin, en l'absence de physique exotique la densité d'énergie des neutrinos Ω_ν est directement liée à celle des photons. Au final, un modèle extrêmement solide peut être construit avec seulement 6 paramètres libres. Au choix typique de "sextet" est $(\Omega_b, \Omega_m, H_0, \sigma_8, n_s, \tau)$. Bien sûr d'autres combinaisons de paramètres libres sont possibles.

Principales sondes observationnelles

Les paramètres précédents sont contraints par l'observation croisée de différentes sondes observationnelles. La convergence de ces valeurs conduit à ce qui est communément nommé *le modèle de concordance*. Voici une liste (non-exhaustive) des principales sondes cosmologiques.

Mesure directe de H_0 Cette mesure s'effectue à l'aide de chandelles standards qui permettent de mesurer indépendamment la distance d'un objet extra-galactique et son redshift z . La chandelle de référence est la relation période luminosité des étoiles variables de type Céphéides : la mesure de la période permet de déterminer la luminosité intrinsèque et donc la distance. Les Céphéides sont des indicateurs primaires et permettent de calibrer des indicateurs secondaires : courbes de lumières des supernovæ, relation de Tully-Fisher, etc... Ce type d'indicateurs donne une valeur de $H_0 \sim 73$ km/s/Mpc. Le fond diffus cosmologique permet également une mesure indépendante de $H_0 \sim 67$ km/s/Mpc en légère tension avec les estimateurs précédents.

Supernovæ et cosmologie La grande luminosité des supernovæ permet leur détection à des distances cosmologiques. De plus certains types

de supernovæ, celles dite de type 'SN1A', ont un caractère quasi standard car elles résultent de l'explosion de naine blanche dans des systèmes binaires pour lesquelles il existe une forte corrélation entre luminosité et paramètres de la courbe de luminosité. L'accélération de l'expansion de l'Univers a été mise en évidence pour la première fois à l'aide de ce type d'indicateurs, en proposant pour la première fois la combinaison $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$. De plus ces mêmes indicateurs indiquent que la densité d'énergie noire est une constante, donc équivalente à une constante cosmologique.

Le fond diffus cosmologique Le fond diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background, CMB) est constitué des photons produits lors de la recombinaison, 380 000 ans après le Big-Bang. Il constitue le plus grand réservoir de photons du cosmos et présente une brillance homogène à des niveaux de 1 pour 100 000. Le CMB présente néanmoins de faibles inhomogénéités qui tracent les inhomogénéités de matière à cette époque. La structure spatiale (en fait angulaire sur le ciel) comprend des informations sur toute l'histoire de croissance des structures depuis le Big-Bang jusqu'à 380 000 ans plus tard et sur les processus de couplage entre le rayonnement et la matière. L'étude de ces fluctuations permet par exemple d'établir la platitude de la géométrie de l'Univers, fournit une mesure de la quantité de baryons Ω_b , confirme la nécessité d'une matière non-baryonique et l'absence d'évolution de l'énergie noire. Le CMB indique également que le spectre de fluctuation initial est consistant avec les modèles d'inflation et pour l'instant les modes tensoriels restent indétectables. Enfin le nombre de diffusion des photons sur les électrons est de l'ordre de $\tau = 0.08$ correspondant à une réionisation vers un redshift de $z \sim 9$. Le CMB constitue à l'heure actuelle la sonde la plus précise et la plus complète d'informations cosmologiques.

Grands relevés de Galaxies Les galaxies constituent des traceurs (biaisés) de la distribution de matière dans le cosmos. En théorie l'étude de la distribution spatiale de ces objets dans des grands relevés doit permettre de contraindre le déroulé du processus de croissance des structures de l'Univers et par extension la cosmologie. Parmi les mesures les plus spectaculaires autorisées par ce type de relevés est la détection des oscillations baryoniques acoustiques (BAOs) à bas redshift. Les BAOs sont déclenchés dans l'Univers pré-recombinaison et consistent en des ondes acoustiques dans le gaz baryonique entretenues par la compétition entre la pression de rayonnement et la gravitation produite par toute la matière. Ces BAOs sont gelés après la recombinaison et se manifestent sur des échelles de 150 Mpc dans toute distribution de matière qui échantillonnent ces distances, dont

le CMB et les grands relevés de galaxies. La cosmologie issue des relevés de galaxies permet généralement de lever les dégénérescence entre paramètres, par exemple pour les estimations issues du CMB, et sont donc d'une importance essentielle. De plus les relevés opèrent à différents redshifts z et offrent des vues à différents instants d'une même sonde cosmologique (par exemple sur les BAOs) et sont donc des outils extrêmement puissants.

Amas de Galaxies Les amas de galaxies constituent les plus grands objets qui se sont effondrés gravitationnellement. Ils peuvent comprendre plusieurs milliers de galaxies et atteindre des masses allant jusqu'à $10^{15} M_{\odot}$. Le décompte de ces objets et leur fonction de masse permet ainsi de contraindre le champ de matière aux échelles qui viennent seulement de passer le régime non linéaire. On extrait de l'étude des amas généralement les quantités $\sigma_8 \sim 0.8$ et $\Omega_m \sim 0.3$. Ces amas sont généralement des émetteurs X, dont l'émissivité permet de déterminer la masse. On les détecte également dans le signal du CMB, comme des distorsions locales du spectre via l'effet SZ.

Milieu Intergalactique La structure du gaz dans le milieu intergalactique (IGM) nous renseigne également sur la distribution spatiale de la matière à différent redshift, via la mesure du spectre de puissance de la matière $P(k)$. La sonde la plus commune de l'IGM est la *forêt Lyman-alpha*, qui se manifeste dans les spectres de quasars distants comme un ensemble de raies d'absorptions qui tracent la distribution de nuages absorbants le long de la ligne de visée. Dans le meilleur de cas, les BAOs peuvent même être retrouvés (c'est le cas par exemple vers $z \sim 2$) grâce à de multiples spectres pris le long de multiples directions vers des quasars différents. Une autre application de l'étude de l'IGM pour la cosmologie consiste à observer les tunnels d'absorptions dans les spectres de quasars à très grand redshift $z > 5.5$: l'Univers y est jeune ($t < 1$ Gyr) et encore neutre. La mesure de ces tunnels permet de contraindre l'histoire de réionisation de l'Univers et le paramètre cosmologique τ .

Lentilles Gravitationnelles Les lentilles gravitationnelles traduisent la déformation de l'espace temps à proximité d'objets massifs, ce qui conduit également à une déformation de la trajectoire des rayons lumineux entre une source et un observateur. Dans les cas les plus spectaculaire (strong lensing) cela conduit à la production d'images multiples et à de fortes déformations de types arcs gravitationnels. Sur de grandes portions du ciel, le signal est beaucoup plus modéré bien que l'on s'attende à ce que par exemple le CMB ou bien la distribution de galaxies à un certain z soient déformés par la distribution

de matière entre eux et nous observateurs (weak lensing). Ces faibles déformations peuvent toutefois être analysées statistiquement pour conduire à des contraintes sur la distribution de la matière déformante $P(k)$ et à l'amplitude des fluctuations associées σ_8 .

Une Histoire du Cosmos

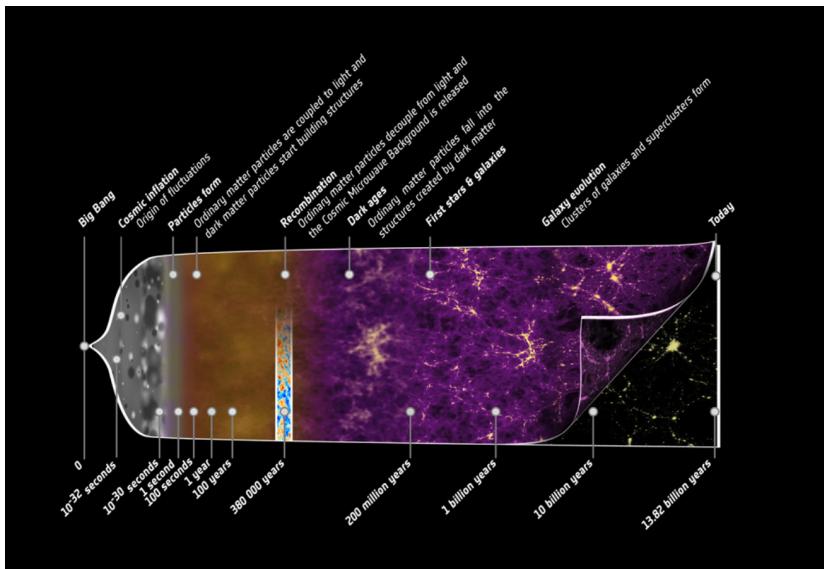


FIGURE 1: Les grandes étapes dans l'histoire du cosmos. Cette frise couvre environ 13.8 milliards d'années d'évolution depuis le Big-Bang (à gauche) jusqu'à nos jours (à droite). Crédit :Planck-ESA

L'Univers a connu une phase extrêmement dense et chaude, il y a 13.8 milliards d'années. Nos théories actuelles ne nous permettent pas actuellement de remonter au delà d'un temps de Planck ($\sim 10^{-44}$ s), durée sur laquelle les effets de gravité quantique pourraient se manifester, mais à cette incertitude près, l'histoire de l'Univers débute à cette époque, nommée le *Big-Bang*. A partir de cet instant, l'Univers va subir un effet d'expansion de l'espace et de baisse de sa température. Dans le cadre du modèle cosmologique standard, les grandes étapes de son évolution sont les suivantes (cf. figure 1) :

1. L'inflation $t \sim 10^{-34}$ secondes : cette phase est encore spéculative et consisterait en une phase d'expansion accélérée de l'Univers dans ces instants quasi-initiaux. Si ce processus a bien eu lieu, il permettrait d'expliquer naturellement la grande homogénéité initiale de l'Univers, sa platitude et donnerait une origine quantitative aux fluctuations initiales de matière qui sont à l'origine des grandes structures actuelles de l'Univers. Ce processus aurait également été la source d'ondes gravitationnelles qui seraient toujours détectables et dont la découverte signerait la confirmation d'une phase d'inflation.

2. l'Univers primordial $t < 3$ minutes : au cours de cette époque l'Univers reste extrêmement chaud et dense. Il s'y déroule des processus à très haute énergie : plasma quark-gluons, confinement des quarks, baryogénèse (i.e. l'annihilation matière anti-matière), découplage des neutrinos, nucléosynthèse des éléments jusqu'à l'hélium.
3. l'équivalence $z = 3400$ $t=50$ 000 ans : l'Univers voit son bilan énergétique passer d'une domination par les espèces relativistes (le rayonnement) à une domination par la matière.
4. La recombinaison $z = 1100$ $t=380$ 000 ans : l'Univers devient suffisamment froid ($T=3000$ K) et peu dense pour permettre la création d'atomes neutres et l'émission du fond diffus cosmologique (CMB).
5. les âges sombres $1100 > z > 30$: l'Univers est rempli de gaz froid et neutre. Le gaz se structure sous l'effet de la gravitation mais n'est pas encore en mesure de former des étoiles.
6. la réionisation $30 > z > 6$ le gaz parvient à des densité lui permettant de se convertir en étoiles. Ces étoiles vont émettre un rayonnement ionisant qui vont réioniser ($x_{\text{HI}} \sim 0.0001$) et réchauffer totalement l'Univers ($T \sim 10000$). C'est les stades initiaux de la formation des galaxies.
7. la formation des galaxies et des grandes structures $30 > z > 0$ à partir de la formation des première étoiles vont se former les premières galaxies. Elles vont croître de façon hiérarchique par assemblage de petits objets pour former les plus gros, sous l'effet de processus d'instabilité gravitationnelle dominés par une matière non baryonique. Les amas de galaxies vont apparaître vers $z = 1$.
8. Accélération de l'expansion cosmique $z \sim 0.3$, $t \sim 10$ milliards d'années. Le bilan énergétique de l'Univers devient dominé par l'énergie noire, induisant une expansion accélérée de l'Univers.
9. Aujourd'hui $z = 0$. L'Univers a 13.8 milliards d'années.

Prélude : Cosmologie Newtonienne

Ce chapitre est à la fois optionnel et indispensable : optionnel car le reste de l'ouvrage n'en dépend pas et décrit bien plus en détail les quelques points abordés. Il n'en reste pas moins indispensable en ce qu'il permet d'introduire facilement et simplement beaucoup de concepts utilisés couramment en cosmologie.

Ce prélude porte sur un modèle *Newtonien* de cosmologie. Ce modèle possède une portée limitée mais permet une introduction progressive à certains concepts et à certains modes de raisonnement propres à la cosmologie. On discutera de sa validité et des hypothèses sous-jacentes en fin de chapitre, après en avoir exploré tous les recoins.

CONSIDÉRONS un 'gaz de galaxies' homogène et isotrope au sein duquel on trace un volume sphérique de rayon R et d'origine O . Au sein de ce volume chacune de ces galaxies est repérée grâce à un rayon vecteur $r(t)$, variable au cours du temps. Ce modèle repose sur l'hypothèse que toutes ces galaxies vont voir leur position évoluer *radialement* par rapport à O suivant une loi homothétique :

$$r(t) = a(t)r_0. \quad (3)$$

$r(t)$ est le rayon à un instant donné tandis que r_0 est le rayon mesuré pour chacune de ces galaxies à un instant arbitraire t_0 . La dépendance temporelle est encodée dans le facteur d'échelle, $a(t)$: c'est un facteur sans dimension et dont on voit que par définition :

$$a(t_0) = a_0 = 1. \quad (4)$$

Cet instant t_0 peut être choisi arbitrairement mais il est d'usage de dire qu'il correspond au *moment présent* : pour $t < t_0$ on regarde le système dans le passé et $t > t_0$ il s'agit du futur. De même, toute quantité indiquée avec 0 est prise à sa valeur aujourd'hui et par exemple $r(t_0) = r_0$.

Dès à présent, on peut constater que la notion de distance à l'origine n'est pas univoque : elle peut désigner la distance à un moment donné ou bien la distance variant au cours du temps. Pour lever cette

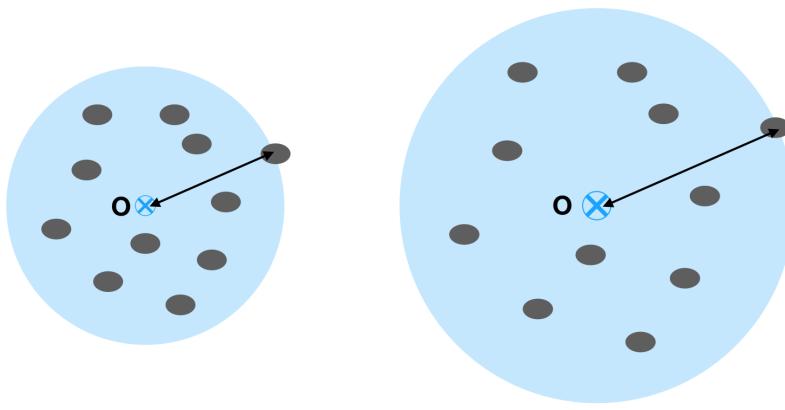


FIGURE 2: Le modèle newtonien. La sphère représente une portion de gaz de galaxies, uniforme et isotrope centrée sur O . Seules quelques galaxies sont représentées ici sous forme d'ellipses : la plus éloignée d'entre elles fournit le rayon maximum de notre *volume de contrôle* (montré ici sous la forme d'une double flèche). Deux instants sont représentés ici, le temps s'écoulant de la gauche vers la droite et le volume subit alors une transformation homothétique. Notée que la galaxie la plus éloignée reste toujours la même à tous les instants.

ambiguité, on appelle $r(t)$ la distance physique : à chaque instant elle représente l'intervalle qui sépare physiquement une galaxie de l'origine. De même on appelle r_0 la distance comobile : c'est la distance mesurée à un instant de référence t_0 , mais on peut également la considérer comme une mesure effectuée dans un système de coordonné en mouvement avec la matière (d'où le nom comobile). Enfin, le facteur d'expansion peut également être envisagé comme une mesure du rayon en unité du rayon comobile.

Si on considère maintenant le bord externe de notre volume de contrôle $R(t)$, celui ci subit la même loi d'expansion : $R(t) = a(t)R_0$. Ce volume de contrôle est sphérique, il évolue au cours du temps et son expression précise est :

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}R(t)^3 = a(t)^3 \frac{4\pi}{3}R_0^3 = a^3 V_0. \quad (5)$$

Son volume varie en a^3 , comme tous les volumes attaché à de la matière. De même on peut aisément démontrer que sa surface varie en a^2 comme toutes les surfaces attachées à de la matière : dans les deux cas, la dépendance de ces quantités par rapport aux longueurs impose une certaine dépendance par rapport au facteur d'expansion. Ce type d'arithmétique est très fréquente en cosmologie et peut être aisément étendue à d'autres quantités, comme par exemple la densité de galaxies dans notre volume de contrôle :

$$n = \frac{N_{\text{gal}}}{\frac{4\pi}{3}R(t)^3} = a^{-3}n_0. \quad (6)$$

A cause de la dilution des longueurs et des volumes, la densité décroît au cours du temps avec une puissance -3 du facteur d'expansion.

2. se faisant on considère que ce rayon est 'attaché' ou ancré à une galaxie, la galaxie la plus externe

Notons dès à présent, que la masse ou le nombre de galaxies restent invariante malgré l'évolution de des longueurs. Dit autrement, le flux net au travers de la surface de contrôle est nul : aucune galaxie ne rattrape ou ne se fait dépasser par une galaxie initialement plus interne ou plus externe. En effet si $R_{0,a} < R_{0,b} < R_{0,c}$ alors à chaque instant $R_a < R_b < R_c$.

LA CINÉMATIQUE de ce système mérite aussi d'être étudiée. La vitesse de fuite de chacune de ces galaxies est simplement donnée par :

$$\dot{r} = r_0 \dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} r. \quad (7)$$

A un instant t donné, la vitesse de fuite est donc directement proportionnelle à la distance d'une galaxie : plus elle est éloignée de l'origine, plus elle s'en éloigne rapidement. Cela est cohérent avec l'absence de flux net au travers des limites du volume de contrôle. Le rapport de proportionnalité varie au cours du temps et est noté $H(t)$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (8)$$

Dans ce cadre newtonien, cette fonction est l'analogie à la fonction de Hubble que nous rencontrerons par la suite et nous retrouvons cette propriété observée dans notre univers : la vitesse de récession des objets est proportionnelle à leur distance :

$$v = Hr \quad (9)$$

Cette loi est linéaire, ce qui a une grande importance. En effet, si la loi avait été quadratique ($v \sim r^2$) ou bien à vitesse de récession constante ($v \sim c$), on peut aisément montrer que l'homogénéité initiale est détruite, ce qui n'est pas une propriété désirable de notre modèle d'Univers. Par ailleurs, on peut également démontrer que cette hétérogénéité serait dépendante du point de vue, de l'origine utilisée, ce qui est une autre propriété indésirable. Cette loi de Hubble, linéaire, est la seule qui permette de conserver une homogénéité et une égalité des points de vues.

L'ÉNERGÉTIQUE du système nous est à présent accessible. Calculons la quantité d'énergie disponible dans ce gaz de galaxies, que ce soit sous forme cinétique ou potentielle. L'énergie cinétique est obtenue en sommant l'énergie cinétique de chaque coquille de rayon r et d'épaisseur dr en récession³ :

$$E_c = \int_0^R dE_c = \int_0^R \frac{1}{2} \rho v^2(r) 4\pi r^2 dr. \quad (10)$$

En utilisant la loi de Hubble (Eq. 9) et la relation entre masse et densité, on obtient aisément l'expression suivante pour l'équation cinétique totale du gaz en expansion⁴ :

3. ρ désigne la densité massique de galaxies. Elle est indépendante de r , le système étant homogène

4. M désigne la masse dans le volume de contrôle (conservée au cours du temps) et R le rayon de ce dernier

$$E_c = \frac{3}{10} M H^2 R^2. \quad (11)$$

On y retrouve aisément une dépendance en vitesse au carré. De même l'énergie potentielle totale de gravitation se trouve en intégrant l'énergie potentielle de chaque coquille⁵ :

$$E_p = \int_0^R dE_p = - \int_0^R \frac{GM(< r)}{r} dm. \quad (12)$$

Ayant $M(< r) = 4/3\pi\rho r^3$ et $dm = 4\pi r^2 \rho dr$, on obtient :

$$E_p = - \frac{16\pi^2 G}{3} \rho^2 \frac{R^5}{5} = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (13)$$

expression pour laquelle on retrouve bien une forme d'énergie potentielle de gravitation.

5. L'énergie potentielle de gravitation est considérée nulle à l'infini. L'énergie potentielle d'une coquille de rayon r ne dépend que de $M(< r)$, la masse à l'intérieur de son rayon.

Quelques éléments de dynamique

Après avoir étudié ces quelques propriétés simples de notre modèle Newtonien, nous allons procéder à une première analyse de son évolution. Pour ce faire nous nous en tiendrons à une simple analyse énergétique. A partir des expressions des énergies cinétiques et potentielles, calculons l'énergie mécanique totale de notre système auto-gravitant :

$$E = E_c + E_p = \frac{3}{10} M H^2 R^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (14)$$

Comme tout système auto-gravitant, sa stabilité nous est donnée par le signe de son énergie mécanique. Une énergie totale positive va conduire à un système libre, avec une expansion infinie (voire asymptotiquement infinie si elle est exactement nulle) tandis qu'une énergie négative correspond à celle d'un système lié, voué à s'effondrer au bout d'un certain temps.

QUELLE CONDITION faut-il pour avoir un système lié ? Ecrivons l'inégalité correspondante :

$$\frac{3}{10} M H^2 R^2 < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (15)$$

Cette inégalité peut se réécrire sous la forme d'une condition sur la densité :

$$\frac{3H^2}{8\pi G} < \frac{M}{4/3\pi R^3} = \rho. \quad (16)$$

Dit autrement si la densité de notre gaz de galaxies est supérieur à une certaine densité critique, le système est voué à atteindre un rayon limite et à s'effondrer. Cette densité critique est donnée par :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (17)$$

et correspond exactement à la densité critique obtenue par un traitement relativiste exact. De même on montrera qu'un gaz de galaxies sous-dense, avec $\rho < \rho_c$, n'est pas lié et connaîtra une expansion illimitée.

Compte tenu du rôle joué par cette densité critique, il est d'usage d'exprimer les densités massiques en unités de cette densité. On parle alors de paramètre de densité Ω :

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (18)$$

Un système lié voué à l'effondrement équivaut à $\Omega > 1$ tandis qu'un système en expansion infinie équivaut à $\Omega < 1$. Le cas limité $\Omega = 1$ correspond à un comportement asymptotique avec une expansion nulle à l'infini. A nouveau, cette relation sera très exactement retrouvée dans le cadre d'un traitement relativiste complet.

Equation de Friedmann

Ce paramètre de densité Ω intervient également dans l'équation différentielle qui régit l'évolution du facteur d'expansion $a(t)$. On rappelle que ce terme encode toute l'évolution temporelle des distances dans notre modèle newtonien d'Univers, via la relation $r(t) = a(t)r_0$. Prenons la galaxie la plus lointaine⁶, dont la distance à l'origine est donnée par $R(t)$. Comme la mécanique newtonienne peut s'appliquer, le principe fondamental de la dynamique donne⁷ :

$$\ddot{R} = -\frac{GM(< R)}{R^2}. \quad (19)$$

En l'absence de flux net au travers de R , la masse $M(< R)$ reste constante ce qui permet d'intégrer simplement en multipliant par $2\dot{R}$:

$$2\dot{R}\ddot{R} = -2GM\frac{\dot{R}}{R^2} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{K}{R^2} \quad (21)$$

où K désigne une constante d'intégration. On reconnaît alors dans le terme de gauche le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a = \dot{R}/R$. Introduisons également la valeur de ce paramètre aujourd'hui $H_0 = H(t_0)$:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \frac{\rho_0}{a^3} + \frac{K}{(R_0 H_0)^2 a^2} \right). \quad (22)$$

On reconnaît l'expression de la densité critique prise aujourd'hui ρ_{c0} dans le terme lié à la densité de matière ρ_0 . De plus le second terme lié à la constante d'intégration doit également être sans dimension et

6. ce choix est arbitraire, le même raisonnement peut être tenu pour n'importe quelle galaxie à l'intérieur du volume de contrôle

7. notons que le mouvement est purement radial en l'absence de mouvements initiaux tangentiels. $M(< R)$ désigne la masse à l'intérieur du rayon R et la force ressentie par la galaxie est celle créée par toute cette masse rassemblée en O.

constant, à la dépendance en a^{-2} près. Pour ces raisons, cette équation est généralement présentée sous la forme suivante :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} \right). \quad (23)$$

qui donne l'évolution du paramètre de hubble au cours du temps⁸, en fonction du contenu en masse, Ω_m , de notre modèle d'Univers.

La constante K a généré un terme supplémentaire qui ne dépend que des conditions aux limites et qui doit satisfaire :

$$\Omega_m + \Omega_K = 1. \quad (24)$$

Ce terme n'est pas libre et correspond à une quantité qui possède une dépendance en longueur⁹ : il correspond à un terme de courbure intrinsèque. L'équation 23 contient toute l'information pour permettre de calculer $a(t)$, connaissant Ω_m et H_0 : elle constitue l'une des formes de l'équation de Friedmann .

PRENONS UN UNIVERS CRITIQUE : dans ce type de modèle, $\Omega_m = 1$ et produit une dynamique que l'on sait être asymptotiquement en expansion pour un temps infini. L'équation 23 est alors très simple à intégrer à partir de¹⁰ :

$$\dot{a} = \frac{H_0}{\sqrt{a}} \quad (25)$$

ou bien

$$\sqrt{a} da = H_0 dt. \quad (26)$$

En intégrant entre $t = 0$ et un temps t quelconque on obtient la loi d'expansion de ce modèle d'Univers :

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (27)$$

On reconnaît une évolution temporelle lente asymptotique avec comme dérivées du facteur d'expansion :

$$\dot{a} \sim t^{-1/3} \quad (28)$$

$$\ddot{a} < 0. \quad (29)$$

La dérivée tend vers 0 à l'infini et la courbure est négative, donnant une expansion qui décélère : ce comportement est typique des Univers remplis de matière. Ce modèle est appelé modèle de *Einstein-de Sitter* .

L'AGE DE L'UNIVERS s'obtient également très facilement : il suffit de prendre le temps correspondant à un facteur d'expansion unité, c'est à dire le temps qu'il s'est écoulé depuis $t = 0$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (30)$$

8. via la dépendance temporelle en $a(t)$

9. par analogie avec le terme en densité qui varie en a^{-3} alors que celui ci varie en a^{-2}

10. ici on ne considère que la solution croissante, correspondant à l'Univers observé

On constate alors que l'inverse du facteur de Hubble actuel est l'âge de l'Univers à un facteur proche de 1 près. De fait on nomme cette quantité le *temps de Hubble*¹¹ :

$$t_H = H_0^{-1}. \quad (31)$$

Dans tous les modèles d'Univers, cette quantité constitue une bonne approximation de l'âge de l'Univers. De fait toute quantité temporelle qui est désigné comme étant de l'ordre du temps de Hubble est implicitement désignée comme une quantité longue ou lente en évolution. C'est l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'évolution de l'Univers.

Commentaire sur la validité du modèle

A ce stade, on peut s'interroger sur les conditions d'applications de ce modèle newtonien. Rappelons que nous considérons une sphère de gaz de galaxies dans un Univers homogène : il s'avère que dans certains cas, le traitement newtonien est exact¹². En effet, faisons l'expérience de pensée qui consiste à retirer une sphère de matériau à cet ensemble homogène : quelle est la structure de l'espace-temps au sein de ce creux nouvellement créé ? La solution est donnée par le théorème de Birkhoff : l'espace-temps y est plat¹³. Par conséquent lorsque la matière est remise dans ce creux la mécanique y est celle d'un espace plat, à savoir Newtonienne.

Ceci n'est toutefois vrai qu'à certaines conditions, la première étant que la matière que nous y remettons ne courbe pas significativement l'espace : on peut par exemple imposer que l'énergie potentielle de gravitation est faible par rapport à son énergie de masse :

$$\frac{GM}{Rc^2} \ll 1 \quad (32)$$

Par ailleurs, il faut la taille de notre volume soit petite par rapport à l'Horizon, pour que les effets de propagation de la lumière (et donc de l'interaction gravitationnelle) ne se fassent pas sentir :

$$\frac{RH}{c} \ll 1, \quad (33)$$

ce qui est équivalent à considérer une vitesse de fuite très inférieure à la vitesse de la lumière. Donc de fait, le système ne peut être ni trop grand (pour éviter les grandes vitesses) ni trop petit (pour éviter les trop grandes densités). Par contre dans le cadre de ces hypothèses, le traitement est exact.

Une autre difficulté rencontré par ce problème est qu'il est limité à l'action de la matière seule : qu'en est-il d'un modèle à l'intérieur duquel se trouve également du rayonnement ou bien toute autre forme

11. Notons que la loi de Hubble $v = Hr$ suggérait déjà que H constituait l'inverse d'un temps

12. voir par exemple *Physical Cosmology* de P.J.E Peebles

13. De la même façon, quel est le champ newtonien de gravitation créé à l'intérieur d'une sphère creuse. D'après le théorème de Birkhoff, la réponse est un champ de gravitation nul, dont l'équivalent relativiste est une absence de courbure de l'espace temps.

d'énergie ? Le cadre newtonien ne peut répondre à cette question or l'on comprend bien que ces autres types d'énergie doivent aussi contribuer à créer de la gravitation, comme indiqué par la relativité générale. On peut faire appel de façon ad hoc à un résultat relativiste en disant que toute forme d'énergie va contribuer sous la forme d'une densité *équivalente* de matière de la forme¹⁴ :

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{c^2}(\epsilon + 3P). \quad (34)$$

Dans le cas d'une matière froide¹⁵, on retrouve $\tilde{\rho} = \rho$. Pour le cas d'un gaz de rayonnement on peut démontrer que la densité équivalente est $\tilde{\rho} = 2\epsilon/c^2$.

^{14.} ϵ désigne la densité d'énergie associé à l'énergie en question et P est sa pression

^{15.} sans pression

Concepts Fondamentaux

Définition de l'Univers et de la Cosmologie

On considère qu'il faut 3 constituants pour définir complètement un Univers :

1. un contenu en énergie, qui peut être sous diverses formes,
2. un jeu de lois physiques qui régit l'entrejeu des différentes énergies,
3. un espace-temps, qui est la scène sur laquelle cet entrejeu prend place.

L'enjeu de la *cosmologie* est précisément d'étudier le contenu, les lois physiques et la structure de l'Univers. Par conséquent la cosmologie est liée aux aspects théoriques les plus fondamentaux de la physique mais également à des problèmes astrophysiques et il existe plusieurs manières de faire de la cosmologie. On cherchera par exemple à déterminer quelles sont les lois à l'œuvre dans le cosmos (point 2), ce qui est davantage du domaine de la physique théorique, ou bien à déterminer les paramètres (point 3) qui caractérisent la structure spatio-temporelle (e.g. sa forme ou bien son histoire) de l'Univers comme en cosmologie observationnelle. De même comprendre comment les différentes formes d'énergie (matière, lumière, etc...) s'organisent ou évoluent au cours du temps (point 1) (e.g. comment les grandes structures de l'Univers se mettent en place) permet d'avoir un éclairage sur les deux autres aspects du problème cosmologique.

Principe Cosmologique

L'objectif de la cosmologie est ambitieux et cette ambition n'est pas sans obstacles. L'un des problèmes les plus important est notre incapacité à garantir que ce que nous observons autour de nous reste valable à l'échelle du cosmos, *y compris dans les régions de l'Univers qui nous serons à jamais inaccessibles*. Par exemple, rien ne garantit absolument que la neutralité électrique soit vraie dans tout le Cosmos

ou bien que la densité de matière mesurée dans notre Univers observable soit effectivement celle de l'Univers entier. Aujourd'hui, il ne viendrait à l'idée de personne d'attribuer au cosmos une densité égale à celle de la Terre, pour autant c'est peu ou prou ce que nous faisons en cosmologie.

Pour autant, *nous n'avons pas le choix*. Par définition, il est impossible de connaître les propriétés de régions dont on ne peut extraire de l'information et toujours par définition, il existe de telles régions dans l'Univers. Quelle option reste-t-il à la personne désireuse de faire de la science à l'échelle de l'Univers, si ce n'est de supposer que ce qui nous est accessible est valide dans tout le cosmos ? En l'absence d'une telle hypothèse, il est tout simplement impossible de faire de la science avec l'Univers.

Cette supposition est à la base du *Principe Cosmologique*. Si nous revenons sur les 3 constituants de la section , il est aisément de reconnaître que cette supposition implique les contenus universels en énergie doivent être le même que celui que nous constatons autour de nous. De même, la structure spatio-temporelle universelle doit être la même que celle que nous constatons dans l'Univers observable. Toutefois cette hypothèse "universaliste" implique également que nous supposons que les mêmes lois de la nature s'appliquent dans tout le cosmos, y compris dans les régions qui nous sont inaccessibles ou pour lesquelles l'information n'est pas extractible. Le *Principe Cosmologique* que nous retiendrons est le suivant : le contenu en énergie de l'Univers, sa structure spatio-temporelle et les lois qui y opèrent sont les mêmes partout et par conséquent sont celles que nous constatons autour de nous. Notons tout de suite que cette universalité des composants s'applique aux échelles pertinentes pour la cosmologie et n'empêche pas des départs locaux aux valeurs universelles.

Tautologie

A ce stade, il nous semble que la cosmologie peut être définie par une tautologie : *la cosmologie est la science qui met le principe cosmologique à l'épreuve*. Si nous nous retrouvons dans une situation qui reste inexplicable dans ce que nous croyons être le jeu universel de contenu énergétique, spatio-temporel et "législatif" de l'Univers, alors les options sont réduites :

- soit nous continuons de croire que le principe cosmologique reste valide et c'est le détail de son contenu qui doit être révisé. Par exemple on modifiant les lois de la physique pour qu'elles rendent compte des nouveaux phénomènes tout en continuant à être une bonne description des processus locaux. C'est la voie scientifique standard.

- soit nous renonçons au principe cosmologique et donc à l'universalité de ses composants et nous renonçons en même temps à l'ambition de décrire tout l'Univers avec la science que nous connaissons.

Principe cosmologique pragmatique

Le principe cosmologique est souvent décliné dans une version plus pragmatique qui est la suivante :

1. la gravitation est correctement décrite par la théorie de la relativité générale d'Einstein,
2. l'Univers est homogène et isotrope.

Le point 2 revient à appliquer au cosmos ce que nous voyons de l'état de l'Univers autour de nous (contenu, géométrie, évolution etc...). Le point 1 revient à définir les lois universelles de la gravité : une emphase particulière est mise sur cette interaction car elle est la seule qui *in fine* est toujours de portée infinie et donc cosmologique. Par ailleurs, une fois la théorie de relativité générale choisie comme description correcte de la gravité, le point 2 a des conséquences que la relativité générale sait décrire dans le cadre d'étude qu'elle fixe.

Relativité Générale : notions

La gravitation est centrale à l'étude de la cosmologie car elle est la seule "force" dont l'action ne peut être écrantée et dont la portée soit infinie. De fait, elle est la seule force qui soit effective lorsque des échelles cosmologiques sont abordées. De plus la gravitation peut être décrite comme la manifestation des propriétés de l'espace-temps. Or il s'avère que la structure spatio-temporelle de l'Univers n'est pas triviale comme l'indique par exemple le phénomène d'expansion de l'Univers. Par conséquent l'observation de l'expansion du cosmos nous dit également des choses sur la façon dont la gravitation est à l'œuvre dans le cosmos. Compte tenu du rôle central de la gravitation pour les études cosmologiques, nous allons faire un aperçu de la théorie de la relativité générale et sur son application dans le cadre cosmologique

Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence existe sous forme de différentes saveurs. La plus triviale est la suivante, où l'on considère le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{F_z}{m_i} = \ddot{z}. \quad (35)$$

Ici l'on explique que l'accélération suivant la direction z est *proportionnelle* à la force appliquée au système étudié et *inversement proportionnelle* à un coefficient, que l'on nomme *masse inertie*. Par conséquent, deux systèmes soumis à la même force vont réagir différemment selon la valeur du coefficient m_i qui les caractérisent.

Intuitivement on comprend assez rapidement que ce coefficient est lié à la quantité de matière que le système possède, d'où sont qualificatif de masse : un système fortement chargé en matière réagira moins qu'un système ayant une quantité de matière plus faible. Maintenant considérons l'expression de F_z si cette force se trouve être une force de pesanteur :

$$F_z = m_g g \quad (36)$$

où g est la norme du champ de pesanteur. Cette force F_z est d'autant plus forte que le coefficient m_g est important : ce coefficient caractérise également la quantité de matière dans le système et un système avec une grande quantité de masse va naturellement avoir une valeur élevée de m_g et donc une pesanteur importante. Cette masse m_g est aussi dénommée *masse grave*.

A ce stade, nous avons donc deux coefficients qui tracent la quantité de matière dans un système physique : le premier m_i lié aux équations de la dynamique, et sans aucune référence à priori à une force de pesanteur (ou de gravitation), et le second m_g qui lui pour le coup est complètement lié à la présence d'un champ de pesanteur. Il faut alors se rappeler qu'à priori, *rien* ne nous informe d'une quelconque relation quantitative entre les deux et qu'il faut postuler une éventuelle relation entre les masses inertielles et graves.

Toutefois, l'expérience nous indique que tous les systèmes soumis à un champ de pesanteur donné semblent posséder la même accélération \ddot{z} et ceci quelles que soient leur masse inertie et grave. Ceci implique que $m_g \sim m_i$. Plutôt qu'une vague égalité, le principe d'équivalence stipule une exacte identité entre ces deux quantités :

$$m_g = m_i. \quad (37)$$

Cette égalité est fortement suggérée par l'expérience, mais ne peut être démontrée être absolument valide. Selon ce principe, la quantité de matière intervient au travers d'une valeur unique qui est *la masse* $m = m_g = m_i$. On peut noter dès à présent que cette égalité confère à la gravitation un rôle spécial : la masse *inertie* est lié à la loi décrivant la dynamique des systèmes, y compris en l'absence de gravitation. Par exemple, une particule chargée dans un champ électrique verra son accélération modulée en q/m_i . La force électrostatique, comme toutes les autres forces subit l'impact de ce coefficient d'origine dynamique. D'après le principe d'équivalence, la gravitation quant à elle possède *dans sa propre expression* ce même coefficient,

avant expression d'un quelconque problème dynamique. Elle dispose donc d'une façon innée d'une sorte d'élément d'information sur la façon dont la dynamique est régie, information que ne possède pas les autres interactions.

Référentiel inertiel

L'équivalence entre masse grave et inertuelle a plusieurs conséquences. Comme déjà mentionné, elle permet de rendre compte de l'universalité de l'accélération de systèmes différents dans un même champ de pesanteur. C'est la fameuse expérience de la tour de Pise où des masses différentes parviennent au sol au même instant car étant accélérée exactement de la même façon. Il en découle également que si l'on fait le choix d'étudier la chute libre de plusieurs objets dans un référentiel lui même en chute libre, ces objets apparaissent tous comme en "flottaison" comme si l'on avait annulé la gravitation dans ce référentiel et ceci même si ils sont tous très différents. A nouveau cela n'est possible que parce que la chute libre dans un champ de pesanteur est la même quel que soit l'objet considéré. Ce type de référentiel est appelé *référentiel inertiel*. Généralement un tel référentiel ne peut être construit que localement et par exemple dans un champ de pesanteur radial, il est possible de construire une collection de référentiel inertIELS qui annuleront la gravité localement mais aucun de ces référentIELS ne peut annuler globalement le champ de pesanteur. A ce titre il est usuel de se référer à ce type de référentiel sous l'appellation *référentiel localement inertiel*. Cette possibilité d'annuler localement la gravité est intrinsèquement lié à l'égalité $m_i = m_g$. Ce lien est si fort que l'on va considérer que *la possibilité d'annuler la gravitation par un choix approprié de référentiel est aussi un énoncé du principe d'équivalence*.

Notez qu'à l'aide d'un choix approprié de référentiel on peut également créer de la gravité. Si des systèmes libres sont placés dans un référentiel uniformément accéléré, ils percevront leur mouvement relatif comme induit par une force de gravitation. *De façon générale il est impossible localement de distinguer un référentiel uniformément accéléré d'un champ de gravitation.*

Qu'est-ce que la gravitation ?

A nouveau, on peut créer ou "détruire" un champ gravitationnel par un choix approprié de référentiel. Or un référentiel pourrait se résumer à un ensemble de règles et d'horloges ayant un certain comportement donc à un objet qui n'a qu'une nature géométrique et non pas physique. A partir de cette constatation, il est tentant de considérer alors que la gravitation n'est qu'une manifestation géométrique

de l'espace dans lequel évoluent les systèmes. C'est le choix que fait la théorie de la relativité générale (RG par la suite), où la gravitation n'est pas une force à proprement parler mais davantage une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. En RG, les systèmes se déplacent librement dans une géométrie qui, si elle est non triviale, produit des effets qui peuvent être interprétés comme le produit d'une interaction. A ce titre on peut dire que *la gravitation n'existe pas*, elle n'est qu'une interprétation d'un effet de nature fondamentalement géométrique.

Ainsi, on verra par la suite que c'est la courbure de cette géométrie qui produit les effets gravitationnels. A l'inverse, une géométrie sans courbure, i.e. une géométrie plane, produit un environnement sans effets de gravitation. Or il est aisément d'imaginer qu'il est toujours possible de trouver *localement* un jeu de coordonnées qui rendent une géométrie plane, i.e. une transformation *locale* qui permette de détruire la gravitation. Par analogie, une fonction régulière peut être approximée comme une collection de tangentes sur lesquelles il n'y a pas de courbures et qui localement sont des représentations exactes de la fonction originale. C'est une manifestation du principe d'équivalence :*il est toujours possible de trouver une transformation locale qui rende la géométrie de l'espace-temps plane*. Plus précisément c'est parce que l'on considère la gravitation comme étant de la géométrie que le principe d'équivalence se trouve naturellement réalisé.

Cette vue de la gravité comme géométrie de l'espace-temps est l'école classique d'interprétation de la RG. Elle n'est toutefois pas sans poser problème par exemple si l'on cherche à quantifier la gravitation. Si cette dernière est pure géométrie alors on peut arguer qu'il n'y a rien à quantifier et par exemple il n'y a pas de raison à priori d'invoquer l'existence d'un boson porteur de l'interaction, coupant court à toute tentative de quantification et donc d'unification. Si l'on estime que la quantification est nécessaire alors la vision géométrique n'est qu'une interprétation, certes très puissante, d'un processus qui n'est pas pure géométrie. Dans ce cadre le principe d'équivalence devient préminent : il faut le supposer réalisé par un mécanisme encore inconnu et sa réalisation conduit à une possible interprétation géométrique. L'approche classique vue précédemment raisonne de façon inverse.

Espace-temps et Métrique

La théorie de la relativité générale décrit la gravitation comme une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. Cet espace temps possède 4 dimensions, une de temps et trois d'espace. L'outil mathématique permettant de décrire cette géométrie est la géométrie dif-

férentielle. Une quantité centrale est *la métrique* : fondamentalement elle est l'outil qui permet de calculer des distances (des produits scalaires) dans une géométrie arbitraire. En notation d'Einstein, le calcul d'une distance s'écrit de la façon suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (38)$$

où les indices μ, ν courrent sur les indices des coordonnées, ds^2 est un scalaire donnant la distance couverte par un intervalle (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) .

La quantité $g_{\mu\nu}$ est la métrique et permet de relier la distance aux composantes de l'intervalle. Si la géométrie est plane, la métrique aura une certaine forme et si la géométrie est courbe et complexe, cette expression sera différente. En géométrie euclidienne plane à 3D le calcul de distance est le suivant :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (39)$$

En géométrie de Minkowski, correspondant à l'espace-temps plat utilisé par la relativité restreinte, le calcul devient

$$ds^2 = (dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad (40)$$

où $dx^0 = cdt$ est la composante liée au temps. L'expression générale est elle donnée par Eq. 38.

Cette métrique synthétise la structure spatio-temporelle de la variété que l'on cherche à étudier. Pour faire de la cosmologie, il faut ainsi se doter d'une telle métrique, la plus à même de représenter ce que l'on croit être les caractéristiques génériques du cosmos.

Métrique de Friedman-Robertson-Walker

En se rappelant l'énoncé du principe cosmologique pragmatique, la métrique devant servir à décrire l'Univers doit refléter les propriétés d'homogénéité et d'isotropie. La métrique la plus générique satisfaisant ces contraintes est la métrique de Friedman-Robertson-Walker (FRW). A l'aide de celle-ci, l'intervalle de distance 4D est donné par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr_0^2}{1 - Kr_0^2} + r_0^2 d\theta^2 + r_0^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (41)$$

On note que cette métrique fait usage d'un système de coordonnées sphériques (r_0, θ, ϕ) pour sa partie espace. On note également que par rapport aux exemples Euclidien et Minkowskien, FRW couple explicitement les parties temporelles et spatiales, via le facteur d'expansion $a(t)$.

r_0 est une *distance comobile* : c'est une coordonnée de nature spatiale et indépendante du temps. Ici elle désigne une distance radiale

prise à partir de l'origine du système de coordonnées et est également prise en compte pour calculer les contributions à l'intervalle des séparations angulaires $d\theta$ et $d\phi$. Le paramètre K est un paramètre de courbure auquel on peut éventuellement associer un rayon de courbure $R_K = K^{-1/2}$.

Si l'on considère deux événements sur une même ligne de visée (donc avec $d\theta = d\phi = 0$), l'intervalle peut se synthétiser sous une forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2, \quad (42)$$

avec

$$dr = \frac{a(t)dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (43)$$

Ici dr désigne la distance *physique* de la partie spatiale (donc 3D) de l'intervalle que nous étudions. Cette distance dépend du temps, donc de l'instant considéré, et est modulé par une éventuelle courbure. A proximité de l'origine ($r_0 \rightarrow 0$) ou dans des régimes de très faible courbure ($R_K \rightarrow \infty$ ou $K \rightarrow 0$), distance physique et distance comobile sont directement reliées par :

$$dr = a(t)dr_0. \quad (44)$$

Là où la distance comobile était une quantité statique, la distance physique est une quantité évolutive, dont la dépendance temporelle est encodée par le facteur d'expansion $a(t)$. Notons que si l'on considère le parcours d'un photon sur un intervalle infinitésimal (t est alors quasi constant et $r_0 \ll 1$) alors $dr = cdt$ et la distance physique est celle effectivement parcourue par le rayon lumineux. Si la géométrie est plane, $K = 0$, et la distance de parcours lumineux *dans ce cas précis* vaut $D_L = dr = a(t)dr_0$. Si toutefois la courbure de l'espace est positive et non nulle, alors $D_L > a(t)dr_0$ et dans le cas d'une courbure négative $D_L < a(t)dr_0$: de façon générale, la courbure induit un départ de la distance physique par rapport à une fonction simple de la distance comobile.

Considérons à nouveau la distance physique en se plaçant à un instant donné et en calculant $r(t)$ entre 2 points A et B, séparés d'une distance comobile R_0 le long d'une direction avec (θ, ϕ) donnés. En pratique il s'agit d'intégrer l'équation 43 tout en considérant t constant. On a alors

$$a(t)R_0 \quad (45)$$

$$r(t) = a(t)R_K \arcsin(R_0/R_K) \quad (46)$$

$$a(t)R_K \operatorname{argsh}(R_0/R_K) \quad (47)$$

pour une courbure $R_K = K/|K|^{3/2}$ respectivement nulle, positive et négative. Notons que les termes de courbure sont indépendants

du temps. Les trois solutions peuvent être synthétisées sous la forme d'une équation unique $r(t) = a(t)S_K(r_0)$. A nouveau, les distances physiques sont des fonctions du temps qui ne dépendent que de la variation temporelle du facteur d'expansion $a(t)$. Si a est un fonction croissante, *toutes* les distances augmentent avec le temps et on parle d'Univers en expansion. A l'inverse, a peut être une fonction décroissante du temps, auquel cas l'Univers est en contraction.

Pour finir, mentionnons que les distances physiques aujourd'hui sont obtenues en prenant la valeur du facteur d'expansion prise aujourd'hui. Ces types de quantités mesurées aujourd'hui sont notées par convention avec l'indice 0. Par exemple le temps qui a pu s'écouler depuis le Big-Bang jusqu'à aujourd'hui est noté t_0 . De même le facteur d'expansion aujourd'hui est noté $a_0 = a(t_0)$. *Par convention* le facteur d'expansion est normalisé à cette valeur actuelle et

$$a_0 = a(t_0) = 1. \quad (48)$$

Il en découle que

$$r(t_0) = S_K(r_0). \quad (49)$$

et dans le cas sans courbure, on constate que la distance physique mesurée aujourd'hui est égale à la distance comobile $r(t_0) = r_0$.

Facteur d'expansion, Loi de Hubble

La distance physique $r(t)$ entre deux points peut être simplement dérivée au cours du temps.

$$\dot{r}(t) = \dot{a}S_K(r_0) = \frac{\dot{a}}{a}r(t). \quad (50)$$

On définit le *paramètre de Hubble* comme la fonction dépendante du temps donnée par :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (51)$$

A l'aide de cette nouvelle fonction, le taux de variation des distance peut s'exprimer comme une fonction linéaire de la distance, *la loi de Hubble* :

$$\dot{r}(t) = H(t)r(t). \quad (52)$$

Si a est une fonction croissante, les distances physiques varient d'autant plus qu'elles sont importantes.

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos des Eqs 51 et 52. La première est que le paramètre de Hubble n'est pas une constante temporelle, en revanche sa valeur ne dépend pas du point de l'espace considéré : on peut considérer que c'est une constante *spatiale* de valeur donnée dans tout l'Univers à un instant donné. Suivant une

convention générique en cosmologie sa valeur actuelle est notée avec un indice 0 et vaut

$$H_0 = 67 \text{ km/s/Mpc.} \quad (53)$$

On peut constater au vu des unités employées et au vu de la structure de l'équation 51, que le paramètre de Hubble a la dimension de l'inverse d'un temps. On définit ainsi le temps de Hubble par $t_H = H^{-1}$: on verra par la suite que ce temps de Hubble est une bonne approximation de l'âge de l'Univers. La seconde remarque porte sur le caractère linéaire de l'équation 52 : on peut montrer que cela permet de conserver le caractère isotrope et homogène des points de vue, comme exigé par le principe cosmologique. Si la loi avait été constante ($\dot{r} \sim r^0$) ou bien quadratique ($\dot{r} \sim r^2$), l'homogénéité aurait été perdue. La dernière remarque porte sur le fait que la loi donnée par l'Eq. 52 donne l'impression que des récessions supraluminique sont autorisées ($\dot{r} > c$) : il s'avère que cela est exact, mais le taux de variation de distance calculé ici n'implique pas de déplacement par rapport à un référentiel local inertiel (qui lui serait limité par c) mais se rapporte à une dilatation même de l'espace : dit rapidement, ceci n'est pas la vitesse d'un corps en déplacement. Par exemple, insistons sur le fait que cette dilatation ne permet pas de transmettre d'information par exemple.

Décalage vers le rouge

Nous venons de voir que la forme de la métrique FRW conduit naturellement à la Loi de Hubble. Dans le même ordre d'idée, la métrique FRW conduit naturellement à une modification de la perception des intervalles temporels. Si l'on considère par exemple l'émission d'un photon depuis un point E jusqu'à sa réception au point R, l'intervalle séparant les deux événements est nul, comme c'est toujours le cas pour une particule sans masse. Soit E l'origine du système de référence, alors E et R se trouvent sur un seul et même rayon-vecteur ($d\theta = d\phi = 0$) et FRW permet d'écrire :

$$\int_{t_E}^{t_R} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (54)$$

Considérons un 2ème photon qui va effectuer le même parcours mais en étant émis à l'instant $t_E + \delta_E$ et reçu à l'instant $t_R + \delta_R$. Dans un espace-temps statique, on s'attend à obtenir $\delta_E = \delta_R$. Pour ce 2ème photon FRW permet d'écrire :

$$\int_{t_E + \delta_E}^{t_R + \delta_R} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (55)$$

Notons que les bornes d'intégration du second membre restent inchangées, le 2nd photon passant par les 2 même endroits en coordonnées comobiles : par conséquent les 2 intégrales temporelles des 2 photons sont identiques permettent d'écrire la relation :

$$\int_{t_E}^{t_E + \delta_E} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_R}^{t_R + \delta_R} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (56)$$

Si l'on suppose que les délais temporels δ_E et δ_R sont suffisamment petits par rapport au temps typique d'évolution du facteur d'expansion a alors l'on obtient que le délai mesuré à la réception diffère du délai à l'émission :

$$\delta_R = \frac{a(t_R)}{a(t_E)} \delta_E. \quad (57)$$

Cette relation est valable pour tous les délais : si la métrique n'est pas statique $a(t_E) \neq a(t_R)$, les délais sont modifiés. Par exemple on constate que les courbes de lumières de supernovæ sont affectées par cet cette modification des délais. De même les flux de photons subissent une "dilution" cosmologique à cause d'une modification de la durée devant s'écouler entre 2 photons. Enfin la *longueur d'onde* $\lambda = cT$ est directement proportionnelle à une durée (la période). La longueur d'onde d'un rayonnement électromagnétique reçu aujourd'hui est donc aussi affectée :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_E}{a(t_E)} \quad (58)$$

où on a utilisé la convention $a(t_0) = 1$. Il en découle que le décalage vers le rouge est donné par

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_E}{\lambda_E} = \frac{1}{a_E} - 1. \quad (59)$$

Si le facteur d'expansion était plus petit dans le passé (comme attendu pour un Univers en expansion), le décalage vers le rouge (ou *redshift*) est positif ou nul. Notons qu'à aucun moment il n'est fait mention de vitesse de déplacement de source ou de récepteur. Le seul effet contributeur est celui d'un espace temps non statique qui donne un effet similaire à un effet Doppler mais qui en aucun cas ne nécessite que la source ou l'émetteur possède une vitesse non nulle.

Source de la gravitation

A ce stade, l'élément essentiel qui reste à être précisé est la loi qui régit l'évolution du facteur d'expansion et par extension celle de la métrique FRW. Plus généralement quelle sont les lois qui permettent de relier la métrique $g_{\mu\nu}$ (donc la structure de l'espace-temps) aux sources de la gravitation ? Ces relations sont connues et portent le

nom d'équation d'Einstein. Leur détermination exacte est une démarche relativement complexe mais le cheminement logique qui aboutit à leur obtention peut être aisément décrit.

Un bon point de départ est l'équation de champ de la gravitation Newtonienne, à savoir l'équation de Poisson. Elle relie la densité de matière ρ au potentiel gravitationnel $\phi(x)$, qui est une fonction simple du champ de gravitation :

$$\Delta\Phi = \rho. \quad (60)$$

Clairement, le potentiel gravitationnel a pour source la densité de matière. En RG, l'objectif est d'obtenir une équation de champ analogue mais reliant $g_{\mu\nu}$ à ses sources. Disons d'emblée que dans le régime des champs faibles (dans lequel la gravitation Newtonienne s'applique) métrique et potentiel gravitationnel sont directement reliés.

Quelles sont à priori les sources de la métrique en RG ? Une première tentative peut être effectuée en considérant directement la densité de matière ρ comme source : c'est le cas quand les champs sont faibles et la matière est source de gravitation donc de géométrie. Toutefois on sait également que la masse en tant que tel ne joue pas de rôle central dans les théories relativistes, c'est davantage l'énergie E qui joue un rôle de premier plan.

La densité énergie serait-elle cette source ? Il est clair qu'elle doit jouer un rôle, par exemple au travers de la densité d'énergie de masse ρc^2 , ce qui reviendrait simplement à considérer la contre-partie énergie de la source de gravité Newtonienne. La difficulté de cette option réside dans le fait que l'énergie n'est pas directement une quantité fondamentale, y compris en relativité restreinte : l'énergie n'est qu'une composante d'un concept plus vaste qui est l'énergie-impulsion. Par conséquent si l'énergie source la gravité en RG, c'est au travers de l'énergie-impulsion et non seule. Plus précisément c'est au travers d'une densité d'énergie-impulsion.

Si on note l'énergie impulsion (P^0, P^1, P^2, P^3) où $P^0 = E$ (en supposant $c = 1$), on arrive à des expressions de densités de type :

$$\frac{dP^\mu}{dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma}. \quad (61)$$

Notons que α, β, γ désigne toutes les coordonnées disponibles, *temps* compris. Bien sûr la densité d'énergie sus-mentionnée fait partie des sources :

$$\frac{dE}{dxdydz}, \quad (62)$$

tandis que l'expression suivante est tout aussi légitime pour consti-

tuer un terme source de la gravité :

$$\frac{dP_x}{dtdydz}. \quad (63)$$

Cette dernière expression désigne une force (dP_x/dt) par une unité de surface à x constant, à savoir une pression suivant la direction x .

Notons qu'une pression est homogène à une densité d'énergie.

En généralisant cette expression, on obtient le tenseur des contraintes ou *tenseur énergie-impulsion*

$$T^{\mu\delta} = \frac{dP_\mu}{dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma}. \quad (64)$$

obtenu en considérant la densité de la composante μ de P sur la "surface" de coordonnées x^δ constante. C'est la source de la métrique, qui généralise la densité de masse du cas newtonien. Comme mentionné ci dessus, la densité d'énergie a donc un rôle à jouer mais la également la pression, de même que le cisaillement. Par la suite la contribution d'un type d'énergie à la dynamique de l'espace-temps devra s'évaluer au vu de toutes ces quantités.

Notons que T obéit à une équation analogue à généralisation de la conservation de l'énergie dans un espace-temps quelconque :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (65)$$

cette relation est tensorielle et non triviale et définit une "conservation" globale de l'objet T . La densité d'énergie est l'une des composantes de cet objet et n'est pas généralement conservé *individuellement*, ne serait-ce que parce que l'expression de la densité d'énergie dépend du système de coordonnées choisi.

A ce stade, le terme source de la dynamique de l'espace-temps est connu, reste à expliciter l'opérateur différentiel qui agit sur la métrique et qui joue un rôle analogue au laplacien de l'équation 6o. En d'autres termes quel est le tenseur G , fonction de la métrique qui permette d'avoir :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (66)$$

Sans rentrer dans les détails, on cherchera à obtenir un opérateur différentiel du second ordre, tout comme pour l'équation de Poisson newtonienne. De plus il faut que l'équation 65 soit satisfaite par G . L'opérateur différentiel du second ordre le plus simple permettant de satisfaire à cette contrainte est le *tenseur d'Einstein* :

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{R}{2}g^{\mu\nu} \quad (67)$$

où $R^{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci ou *tenseur de courbure* et qui dépend de dérivées de second ordre de $g^{\mu\nu}$. R est la trace de ce tenseur et est appelé aussi scalaire de courbure ou scalaire de Ricci.

Pour résumer, l'équation de champ de la gravité dans le cadre de la relativité générale décrit le comportement de la métrique en fonction du contenu local en énergie, via :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (68)$$

Plusieurs remarques peuvent être faites à ce stade. La première est que nous sommes passé d'une équation scalaire dans le cas newtonien à une équation tensorielle avec dans l'absolu $4 \times 4 = 16$ équations couplées à résoudre. Toutefois le tenseur d'énergie impulsion est symétrique et au final seules 10 équations indépendantes restent réellement dans le cas générique. De plus si les sources d'énergies possède un certain degré d'isotropie (comportement de fluide parfait par exemple) les composantes anisotropes de la pression ne rentrent pas en jeu et le système peut encore être réduit. La seconde remarque porte sur la structure du tenseur d'Einstein (Eq. 67). On constate ainsi que l'opérateur est non linéaire en métrique (via par exemple $\frac{R}{2}g^{\mu\nu}$), ce qui rend l'équation de champ particulièrement complexe à résoudre dans le cas général. On constate également que la métrique $g^{\mu\nu}$ est elle-même source de courbure. Ceci peut être généralisé de la façon suivante en écrivant l'équation 68 avec un terme supplémentaire :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \quad (69)$$

où Λ est un scalaire constant dans l'espace-temps. Compte tenu de $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, il en découle que 69 reste valable et dans ce cas également la métrique est source de courbure. Notons que le scalaire Λ introduit dans l'équation Eq. 69 s'interprète comme une *constante cosmologique*.

Equations de Friedmann

Comme indiqué dans la section précédente, l'hypothèse d'un Univers homogène et isotrope conduit à une forme de la métrique donnée par FRW. Considérant de plus que la relativité générale fournit une bonne description de la dynamique de l'espace temps, on est en principe capable de résoudre les équations d'Einstein pour une métrique FRW. Le résultat de cette opération est l'*équation de Friedmann*. Elle repose sur la RG, sur la métrique de FRW et considère que le contenu en énergie de l'Univers est bien décrit par des "fluide" parfaits, de pression isotrope et sans viscosité (donc sans contraintes).

L'équation de Friedmann est une relation scalaire qui relie le facteur d'expansion $a(t)$, qui restait la dernière quantité non précisée de la métrique, au contenu en énergie de l'Univers :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P), \quad (70)$$

où ρc^2 est la densité d'énergie de l'Univers et P sa pression, qui sont toutes deux fonctions du temps et donc de a . On constate que comme prévu, la dynamique de l'espace temps est lié à son contenu énergétique. Notons que *à priori* le second terme est défini positif, donc la dynamique de l'Univers semble être décélérée $\ddot{a} < 0$. Un modèle d'Univers se définira à partir d'une solution de cette équation différentielle, qui elle même dépendra du contenu en énergie. C'est l'objet du chapitre suivant.

Dynamique de l'Univers Homogène

Nous savons dorénavant que les distances r entre deux points de l'Univers peuvent évoluer au cours du temps, suivant une simple loi d'échelle :

$$r(t) = a(t)r_0 \quad (71)$$

où r_0 désigne la distance actuelle entre 2 points. La facteur sans dimension $a(t)$ encode toute la dépendance temporelle de l'évolution des distances dans l'Univers homogène. Reste à présent à déterminer l'évolution temporelle de ce facteur $a(t)$, appelé aussi *facteur* ou *paramètre* d'expansion. En particulier l'un des objectifs est de parvenir à comprendre l'histoire observée de notre Univers avec un Big-Bang ($a \rightarrow 0$ quand $t \sim 0$), des distances qui augmentent avec le temps ($\dot{a} > 0$) et une expansion récente accélérée ($\ddot{a} > 0$ quand $t \sim t_0$).

Fluides Cosmologiques

On désigne par *fluides* les différentes formes sous lesquelles l'énergie-impulsion se trouve stockée dans l'Univers. Ces fluides opèrent comme termes sources de l'équation de Friedmann (Eq. 70) et régissent donc la dynamique de l'espace-temps.

Ces fluides sont supposés isotropes et parfaits (non visqueux) : leur pression se résume donc à un scalaire comme pour un fluide "standard". Par la suite on distinguera 3 types de fluides cosmologiques :

- la *matière* qui désigne plus précisément la matière non-relativiste et qui se distinguera par une pression négligeable,
- le *rayonnement* qui désigne par abus de langage toute forme de matière relativiste. Sa pression est non nulle,
- le *volume* qui désigne une forme d'énergie dont la densité volumique est constante. Comme expliqué par la suite, on parle aussi de *vide*.

Ces 3 fluides cosmologiques sont définis par des densités d'énergie et des pressions dont les comportements diffèrent, notamment en

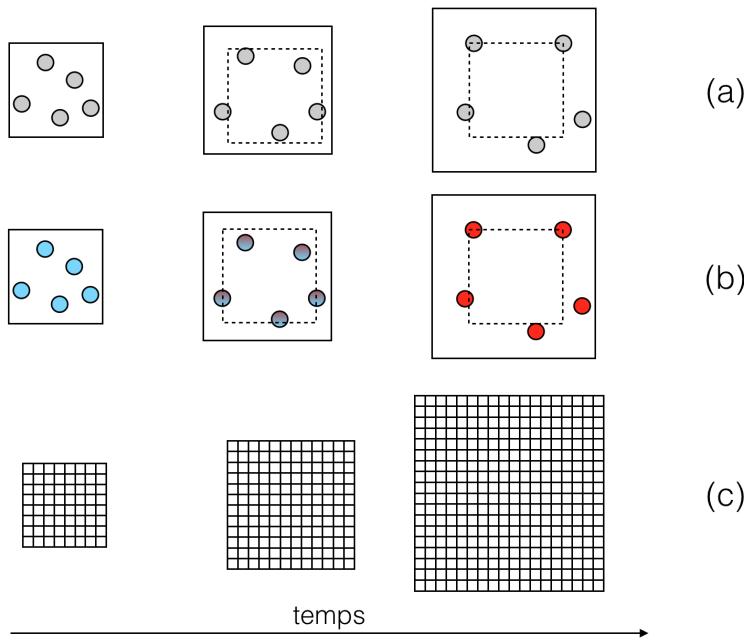


FIGURE 3: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste (a), le nombre de particules reste constant, l'énergie totale est constante et la densité d'énergie diminue avec le volume. Pour la matière relativiste (b), le nombre de particules reste constant mais l'énergie individuelle de chacune diminue sous l'effet du rougissement cosmologique : l'énergie totale diminue et la densité d'énergie diminue sous le double effet du rougissement et de la dilution. Pour le 'volume' (c), la densité d'énergie est constante dans chaque élément de volume (représenté par une case) et l'énergie totale à l'intérieur du volume de contrôle augmente avec l'expansion.

fonction du paramètre d'expansion a . Par la suite, on pourra démontrer que leurs contributions à l'histoire de la dynamique de l'Univers vont se faire à différentes époques et suivant différentes dépendances temporelles.

Afin de comprendre leurs influences respectives sur la dynamique du cosmos, la procédure à suivre sera toujours plus ou moins identique. Rappelons l'expression de l'équation de Friedmann :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P). \quad (72)$$

Nous voyons que la dépendance temporelle de $a(t)$ (décrise par le membre de gauche de l'équation) est 'sourcée' par les quantités du membre de droite qui caractérisent la matière contenue dans l'Univers. Pour intégrer cette équation et trouver une expression pour $a(t)$, il s'agit donc de connaître la densité d'énergie du fluide cosmologique ainsi que la pression qui l'accompagne : ces quantités constituent les *sources* de la variation de a et donc de la dynamique des distances dans l'Univers.

Notons que dans le cas général, $\rho = \rho(t) = \rho(a)$ et $P = P(t) = P(a)$. Le terme source va donc varier au cours du temps (ou de façon équivalente en fonction de la valeur du facteur d'expansion), et va donc modifier le comportement de $a(t)$. Si jamais plusieurs fluides se trouvent être présents simultanément, chacun aura sa propre contribution au terme source de l'équation de Friedmann dont l'expression

devient alors :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_i^{\text{fluides}} (\rho_i c^2 + 3P_i). \quad (73)$$

Généralement, la densité d'énergie $\rho_i c^2$ est facilement obtenue en faisant un bilan du nombre de particules du fluide considéré. Ici le fluide est considéré comme libre, non-soumis à une interaction extérieure, et chacun de ses éléments emmène une énergie :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (74)$$

constitué de son énergie cinétique et de son énergie de masse.

La pression nécessite généralement un peu plus d'effort. Afin d'évaluer cette pression, une approche consiste à considérer que la *variation* d'énergie interne avec le volume est due au travail des forces de pression. Ainsi si on considère un volume de contrôle que l'on fait varier d'une quantité dV , la variation interne d'énergie est proportionnelle à cette pression :

$$dE = -PdV, \quad (75)$$

il ne s'agit ni plus ni moins que d'une application du premier principe de la thermodynamique. En cosmologie, la source de variation du volume d'un contour est la dynamique de l'Univers, via le facteur d'expansion. Ainsi le volume V mesuré à n'importe quel instant peut être exprimé en fonction du volume mesuré aujourd'hui, V_0 , du même contour :

$$V = V_0 a^3, \quad (76)$$

d'où l'expression suivante pour la variation dV

$$dV = V_0 3a^2 da = 3V \frac{da}{a}. \quad (77)$$

Notons par exemple que le taux de variation du volume est donné par :

$$\frac{dV}{dt} = 3HV \quad (78)$$

et fait intervenir le paramètre de Hubble, $H(a) = \dot{a}/a$.

La matière non-relativiste

Le premier fluide considéré est la matière non-relativiste, celle qui nous est la plus familière. On y trouve les baryons et toute forme de matière noire froide. Cette matière se caractérise par une énergie par particule dominée par l'énergie de masse et une énergie cinétique négligeable devant cette dernière ($pc \ll mc^2$) :

$$E \sim mc^2. \quad (79)$$

Supposons un volume de contrôle V à l'intérieur duquel se trouve N particules non-relativistes (voir Fig. 3 (a)). A l'intérieur, la densité d'énergie vaut :

$$\rho_m c^2 = \frac{Nm c^2}{V} = \frac{Nm c^2}{a^3 V_0} = \rho_{m0} c^2 \frac{1}{a^3}. \quad (80)$$

Ici la masse d'une particule est supposée constante et le volume de contrôle contient toujours le même nombre de particules. Cette dernière hypothèse revient à considérer qu'il n'y a aucune création ou destruction nette de particules et que le flux net au travers de la surface délimitant ce volume est nul : pour un Univers homogène, donc sans variations spatiales susceptibles de générer des mouvements de matière, cette dernière hypothèse est raisonnable. L'équation 80 nous renseigne sur l'évolution temporelle de la densité d'énergie de la matière non-relativiste. Dans un Univers en expansion, a est une fonction croissante du temps : on constate alors que cette densité diminue au cours du temps, par simple dilution d'un nombre constant de particules (et donc d'énergie totale) dans un volume de plus en plus grand. Toujours dans le cas d'un facteur d'expansion croissant avec le temps, on constate que la densité d'un tel fluide était plus importante dans le passé.

Qu'en est-t-elle de la pression de ce fluide non relativiste ? Si l'on met à profit l'équation 75, on obtient :

$$P_m = -\frac{dE_m}{dV} \quad (81)$$

où E_m est l'énergie totale dans le volume de contrôle considéré. Dans le cas présent cette énergie est complètement dominée par l'énergie de masse, qui est constante dans ce volume, y compris lorsque le volume est modifié par la dynamique de l'Univers. Par conséquent, pour un fluide non-relativiste, la pression est considérée comme négligeable :

$$P_m = 0. \quad (82)$$

Ceci n'est pas une totale surprise : en effet nous avons défini ce fluide non-relativiste comme étant *absolument froid*, i.e. avec une contribution nulle (en pratique négligeable) de l'énergie cinétique à son énergie interne totale. Pour mémoire, la pression est une manifestation des mouvements microscopiques des particules individuelles : celles-ci étant figées, il en résulte une pression égale à zéro.

La Matière Relativiste

On désigne par matière relativiste toute forme de matière pour laquelle la contribution de son énergie cinétique domine celle de

son énergie de masse. Pour une particule de ce fluide, nous avons $mc^2 \ll pc$ et son énergie individuelle est donnée par :

$$E \sim pc, \quad (83)$$

où p désigne l'impulsion de la particule. Cela concerne bien évidemment les photons mais également toute particule très légère comme les neutrinos. Supposons le même volume de contrôle que pour la matière non relativiste, avec une densité N de particules chacune porteuse d'une énergie pc (voir Fig. 3 (b)). Comme précédemment, la densité d'énergie de ce volume de contrôle est donnée par :

$$\rho_r c^2 = \frac{Npc}{V}. \quad (84)$$

Toutefois, contrairement à la masse, l'impulsion est sensible à la dynamique de l'Univers puisqu'elle peut s'exprimer en fonction de la longueur d'onde qui elle-même subit les effets de rougissement cosmologique :

$$p = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{a\lambda_0} = \frac{p_0}{a}. \quad (85)$$

Il en résulte une dépendance temporelle de la densité d'énergie relativiste qui est différente de celle trouvée précédemment pour la matière non-relativiste :

$$\rho_r c^2 = \frac{Np_0c}{a^4 V_0} = \rho_{r0} c^2 \frac{1}{a^4}. \quad (86)$$

Comparée à la matière non-relativiste, la densité d'énergie varie ici plus rapidement (et baisse plus rapidement si a croît avec le temps). La raison est simple : en plus de l'effet de dilution géométrique s'ajoute une baisse de l'énergie individuelle portée par chaque particule à cause du rougissement cosmologique.

Calculons maintenant la pression comme taux de variation de l'énergie totale avec le volume :

$$P_r = \frac{dE_r}{dV} = -\frac{d(Npc)}{dV}. \quad (87)$$

Grâce à l'équation 77 la pression peut être réexprimée en fonction de la densité d'énergie :

$$P_r = Nc \frac{d(p)}{dV} = Nc \frac{dp}{da} \frac{da}{dV} = -Nc \frac{-p_0}{a^2} \frac{a}{3V} = \frac{1}{3} \rho_r c^2. \quad (88)$$

Dans ce cas la pression est non nulle et est une fonction simple de la densité d'énergie. A nouveau cela n'est pas une surprise puisque nous avons défini ces particules comme ne possédant qu'une énergie cinétique, qui est la source de pression.

Le "Volume"

De prime abord, le dernier type de fluide est de nature hypothétique et est *défini* par une densité d'énergie constante :

$$\frac{dE_v}{dV} = \Lambda = \text{const.} \quad (89)$$

On appellera ce fluide "volume" car il ne repose pas sur l'existence d'une particule le composant mais davantage sur une quantité d'énergie qu'apporte nécessairement un volume donné. Remarquons que si le volume de contrôle augmente (sous l'effet d'un facteur d'expansion croissant par exemple), la quantité d'énergie présente dans ce volume de contrôle augmente aussi (voir Fig. 3 (c)). On parle aussi d'énergie du "vide", puisqu'une telle énergie est présente y compris en l'absence de matière.

Compte tenu de cette définition, la densité d'énergie vaut :

$$\rho_v c^2 = \rho_{v0} c^2, \quad (90)$$

tandis que la pression vaut

$$P_v = -\rho_v c^2. \quad (91)$$

On constate qu'un tel type de contribution énergétique produit une pression *négative*. A l'inverse du comportement d'un fluide standard, son énergie interne augmente avec son volume, le 'vide' ne subit pas de détente. Cela résulte de la non-variation de la densité d'énergie à l'intérieur du volume de contrôle même si celui-ci évolue sous l'effet du facteur d'expansion.

A nouveau ce fluide est une hypothèse de travail. Toutefois il s'avère que ce type de fluide exotique permet une bonne représentation de la dynamique *observée* des distances dans l'Univers. Ce fluide est la fameuse *énergie noire*, dont la nature nous échappe complètement actuellement et qui permet de rendre compte de l'accélération observée de l'expansion de l'Univers. La densité d'énergie étant constante dans le temps et dans l'espace, on parle aussi de *constante cosmologique*.

Epoques de domination

Le bilan des trois fluides étudiés est donné dans la table suivante. On notera qu'on utilise la nomenclature standard des trois fluides : "matière" pour la matière non relativiste, "rayonnement" pour la matière relativiste et "vide" pour l'énergie de volume.

En réinjectant ces résultats dans l'équation de Friedmann (eq. 70) on obtient une expression détaillée du terme source qui permet déjà

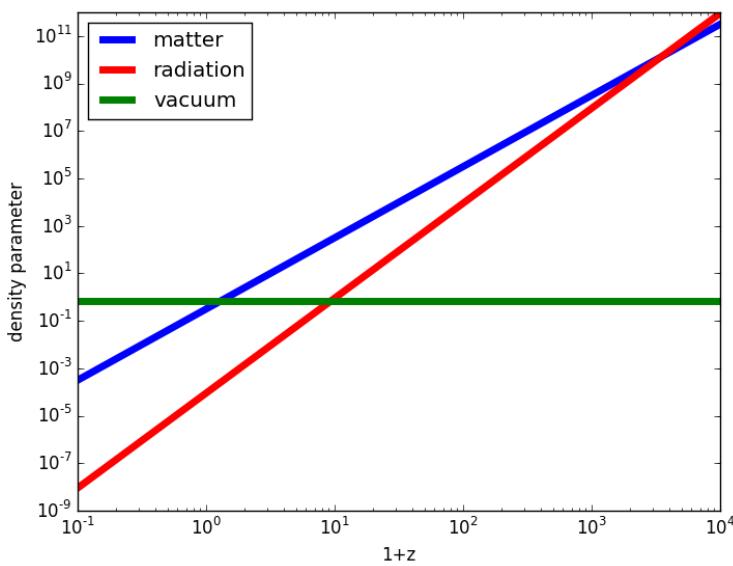


FIGURE 4: Evolution temporelle de la densité d'énergie des 3 fluides cosmologiques pour une cosmologie standard. Le temps s'écoule de la droite vers la gauche, avec une domination successive du rayonnement, de la matière et du vide.

	Caractéristique	Densité d'énergie	Pression
Matière	$E \sim mc^2$	$\rho_m c^2 = a^{-3} \rho_{m0} c^2$	$P_m = 0$
Rayonnement	$E \sim pc$	$\rho_r c^2 = a^{-4} \rho_{r0} c^2$	$P_r = \rho_r c^2 / 3$
Vide	$dE/dV \sim \text{cst}$	$\rho_v c^2 = \rho_{v0} c^2$	$P_v = -\rho_v c^2$

TABLE 1: Les 3 fluides cosmologiques

d'entrevoir certaines caractéristiques de la dynamique des distances dans l'Univers :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + 2\frac{\rho_{r0}}{a^4} - 2\rho_{v0} \right). \quad (92)$$

Dans un premier temps, il apparaît que la matière et le rayonnement ont un même effet qualitatif et tendent à décélérer la variation du facteur d'expansion (en imposant $\ddot{a} < 0$). Cette décélération est d'autant plus faible que les distances sont grandes (i.e. $\ddot{a} \rightarrow 0$ quand a augmente) et que les densités d'énergies associées sont faibles, permettant d'anticiper sur une sorte de "régulation". A l'inverse, le "vide" produit une accélération de la variation de a (avec $\ddot{a} > 0$) : cela résulte du terme de pression négative qui produit une contribution nette positive de ce fluide au terme source de l'équation de Friedmann. Notons que cette contribution reste constante au cours du temps, avec \ddot{a} augmentant avec a , indiquant dès à présent un effet "catastrophique" non régulé.

Enfin on constate que les contributions au terme source de l'équation de Friedmann ont des dépendances temporelles différentes en fonction du fluide considéré (voir Fig. 4). En supposant une évolution

de a croissante au cours du temps, il apparaît qu'entre le rayonnement (qui varie en $a^{-4} = (1+z)^4$) et la matière (qui varie en $a^{-3} = (1+z)^3$), la première domine aux époques correspondants aux faibles valeurs de a (donc généralement au début) tandis que la matière doit prendre le dessus aux plus grandes valeurs du facteur d'expansion (donc généralement plus tard). Il existe donc une époque où ces deux fluides ont exactement la même densité d'énergie : cette époque est appelée *l'époque d'équivalence*. Avant, la matière relativiste domine, après la matière non-relativiste dicte la dynamique de l'Univers.

Mais qu'en est-il de la densité d'énergie du vide, dont la valeur est par définition constante ? Le verdict est sans appel : compte tenu du fait que les densités d'énergie des deux autres fluides sont des fonctions décroissantes de a , il existe *toujours* une valeur seuil du paramètre d'expansion au delà de laquelle le vide domine. Tout modèle d'Univers avec une énergie du vide finira par être dominé par cette dernière, pour peu que l'on attende suffisamment longtemps.

Pour finir, disons clairement que les relations obtenues entérinent la non-conservation de l'énergie totale du Cosmos. Pour un Univers dominé par une énergie du vide de densité d'énergie constante, l'expansion implique nécessairement des volumes croissants et donc une énergie totale croissante. Même en l'absence de ce fluide inconnu, le rougissement individuel des photons fait que l'énergie totale stockée dans la matière relativiste doit décroître : la densité d'énergie varie en a^{-4} et le volume en a^3 conduisant à une énergie totale non constante, inversement proportionnelle à a . Seul un Univers contenant uniquement de la matière non-relativiste, par conservation du nombre de particules d'énergie constante, garantit à priori une conservation de l'énergie totale : cet Univers n'est toutefois pas le nôtre qui contient à minima du rayonnement en plus de cette matière. Rappelons que cette non-conservation n'est pas problématique : la relativité générale ne garantit pas de façon générale la conservation du scalaire 'énergie' mais propose une relation plus complexe, plus générale sur le *tenseur énergie-impulsion*. Par ailleurs, on peut se souvenir que la conservation de l'énergie est une traduction de l'invariance par translation temporelle du résultat d'une expérience donnée¹⁶ : dans un Univers où la géométrie possède une évolution, cette invariance n'est bien sûr pas garantie.

Paramètre de densité Ω

A ce stade il nous faut introduire une nouvelle expression, le paramètre de densité Ω , qui apparaît naturellement lorsque l'on intègre l'équation 92. Cette intégration se fait naturellement en multipliant

¹⁶. de même que l'invariance par translation spatiale implique une conservation de l'impulsion ou l'invariance par rotation implique une conservation du moment cinétique

l'équation 92 par $2\dot{a}a$, qui permet d'obtenir :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H(a)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_{v0} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (93)$$

Notez l'introduction d'une constante d'intégration k que nous discuterons par la suite. Le terme de gauche n'est autre que le carré du paramètre de Hubble au cours du temps : aussi pour des raisons de symétrie, il est tentant de multiplier le terme de droite par H_0 , ce qui permet d'écrire :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_v - \frac{\Omega_k}{a^2} \right). \quad (94)$$

C'est cette équation qu'il faudra intégrer par la suite pour obtenir l'évolution temporelle du facteur d'échelle a et elle introduit les paramètres de densités (dans l'ordre) de la matière, du rayonnement, du vide et de la constante d'intégration. Ces quantités sont sans dimension et égales à :

$$\Omega = \frac{\rho_0 c^2}{\rho_c c^2}, \quad (95)$$

où ρ_c désigne la *densité critique* dont l'expression est donnée par :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (96)$$

Les paramètres de densités sont donc l'expression des densité d'énergie *mesurées aujourd'hui* des différents fluides en unités de cette densité critique.

Si l'on applique l'équation 94 aujourd'hui quand $a = a_0 = 1$ on obtient une contrainte que doivent satisfaire tous les paramètres de densité, à savoir :

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1 + \Omega_k. \quad (97)$$

Que représente Ω_k ? Si l'on remonte à l'expression des équations d'Einstein qui ont servi à produire l'équation de Friedmann, ce terme apparaît comme une courbure constante intrinsèque et est lié au coefficient de courbure K de la métrique FRW (eq. 41). Si $\Omega_k > 0$, donc $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v > 1$ alors cela équivaut à une courbure positive donc sphérique. A l'inverse $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v < 1$ produit une courbure négative de type hyperbolique. Enfin, $\Omega_k = 0$ (correspondant à $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1$) est la marque d'une géométrie plane.

Il est à noter qu'une simple inspection de la contribution de Ω_k au terme source de l'équation 94 nous renseigne sur sa nature. En effet, on peut constater que les dépendances en a de tous les paramètres en densité sont liés aux dépendances des densités d'énergies associées : la matière est en a^{-3} (densité d'énergie inversement proportionnelle au volume), le rayonnement en a^{-4} (densité d'énergie inversement

proportionnelle au volume + effet de rougissement) et le vide en a^0 (densité d'énergie constante en temps et en espace). Pour Ω_k , on constate une dépendance en a^{-2} comme le serait celle d'une courbure qui a bien la dimension du carré de l'inverse d'une longueur.

Valeurs expérimentales des paramètres de densité

Il existe plusieurs manières de déterminer ces quantités par l'observation, dont le détail sera donné par ailleurs. On peut toutefois donner dès à présent les valeurs standards de ces paramètres.

Dans un premier temps, on constate que l'Univers possède une géométrie de courbure nulle. De même la contribution actuelle des espèces relativistes est proche de zéro. Enfin, on constate actuellement que l'Univers est en expansion ($\dot{a} > 0$) et en accélération ($\ddot{a} > 0$) ce qui indique une contribution significative de la densité d'énergie du vide. Au bilan voici qualitativement la répartition des différentes sortes d'énergie aujourd'hui :

- $\Omega_k < 0.001$,
- $\Omega_r \sim 0.0001$,
- $\Omega_m \sim 0.31$,
- $\Omega_v \sim 0.69$.

On peut ajouter à ses paramètres la valeur actuelle du paramètre de Hubble $H_0 = 67 \text{ km/s/Mpc}$ et du paramètre de densité des baryons $\Omega_b \sim 0.049$. Il en résulte un paramètre de densité pour la matière non baryonique de l'ordre de $\Omega_c = \Omega_m - \Omega_b \sim 0.27$. Avec ce jeu de paramètres, le temps nous séparant du Big Bang (à savoir l'âge de l'Univers) est $t(a=1) = t_0 \sim 13.8$ milliards d'années.

On constate que nous vivons actuellement dans un Univers dominé par l'énergie du vide. L'équivalence entre matière et rayonnement se produit pour $1 + z_e = \Omega_m / \Omega_r$ et donne

$$z_e \sim 3100 \quad (98)$$

correspondant à un Univers âgé de $t_e \sim 60600$ ans. De même l'Univers a commencé à être dominé par le vide quand $1 + z_\Lambda = (\Omega_v / \Omega_m)^{1/3}$ et donne

$$z_\Lambda \sim 0.3 \quad (99)$$

correspondant à un Univers âgé de $t_\Lambda \sim 10.2$ milliards d'années.

Si l'on rassemble tous ces résultats, on observe que l'Univers est passé par 3 phases successives de domination de chacun des 3 fluides (voir aussi Fig. 4). Dans un premier temps, le bilan énergétique de l'Univers est dominé par le *rayonnement*, au cours des 60 000 premières années. Puis c'est la *matière* qui va être le contributeur majeur

de la dynamique de l'Univers pendant quelques milliards d'années. Enfin *le vide* devient le fluide dominant, ce qui est toujours le cas aujourd'hui et dont la primauté ne fera que s'accentuer dans le futur.

Modèles d'Univers

Nous sommes à présent armés pour étudier des modèles simples d'Univers. L'équation maîtresse de ce type d'étude est l'équation 94 et l'objectif est d'obtenir l'expression de $a(t)$, la dépendance temporelle du facteur d'expansion. En toute généralité, cela nécessite de connaître les paramètres de densités et la solution ne peut être obtenue que par intégration numérique. Il existe toutefois toute une classe de modèles simples qui peuvent être résolus analytiquement et qui fournissent un bon aperçu du comportement quantitatif de la dynamique de l'Univers dans des cas plus généraux.

Modèle d'Einstein-de Sitter : $\Omega_m = 1$

Ce modèle a une grande importance historique car il fut longtemps privilégié du fait de son caractère naturel. Le modèle *Einstein-de Sitter*, appelé aussi *Univers poussière*, considère un Univers plat et composé uniquement de matière, $\Omega_m = 1$. L'équation 94 devient alors simplement :

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^{3/2}}. \quad (100)$$

Elle s'intègre facilement pour donner :

$$a(t) = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3}. \quad (101)$$

ou bien

$$t = \frac{2}{3H_0} a^{3/2}. \quad (102)$$

L'équation horaire du facteur d'expansion donne une loi de puissance "faible", décélérée comme attendue. Ce modèle inclut également un Big-Bang :

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0 \quad (103)$$

impliquant des distances faibles et donc un Univers dense aux premiers instants.

L'âge de l'Univers peut également être déterminé en posant simplement $a = 1$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (104)$$

On constate que le temps de Hubble mesuré aujourd'hui $t_H = H_0^{-1}$ est à peu de chose près l'âge de l'Univers. Prenant $H_0 = 67$

km/s/Mpc on obtient alors un âge d'Univers proche de 9.6 milliards d'années, bien en dessous de l'âge estimé de certaines étoiles par exemple ou de certains amas globulaires. Bien que naturel, ce modèle ne permet pas d'expliquer l'âge observé de l'Univers.

Une option longtemps envisagée fut de considérer une Univers à géométrie hyperbolique avec $\Omega_m < 1$ auquel cas l'âge de l'Univers devient :

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_m}}. \quad (105)$$

Pour $\Omega_m \sim 0.3$ comme observé, on obtient un âge d'Univers compatible avec les plus vieux objets astronomiques, mais au prix d'une géométrie non plane. De plus il ne permet pas de produire une accélération de l'expansion, telle qu'observée aujourd'hui.

Univers-Lumière, $\Omega_r = 1$

Dans ce cas, le contenu énergétique de l'Univers est dominé par le rayonnement et nous savons que ce n'est pas le cas aujourd'hui. Toutefois toute la physique de l'Univers primordial ($t < 3$ minutes) se fait dans un régime où les espèces relativistes sont dominantes, comme dans ce modèle d'Univers-Lumière. Le principe est le même que précédemment où le paramètre de Hubble est donné par

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^2}, \quad (106)$$

qui donne après intégration

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \quad (107)$$

Comme pour l'Univers poussière, ce modèle prédit un Big-Bang. L'expansion y est également décélérée avec toutefois une loi de puissance légèrement moins forte pour la variation temporelle du facteur d'expansion $a(t)$ (puissance 1/2 au lieu de 2/3). Cette différence trouve son origine dans une dilution plus rapide du terme source associé au rayonnement, avec une décroissance en a^{-4} au lieu de a^{-3} .

Univers de Sitter, $\Omega_v = 1$

Cet Univers est dominé par le vide avec une densité d'énergie constante et $\Omega_v = 1$. Comme l'Univers lumière, ce modèle dit de *de Sitter* ne peut être une représentation fidèle du cosmos observé mais il peut nous permettre d'avoir une vue qualitative de la dernière phase de la dynamique de l'Univers, régie par l'énergie du vide. Dans ce modèle, l'intégration de l'équation 94 donne

$$t = H_0^{-1} \int_{\epsilon}^a \frac{da}{a}, \quad (108)$$

où l'on ne peut intégrer que depuis un temps arbitrairement faible mais non nul ϵ et ceci pour garantir la convergence de l'intégrale. La résolution de cette équation donne une loi d'expansion *exponentielle*

$$a(t) = \epsilon e^{H_0 t}. \quad (109)$$

Contrairement au deux modèles précédents, un tel Univers ne permet pas d'atteindre des distances arbitrairement faibles aux premiers instants et ne prédit pas de Big-Bang. Notons également que le paramètre de Hubble ne varie pas au cours du temps dans ce modèle :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0. \quad (110)$$

Clairement, l'expansion est accélérée et est liée à l'absence de "dilution" de la densité d'énergie associée au vide : bien qu'il y ait expansion, cela ne conduit pas à une diminution du terme source de l'équation de Friedmann. L'expansion ne peut être tempérée sous forme de loi de puissance douce et produit une dépendance exponentielle du facteur d'échelle.

Pour finir, il faut mentionner que les théories de l'inflation suggèrent une histoire d'expansion primordiale (pour un Univers plus jeune que 10^{-34} seconde) de même nature, avec une évolution exponentielle de $a(t)$. Comme expliqué dans le chapitre dédié à la période d'Inflation, cela suggère l'existence d'un champ (pour l'instant inconnu) dont le potentiel varie lentement (et donc une densité d'énergie quasi-constante) et à même d'entretenir cette expansion exponentielle.

Cas général, modèle standard Λ CDM

Dans une cosmologie arbitraire, l'évolution du facteur d'échelle ne peut être obtenue qu'en intégrant numériquement l'équation 94, mais cette tâche ne présente aucune difficulté particulière avec les bons outils.

La figure 5 présente différents modèles de cosmologie. On note par exemple, qu'un modèle extrêmement dominé par Ω_Λ possède une évolution exponentielle typique et repousse le Big-Bang loin dans le passé. A l'inverse, un modèle d'Univers sur-dense conduit à une évolution bornée, où les distances atteignent une distance maximale pour évoluer ensuite vers un Big-Crunch, où toutes les distances dans l'Univers tendent vers 0. Les modèles dominés par la matière possèdent tous une décélération caractéristique (qu'on peut remarquer via la courbure négative de $a(t)$).

Parmi ces modèles figure le modèle standard de la cosmologie, dit Λ CDM dont les paramètres de densité sont proches de $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_v = 0.7$. Dans ce cas précis, le Big-Bang a eu lieu il y a environ

13.5 milliards d'années, suivi d'une période d'accélération décélérée dominée par la matière pour quelques milliards d'années. La courbure de $a(t)$ s'inverse alors pour passer dans un régime d'expansion accélérée et c'est la période dans laquelle nous nous trouvons actuellement. C'est parce qu'il ajuste le mieux les observations et en particulier cette dernière phase d'expansion accélérée que ce modèle Λ CDM constitue la modèle standard de la cosmologie : cet ajustement se fait au prix de l'inclusion d'une énergie du vide dont les effets sont apparents mais dont la nature nous échappe aujourd'hui complètement.

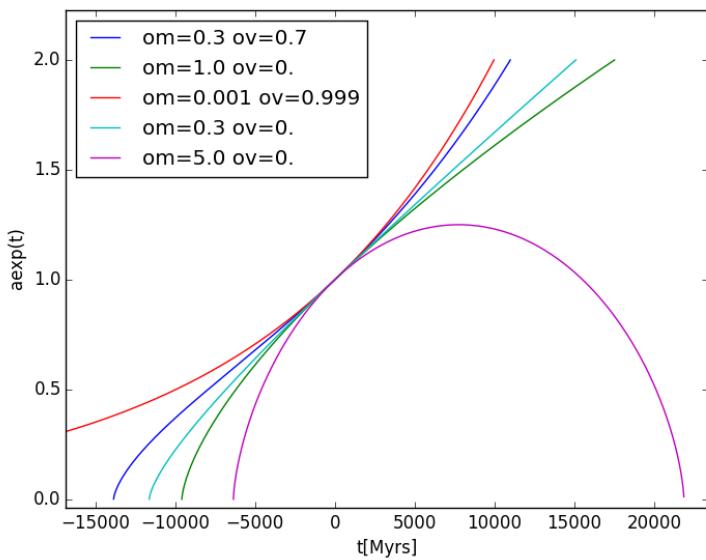


FIGURE 5: Evolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ pour différentes cosmologies. Ici Ω_m désigne le paramètre de densité de la matière et Ω_v désigne celui de l'énergie noire. Notez que le facteur d'échelle est normalisé à 1 pour $t = 0$.

l'Univers Chaud

Dans ce chapitre nous allons étudier de premières bases se rapportant à l'Univers quasi-primordial âgé de quelques minutes au plus. Durant cette période, la dynamique de l'Univers est régie par les espèces relativistes, avec une dépendance temporelle du facteur d'expansion en $a(t) \sim \sqrt{t}$: durant ces époques les influences respectives de la matière et de la constante cosmologique sont faibles. Ces premiers instants sont proches du Big-Bang et l'Univers s'y trouve dense et chaud : ces conditions sont propices aux interactions entre atomes et particules subatomiques. C'est durant cette époque que les abondances des particules reliques et des éléments légers sont fixées : c'est de ces abondances dont nous allons discuter dans ce chapitre.

Equilibre & Gel de Réactions

Les deux concepts fondamentaux des processus qui règlent les abondances sont les notions *d'abondance à l'équilibre* et de *gel des réactions*. Dans notre cas, le terme d'abondance désigne la densité numérique d'une espèce atomique, subatomique, isotopique, etc... Par exemple l'abondance des atomes d'hydrogène se note n_H et s'exprime en atomes par m^3 . Les réactions qui permettent de modifier ces abondances font généralement intervenir d'autres réactifs : la photoionisation par exemple se caractérise par la réaction suivante :



et dépend non seulement de l'abondance des atomes d'hydrogène mais également de celle du nombre de photons ionisants. Toutefois dans un très grand nombre de cas, la variation d'une espèce peut s'écrire comme ne dépendant que de sa propre abondance à l'équilibre n_e et d'un taux de réaction Γ constant. Soit n une abondance quelconque, son évolution pourra être suivie par une équation différentielle du type :

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma(n - n_e). \quad (112)$$

Celle-ci est simple à comprendre. Si une abondance est déjà à l'équilibre $n = n_e$ et son abondance, par définition, ne varie pas. Si son

abondance est supérieure à l'équilibre, le taux de réaction va agir comme une force de rappel, traduisant de fait une tendance à favoriser les réactions de destruction de l'espèce étudiée. A l'inverse si l'abondance est en déficit par rapport à l'équilibre, les réactions vont avoir tendance à la rétablir à des valeurs plus élevées. Notons que l'inverse du taux de réactions fournit un temps caractéristique de retour à l'équilibre $t_e = \Gamma^{-1}$.

Toutefois il existe une autre manière de faire varier la densité numérique d'une espèce dans le contexte qui est le nôtre : il s'agit de la dilution cosmologique, déjà rencontrée dans le chapitre précédent. En effet, compte tenu de l'expansion de l'Univers, si l'on dispose d'un certain nombre de particules d'un type donné dans un certain volume, sa *densité* va évoluer même en l'absence de réaction (c'est à dire de destructions/creations). Ainsi la densité numérique d'une espèce donnée varie cosmologique de la façon suivante :

$$n = \frac{n_0}{a^3}, \quad (113)$$

ce qui ne fait que traduire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn, \quad (114)$$

où H est le paramètre de Hubble usuel, fonction du temps ou du paramètre d'expansion $H = \dot{a}/a$. Comme déjà indiqué, le temps de Hubble $t_H = H^{-1}$ fournit le temps caractéristique d'évolution significative des distances dans le cosmos.

Dans le cas cosmologique général, les deux procédés se superposent et l'abondance d'une espèce arbitraire est régie par une équation de type :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \Gamma(n - n_e), \quad (115)$$

cette équation demande en toute généralité d'être résolue numériquement. Toutefois 2 cas limites se détachent facilement :

- si $H \gg \Gamma$: l'expansion est beaucoup plus efficace que les réactions. C'est un régime où le 2nd terme de l'équation 115 peut être négligé, on retrouve $n \sim a^{-3}$ et le nombre de particules dans un volume en expansion donné est *constant*. On dit que l'espèce est *gelée*.
- si $H \ll \Gamma$: on peut négliger la dilution cosmologique et les temps de retour à l'équilibre sont très courts. L'abondance est celle de l'équilibre, qui est éventuellement une fonction du temps $n \sim n_e(a)$.

En règle générale H et Γ sont tous deux fonctions du temps et Γ a tendance à dominer au début de l'histoire de l'Univers (qd les densités et températures sont très élevées) pour être ensuite dominé par

H. Par conséquent l'histoire typique de l'abondance d'une espèce suit d'abord celle de l'équilibre avant d'être gelée et n'être plus modifiée que par la dilution cosmologique. Cette transition porte le nom de "gel" ou *freeze-out* en anglais.

Statistique d'un gaz

La question qui se pose à présent est celle de déterminer l'abondance à l'équilibre d'une espèce (hydrogène, photons, neutrinos, etc....). Celle-ci nous est donnée par la physique statistique.

On se place dans le cas simple d'une particule libre, auquel cas son énergie ne dépend que de son impulsion \vec{p} , ou bien de façon équivalente que de son vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = \hbar^2 c^2 k^2 + m^2 c^4 \quad (116)$$

Plus précisément l'énergie d'une particule ne dépend que de la norme k du vecteur d'onde. Par conséquent, l'ensemble des points dans l'espace des \vec{k} qui fournissent une énergie donnée sont à l'intérieur d'une coquille de rayon k . De plus, le peuplement de cet espace est quantifié : en effet les nombres d'ondes accessibles (i.e. les impulsions accessibles) doivent être de la forme $\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)2\pi/L$ où L désigne la taille de la "cuve" dans laquelle s'effectue l'étude et où le triplet est un triplet de valeurs entières. Par conséquent, une particule ne peut se trouver que sur les nœuds d'une maille pavant cet espace.

Ces considérations nous permettent d'évaluer le *nombre d'états accessibles à une énergie E donnée*. Ce nombre est donné par le rapport entre le volume de l'espace des \vec{k} à énergie E donnée (la coquille) et le volume occupé par un état unique (le volume de la maille). On obtient alors le nombre d'états accessible à une particule libre d'énergie E à dE près :

$$N(E)dE = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3}. \quad (117)$$

L'équation 117 n'est pas suffisante pour calculer l'abondance d'une particule : elle nous renseigne sur la quantité d'états accessible mais reste à déterminer combien de particules résident sur un état donné. Le *niveau d'occupation* dépend du type de particule : si celle-ci est un fermion alors elle est soumise au principe d'exclusion de Pauli qui stipule qu'un état quantique donné ne peut être occupé, au plus, que par une particule. Si celle-ci est un boson, cette restriction ne s'applique pas. Plus précisément, les niveaux d'occupation sont donnés par les statistiques de Fermi-Dirac et Bose-Einstein :

$$n(E) = \frac{g(E)}{\exp(\beta(E - \mu)) \pm 1}. \quad (118)$$

Le signe positif (resp. négatif) au dénominateur désigne la statistique de Fermi-Dirac (resp. Bose-Einstein). La quantité $\beta = 1/k_B T$ dépend est une représentation de la température, μ est le potentiel chimique de l'espèce étudiée et $g(E)$ est la dégénérescence d'un état d'énergie E . Cette dernière quantité dépend également de la particule considérée. On note que dans le cas d'une statistique de Fermi-Dirac, s'appliquant aux fermions, $n(E) \leq g(E)$: cela découle du principe d'exclusion de Pauli : l'occupation est au mieux égale à la dégénérescence du niveau d'énergie. A l'inverse les bosons, soumis à la statistique de Bose-Einstein, peuvent avoir des niveaux d'occupation arbitrairement grands.

A ce stade, l'abondance d'une particule peut être déterminée et le nombre total de particules d'une espèce donnée dans une cuve de volume $V = L^3$ à température T est

$$N = \int_{E_{\min}}^{\infty} n(E) N(E) dE. \quad (119)$$

Notons que cette intégrale porte sur toutes les énergies, depuis la plus faible jusqu'aux infinis. Cette valeur plancher de l'énergie dépend de la particule considérée. Par exemple pour une particule de masse nulle, on aura $E_{\min} = 0$ tandis que pour une particule massive on aura $E_{\min} = mc^2$, correspondant à un état de repos (et donc d'impulsion) absolu.

Les photons

Le cas des photons permet d'illustrer le calcul de la section précédente tout en étant d'une grande pertinence cosmologique : ils appartiennent aux particules dites relativistes et c'est elles qui dominent le budget numérique actuel de l'Univers.

Le calcul de l'abondance des photons nécessite de préciser d'abord les quelques nombres nécessaires à sa bonne conduite. Dans un premier temps, les photons sont des particules de masse nulle, donc leur énergie est faite d'impulsion pure :

$$E_\gamma = pc = \hbar c k. \quad (120)$$

Par conséquent la densité volumique d'états d'énergie E accessible aux photons est donnée par :

$$\frac{N(E)dE}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{E^2 dE}{(\hbar c)^3}. \quad (121)$$

De plus le photon est sa propre antiparticule et participe par exemple aux équations de désintégrations :

$$A + \bar{A} \leftrightarrow \gamma + \gamma. \quad (122)$$

Or $\mu_A = -\mu_{\bar{A}}$ donc $\mu_\gamma = 0$. Enfin le photon autorise deux hélicités par état d'énergie et possède un spin entier et obéit donc à la statistique de Bose-Einstein. L'état d'occupation d'un niveau d'énergie E est donc donné par :

$$n(E) = \frac{2}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}. \quad (123)$$

D'où son abondance à l'équilibre :

$$n_\gamma = \frac{1}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}. \quad (124)$$

On reconnaît dans l'intégrale la distribution de Planck, qui par définition décrit la distribution spectrale d'énergie d'un gaz de photons à l'équilibre, comme présent par exemple dans un corps noir. Cette intégrale peut être conduite analytiquement conduisant à :

$$n_\gamma \approx 0.244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 m^{-3}. \quad (125)$$

Aujourd'hui la température du gaz de photons du cosmos est de l'ordre de 2.73 K, correspondant à une densité de photons actuelle de :

$$n_\gamma \approx 410 \text{ cm}^{-3}. \quad (126)$$

Pour mémoire, la densité d'atomes d'hydrogène actuelle (espèce qui domine la population de baryons) est de l'ordre de l'atome par m^3 , on est donc dans un rapport de 10^{8-9} , extrêmement en faveur des photons. Une évaluation plus précise du rapport photon/baryon η est donnée par :

$$\eta \approx 5 \times 10^{-10} \frac{\Omega_b h^2}{0.02} \quad (127)$$

Cette surabondance de lumière résulte du processus de désintégration des particules massives que nous étudieront par la suite.

Histoire de la Température

Si l'on examine à nouveau l'expression de la densité de photon (Eq. 125), on constate que celle ci varie en $n_\gamma \sim T^3$. Ainsi si l'on considère une cuve de volume V elle contient à un redshift z donné le nombre de photons suivant :

$$N_\gamma(z) \sim V(z) T(z)^3. \quad (128)$$

Or compte tenu de leur gigantesque domination numérique, ce nombre de photons doit être *constant* : aucun processus (absorption/émission, à priori par des baryons extrêmement peu nombreux par rapport aux photons) ne peut changer N_γ de façon significative.

Or une cuve de taille donnée verra ses limites évoluer sous l'effet de la dynamique de l'Univers. En particulier $V = V_0 a^3$ d'où la loi d'évolution de la température des photons :

$$T_\gamma = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z), \quad (129)$$

avec $T_0 = 2.73K$. De plus compte tenu de la domination quasi totale des espèces relativistes sur le bilan numérique des particules du cosmos (comme illustrée par la valeur de η), on peu presque considérer que cette température est celle du cosmos. Aujourd'hui l'Univers est froid, mais par le passé celui-ci était plus chaud, en plus d'être plus dense comme expliqué dans les chapitres précédents. Notons pour finir que les photons du cosmos ne sont plus à l'équilibre thermodynamique à proprement parler : aujourd'hui ces photons n'interagissent plus avec les baryons, interactions qui auraient permis de maintenir le bain de photons à l'équilibre. Toutefois dans le passé plus chaud et plus dense, ces interactions existaient et un régime de fort couplage permettait de garantir un couplage matière rayonnement suffisant pour que la situation "thermodynamique" de l'Univers s'apparente à celle d'un corps noir. Cette situation a cessé (380 000 ans après le Big Bang comme nous le verrons) mais la domination des espèces relativistes est telle qu'aucun processus n'est en mesure de changer significativement la fonction de distribution des photons : en l'absence de processus permettant cette modification, le gaz de photons a pu conserver la mémoire d'une période antérieure d'équilibre thermodynamique.

Par la suite nous considérerons des époques durant lesquelles le bilan énergétique de l'Univers est dominé par les espèces relativistes durant lesquelles le facteur d'expansion varie en :

$$a \sim \sqrt{t}. \quad (130)$$

Il en découle par la suite les lois d'échelles suivantes :

$$T \approx \frac{10^{10} K}{\sqrt{t}(\text{sec})} \approx \frac{1}{k_B} \frac{1 \text{ MeV}}{\sqrt{t}(\text{sec})}. \quad (131)$$

Ces lois permettent déjà de se faire une idée des hautes températures en place durant les phases primordiales de l'Univers et donc permettent d'anticiper que des processus très énergétiques sont en mesure d'être effectifs. Par exemple les énergies typiques du LHC sont de l'ordre du TeV = 1e6 MeV : elles correspondent aux énergies typiques dans un Univers de 10^{-12} secondes. De plus ces lois d'échelles permet d'anticiper que certaines époques joueront un rôle pour certaines particules quand l'énergie typique du cosmos est de l'ordre de l'énergie de masse des celles-là : par exemple l'électron

possède une énergie de masse proche du MeV (511 keV exactement) et donc il est probable que son abondance soit significativement modifiée lorsque l'Univers aura un âge correspondant à cette masse (à savoir de l'ordre de la seconde).

Evolution des abundances

Pour une "particule" quelconque, l'expression précise de son abondance va dépendre de son caractère relativiste ou non. Il existe des particules pour lesquelles ce caractère reste inchangé au cours du temps, comme les photons par exemples, mais en général, une particule aura tendance à être considérée comme relativiste aux premiers instants de l'Univers puis évoluera plus tard vers le régime non-relativiste, avec comme conséquence une variation, parfois radicale, de son abondance au cours du temps.

L'énergie d'une particule libre est donnée par :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (132)$$

Une particule est dite *ultra-relativiste* si son énergie de masse est considérée comme négligeable devant son énergie cinétique, $pc \gg mc^2$, auquel cas $E \sim pc$. C'est notamment le cas du photon, étudié en détail dans la section précédente. A l'inverse, une particule est dite non relativiste si son énergie de masse constitue l'essentiel de son énergie totale $pc \ll mc^2$. Cela correspond au fluide "matière" développé dans le chapitre précédent et dans ce cas $E \sim mc^2(1 + p^2/2m) \sim mc^2$. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces expressions pour l'énergie dans l'équation 119 va conduire à des expressions différentes des abondances.

Cas ultra-relativiste Ce cas correspond à celui étudié précédemment pour les photons : en effet, si l'on parle du principe que la masse d'une particule est négligeable, elle en devient quasi similaire à un photon et son abondance n'en diffère que par le facteur de dégénérescence et par la statistique à utiliser (BE ou FD). En conséquence, l'abondance d'une particule dans ce régime ultra-relativiste sera proche de celle des photons. Un calcul précis donne l'abondance suivante pour un *boson* :

$$n_B = n_\gamma \frac{g_B}{2}, \quad (133)$$

tandis que si la particule étudiée est un fermion :

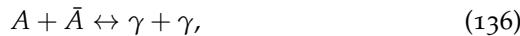
$$n_F = n_\gamma \frac{3g_F}{8}. \quad (134)$$

A un facteur proche de l'unité près, l'abondance d'une particule relativiste est essentiellement celle des photons $n \sim n_\gamma$.

Cas non relativiste Dans ce régime, l'énergie d'une particule est la somme de l'énergie cinétique classique et de son énergie de masse, $E \sim p^2/2m + mc^2$ et l'occupation statistique des énergies (cf. eq. 118) devient la statistique de Maxwell-Boltzmann. Le calcul de son abondance donne une abondance qui dépend directement de la température :

$$n = g e^{\frac{\mu}{k_B T}} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{k_B T}} \sim e^{-\frac{mc^2}{k_B T}} \quad (135)$$

Compte tenu de l'évolution de la température, qui décroît avec le temps, l'abondance décroît de façon exponentielle. La réaction typique permettant cette décroissance est une réaction de *désintégration* :



avec un déplacement de l'équilibre vers la droite de cette équation, i.e. vers le réservoir de photons.

Transition Se pose alors la question de la détermination du régime dans lequel se trouve une particule. Il s'avère que la température d'un gaz de particule est liée à l'énergie cinétique et $E_c \sim k_B T$. Par conséquent à haute température, $k_B T \gg mc^2$, une particule tend à être ultra-relativiste tandis qu'à basse température $k_B T \ll mc^2$, celle-ci tend à être non relativiste. On sait également que la température de l'Univers décroît au cours du temps, donc pour une particule massive donnée, il se trouvera toujours une époque reculée où cette particule est relativiste, suivie par une époque où elle basculera dans le régime non-relativiste. La transition entre les deux régimes opère lorsque l'énergie cinétique typique est de l'ordre de l'énergie de masse :

$$k_B T(z^*) = mc^2. \quad (137)$$

Sachant que la température du rayonnement varie en $T_\gamma \sim (1+z)$ et qu'à l'équilibre un fort couplage existe, la transition opère à un redshift z^* donné par :

$$1 + z^* = \frac{mc^2}{k_B T_0}. \quad (138)$$

On constate ainsi qu'une particule passera dans le régime non relativiste d'autant plus rapidement qu'elle sera massive. A l'inverse, une particule de masse nulle ne pourra jamais, comme attendu, basculer dans le régime non relativiste.

Abondances résiduelles

En résumé, l'abondance à l'équilibre d'une particule passe par 2 étapes distinctes :

- à grand $z > z^*$, nous avons $k_B T \gg mc^2$ et $n \sim n_\gamma$
- à bas $z < z^*$, nous avons $k_B T \ll mc^2$ et l'abondance décroît de façon exponentielle. Elle se désintègre et son abondance devient très inférieure à l'abondance des photons, $n \ll n_\gamma$.

Or nous avons vu précédemment que les réactions qui permettent le maintien de cet équilibre vont "geler" et découpler une espèce de la "soupe" de particules en interaction : après ce gel, l'abondance d'une espèce va rester celle de l'équilibre au moment du découplage. Ce gel peut opérer avant ou après z^* . Si une particule gèle pour $z > z^*$, elle se trouvait dans son régime relativiste, en grande abondance. Un tel type de particule va rester très abondante jusqu'à nos jours et c'est par exemple le cas des neutrinos. Si à l'inverse elle gèle pour $z < z^*$, alors celle-ci avait déjà entamé sa désintégration durant laquelle son abondance décroît de façon exponentielle. Par conséquent la particule est en très faible abondance et aujourd'hui son abondance doit être très faible devant celle des photons (et donc des neutrinos). C'est le scénario essentiellement de toutes les particules massives, que l'on dit aussi *particules reliques* car elles auront survécu à la désintégration.

Histoire thermique de l'Univers et Nucléosynthèse primordiale

Dans ce chapitre nous allons voir comment les processus à l'œuvre dans l'Univers chaud vont conduire aux abondances observées actuellement des principales particules élémentaires et des éléments légers. Ces processus se déroulent pour $t < 3$ minutes, dans un Univers dont la dynamique est dominée par les espèces relativistes.

Quelques étapes

On rappelle que 2 processus sont en compétition : l'annihilation qui tend à faire décroître de façon exponentielle l'abondance d'une particule donnée et le gel qui tend à figer l'abondance de cette particule en la soustrayant au bain de réactions environnant. La séquence suivante donne un aperçu de la cascade de processus qui opèrent lors de la baisse de température de l'Univers, induite par l'expansion ($T = T_0(1 + z)$). La séquence suivante démarre au confinement des quarks dans les nucléons.

- $T \sim 3 \cdot 10^{12}$ K : ($t \sim 10^{-5}$ sec, $kT \sim 250$ MeV) : confinement des quarks. Particules présentes $p, n, \pi^+, \pi^0, \pi^-, e, \bar{e}, \mu \bar{\mu}$ + neutrinos ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$).
Les particules $\tau, \bar{\tau}$ sont déjà annihilées à ce stade et les neutrinos associés $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ sont gelés.
- $T \sim 10^{12}$ K : désintégration des pions
- $T \sim 10^{11}$ K : désintégration des muons et gel des neutrinos associés
- $T \sim 6 \cdot 10^9$ K : ($kT \sim 500$ keV, $t \sim 1$ s) désintégrations des électrons.
Gel des ν_e et gel des abondances relatives de n et p .
- $T \sim 10^9$ K : démarrage de la nucléosynthèse
- $T \sim 3000$ K : recombinaison, production du fond diffus

Entropie et fond neutrino Parmi les étapes mentionnées précédemment on constate que les neutrinos se découpent de la 'soupe cosmique' en des époques très réculées et toujours dans leur régime relativiste. Lors du passage des électrons dans le régime non relativiste (qui opère plus tard), ces mêmes neutrinos ne peuvent donc servir de canaux de désintégration car ils n'interagissent plus avec ceux-ci via l'interaction faible. Cette désintégration se fait donc uniquement suivant :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma \quad (139)$$

Ce processus opère à entropie constante, donc l'entropie des électrons est reversée sur les photons et non vers le neutrinos. On peut montrer que la densité d'entropie de bosons et fermions sont reliées par :

$$s_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} s_B \quad (140)$$

Par conséquent la nouvelle entropie des photons, post-anihilation des électrons est :

$$s'_\gamma = s_\gamma + s_{e+} + s_{e-} = \frac{11}{4} s_\gamma. \quad (141)$$

De plus l'entropie d'une espèce relativiste est une fonction directe du cube de sa température. Donc nous avons d'une part une espèce relativiste qui aura évolué de façon passive (les neutrinos avec $s'_\nu = s_\nu$) et une autre qui aura augmenté grâce aux électrons. Donc en fin de désintégration :

$$s'_\gamma = \frac{11}{4} s_\nu \quad (142)$$

ou bien

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_\gamma \quad (143)$$

Le gaz de neutrino doit être plus froid que celui de photons. Le fond neutrino peut en principe être mesuré aujourd'hui (même si cela reste encore pratiquement impossible) et doit donc présenter une température de $T_{\nu,0} = 1.95K$.

Synthèse de l'hélium

La synthèse de l'hélium constitue l'événement majeur de la production des éléments légers lors de la phase chaude du Big-Bang. L'abondance finale de cet élément va essentiellement dépendre du matériau à disposition et donc de la quantité de nucléons disponible.

Rapport neutron/proton Environ 1 seconde après le Big-Bang, les nucléons (protons et neutrons) ne sont plus relativistes et leurs abondances (notées p et n respectivement pour les protons et neutrons)

sont régies par une statistique de type Maxwell-Boltzmann :

$$p \approx n \sim e^{-\frac{m_p^2}{k_B T}}. \quad (144)$$

Les abondances des deux nucléons suivent des évolutions similaires car leurs masses sont proches : le proton est constitué du triplet de quarks *uud* et possède une masse de $m_p = 938.27$ MeV, tandis que le neutron est composé du triplet *udd*, pour une masse $m_n = 939.56$ MeV. En toute rigueur néanmoins, l'écart de masse $\Delta m = m_n - m_p = 1.3$ MeV suffit pour favoriser l'abondance du proton par rapport à celle du neutron, dont l'évolution en abondance est plus rapide. Le rapport d'abondance est donné par :

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{\Delta m}{k_B T}}, \quad (145)$$

Le gel des réactions impliquant neutrons et protons se produit environ 2 secondes après le Big-Bang. A cet instant le rapport neutrons sur protons vaut :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{gel}} \approx \frac{1}{6}. \quad (146)$$

Synthèse du Deutérium Le Deutérium est un noyau composé d'un proton et d'un neutron et il fait office d'étape intermédiaire vers la production d'hélium. La production de cet élément se fait via la réaction :



cette équation doit satisfaire l'équilibre des potentiels chimiques :

$$\mu_p + \mu_n = \mu_D(+0). \quad (148)$$

A partir de l'équation 135, ces potentiels chimiques peuvent être extraits pour chaque espèce. En appliquant alors l'égalité des potentiels on obtient l'équation de Saha :

$$X_D = n \times \frac{g_D}{g_n g_p} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{m_D}{m_n m_p} \right)^{3/2} \times e^{\frac{B}{kT}}, \quad (149)$$

où $X_D = \frac{n_D}{n}$ est le rapport deutérium sur proton et $B = 2.22$ MeV est l'énergie de liaison de l'élément. Il est d'usage d'exprimer l'abondance de neutrons n en fonction de l'abondance de photons $n \sim \eta n_\gamma$:

$$n \approx 0.244\eta \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3. \quad (150)$$

La dépendance globale de l'abondance du deutérium peut alors se résumer à :

$$X_D \sim (k_B T)^{3/2} \eta e^{\frac{B}{k_B T}}. \quad (151)$$

Il apparaît une énergie caractéristique donnée par l'énergie de liaison $B \approx 2$ MeV : à première vue, en se plaçant quelques secondes après le Big-Bang, la température a suffisamment baissé pour que le deutérium devienne suffisamment abondant, via le terme exponentiel de l'équation de Saha. Toutefois les réactifs sont peu abondants ou à l'inverse les photons sont extrêmement nombreux et empêche un déplacement significatif de l'équation 147 vers la production de deutérium : dans l'équation 151 cela se manifeste par le terme $\eta \ll 1$ qui amortit le terme exponentiel. Il faut donc attendre une évolution significative de la température pour que finalement le deutérium puisse être produit en quantité abondante. Ce blocage au niveau du deutérium au cours de la chaîne de synthèse de l'hélium constitue un goulot d'étranglement : on parle de *deutérium bottleneck*.

radioactivité β En pratique il faut attendre environ 100 secondes, au bout duquel $k_B T \sim 0.1$ MeV pour que l'abondance de deutérium soit suffisante pour poursuivre la synthèse des éléments légers. Pendant ce délai, le rapport n/p continue de décroître sous l'effet de la radioactivité β qui conduit à la transformation de neutrons en protons via l'émission d'électrons. La durée de vie du neutron étant de l'ordre de 15 minutes, la modification du rapport est faible mais réelle. A la fin du deutérium bottleneck, nous avons :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{bottleneck}} \sim \frac{1}{7} \quad (152)$$

synthèse de l'hélium et autres éléments légers Le deutérium devenant disponible, l'hélium peut être synthétisé. L'énergie de liaison de ce noyau est très importante $B_{He} \sim 30$ MeV, la synthèse est quasi immédiate et quasi totale quand les températures typiques sont de l'ordre de $k_B T < 0.1$ MeV : l'intégralité des neutrons se trouvent piégés dans les noyaux d'hélium (2 protons + 2 neutrons). Disposant à cet instant de 7 protons pour chaque neutrons, cela conduit à une fraction de masse sous forme d'hélium donnée par

$$Y_{He} \sim 25\% \quad (153)$$

En nombre, l'hélium représente seulement 10% des noyaux, le reste étant quasi-exclusivement des protons, i.e. des noyaux d'hydrogène.

Quelques éléments supplémentaires sont également produits. Par exemple le Li⁷ est un élément produit en faible quantité à partir de l'hélium, ainsi que He³ qui est un résidu des réactions de production de He⁴. D'autres éléments comme Be⁷ et H³ sont également synthétisés mais leur temps de vie courts par rapport à l'âge de l'Univers font que ces éléments ne sont plus présent aujourd'hui. De façon générale c'est la grande stabilité du noyau d'hélium standard qui

lui confère ce rôle prédominant : les autres éléments de masse voisine sont beaucoup plus instables (avec des énergies de liaison plus faibles) et sont donc peu enclin à se former. Il est ainsi communément dit que la nucléosynthèse primordiale s'arrête avec He^4 , 3 minutes (i.e. une grosse centaine de secondes) après le Big-Bang. Les éléments plus lourds ne pourront être produits que via des processus stellaires, notamment via la réaction triple α qui conduit à la production de carbone.

Nucléosynthèse et Cosmologie

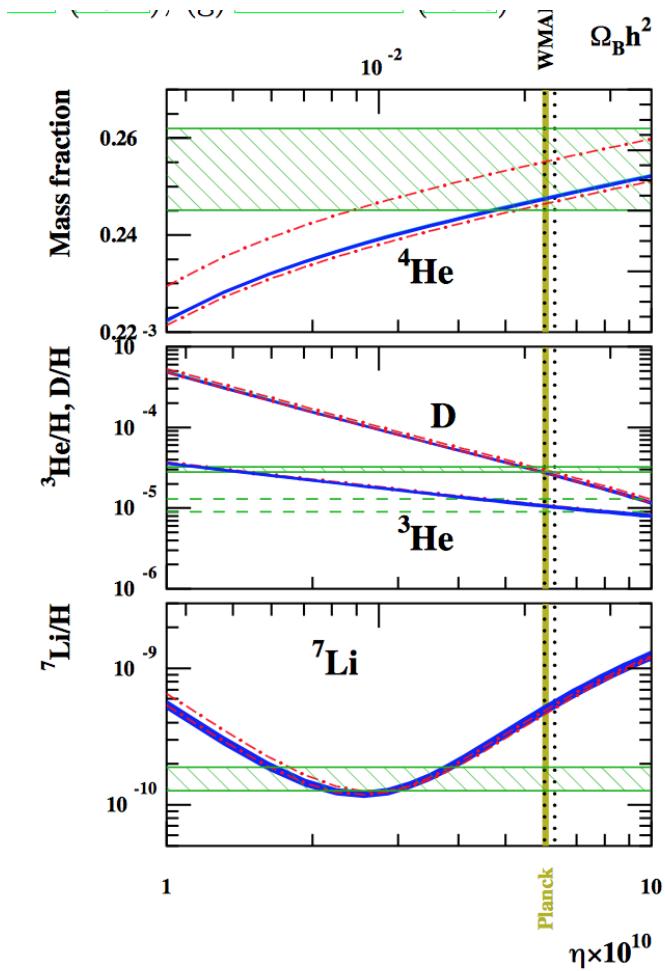


FIGURE 6: Comparaison des abondances observées des éléments légers (zones hachurées), des modèles (lignes) et des contraintes WMAP/Planck (traits verticaux). Ces abondances sont données en fonction du rapport baryon sur photon η et du paramètre de densité des baryons Ω_b . Figure extraite Coc, Uzan & Vangioni 2013.

La nucléosynthèse primordiale aboutit à la production de quelques éléments légers, dont en particulier l'hélium. Cette production va dépendre du nombre de baryons à disposition, permettant ainsi de contraindre le paramètre Ω_b ou de façon équivalente le rapport baryons sur photon η . La figure 6 présente la comparaison entre les

mesures d'abondances et les modèles de nucléosynthèse primordiale. On constate que pour He^4 , He^3 et D, il y a un régime de concordance pour $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$ et $\Omega_b h^2 \sim 0.022$. L'absence d'accord avec le Lithium s'explique quand à lui par la difficulté d'estimer l'abondance *primordiale* de cet élément, cet élément pouvant être détruit au sein des intérieurs stellaires.

Il est intéressant de constater que ces contraintes sur la quantité de baryons universelle est en accord quasi parfait avec celles issues de l'étude du fond diffus cosmologique (WMAP et Planck). Cet accord est d'autant plus remarquable que ces estimations reposent sur des études très différentes :abondance primordiale d'éléments d'une part, spectre des fluctuations des baryons de l'autre.

Remarquons enfin que les abondances dépendent également de la variation temporelle de la température, régie par l'évolution du facteur d'expansion et donc in fine sur les paramètres cosmologiques. Ainsi les processus de nucléosynthèse se déroule dans une époque où la dynamique de l'Univers est dominée par les espèces relativistes, ainsi dans l'absolu les abondances permettent de contraindre la densité d'énergie des espèce relativistes Ω_r . Par exemple, le nombre d'espèce de neutrinos peut être contraint par cette mesure et les résultats actuels ne permettent pas de dévier du nombre de neutrinos prédit par le modèle standard, à savoir 3.

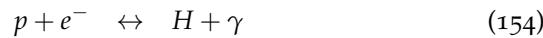
Le Fond Diffus Cosmologique

Le fond diffus cosmologique constitue la pierre angulaire de la cosmologie actuelle et se présente comme l'un des objets astrophysique le mieux connu et le plus étudié. C'est la conjonction d'une excellente compréhension théorique de cet objet avec l'avalanche de données de grande qualité qui a contribué à installer le fond diffus comme l'un des plus grands succès de la cosmologie.

Le fond diffus cosmologique est communément appelé CMB (pour *cosmic microwave background*) et est constitué des photons "libérés" lors du processus de dernière diffusion. Ce processus a opéré 380 000 ans après le Big Bang et ces photons sont toujours détectable aujourd'hui car présent en grande quantité. Ils sont les reliques d'un époque où l'équilibre matière-rayonnement régnait et présentent une distribution spectrale de corps noir. Ce corps noir possède une température caractéristique d'environ 3K. Il se caractérise également par une intensité sur le ciel qui est uniforme à un très grand niveau de précision. Une étude détaillé de ce rayonnement fait ressortir des fluctuations qui trace la distribution de matière à l'époque de son émission, donnant ainsi accès à une vue sans égal sur le cosmos à ces époques reculées.

Recombinaison

Si l'on se place après la fin de la nucléosynthèse primordiale ($t > 3$ minutes), protons, photons et électrons sont en interaction via 2 types de réactions, la recombinaison et la diffusion Thompson :



Ces 2 couplages vont disparaître de façon simultanée sous l'effet de la baisse de la densité d'électrons (ou de protons libres) cosmique. On définit la fraction d'ionisation x de la façon suivante :

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_H} \quad (156)$$

qui vaut 1 lorsque que le gaz cosmique est complètement ionisé et 0 lorsqu'il est complètement neutre. Notons qu'en raison de la neutralité électrique, la densité de protons libres n_p est égale à la densité d'électrons libres n_e . De même, le nombre d'atomes d'hydrogène (créé par l'assemblage d'un proton et d'un électron) est donné par $n_H = (1 - x)(n_p + n_H)$.

L'équation de recombinaison peut être équilibrée via les potentiels chimiques $\mu_p + \mu_e = \mu_H$ et on rappelle que pour chaque espèce son abondance n_i est donnée par :

$$n_i = g_i e^{\frac{\mu_i}{k_B T}} \left(\frac{m_i k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}}. \quad (157)$$

On obtient alors l'équation décrivant l'évolution temporelle de la fraction ionisée :

$$\frac{1 - x}{x^2} = n_B \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} m_e^{-3/2} e^{\frac{\chi}{k_B T}}, \quad (158)$$

où $n_B = n_p + n_H$ désigne la densité de baryons et $\chi = 13.6$ eV est l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène. Notons également que la densité de baryon peut s'écrire en fonction du nombre de photons $n_B = \eta n_\gamma \sim T^3$ et l'équation de l'état d'ionisation peut s'écrire :

$$\frac{1 - x}{x^2} = A \eta \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\chi}{k_B T}} \quad (159)$$

où A est un pré-facteur fonction notamment des facteurs de dégénérence. Notons que le terme de droite de l'équation 159 ne dépend que du temps, par conséquent elle se résume à une équation du second degré sur x à un instant donné. On rappelle que cette évolution manifeste *un déplacement de l'équilibre* vers la droite de l'équation 154.

La figure 7 présente l'évolution de la fraction ionisée pour différentes valeurs de Ω_b . Dans tous les cas l'Univers voit la quantité d'atomes ionisés divisée d'un facteur 100-1000 entre $z=1500$ et $z=1000$, correspondant à un âge d'Univers $t=380$ 000 ans. On peut constater que ce processus opère plutôt tardivement : l'époque correspondant à l'énergie caractéristique $\chi = 13.6$ eV s'est mise en place à $t = 180$ ans. De manière analogue au deutérium bottleneck, c'est la grande quantité de photons (par rapport au nombre de baryons) qui empêche une mise en place plus rapide. Si l'on examine la figure 7 plus en détail on constate d'une part qu'une plus faible densité de baryon (Ω_b plus faible) conduit à une mise en place moins efficace de la recombinaison. Elle opère plus tardivement et est moins complète dans un Univers moins riche en baryons.

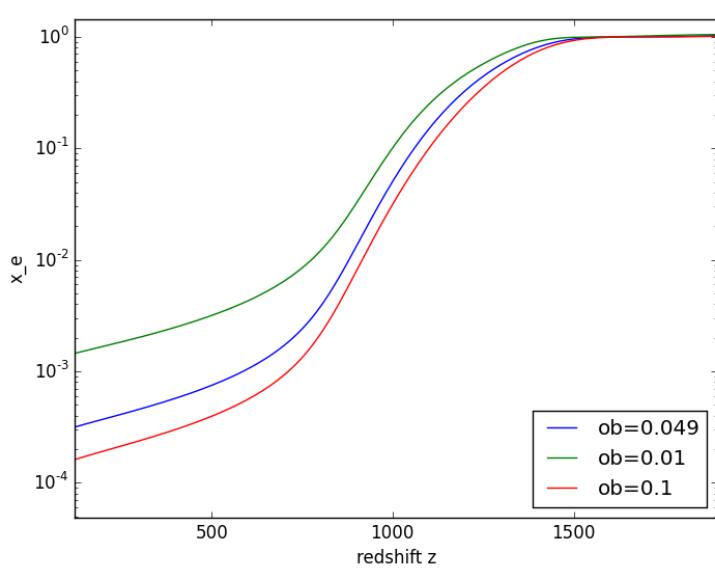


FIGURE 7: Evolution temporelle de fraction d'ionisation pour trois valeur de Ω_b .

Surface de dernière diffusion

Fin de la diffusion Thompson La baisse de la densité électronique qui accompagne la formation d'atomes neutres conduit également à réduire l'efficacité de la diffusion Thompson. Dans un environnement riche en électrons libres, la diffusion force un court libre parcours moyen des photons et empêche le rayonnement de se propager sur de longues distances : c'est la marque d'un Univers opaque, dans lequel l'information ne peut provenir de régions lointaines. Toutefois lorsque $x \sim 0.01\%$, la diffusion gèle, et se produit alors la *dernière diffusion* à un redshift $z=1100$. A partir de cet instant, le rayonnement n'interagit plus avec les électrons et de fait se découpe de la matière : ce rayonnement peut dorénavant se propager librement et est détecté aujourd'hui sous la forme du CMB. Notons pour finir que la baisse de la densité électronique va également conduire au gel des réactions de recombinaison vers $z=1100$, avec un ionisation résiduelle de l'ordre de 0.01%.

surface de dernière diffusion A partir de $z = 1100$ les photons du fond diffus vont pouvoir se propager librement et de façon essentiellement rectiligne. Les photons du fond diffus qui nous parviennent aujourd'hui sont donc issus de toutes les régions du celle distantes de telle manière à ce que le rayonnement mette 13.8 milliards d'années à nous parvenir. L'ensemble de ces régions définit une coquille, centrée sur l'observateur et de distance de parcours lumineux égale

à l'âge de l'Univers. Cette coquille possède une faible épaisseur, correspondant à la durée qu'aura mis la diffusion Thompson à geler, comparable à la durée qu'à mis la recombinaison à se mettre en place ($\Delta z \sim 100$). Vu depuis l'observateur, cette coquille apparaît donc comme une surface sphérique vue depuis l'intérieur, *la surface de dernière diffusion*. Les régions au delà de cette surface de dernière diffusion nous sont inaccessibles par l'intermédiaire des photons, puisque ces derniers n'emporte que l'information de la dernière diffusion : les régions au delà de cette sphère sont opaques à toute observation et les régions en deçà (à l'intérieur) de cette sphère constituent l'Univers observable de l'observateur placé en son centre.

Rappelons que ces photons sont ultra-dominant en nombre, avec par exemple un rapport baryon/photon $\eta \sim 6e - 10$. Cela a plusieurs conséquences : d'une part cela signifie qu'aucun processus astrophysique n'est en mesure de faire disparaître ce rayonnement et il est de fait toujours mesurable aujourd'hui. D'autre part cette domination est telle que l'impression même de signatures de processus astrophysique entre $z=1100$ et aujourd'hui ne peut se faire qu'à des niveaux très faible. Par conséquent ce rayonnement possède toujours un spectre de corps noir (décalé vers le rouge) même si il n'est plus en situation d'équilibre avec la matière. De même les éventuelles marques des propriétés de l'Univers âgé de 380 000 ans s'y trouve toujours. L'observation de la surface de dernière diffusion est donc une fenêtre incomparable sur l'état du cosmos à ces époques lointaines.

Corps noir cosmologique

Le fond diffus cosmologique est issu d'une époque où matière et rayonnement étaient couplés et par conséquent possédaient à ces époques reculées un spectre de corps noir. La densité volumique de photons dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ est donné par :

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (160)$$

Comme indiqué précédemment, la surabondance de ces photons est telle que ce signal a conservé les caractéristique d'un tel corps noir, même dans un régime de faible couplage entre matière et rayonnement. Aujourd'hui la température de ce 'corps noir' est mesurée avec une très grande précision (voir aussi la figure 8) :

$$T_0 = 2.7255 \pm 0.0006 K. \quad (161)$$

Ce spectre va conserver sa forme, malgré le redshift des photons

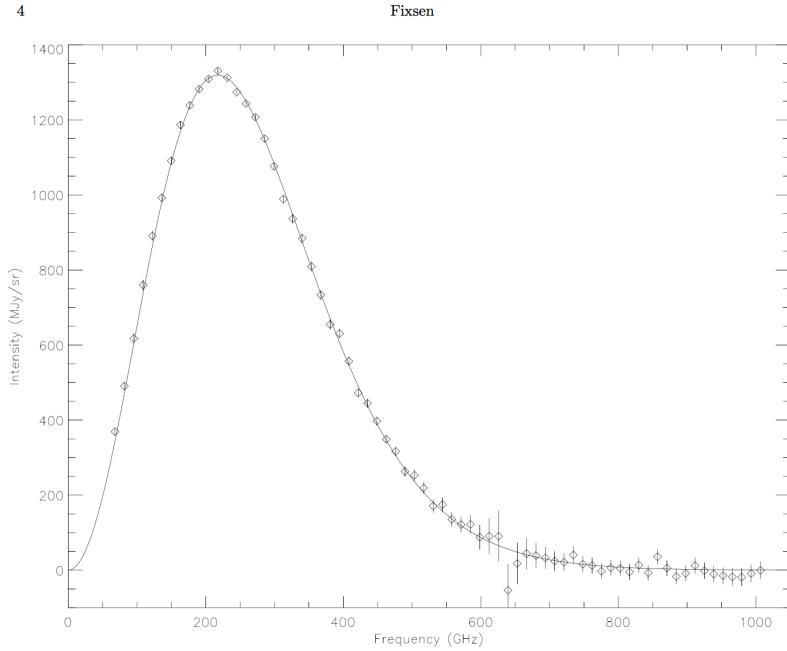


FIGURE 8: Le spectre du fond diffus cosmologique : les symboles représentent les mesures de l'instrument FIRAS, la ligne le spectre de corps noir pour une température de $T_0 = 2.725\text{K}$. Figure extraite de Fixsen 2009.

concernés et malgré la modification de leurs fréquences selon :

$$\nu(a) = \frac{\nu_0}{a}. \quad (162)$$

Dans un volume de contrôle de volume $V = V_0 a^3$ et dans un intervalle de fréquence $d\nu = d\nu_0/a$, le nombre de photon doit rester identique quel que soit l'instant considéré :

$$\frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} V = \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{h\nu_0/k_B T_0} - 1} V_0, \quad (163)$$

qui ne peut être satisfait que si la température caractéristique du corps noir suit la relation :

$$T = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z) \quad (164)$$

que nous avions déjà établi. On remarque ainsi que la recombinaison opérant à $z \sim 1100$, la température du gaz de photon cosmique était proche des 3300 K.

Anisotropies du CMB

Le fond diffus est représentatif d'un Univers jeune ($t=380\text{ 000 ans}$) et donc très proche de l'homogénéité parfaite. Par conséquent sa mesure fait apparaître une très grande stabilité du signal sur tout le ciel,

sans fluctuations de température détectable jusqu'à des niveaux de 0.001 K. Au delà, commence toutefois à apparaître des anisotropies dans le signal : celles-ci sont essentiellement générées par la physique des baryons à l'œuvre au moment de la recombinaison et par des processus astrophysiques qui affecte le rayonnement au cours de son vol jusqu'à l'observateur. L'étude de ces anisotropies est extrêmement riche d'informations pour la physique fondamentale, la cosmologie et l'astrophysique. Notons que nous allons nous concentrer sur les fluctuations de température et implicitement le mot "fluctuation" ou "signal" désigne ce type de donnée. Il existe également des études en *polarisation* que nous n'aborderons que très rapidement en fin de chapitre.

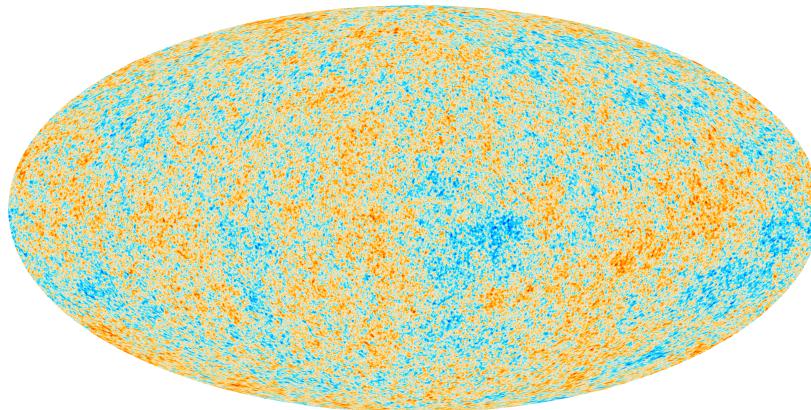


FIGURE 9: La carte des anisotropies du fond diffus obtenue par la mission européenne *Planck*. Les zones jaunes sont plus chaudes que les zones bleues. Le niveau des fluctuations représentées est de l'ordre de 0.001%.

Principe de l'analyse des anisotropies du CMB

Dans cette section, nous allons exposer rapidement les grands principes de l'analyse du signal du fond diffus. Le CMB se manifeste pour l'observateur comme un signal sur tout le ciel, généralement sous la forme d'une carte de température $\delta T(\theta, \phi)$, mesurée dans un repère sphérique. Afin de pouvoir extraire de l'information de ce type de données, l'on raisonne généralement sur la transformée de Fourier de ce signal. Cette opération permet d'une part de séparer les contributions des différentes échelles angulaires. D'autre part, nous verrons que la théorie qui permet de prédire les propriétés de ces fluctuations se fait naturellement dans l'espace de Fourier, où les différentes échelles angulaires évoluent de façon découplées en très bonne approximation. Dans un espace sphérique, les opérations de transformées de Fourier s'effectue via la base des harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ et la carte de températures se décompose de la

façon suivante :

$$\delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (165)$$

où les coefficients (complexes) $a_{\ell,m}$ sont obtenus par projection de la carte sur la base vectorielle composée des harmoniques :

$$a_{\ell,m} = \int \int d\theta d\phi \sin \theta Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \delta T(\theta, \phi). \quad (166)$$

Les coefficients $a_{\ell,m}$ constituent ainsi la contribution de chaque harmonique à la carte de température.

Echelles angulaires Les harmoniques sphériques sont les analogues des modes de Fourier sur la sphère, à savoir une base de sinus et cosinus adapté à une géométrie sphérique. Le coefficient ℓ trace l'échelle angulaire de l'harmonique qui possède ainsi une taille angulaire caractéristique $\theta \sim \pi/\ell$: on parle également de fréquence angulaire où les bas ℓ désigne les grandes échelles sur le ciel et les grands ℓ les petites échelles. Le coefficient m peut varier entre $-\ell$ et ℓ et désigne les différentes orientations indépendantes pour chaque taille angulaire caractéristique : celle-ci sont d'autant plus nombreuses que la fréquence angulaire est élevée. L'harmonique $\ell = 0$ correspond au monopole, à savoir un signal uniforme sur toute la sphère et dont le coefficient a_{00} renvoie directement à la moyenne sur tout le ciel. Les harmoniques $\ell = 1$ sont des dipôles, avec un côté 'chaud' et un côté 'froid' diamétralement opposés.

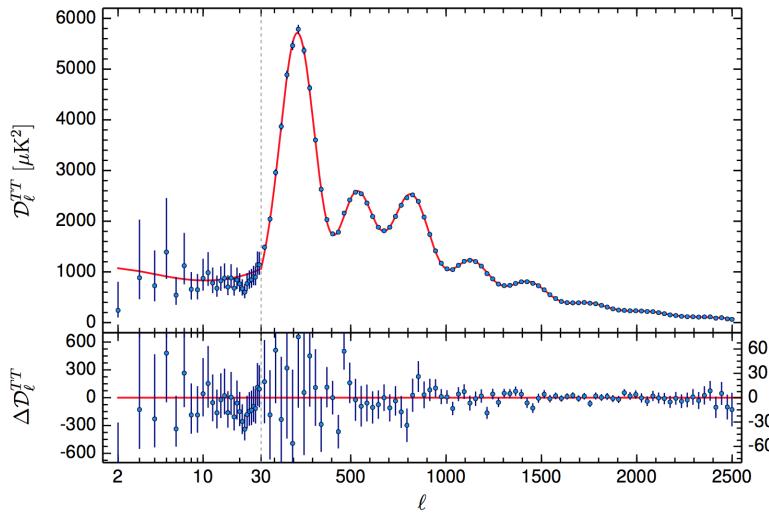


FIGURE 10: Le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique obtenu par *Planck*. Le panneau supérieur représente $D_\ell = \ell(\ell+1)C_\ell$: les points sont les données et la ligne représente le spectre prévu pour un modèle Λ CDM. Le panneau inférieur montre les résidus entre le modèle et les points de données.

Spectre de puissance Armé de la collection des coefficients $a_{\ell,m}$ d'une carte du ciel, on évalue les contributions relatives de chaque échelle par le spectre de puissance angulaire :

$$C_\ell = \langle |a_{\ell,m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell,m}|^2 \quad (167)$$

Ce faisant, on rassemble pour chaque échelle angulaire ℓ les contributions de toutes les orientations m associées. Si toutes les directions sont à priori équivalentes et aucune n'est privilégiée, alors cette opération ne produit pas de perte d'information. C'est le cas du CMB, celui-ci étant à priori isotrope. D'autre part, une grande classe de modèles d'inflation prédisent que les fluctuations du fond diffus doivent appartenir à la classe des *champs aléatoires gaussiens* qui sont entièrement définis par leur 'variance', ce qui est précisément la nature du spectre de puissance angulaire.

Avant-plans

Avant toute chose, il est important de réaliser qu'une carte brute du ciel aux longueurs d'ondes sondées par les missions CMB est soumise à une forte contamination par des avant-plans astrophysiques. Parmi ces avant-plans, le plus spectaculaire est sans contexte la Galaxie dont par exemple l'émission par les poussières ou le rayonnement synchrotron empêchent d'accéder aux fluctuations du CMB en arrière plan. Ces avant-plans peuvent être ajustés, modélisés et pris en compte dans des modèles d'inversion, afin d'extraire le signal d'origine cosmologique des portions du ciel affectées. Notez que ces avant-plans sont également source de recherches dédiées, notamment à propos des propriétés des poussières dans la Voie Lactée.

Dipôle Le premier niveau d'anisotropie est constitué par le dipôle du CMB. Il possède une amplitude de l'ordre de 3 mK et résulte du mouvement de l'observateur par rapport à la surface de dernière diffusion. Ce mouvement induit un effet Doppler, fonction de la vitesse de déplacement et qui fait apparaître des zones plus chaudes et plus froides que la moyenne, diamétralement opposées et alignées avec la direction de déplacement. Au premier ordre, la variation de température dans la direction du dipôle obéit à la relation :

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{dipole}} \sim \frac{v}{c} \quad (168)$$

et donne une valeur de vitesse de déplacement $v \sim 330 \text{ km/s}$ pour le barycentre du système solaire. Cette vitesse est la somme notamment de la vitesse de déplacement du Soleil dans la Galaxie et de la Galaxie dans le Groupe Local.

Anisotropies Intrinsèques

Les fluctuations de température du CMB tracent des fluctuations de densité de matière. Plusieurs modèles de couplage entre matière et rayonnement existent, mais un grand nombre d'évidences observationnelles pointent vers des fluctuations de type *adiabatiques*. Dans ce mode de couplage, le rapport entre la densité de matière et celle de rayonnement reste constant y compris au sein des fluctuations locales : le fluide de matière ne dérive pas par rapport au fluide de photons. Dans ce cas le rapport des densités reste constant :

$$\frac{n}{n_\gamma} = \text{cste} \rightarrow \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} \quad (169)$$

Pour la matière, densité de matière et d'énergie sont directement reliées $\epsilon = nmc^2$ et

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta \epsilon}{\epsilon}. \quad (170)$$

Pour les photons, nous avons déjà vu que $n_\gamma \sim T^3$:

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T}. \quad (171)$$

D'où il apparaît que les fluctuations de températures tracent les fluctuations de densité via :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{adiab}} = \frac{1}{3} \frac{\delta n}{n} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (172)$$

Dans un régime de fluctuations adiabatiques, les régions plus chaudes (respectivement plus froides) que la moyenne correspondent aux régions les plus dense au même moment.

Toutefois les fluctuations de densité produisent également des fluctuations de potentiel gravitationnel qui devront être gravie ou dévalées par les photons du fond diffus au moment de leur émission. Les photons en train de sortir d'un puit (correspondant à une surdensité) seront décalées vers le rouge (perte d'énergie) et ceux en train de dévaler un pic de potentiel (correspondant à une sous densité) seront décalés vers le bleu (gain d'énergie). Cet effet se nomme *effet Sachs-Wolf* :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{SW}} = -\delta \phi \quad (173)$$

où $\delta \phi$ est la fluctuation de potentiel. Par ailleurs on peut montrer que la variation de potentiel est liée à la fluctuation de densité via $\delta \rho / \rho = 2\delta \phi$ ce qui implique que la variation de température *totale* est donnée par :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{total}} = \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{SW}} + \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{adiab}} = -\frac{1}{3} \delta \phi = -\frac{1}{6} \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (174)$$

Les points chaud du CMB correspondent à des régions sous-dense de l'Univers au moment de l'émission. La carte de température du CMB est donc une carte de la distribution de matière au même instant.

Ces fluctuations se situent à des niveaux de 0.001%, indiquant par la même que l'Univers était extrêmement homogène au moment de la recombinaison.

Grandes échelles Reste à expliciter l'origine des fluctuations de densité qui conduisent aux fluctuations de températures. L'examen de la figure 10 permet de distinguer 2 régimes. Le premier régime correspond aux grandes échelles $\ell < 30$: ces modes sont plus grands que l'Horizon au moment de la recombinaison et tracent les fluctuations les plus primordiales, dont on pense qu'elles sont issues d'une période inflationnaire présente aux tous premiers instants après le Big-Bang. L'étude de ces régions du spectre permet notamment de mesurer l'amplitude des fluctuations inflationnaire ainsi que le spectre de ces fluctuations. En particulier, les théories inflationnaires indiquent que le spectre de puissance tridimensionnel des fluctuations primordiales doit être invariant d'échelle et de la forme :

$$P(k) \sim k^{n_s} \quad (175)$$

avec n_s proche mais différent de 1. Les résultats de *Planck 2015* indiquent que $n_s = 0.968 \pm 0.006$ en accord avec ces théories.

Petites échelles Au delà de $\ell \sim 30$, le spectre présente un ensemble de modes correspondant à des échelles caractéristiques et qui se manifestent sous forme de pics : on en dénombre 3 principaux suivis d'environ 6 pics d'amplitude décroissante. Ces pics indiquent l'existence d'échelles privilégiées dans la carte des fluctuations : ces échelles résultent d'ondes sonores se propageant dans le plasma au moment de la recombinaison. Ces ondes sonores sont appelées *oscillations baryoniques acoustiques* (BAO en anglais) : leur production sera décrite en détail dans le chapitre dédié à la croissance des grandes structures. Ces oscillations se mettent en place pour des échelles sub-horizon d'où leur présence seulement aux petites échelles : la position du premier pic permet ainsi de tracer la taille sur le ciel de l'horizon sonore. Connaissant la taille *intrinsèque* de cet horizon, la mesure de la taille apparente permet de déduire la géométrie du cosmos le long du parcours des photons ($\Omega_m + \Omega_\Lambda$), qui de fait apparaît comme plane à un bon niveau de précision. Les pics suivants tracent la taille des modes ayant effectué un nombre de battement de plus en plus important entre leur production et l'émission du fond diffus. En particulier leur hauteurs relatives permet de contraindre précisément le couplage entre la matière et le rayonnement et la force de rappel

qui permet d'entretenir ces battements. Cette force de rappel est induite par la gravité créée par la matière et la mesure de l'entretien de ces battements permet de contraindre la quantité de matière totale (Ω_b et Ω_m).

L'une des grandes leçons apprise par l'étude du CMB est la constatation que $\Omega_m > \Omega_b$, en particulier la grande amplitude du 3ème pic (et des suivants) ne peut s'expliquer par une matière purement baryonique : elle nécessite une matière non couplée avec le rayonnement, en quantité significative, *la matière noire*. En l'absence de matière noire, le couplage entre matière et rayonnement n'est pas suffisamment important pour garantir un entretien maximal des oscillations baryoniques. Ce couplage imparfait conduit à un amortissement de ces dernières au cours des battements successifs : les échelles les plus petites, celles-qui oscillent le plus rapidement voient donc leur amplitude décroître. Dans le spectre de puissance angulaire, ce qui se manifeste par des pics d'amplitude de plus en plus faible pour les hautes fréquences angulaires : on parle d'amortissement Silk. Or l'amplitude du 3ème pic (et des suivants) est supérieure à celle attendue dans le cas d'un gaz purement baryonique, i.e. en présence uniquement de matière capable d'intéragir avec le rayonnement (qui fournit le support de pression). Cet excès d'amplitude peut s'expliquer si il existe une force de rappel gravitationnelle supplémentaire, créée par de la masse *qui n'est pas sensible à ce couplage rayonnement matière imparfait*.

Cette matière noire, pèse, entretient les BAOs et n'intéragit pas avec le rayonnement : si elle existe, elle nous est actuellement inconnue. On retrouve également trace d'un effet similaire dans la masse des amas de galaxies, dans la dynamique des galaxies et dans les effets de lentille gravitationnelle.

Anisotropies secondaires

En plus des anisotropies imprimées dans le plasma au moment de la recombinaison, il existe tout un ensemble d'anisotropies créées par différents processus qui affectent les photons du CMB le long de leur parcours entre la surface de dernière diffusion et leur réception. Nous n'en citerons que 3 ici.

La réionisation La réionisation désigne l'époque à laquelle les premières sources de rayonnement ionisant apparaissent dans l'histoire du cosmos entre 400 millions et 1 milliard d'années après le Big-Bang. Ces sources (essentiellement les premières étoiles et quasars) vont ioniser à nouveau le gaz cosmique, dans un court laps de temps et vont produire une nuée d'électrons libres susceptibles d'interagir

avec les photons du CMB par effet Thompson. Cette interaction va influer sur l'amplitude des fluctuations de température et affecter le spectre du CMB en polarisation aux grandes échelles. Cette interaction se mesure via la profondeur optique Thompson τ :

$$\tau = \int_{z_{\text{rec}}}^0 c \sigma_t n_e(z) \frac{dt}{dz} dt \quad (176)$$

qui est une mesure du nombre d'interactions entre un photon du CMB et les électrons de la réionisation. Notons que si la réionisation est précoce, la densité d'électrons n_e est grande et τ est grand tandis que si elle est tardive, cette densité sera plus faible par simple dilution cosmologique conduisant à une faible valeur de τ . Les mesures du CMB indiquent que la réionisation a eu lieu pour $z_{\text{reion}} \sim 8$, en désaccord léger avec les autres sondes astrophysiques du processus qui proposent une réionisation plus tardive avec $z_{\text{reion}} \sim 6$.

L'effet SZ des amas Les amas de galaxies sont les plus grandes structures virielisées de l'Univers actuel. Ils ont été formés récemment $z \sim 1$ et contiennent typiquement plusieurs centaines ou milliers de galaxies pour des masses totales approchant les $10^{14} - 10^{15} M_\odot$. La masse très importante de ces objets font que le gaz piégé dans leur puit de potentiel gravitationnel est chauffé à des températures de l'ordre du million de K : à ces températures le gaz devient un fort émetteur X et est l'objet de processus d'ionisation collisionnelle. De façon analogue à la réionisation, les amas constituent des îlots denses d'électrons libres avec lesquels les photons du CMB peuvent interagir à des redshifts $z \sim 1$. On parle d'effet Sunyaev-Zeldovich, qui produisent de légères distorsions du spectre du CMB, en redistribuant l'énergie des photons vers de plus hautes valeurs. Les amas de galaxies présents sur le ciel produisent ainsi des anisotropies localisées, permettant même la découverte de tels objets avant confirmation par des observations X par exemple.

Le lentillage gravitationnel cosmique Les grandes structures croisées par les photons du CMB au cours de leur parcours entre l'émission et leur réception vont modifier subtilement la distribution sur le ciel des anisotropies primaires par effet de lentille gravitationnelle. Une lentille résulte d'une déformation locale de la métrique par une lentille faite de matière (galaxie, amas, filaments, etc..) qui courbe la trajectoire des rayons lumineux et modifie donc l'apparence des sources d'arrière plan. Dans le cas du CMB, la lentille est constituée de toutes les grandes structures rencontrées au cours de l'histoire de l'Univers tandis que la source d'arrière plan est la source la plus reculée imaginable. Cet effet de lentille se manifeste essentiellement

aux petites échelles et dans le spectre angulaire en polarisation, il nécessite donc des expériences CMB de grande résolution pour pouvoir être extrait. Il a récemment été mesuré par les expériences solitaires que le *South Pole Telescope* ou dans l'espace par *Planck*. Cette mesure est extrêmement importante car elle permet de mesurer de façon quasi indépendante les paramètres cosmologiques à partir de la croissance des grandes structures qui opère à des redshifts différents de la physique du CMB ($z \sim 2$). Elle permet une forte levée de dégénérescence des paramètres mesurés par les fluctuations de températures. Pour l'essentiel les paramètres contraints par le lentillage du CMB confirment les paramètres Λ CDM obtenus par le fond diffus.

Formation des grandes structures

Les grandes structures de l'Univers désignent de façon générique la matière diffuse, les galaxies et amas de galaxies qui s'organisent sous l'effet de la gravitation. Aujourd'hui ces grandes structures produisent une distribution de matière 'filamentaire' où des surdensités côtoient des vides, reliées entre elles par des ponts de matériels. Elles résultent de l'action du mécanisme d'instabilité gravitationnelle sur les faibles fluctuations de densité présentes dans l'Univers jeune et tracées par exemple par le CMB. Au cours des 13.8 milliards d'années, des surdensité de 0.001% parviennent ainsi à croître pour atteindre des contrastes de densité mesurés aujourd'hui dans les galaxies d'au moins plusieurs centaines. Si une grande partie des processus à l'œuvre lors de la formation des grandes structures peut être saisie par une approche analytique, le problème ne peut être abordé dans toute sa complexité que via l'utilisation de simulations numériques, dites simulation cosmologiques.

Densité et spectre de puissance

L'un des objectifs de l'étude de la formation des grandes structures est de prédire comme la matière va s'organiser au cours de l'histoire de l'Univers. La quantité généralement suivie est le contraste de densité :

$$\delta(x, t) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (177)$$

En l'absence de création de masse et dans un Univers homogène et isotrope, la densité moyenne $\bar{\rho}$ est une quantité de référence constante dans l'espace et pour laquelle la variation temporelle est seulement due à la dilution cosmologique.

Toutefois, le contraste de densité à une position x donnée à un instant donné t est finalement porteur d'assez peu d'information cosmologique, puisque l'on cherche à obtenir des contraintes qui ont une valeur 'cosmologique', i.e. globales et génériques. La première étape vers un traitement cosmologique consiste à raisonner dans l'espace de Fourier et à considérer les modes $\delta_k(t)$ d'une réalisation

donnée de $\delta(x, t)$:

$$\delta(x, t) \sim \int_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(t) e^{ikx} dk \quad (178)$$

L'équation 178 représente la décomposition en série de Fourier du contraste de densité : en pratique cela revient à décomposer le champ de densité en une série de modes sinusoïdaux et dont les contributions des différentes fréquences sont données par δ_k . En plus d'un intérêt mathématique, cette décomposition constitue une mise en pratique de 'cosmologisation' de la densité : on se met à suivre des modes sinusoïdaux délocalisés, de taille caractéristique $\lambda = 2\pi/k$, la position x perd de l'importance. L'amplitude d'un mode k est donné tout simplement par $|\delta_k|^2$: l'étude de cette amplitude et son éventuelle évolution temporelle nous renseigne globalement sur l'évolution des structures d'échelle caractéristique λ au cours du temps et sur leurs contribution relatives. Cette amplitude est aussi appelée *puissance* et l'ensemble des puissances de tous les modes k est appelé *spectre de puissance*.

Champ aléatoire Gaussien Le champ de matière cosmologique appartient semble-t-il à la classe des champs aléatoires gaussiens. C'est une prédiction des théories inflationnaires, il semble observationnellement que ce soit le cas et in fine cela constitue une base de travail et éventuellement on pourra être amené à mesure des départs à cette gaussianité. Un champ aléatoire gaussien $\delta(\vec{x})$ se caractérise par une densité de probabilité de type :

$$p(\delta(\vec{x})) \sim \exp(-\delta(\vec{x}) C^{-1} \delta(\vec{x})), \quad (179)$$

où C est une matrice de corrélation, généralement non diagonale. Cette matrice encode les corrélations qui peuvent apparaître dans le champ : celui-ci possède généralement des structures possédant une certaine cohérence spatiale et cette dernière se manifeste en couplant le champ δ entre différentes positions via C . Une propriété intéressante est que la probabilité de la transformée de Fourier de $\delta(\vec{x})$ suit le même type PDF :

$$p'(\delta_{\vec{k}}) \sim \exp(-\delta_{\vec{k}}^* \tilde{C}^{-1} \delta_{\vec{k}}). \quad (180)$$

Une propriété encore plus intéressante est que \tilde{C} est diagonale si $\delta(\vec{x})$ est un champ aléatoire gaussien : chaque mode de Fourier peut être suivi statistiquement indépendamment des autres. Par simple inspection, il apparaît que les composantes de cette matrice de corrélation sont les variances des modes :

$$\langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle = P(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle. \quad (181)$$

Cette mesure de la variance ne dépend que la norme du mode considéré (plusieurs modes partage donc la même variance) et constitue le spectre de puissance $P(k)$ du champ de matière.

Cette quantité est destinée à être mesurée au cours du temps et nous renseigne sur la croissance des structures. Si certaines échelles bénéficient d'une croissance plus rapide que d'autres, cela se manifestera par une déformation du spectre de puissance aux échelles concernées. Si le champ est vraiment un champ aléatoire gaussien, la connaissance de $P(k)$ suffit à complètement le définir : si des corrélations anisotropes sont détectées (dans les relevés de galaxies ou dans le CMB), elles confirmeront soit la nature non-gaussienne des fluctuations primordiales soit l'existence de processus physiques qui génèrent de la non-gaussianité.

Une quantité reliée au spectre de puissance est la fonction de corrélation à deux points $\xi(r)$: elle exprime l'excès de probabilité de trouver de la matière en deux points séparés d'une certaine distance r par rapport à une distribution aléatoire. On peut démontrer que la fonction de corrélation à deux points est simplement la représentation du spectre de puissance dans l'espace des positions (donc sa transformée de Fourier) :

$$\xi(r) \sim \int d\vec{k} P(k) e^{ikr}. \quad (182)$$

Notons qu'à nouveau cette excès de probabilité de dépend que de la distance r et non pas d'une orientation ou de positions spécifiques des 2 points considérés. Généralement, la fonction de corrélation à 2 points est utilisée si l'on a une description discrète du champ de densité : c'est le cas par exemple lorsque l'on utilise des galaxies comme traceurs de la matière dans les grands relevés. Si l'on travaille avec un champ continu (comme dans des travaux analytique), on passe directement dans une représentation en mode de Fourier en utilisant le spectre de puissance $P(k)$: ce dernier présente l'avantage d'explicitement séparer les modes de tailles différentes, là où la fonction de corrélation à 2 points "mélange" les modes et peut donc être dominé par une échelle au détriment des autres, qui peuvent pourtant contenir une information pertinente.

Longueur de Jeans

Une quantité centrale dans l'étude de l'instabilité gravitationnelle est la longueur de Jeans, notée λ_J . Elle correspond à la longueur minimale que doit avoir une structure pour s'effondrer sous l'effet de la gravitation. On y associe également une masse (la masse de Jeans)

M_J donnée simplement par :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \lambda_J^3, \quad (183)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne du milieu et une structure de masse supérieure à la masse de Jeans va s'effondrer. L'existence du grandeur critique pour que l'effondrement se réalise traduit l'existence d'une compétition entre la gravité et un autre processus que la gravité doit 'vaincre' pour que la structure collapse. En général cet autre processus est l'existence d'un support thermique qui fournit une pression à même de s'opposer à la gravitation. Pour du gaz, il s'agit généralement de la pression interne du gaz, pour des systèmes non collisionnels (type gaz d'étoiles) c'est la dispersion de vitesse interne qui agit comme une barrière à l'effondrement.

L'expression de la longueur de Jeans peut s'obtenir avec un simple raisonnement : pour qu'une structure s'effondre il faut que l'information gravitationnelle se répartisse plus rapidement au sein d'une structure que l'information de support thermique. Dans un milieu de densité ρ l'information gravitationnelle est transportée en un temps dynamique :

$$t_G \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (184)$$

Pour un gaz la transmission de l'information de support thermique dépend de la vitesse du son c_s et de la taille de la structure λ :

$$t_p \approx \frac{\lambda}{c_s}. \quad (185)$$

L'effondrement a lieu si $t_G < t_p$, donc si la taille de la structure considérée obéit à la condition :

$$\lambda > \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \equiv \lambda_J. \quad (186)$$

Faire baisser λ_J revient à favoriser l'effondrement gravitationnel, le cas limite étant $\lambda_J \rightarrow 0$ où toute structure s'effondre. Ce régime s'obtient dans un milieu très dense ou bien très froid, i.e. sans support thermique. A l'inverse, une grande valeur de λ_J réduit la possibilité d'effondrement et $\lambda_J \rightarrow \infty$ revient à empêcher toute structure de s'effondrer : cela correspond à un milieu sous-dense, donc très léger, ou bien très chaud avec une grande vitesse du son. Pour un système non-collisionnel, la même expression existe pour la longueur de Jeans en remplaçant la vitesse du son par la dispersion de vitesse du milieu.

Traitement perturbatif

Une dérivation plus rigoureuse peut être obtenue par un traitement perturbatif au premier ordre. On considère un gaz de densité

moyenne $\bar{\rho}$ et d'équation d'état :

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2. \quad (187)$$

Ce gaz obéit aux équation de Poisson, qui est l'équation de champ de la gravité newtonienne :

$$\Delta\phi(x, t) = 4\pi G\rho \quad (188)$$

et aux équations fluides, conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{u} = 0, \quad (189)$$

et conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \vec{\nabla}\phi. \quad (190)$$

On réalise un traitement perturbatif (à 1D par simplicité) :

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}(1 + \delta(x, t)) \quad (191)$$

$$u(x, t) = v_1(x, t) \quad (192)$$

$$\phi(x, t) = \phi_1(x, t) \quad (193)$$

$$P = P_0 + P_1(x, t) \quad (194)$$

En injectant ces développement, on parvient aisément à écrire :

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = -\bar{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (195)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = 0 \quad (196)$$

d'où l'équation maîtresse de l'instabilité :

$$\ddot{\delta} - c_s^2\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (197)$$

Effondrement et Oscillations

Cette équation s'analyse plus facilement en prenant sa transformée de Fourier spatiale :

$$\ddot{\delta}_k + (c_s^2 k^2 - 4\pi G\bar{\rho})\delta_k = 0. \quad (198)$$

Deux régime peuvent être facilement distingués :

- si $c_s^2 k^2 > 4\pi G\bar{\rho}$ c'est une équation d'oscillateur harmonique. Le mode correspond à une onde sonore de pulsation $\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G\bar{\rho}}$. Cela correspond à des grandes fréquences spatiales, donc des petites structures : notons que leur fréquence temporelle est d'autant plus grande que ces structures sont petites.

— si $c_s^2 k^2 < 4\pi G \bar{\rho}$, la solution est hyperbolique avec donc une contribution exponentielle croissante, qui correspond à l'instabilité gravitationnelle. Ce régime correspond aux faibles valeurs de k donc aux grandes échelles. Le temps caractéristique d'instabilité est $\tau = (4\pi G \bar{\rho} - c_s^2 k^2)^{-1/2}$ qui se résume au temps dynamique si k est suffisamment faible donc si le mode étudié est suffisamment grand.

On remarque que le cas critique $\frac{4\pi^2 c_s^2}{\lambda^2} = 4\pi G \rho$ nous redonne la longueur de Jeans :

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho}} \quad (199)$$

Cas cosmologique

LE CAS COSMOLOGIQUE se doit de prendre en compte l'expansion de l'Univers. Comme on le verra en fin de démonstration, cela change finalement peu de choses par rapport au cas exposé précédemment. Toutefois cette étude présente un intérêt technique en rapport avec la manipulation de grandeurs comobiles dans des équations différentielles couplées. Pour cette raison le calcul sera décrit en détail.

LES ÉQUATIONS IMPORTANTES sont les mêmes que dans le cas d'un Univers statique¹⁷ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (200)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \quad (201)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{r}^2} = 4\pi G \rho. \quad (202)$$

La principale difficulté découle de la dépendance temporelle de la distance physique $\vec{r} = a(t) \vec{x}(t)$ où \vec{x} désigne la position comobile : la dérivée par rapport à \vec{r} doit donc être prise avec précaution. Par commodité on préfère généralement écrire ces équations en fonction de données comobiles pour extraire au moins l'effet de flot cosmologique encodé par le facteur d'expansion $a(t)$.

La première étape consiste à transformer les dérivées temporelles prises à \vec{r} constant en dérivées prises à \vec{x} constant¹⁸ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right)_t, \quad (203)$$

de même les dérivées spatiales deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}. \quad (204)$$

17. ρ est la densité de matière, \vec{u} la vitesse, \vec{r} la position physique, P la pression et ϕ le potentiel gravitationnel

18. on rappelle que pour $f(r) = a(t)x, t)$ alors $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_r + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$

Pour finir, il faut établir que la vitesse comporte une partie liée au flot de Hubble¹⁹ :

$$\dot{\vec{u}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v} \quad (205)$$

où \vec{v} désigne une vitesse particulière superposée au flot cosmologique. Enfin la densité sera également exprimée en fonction de la densité de fond, $\bar{\rho} \sim a^{-3}$ qui subit l'expansion cosmologique :

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\vec{x}, t)). \quad (206)$$

LA CONSERVATION DE LA MASSE est modifiée comme suit : nous allons prendre les différents termes un par un. La dérivée temporelle de la densité comprend 2 termes, le premier²⁰ :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_r, \quad (207)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho} (1 + \delta), \quad (208)$$

19. le terme $\dot{a}\vec{x}$ peut facilement se réécrire sous la forme $H\vec{r}$, i.e. la loi de Hubble

20. notez la dérivée temporelle de $\bar{\rho} \sim a^{-3}$ qui intervient ici

et le second :

$$\frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial \vec{x}}. \quad (209)$$

Le terme de flux de cette même équation devient quant à lui :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)(\vec{v} + \dot{a}\vec{x})) \quad (210)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{v}) + \frac{\bar{\rho} \dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{x}) \quad . \quad (211)$$

Le dernier terme de cette égalité peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\bar{\rho} \dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{x}) \quad (212)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\dot{a}}{a} 3(1 + \delta) + \bar{\rho} \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \vec{x}}. \quad (213)$$

En rassemblant le tout on obtient l'équation de conservation de la masse dans sa formulation comobile :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} ((1 + \delta)\vec{v}) = 0 \quad (214)$$

L'ÉQUATION D'EULER COMOBILE se dérive de la même manière.

Prenons le premier terme de dérivée temporelle de la vitesse :

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}. \quad (215)$$

La dérivée temporelle à \vec{x} constant donne :

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \ddot{a}\vec{x}, \quad (216)$$

tandis que le terme de Hubble donne²¹ :

$$\frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \frac{\dot{a}^2}{a} \vec{x}. \quad (217)$$

Le terme d'advection ne présente pas de difficulté particulière²² :

$$\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad (218)$$

$$+ \frac{\dot{a}^2}{a} \vec{x} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}. \quad (219)$$

En rassemblant tous ces premiers termes on obtient une expression comobile pour le membre de gauche de l'équation d'Euler :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \ddot{a} \vec{x}. \quad (220)$$

Le terme correspondant aux forces de pressions de pose pas de difficulté tandis que le terme correspondant aux forces de gravitation peut être modifié en lui incluant le terme en $\ddot{a} \vec{x}$ de l'équation 220 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} + a \ddot{a} \vec{x} \right) \quad (221)$$

$$= \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}}, \quad (222)$$

où $\Phi(\vec{x}, t)$ est un potentiel gravitationnel effectif, prenant en compte les effets de fonds changeant :

$$\Phi = \phi + \frac{a \ddot{a} \vec{x}^2}{2}. \quad (223)$$

En rassemblant partie différentielle et termes sources, on obtient une équation d'Euler comobile qui ressemble beaucoup à sa contrepartie physique avec l'inclusion d'un terme de friction de Hubble :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = -\frac{1}{a \bar{\rho}(1+\delta)} \frac{\partial P}{\partial \vec{x}} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}}. \quad (224)$$

L'ÉQUATION DE POISSON doit également être reformulée en faisant notamment intervenir le potentiel effectif Φ ²³ :

23. en utilisant $\frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} \vec{x}^2 = 6$

$$\Delta \phi = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \quad (225)$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}^2} - 3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (226)$$

$$= 4\pi G \bar{\rho} (1+\delta). \quad (227)$$

Or l'équation de Friedmann²⁴ permet de relier l'évolution du facteur d'expansion avec la densité du fond et permet notamment d'établir que :

24. $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \bar{\rho}$

$$4\pi G \bar{\rho} a^2 + 3a\ddot{a} = 0, \quad (228)$$

d'où l'équation de Poisson comobile :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{x}^2} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad (229)$$

EN EXPANSION, l'équation maîtresse devient (pour chaque mode de Fourier) :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho}\right)\delta_k = 0. \quad (230)$$

où toutes les quantités sont des quantités comobiles. On retrouve essentiellement la même équation et les mêmes conclusions s'imposent, à savoir instabilité si $\lambda > \lambda_J$ et oscillations sonores dans le cas inverse. On note toutefois la présence du terme $2H\dot{\delta}_k$ qui s'apparente à un terme d'amortissement dû à l'expansion. On montrera qu'a cause de ce terme qui tempère les solutions, les modes instables ne seront plus exponentiels mais en loi de puissance et les modes stables oscillants seront amortis sur des temps caractéristiques de l'ordre du temps de Hubble.

Entropie et Univers

LA NOTION D'ENTROPIE EST PROFONDÉMENT LIÉE à la cosmologie. L'une des découvertes fondamentales de la cosmologie est l'affirmation que notre Univers évolue et possède donc une histoire. Conformément à la définition de cette quantité, cela implique que l'entropie de l'Univers fut plus basse qu'elle n'est aujourd'hui. Par ailleurs, l'Univers possède clairement une capacité d'évolution future et son entropie est donc amenée à augmenter. Nous sommes donc aujourd'hui dans un niveau d'entropie intermédiaire, ni à son niveau le plus bas ni à son niveau le plus élevé et cela pose donc naturellement question.

Configurations et probabilités

L'ENTROPIE EST UNE MESURE du nombre d'états microscopiques correspondants à un état macroscopique donné. Dans l'ensemble micro-canonical, décrivant des systèmes isolés à énergie constante, cette brève définition est rigoureusement exacte. L'entropie micro-canonical S est donnée par :

$$S = k_B \log \Omega \quad (231)$$

où Ω désigne le nombre de configurations correspondants à un état macroscopique donné. Le second principe de la thermodynamique stipule que tout système isolé tend à voir son entropie augmenter avec le temps, au pire elle stagnera si le système a atteint un état d'équilibre. Par extension, la flèche du temps est régie par le sens d'évolution de l'entropie : si 2 possibilités s'offrent à un système, l'une avec une augmentation de l'entropie, l'autre avec une diminution de celle-ci, c'est la première qui sera privilégiée.

Cette croissance imposée à l'entropie peut paraître ad hoc, mais émerge naturellement quand on considère l'entropie micro-canonical. Si on considère par exemple un système composé de 4 particules avec

2 éléments gris et 2 éléments rouges (cf. Figure 11). Ce système peut-être *ordonné*, un état atteint par 2 configurations différentes, ou bien *désordonné*, un état atteint lui par 4 configurations différentes. Dans l'ensemble micro-canonical, chacune de ces configurations est équiprobable et par conséquent, quel que soit l'état de départ, l'état d'arrivé possède une plus grande probabilité d'être choisi. En particulier, si le système est dans un état ordonné, il a dans ce cas 2 fois plus de chances d'évoluer vers un état désordonné que de rester ordonné.

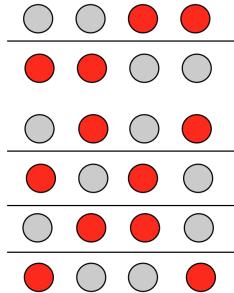


FIGURE 11: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste

IL N'Y A PAS DE MAGIE NOIRE : le système évolue vers l'état qui a le plus de chance d'être réalisé. Dans notre cas, l'état mélangé est plus probable que l'état rangé. A l'inverse, l'état rangé est mieux connu que l'état mélangé : si le système est dans l'état rangé et que l'on s'interroge sur la configuration sous jacente, on ne peut guère se tromper car il n'en existe que 2. A l'inverse si le système est dans l'état mélangé, la probabilité de deviner la configuration exacte sous-jacente est 2 fois plus faible : globalement nous avons une meilleure connaissance de la configuration exacte du système si il est dans un état de faible entropie. C'est pour cette raison que l'entropie est également une mesure du niveau d'information ou de méconnaissance que nous avons du système : un système avec une entropie élevée est moins bien connu qu'un système à basse entropie et cette connaissance à tendance à se dégrader avec le temps. C'est la contrepartie d'une évolution qui va naturellement vers les états à grands nombre de configurations.

Ces constatations restent applicables pour des systèmes plus complexes ou plus réalistes. Par exemple, le nombre de configurations correspondant à un verre brisé excède de très loin celui correspondant à un verre intact : ce dernier nécessite un arrangement précis des atomes et tout départ léger à cet arrangement conduit à le casser. Par conséquent, l'évolution naturelle d'un verre est d'évoluer vers un état cassé, de plus grande entropie. De même si l'on veut recoller un verre (et donc baisser son entropie), cela ne peut se faire si celui-ci est isolé : cela nécessite d'ouvrir le système afin que la baisse d'en-

tropie du verre soit compensée par une augmentation de celle-ci par ailleurs²⁵.

LA TEMPÉRATURE ET L'ENTROPIE sont souvent associées et à nouveau on retrouve dans cette association la notion d'ordre et de désordre, d'information et de méconnaissance. Pour un gaz parfait confiné dans une enceinte, la température est liée à la dispersion de vitesse des particules le composant : on peut montrer que celle ci est de l'ordre de

$$\sigma \sim k_B T \quad (232)$$

et la distribution de vitesse des particules suit une loi normale d'écart-type donné par cette dispersion (voir Fig. 12). Si le gaz possède une température élevée, la dispersion de vitesse est importante et par conséquent le spectre des valeurs de vitesses atteignables par une particule est très étendu. A l'inverse, un gaz froid implique une gamme de vitesses accessibles beaucoup plus contrainte. Si on

25. Par exemple, pour recoller un verre il faut qu'un individu s'attelle à cette tâche. La réflexion de cet individu va nécessairement produire de la chaleur, chaleur qui va globalement augmenter l'entropie

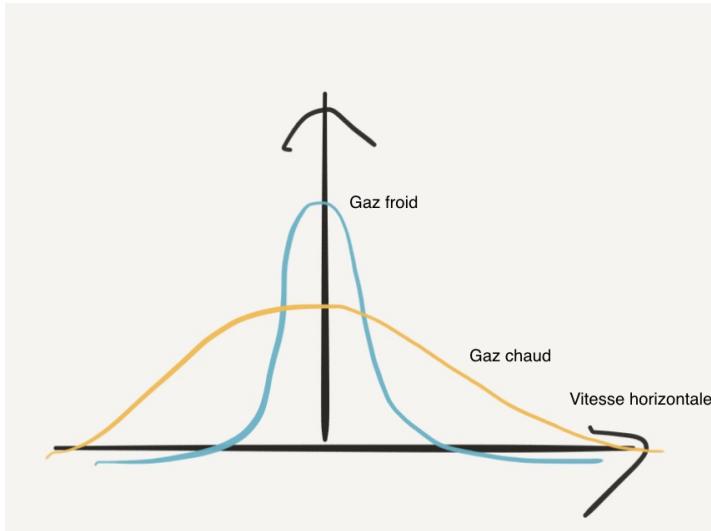


FIGURE 12: Evolution schématique des fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste

considère que ces gaz sont dans la même cuve (donc dans un volume donné), la portion d'espace des phases accessible au gaz chaud est plus grande que celle accessible au froid : le nombre d'états correspondant à un gaz chaud est plus important que celui du gaz froid et possède donc une plus grande entropie. Prenant le point de vue inverse, il est plus difficile de prédire la vitesse d'une particule du gaz chaud que pour celle d'un gaz froid.

Entropie et perception du temps

L'ENTROPIE AUGMENTE irrémédiablement lorsqu'un système évolue de manière isolée, toutefois cette augmentation peut ralentir voir s'arrêter. Dans ce dernier cas, le système a atteint un état stationnaire ou d'équilibre : cet état macroscopique est le plus probable parmi tous les possibles et possède donc la plus grande chance d'être sélectionné parmi tous ceux accessibles. Un exemple est donné dans la figure 13. La configuration initiale correspond à un gaz confiné à un sous-volume d'une cuve plus grande : l'évolution naturelle du système va amener le gaz à s'étendre et occuper la cuve dans sa totalité. En supposant que la température du gaz n'évolue pas (et donc que le spectre des vitesses atteignables par les particules reste inchangé), la configuration "cuve remplie" fournit davantage de configurations possibles que lorsque que le gaz est confiné dans une sous-partie : dit simplement le nombre de positions accessibles est plus important lorsque le gaz est étendu. L'entropie de la configuration finale est plus importante que celle de départ.

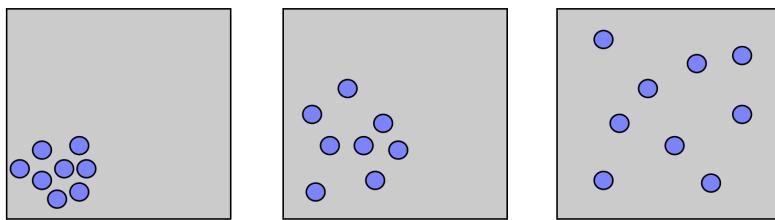


FIGURE 13: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste

Une fois la cuve remplie, le système ne peut cependant plus évoluer et cela correspond à une maximisation des configurations atteignables : le système a atteint un maximum d'entropie. Une représentation schématique de l'évolution temporelle de l'entropie est donnée en figure 14 : au delà d'une durée caractéristique²⁶, $S(t)$ atteint un plateau, autour duquel la valeur peut éventuellement fluctuer mais jamais redescendre. A ce stade, on constate que le temps est une mauvaise mesure de l'évolution du système : le temps continue à changer sans que le système n'évolue. A l'inverse, l'entropie donne une meilleure représentation de la réalité physique du gaz : l'entropie stagne de la même manière que le système n'évolue plus. Un observateur regardant ce système qui n'évolue plus pourra légitimement dire que le temps a gelé ou bien que le temps est long, car plus rien ne se passe. Par rapport à ce vécu empirique, il apparaît clairement que l'entropie joue un meilleur rôle de représentation de l'évolution du monde : elle augmente lorsque les choses changent, elle stagne

26. intuitivement cette durée t^* est liée à la taille de la cuve L et à la vitesse caractéristique $\sigma \sim \sqrt{k_B T}$. Avec $t^* \sim L / \sqrt{T}$, on constate que l'équilibre est d'autant plus rapidement atteint que la température est élevée.

lorsque le monde se fige.

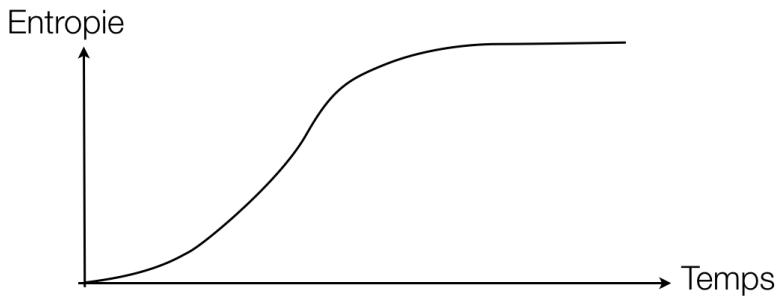


FIGURE 14: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste

LES TEMPS EST DEUX CHOSES DISTINCTES : c'est d'une part une coordonnée, qui nous permet de nous repérer dans l'espace-temps et une mesure de 'distance' qui permet de quantifier le parcours ou le voyage réalisé par un système au cours du temps. Ces deux concepts ne sont pas nécessairement interchangeables et il s'avère que l'on peut se déplacer sans voyager. Par exemple, le voyageur peut arguer du fait qu'un alpiniste ne voyage pas et que son déplacement vertical, tout important qu'il soit sur les plus hauts sommets himalayens par exemple, ne lui permet pas de voir du monde : déplacement et voyage ne vont pas forcément de paire. Le temps et l'entropie ont le même type de relation : dans une vision entropique le temps c'est du changement et dans une certaine mesure c'est une définition qui est proche de notre vécu empirique. Lorsqu'il ne se passe rien, le temps s'écoule pas ou peu²⁷. Dans ce régime le temps du chronomètre t , celui qui s'écoule inexorablement, est une piètre mesure de la réalité vécue et dans certaines circonstances on aimerait que le temps passe plus vite : dans ces circonstances, c'est réellement S qui est invoqué, et non pas t . A l'inverse lorsque les systèmes évoluent rapidement, le temps s'écoule rapidement²⁸. Parfois on aimerait plus temps ou bien l'on explique que le temps passe trop vite : à nouveau ce n'est pas le temps t du chronomètre qui est évoqué ici, mais bien l'entropie S dont on aimerait qu'elle évolue plus lentement.

Entropie et Complexité

ON CONFOND SOUVENT ENTROPIE ET COMPLEXITÉ. L'entropie est une mesure du nombre de configurations correspondant à un état macroscopique donné tandis que la complexité est une mesure du nombre d'informations qu'il faut pour décrire l'état d'un système.

27. on dit aussi que *l'on trouve le temps long*

28. on dit aussi que *l'on trouve que le temps passe vite*

La figure 15 illustre la différence entre ces 2 concepts : on y voit le mélange progressif de 2 gaz, l'un bleu l'autre jaune pour aboutir enfin à un ensemble de couleur verte. Comme vu précédemment, cette évolution implique nécessairement une augmentation de l'entropie : la situation initiale confine chacun des gaz dans un sous-volume et chaque particule dispose d'un ensemble de configurations spatiales limité. Par ailleurs, l'observateur a une bonne connaissance du système : une particule jaune est nécessairement à droite, une bleue nécessairement à gauche. Lorsque le mélange procède, la connaissance de l'état du système se dégrade peu à peu : chaque particule a désormais accès à une plus grande portion du volume et dans l'état final, les 2 fluides disposent de tout le volume pour s'étendre et donc d'un grand nombre de configurations.



FIGURE 15: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste

La complexité évolue différemment et n'évolue généralement pas de manière monotone. Dans l'exemple précédent, les états initiaux et finaux sont globalement 'simples' : l'état macroscopique initial est simple à décrire puisque la position permet de définir la couleur des particules tandis que l'état final l'est encore plus du fait de son homogénéité. L'état intermédiaire en revanche est bien plus difficile à décrire à cause de la zone de mélange : cette zone requiert que l'on établisse un certain nombre de paramètres pour pouvoir être reproduite. Pour cet exemple, la complexité passe par un maximum avant de décroître : l'augmentation de l'entropie nécessite de passer par un pic de complexité. Ce passage par une complexité maximum est souvent la route la plus efficace pour une augmentation de l'entropie. Par exemple la transformation d'une matière première en chaleur passe souvent par l'intermédiaire d'une 'machine' complexe, comme un animal pour de la nourriture ou une machine pour du carburant.

DÉSORGANISATION ET COMPLEXITÉ sont 2 choses différentes : un système peut être dans un état très désorganisé ou peu contraint sans que sa complexité soit grande. C'est le cas de l'état final de l'exemple de la figure 15 : il est simple à décrire mais pour autant un observateur sait très peu de choses dessus. Sa complexité est faible mais son entropie est élevée.

Entropie et formation des grandes structures

LES LIENS ENTRE COSMOLOGIE ET ENTROPIE sont nombreux et posent parfois problème. Le plus fameux d'entre eux est l'impression que l'Univers s'organise au cours du temps : durant les premiers instants, le cosmos est par exemple peu structuré et la marche du temps s'accompagne de la mise en place d'objets de plus en plus complexes tels que les étoiles, les galaxies et les amas. Le mécanisme d'instabilité gravitationnelle²⁹ donne ainsi l'apparence d'une organisation croissante des objets en contradiction apparente avec le second principe de la thermodynamique.

Cette contradiction n'est bien sûr qu'apparente et peut être levée de plusieurs façons. Par exemple, on peut aisément invoquer le fait que le processus qui va transformer un nuage de gaz en galaxie n'est pas gratuit. Comme vu précédemment, une galaxie ne peut se mettre en place que si elle parvient à atteindre des densités très élevées³⁰. Or l'énergie interne du gaz (liée à sa pression) s'oppose à ce que de telles densités soient atteintes et ce la n'est possible qu'en évacuant cette énergie hors du gaz : dans l'Univers cette évacuation opère via des processus atomiques ou moléculaires qui convertissent l'énergie cinétique microscopique en rayonnement. Ce rayonnement emporte cette énergie et permet d'atteindre les densités à même de mettre en place des galaxies ou de la formation stellaire en leur sein. Ce processus est producteur d'entropie : des particules (atomes/molécules) en génèrent d'autres, les photons, et parfois en grand nombre. Cette évacuation d'énergie, que l'on désigne également par le terme de *refroidissement*, fait grandir le nombre de configuration possible accessible par le système par simple production de particules : en augmentant leur nombre, le système augmente le nombre de degrés de libertés et donc son entropie. Par ailleurs les photons occupent naturellement un grand volume, augmentant d'autant le nombre de configurations possibles pour un état macroscopique donné. Pour s'organiser, un sous-ensemble de particules (les atomes) vont désorganiser l'ensemble en produisant un grand nombre de particules supplémentaires (le rayonnement).

Mentionnons toutefois que ce type de mécanismes où l'entropie est générée en évacuant l'énergie vers l'extérieur n'est pas limitée à des processus baryoniques. Pour des systèmes stellaires, où les constituants n'interagissent que via la gravitation, on trouve également des processus similaires comme la *catastrophe gravothermale*. Cette dernière consiste en l'effondrement d'un cœur associé à l'expansion d'une enveloppe dans un système non-collisionnel. Dans ce processus l'énergie gravitationnelle libérée par l'effondrement interne va

29. étudiée en détail dans la section dédiée, page 85

30. typiquement 200 fois la densité moyenne globale

profiter au couches externes et générer de l'entropie.

En résumé la complexité croissante des structures apparaît de prime abord comme en contradiction avec le 2nd principe : toutefois, cette complexité s'accompagne dans tous les cas d'une production d'entropie. De plus cette complexité ne peut devenir arbitrairement grande : les petites étoiles s'arrêtent et refroidissent, l'expansion accélérée créée par la constante cosmologique va supprimer les interactions entre galaxies, les planètes vont cesser de produire de la chaleur³¹, etc... : ces quelques exemples sont autant d'illustration de la *mort thermique* qui attend l'Univers. Cette mort thermique désigne cet état futur où l'entropie ne sera plus en mesure de croître indéfiniment, conduisant de fait à un état d'équilibre de l'Univers. Dans cet Univers, il ne se passe plus rien, l'entropie stagne.

Le défi de l'entropie actuelle

L'ENTROPIE ACTUELLE DE L'UNIVERS EST BASSE. Par définition, elle fut encore plus basse dans le passé mais comparée à ce qu'elle pourrait être, l'entropie actuelle de l'Univers se trouve à de très faibles niveaux. Par conséquent le potentiel d'évolution de l'Univers est grand et se pose naturellement la question *pourquoi l'entropie actuelle est-elle si basse ?*. Ce genre de questions amène généralement 2 types de réponses : l'entropie est basse du fait d'un mécanisme ou du fait de conditions initiales. Si c'est le fait de conditions initiales, la question est close et le potentiel d'évolution de notre Univers fait partie de ses propriétés intrinsèques au même titre par exemple que les paramètres cosmologiques. Bien que possible, cette hypothèse nous intéresse peu et la tentation est grande d'essayer de trouver un mécanisme qui produit naturellement une entropie basse aux premiers instants.

Il existe un mécanisme simple et non exotique qui permette d'expliquer une entropie initiale basse : ce mécanisme repose sur la nature statistique des quantités macroscopiques. Lorsque qu'un système évolue son entropie augmente : cette affirmation doit s'entendre de façon statistique. L'entropie est une quantité qui est définie de façon statistique via par exemple sa valeur moyenne ou son écart-type : sa valeur moyennée sur une certaine durée va augmenter inexorablement dans un système en évolution tout en fluctuant sur des échelles de temps plus courtes. A un instant donné, un système peut voir son entropie baisser ponctuellement avant de reprendre sa croissance. On peut imaginer que l'entropie basse de l'Univers fut générée par ce type de fluctuations : l'Univers aurait été dans un état de 'pseudo-équilibre' avec une entropie constante sur des temps longs et une

31. cette production est régie par la présence d'éléments radioactifs qui finissent par s'épuiser, cf. Venus ou Mars qui ne possèdent plus d'activité interne.

fluctuation accidentelle et suffisamment grande aurait octroyé à notre Univers un potentiel d'évolution. Ce scénario a des implications

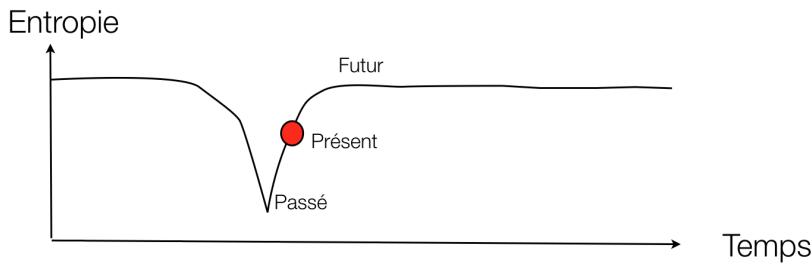


FIGURE 16: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste

profondes. Dans un premier temps, le point de départ de l'évolution de notre Univers est le Big Bang par définition : l'instant où cette fluctuation opère correspond donc au début de cette évolution et le Big Bang trouve son origine dans une fluctuation statistique. Par ailleurs, ce scénario suggère que nous sommes dans une phase anormale, précédée et suivie par des états d'équilibres stables qui correspondent aux vrais états naturels de notre Univers : la physique à l'oeuvre autour de nous ne serait que la manifestation d'un retour à la normale durant une phase transitoire.

MALHEUREUSEMENT CE SCÉNARIO SOUFFRE D'UN PARADOXE. À titre d'exemple, rappelons la définition de l'entropie S dans le cas micro-canonical :

$$S = k_B \log \Omega, \quad (233)$$

où Ω désigne le nombre de configurations accessibles pour un état macroscopique donné. A l'inverse le nombre de configurations correspondant à une valeur d'entropie donnée est :

$$\Omega = e^{S/k_B}. \quad (234)$$

Par conséquent, toute fluctuation sur l'entropie est démultipliée exponentiellement et si on compare 2 fluctuations d'entropie d'amplitudes différentes, elles conduisent à des nombres de configurations qui sont *exponentiellement* différentes : 2 états microscopiques d'entropies légèrement différentes peuvent correspondre à 2 états de probabilités extrêmement différentes³². Une fluctuation d'entropie profonde est donc particulièrement difficile à produire et toute fluctuation d'amplitude intermédiaire est bien plus aisée à mettre en place : l'amplitude de la fluctuation nécessaire à l'évolution constatée autour de nous est de fait quasi-impossible à générer. Souvent on illustre cette difficulté par le *paradoxe des cerveaux de Boltzmann* : il est possible que l'Univers tel que nous l'observons soit le fruit d'une

32. on comprend aisément qu'un état à grand nombre de configurations est plus probable qu'un autre à moins de configurations disponibles

sensation ressentie par un cerveau flottant dans le cosmos. Soit un Univers chaotique, rempli de particules : il est bien plus probable que ces particules s'arrangent brièvement sous la forme de ce cerveau avec ces sensations plutôt qu'elles s'organisent par hasard de façon à créer les conditions qui vont être amenée à créer des étoiles, avec des planètes qui hébergent la vie, vie qui va produire une intelligence en mesure d'étudier le cosmos... Rationnellement, ce cerveau flottant a bien plus de chances refléter la réalité du monde que le second scénario. Bien sûr, cette conclusion est insupportable et de fait probablement fausse mais elle est inévitable si l'évolution de l'Univers constatée est le fruit d'une fluctuation statistique.

L'inflation et les premiers instants

L'**INFLATION** désigne une phase de l'histoire de l'Univers durant laquelle l'espace aurait rapidement 'enflé', avec des taux d'expansion exponentiels. Cet épisode aurait pris place environ 10^{-34} secondes après le Big-Bang et a été suggéré à partir des années 1980 pour expliquer toute une série de défis qui se posent quant à l'état de l'Univers tel que nous l'observons. L'époque inflationnaire reste pour l'instant une hypothèse non vérifiée expérimentalement mais pour laquelle existe tout un faisceau de présomption.

Le problème de l'Horizon de causalité

LE PRINCIPE COSMOLOGIQUE repose sur une hypothèse d'homogénéité de l'Univers et cette homogénéité n'est pas remise en question aujourd'hui par les observations. L'une des manifestations les plus spectaculaire de cette homogénéité est la température du fond diffus cosmologique : comme expliqué dans le chapitre dédié, le fond diffus cosmologique présente une température typique $T \sim 2.7\text{K}$ à un très haut niveau de précision (à 10^{-5} près) et ceci quelle que soit la direction vers laquelle on regarde³³.

Des anisotropies existent mais elles sont noyées dans l'amplitude du signal du monopole : on peut citer l'empreinte des oscillations baryoniques accoustiques, déclenchées par la compétition entre gravité et pression de rayonnement, qui produisent ces grands pics dans le spectre de puissance angulaire du fond diffus. En particulier, les plus grandes échelles angulaires associées à ces ondes accoustiques sont de l'ordre du degré sur le ciel³⁴. Cette plus grande échelle angulaire correspond à *l'horizon sonore* aux époques de l'émission du fond diffus : cet horizon est la plus grande distance qui peut être parcourue à la vitesse du son dans les conditions qui y régnait. Cette vitesse du son est régie par la pression du rayonnement et est de l'ordre de :

$$c_s \sim \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (235)$$

33. on rappelle que c'est cette isotropie qui intrigua Penzias & Wilson lors de leur découverte du signal

34. correspondant à une fréquence angulaire $\ell \sim 1000$

tandis que l'horizon peut-être approximé par :

$$L_H \sim \frac{c_s}{H} \quad (236)$$

On constate donc aisément que l'horizon sonore est proche de l'horizon causal, déterminé lui par la vitesse de la lumière.

Nous avons donc une surface de dernière diffusion qui est isotrope à un très haut niveau de précision *sur toute la sphère céleste* tandis que les échelles de longueurs en contact causal (donc de taille inférieure à l'horizon) sont particulièrement ramassées. Par conséquent, on ne peut trouver de processus physique qui soit en mesure de propager une information sur tout le ciel 380 000 ans après le Big-Bang : cette homogénéité et isotropie ne peut trouver son origine dans un mécanisme physique qui aurait établi ces propriétés sur ces très grandes échelles sans lien causal.

DEUX POSSIBILITÉS s'offrent à nouveau : cette isotropie est une condition initiale, particulière mais établie sans raison aucune ou bien cette isotropie est bien le fruit de la propagation d'un signal physique mais sur des échelles plus faibles que celles sur lesquelles l'isotropie est aujourd'hui observée. L'inflation intervient dans ce second scénario : une théorie de l'inflation stipule que l'on ne peut extrapoler l'histoire d'expansion de l'Univers vers le Big-Bang à partir de son contenu actuel et donc de sa dynamique actuelle. Il faut invoquer un épisode où le paramètre d'expansion $a(t)$ connaît une variation soudaine, faisant traverser l'horizon à des échelles en initialement en lien causal. L'idée est simple : les plus grandes échelles observées sur le ciel étaient sous l'horizon avant l'épisode inflationnaire et sont passées hors-horizon après ce dernier.

Compte tenu des échelles en jeu³⁵, cette inflation doit impliquer des croissances gigantesques. On verra par la suite que les distances doivent s'accroître typiquement d'un facteur $10^{50} - 10^{60}$.

35. on rappelle que l'isotropie est observée sur toute la surface de dernière diffusion, dont le rayon est de l'ordre de plusieurs Gpc

Le problème de la platitude

LA GÉOMÉTRIE DE L'UNIVERS EST PLANE en moyenne et sur des distances cosmologiques. Dans une telle géométrie, la lumière se propage en ligne droite et la somme des angles d'un triangle fait 180 degrés : comme expliqué dans le chapitre dédié, la taille angulaire des oscillations baryoniques accoustiques mesurée dans le fond diffus à $z \sim 1100$ ou dans les grands relevés de galaxies à $z \sim 0$ est hautement compatible avec ce type de géométrie. Un Univers sphérique a tendance à surestimer ces tailles angulaires, un Univers hyperbolique

à les sous-estimer et de fait la réalité terrain semble indiquer que le régime à l'oeuvre est exactement entre ces deux régimes.

Tout comme le problème de la causalité, le fait d'avoir une géométrie plane peut soit être le fruit d'un mécanisme qui aurait aplati une géométrie arbitraire ou bien la conséquence d'un choix de conditions initiales particulier. Et à nouveau cette seconde option n'est pas entièrement satisfaisante bien que tout à fait possible. En proposant une augmentation exponentielle des distances, l'inflation fournit naturellement un mécanisme pour gomme toute sorte de courbure : l'Univers était peut-être doté d'une courbure non-nulle à une époque reculée mais l'Inflation aurait fait tendre toute courbure initiale non nulle vers zéro.

L'origine des fluctuations cosmiques

LES GRANDES STRUCTURES DE L'UNIVERS trouvent leur origine dans l'existence de fluctuations dans la distribution spatiale de la densité d'énergie (ou de matière). Ces fluctuations sont observées à de très faibles niveaux dans le fond diffus cosmologique et ce sont ces 'graines' qui servent de point d'ancre au processus d'instabilité gravitationnelle. Sans ces fluctuations, pas de structures dans l'Univers actuel.

Comme indiqué précédemment, on attend d'une période inflationnaire qu'elle conduise à un accroissement des échelles de longueurs d'un facteur $\sim 10^{55}$. Si l'on prend une structure de taille 10 Mpc aujourd'hui, un tel facteur conduit à une taille initiale de l'ordre de 10 – 20 m, c'est à dire des échelles très largement soumises à des processus quantiques. Par conséquent, on peut imaginer que les structures observées aujourd'hui sont le fruit du passage de fluctuations quantiques à l'échelle macroscopique, par le biais de l'Inflation.

Simulations Cosmologiques

CET OUVRAGE EST UN OUVRAGE DE THÉORIE. Il s'agit d'établir les quantités physiques pertinentes, les temps ou échelles caractéristiques importantes à l'évolution et l'établissement des propriétés de l'Univers : à cette fin, nous posons et analysons les équations que nous croyons pertinentes pour extraire ces informations. C'est une tâche qui généralement ne peut se faire que sous certaines hypothèses dont on sait qu'elle ne sont qu'imparfaitement satisfaites dans la réalité. Par exemple, le principe cosmologique présuppose une distribution homogène de la matière or nous savons que cela est n'est plus vrai que sur des petites échelles³⁶. De même, la théorie de l'instabilité gravitationnelle présentée dans le chapitre n'est valable que dans le régime des petites perturbation, autorisant une description linéaire de la croissance des structures : pour autant nous savons qu'une galaxie présente un contraste de densité $\delta \sim 200$ qui va bien au-delà des limites du régime linéaire. Il existe certes des approches permettant de dépasser le régime des petites perturbations mais elles nécessitent des conditions précises de symétries par exemple³⁷.

Pour toutes ces raisons, il est tout un domaine de la cosmologie physique qui vise à développer des outils de simulations numériques permettant notamment de suivre la structuration de la matière dans des régimes arbitraires de symétries et de non linéarités. Ces simulations sont essentiellement dédiées à l'étude de la *dynamique* de la matière dans l'Univers en produisant des portions d'Univers synthétiques en évolution depuis les premiers instants jusqu'à nos jours. Elles reproduisent ce que nous pensons être l'histoire complexe de croissance et d'assemblage des structures : en comparant les prédictions de ces outils à la 'réalité terrain', il s'agit de tester les lois physiques qui sont utilisées et nos hypothèses sur l'état initial de l'Univers et ses propriétés. Par ailleurs ces simulations fournissent des histoires de croissances des structures qui peuvent être supplémentés de modèles supplémentaires pour explorer des physiques qui ne se limitent pas à la dynamique ou bien utilisées à des fins pratiques pour mettre au point des relevés, préparer des observations ou

36. on peut mentionner les oscillations baryoniques accoustiques dans le fond diffus ($\lambda < 200$ Mpc comobile) ou bien la présence d'amas de galaxies dans l'Univers actuel ($\lambda < 1$ Mpc comobile)

37. tel le modèle d'effondrement sphérique de Bertschinger

simuler des instruments. Ces outils numériques sont appelés *simulations cosmologiques* et leurs principes les plus importants sont décrits dans ce chapitre.

De la discréétisation et de la résolution

Ces simulations sont produites par des codes informatiques devant tourner sur des ordinateurs. Ces machines possèdent des ressources finies et manipulent des quantités *discrètes*, ce qui est en contradiction avec notre description habituelle du monde qui repose généralement sur une description *continue* : un volume permet une infinité de positions possibles ou bien tous les instants sont accessibles à l'intérieur d'un intervalle donné. Même une quantité à priori dénombrable peu donner l'apparence d'une infinité, telle un nombre de particules qui dans des volumes cosmologiques peuvent être tout simplement gigantesque. Un traitement informatique va donc impliquer de discréétiser le temps, l'espace, la distribution de matière, etc... pour pouvoir être envisageable. Par la suite, nous considérons la densité de matière dans l'espace $\delta(\vec{x})$: ce champ scalaire est défini en tout point de l'espace et possède donc une infinité de valeurs possibles tout en étant mesurable dans à infinité de positions possibles.

UN PREMIÈRE FAÇON de discréétiser ce champs consiste à l'évaluer à des positions discrètes, par exemple sur une grille cartésienne de taille de maille Δx : cette façon de faire est dite *eulérienne* et permet de réduire le nombre de points où le champ est évalué tout en lui permettant toujours d'accéder à un spectre continu de valeurs. Cette façon de faire introduit en revanche un paramètre de résolution spatiale Δx qui va limiter notre capacité à décrire des phénomènes d'échelle caractéristique proche ou inférieure à cette longueur. On pourra limiter l'influence de ce paramètre de résolution en adoptant par exemple des grilles non cartésiennes, non homogènes ou non statique mais on ne pourra jamais la faire disparaître.

UNE SECONDE FAÇON de procéder consiste à découper la matière en quanta souvent appelés *particules*, qui représente une quantité prédéfinie de matière se déplaçant librement dans l'espace. Cette description est dite *lagrangienne* et permet d'accéder à tous les points de l'espace de façon continue. En revanche elle introduit également un élément de résolution, en masse cette fois ci correspondant à la masse de la particule m : en un point de l'espace, la quantité matière ne pourra augmenter progressivement depuis zéro qu'en 'empilant' des particules à cet endroit, d'abord m puis $2m, 3m$ etc... Par ailleurs cette discréétisation en quanta peut introduire du bruit si une quantité

de matière donnée n'est représentée que par un faible nombre de particules. Enfin, comme pour la résolution spatiale mentionnée précédemment, cette résolution en masse nous limite dans la description de phénomène opérant dans des objets de masse inférieure à cette valeur.

CONCERNANT LE TEMPS le même problème se pose : les techniques de résolution approchée d'équations différentielles nécessite généralement de raisonner sur des durées courtes par exemple pour satisfaire au mieux des approximations d'ordre linéaire ou de bas ordre. Il faut donc découper les durées d'intérêts en *pas de temps* Δt qui à nouveau nous limite quant à la description de phénomènes plus rapide que cette résolution temporelle. Une simulations numériques tachera donc de suivre l'évolution de champs discrétisés sur des grilles (dans une approche eulérienne) ou en particules (dans une approche lagrangienne), en les mettant à jour tous les *Deltat* jusqu'à ce que la durée voulue soit couverte. Notons que les 2 approches mentionnées (grille ou particules) possèdent chacun leurs avantages et leurs inconvénients en fonctions des champs considérés et des équations différentielles qui leurs sont associés.

Dynamique Non-Collisionnelle : Matière Noire et étoiles

Considérons dans un premier temps la composante non-collisionnelle de la matière, à savoir la matière noire et les étoiles. Dans la plupart des cas, une simulation cosmologique va décrire ces composantes sous forme de particules possédant une masse m , une position \vec{x}_i et une vitesse \vec{v}_i (i désignant la particule parmi N autres). La masse ne varie pas, tandis que positions et vitesses subissent des mises à jour régulières via la résolution du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_i) \quad (237)$$

où $\vec{F}(\vec{x}_i)$ désigne la résultante des forces à la position \vec{x}_i . Pour une composante non collisionnelle, cette résultante est uniquement le fruit de la force de gravitation. Un schéma de mise à jour simple peut prendre pour point de départ la discréttisation suivante³⁸ :

$$\frac{v_i^{p+1} - v_i^p}{\Delta t} = \frac{1}{m} F(x_i^p) \quad (238)$$

et permet d'évaluer la vitesse v_i^{p+1} à l'instant $t^{p+1} = t^p + \Delta t$ comme suit :

$$v_i^{p+1} = v_i^p + \frac{\Delta t}{m} F(x_i^p). \quad (239)$$

38. par la suite on négligera la forme vectorielle des positions et vitesses en se ramenant à un problème 1D. La généralisation à 3D ne posant pas de difficultés.

Par ailleurs, ayant $dx/dt = v$, on obtient aisément la formule de la mise à jour de la position :

$$x_i^{p+1} = x_i^p + \Delta t v_i^{p+1}. \quad (240)$$

Ce schéma d'avancement simple est l'une des formes du *schéma d'Euler* : s'il a le mérite de la simplicité, à l'usage il présente des inconvénients en terme de stabilité ou de précision qui nécessitent de manipuler des pas de temps Δt particulièrement courts. D'autres schémas plus complexes existent garantissant une meilleure stabilité ou précision, par exemple le *leapfrog* :

$$v_i^{p+1/2} = v_i^{p-1/2} + \frac{\Delta t}{m} F(x_i^p) \quad (241)$$

$$x_i^{p+1} = x_i^p + \Delta t v_i^{p+1/2} \quad (242)$$

où l'on voit que vitesse et position sont évaluée de façon désynchronisée avec un décalage de $\Delta t/2$. L'un des mérites de cette méthode est son invariance par renversement du temps³⁹ : en appliquant une mise à jour de $-\Delta t$ le leapfrog permet de retrouver la position x^p à partir de x^{p+1} . Le schéma d'Euler ne possède pas la même propriété à cause du terme de force qui passe de $F(x_i^p)$ à $F(x_i^{p+1})$ selon qu'on aille dans un sens ou l'autre.

39. on parle de schéma symplectique

LA DERNIÈRE INCONNUE est l'expression de la force en tout point de l'espace $F(x_i^p)$. Plusieurs techniques ont été développées depuis les années 70 mais peuvent être rapidement regroupée en 2 familles. La première repose sur un principe de sommation : on dispose des positions x_i de toutes les N particules, on peut donc calculer la force appliquée sur la particule j en sommant toutes les forces individuelles qui s'appliquent dessus⁴⁰ :

$$\vec{F}_j = -Gm^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{r_{ij}^2} \vec{e}_{ij}. \quad (243)$$

40. on suppose que toutes les particules sont de masse m . r_{ij} désigne la distance entre les particules i et j, tandis que \vec{e}_{ij} désigne le vecteur unitaire les reliant

Cette méthode est simple à mettre en place et est rigoureusement exacte, toutefois elle est extrêmement coûteuse puisqu'elle nécessite d'évaluer $N(N - 1)/2 \sim N^2$ interactions : si l'on décide de multiplier par 10 le nombre de particules (pour gagner en résolution en masse et étudier de plus petits objets par exemple), cela implique 100 fois plus de calculs. Ce type de dépendance en N pour le coût de calcul est tout simplement insoutenable en pratique. Pour cette raison il existe des techniques qui permettent d'accélérer ce type de sommation par exemple en subdivisant hiérarchiquement l'espace suivant une configuration arborescente. Dans ces approches, une région distante (et donc peu influente) est vue avec peu de détails en

regroupant les particules qui s'y trouve en 'macro-particules' moins nombreuses ce qui réduit le cout informatique de la sommation : on peut montrer que le nombre d'interactions suit une loi en $N \log N$, bien plus soutenable. Pour finir, remarquons que la formule de sommation peut diverger si certaines particules sont trop proches l'une des autres avec $r_{ij} \rightarrow 0$: en pratique il est d'usage de lisser la force de gravitation sur un échelle ϵ :

$$\vec{F}_j = -Gm^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{r_{ij}^2 + \epsilon^2} \vec{e}_{ij}. \quad (244)$$

La seconde famille de méthode pour l'évaluation de la force passe par l'estimation du champ potentiel gravitationnel $\phi(\vec{x})$ sur une grille (très généralement) cartésienne. Force et potentiel dérivent l'un de l'autre :

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x}) \quad (245)$$

tandis que le potentiel peut être évalué en résolvant l'équation de Poisson à partir du champ de la densité massique $\rho(\vec{x})$:

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}). \quad (246)$$

Connaissant la position \vec{x}_i de toutes les particules, on peut évaluer la densité $\rho(\vec{x})$ en tous les points d'une grille et donc le potentiel $\phi(\vec{x})$ puis la force $\vec{F}(\vec{x})$. Connaissant la force en tous les points d'une grille, on peut alors la projeter aux positions désirées à savoir les positions \vec{x}_i de toutes les particules. Pourquoi se donner tant d'ef-

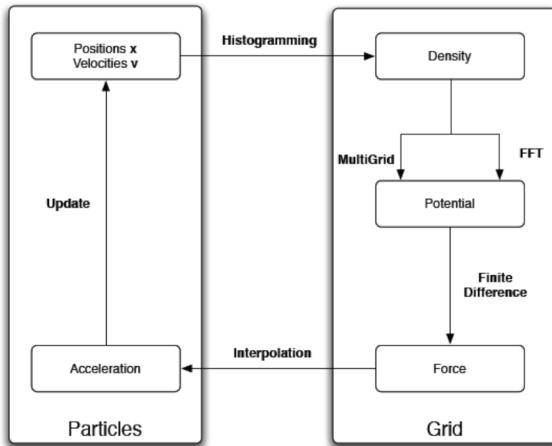


FIGURE 17: schématique de la méthode de calcul des forces sur grilles. Notez la nature hybride du schéma qui fait intervenir une description en termes de particules (ou lagrangienne à gauche) et une description en termes de champs sur une grille (ou eulérienne à droite)

forts pour évaluer la force ou le potentiel de cette façon ? La réponse réside dans la résolution de l'équation de Poisson (eq. 246). Cette équation est fondamentalement une équation de diffusion, et nombre de méthodes ont été développée pour la résoudre efficacement et rapidement dans de nombreux contextes. Par exemple, prenons la

transformée de Fourier de l'équation de Poisson et nous obtenons aisément :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) \sim -\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{k^2}. \quad (247)$$

Si nous avons une façon simple d'évaluer les transformées de Fourier de champs connus sur une grille, il suffit d'appliquer l'équation algébrique triviale précédente pour trouver le potentiel à partir de la TF de la densité et du potentiel. Il s'avère qu'il existe des techniques de *transformées de Fourier rapide* ou FFT qui ont été développées durant des décennies à des fins de traitement du signal et qui donc peuvent être facilement reprises. Grâce à la FFT, on dispose de moyens extrêmement rapide de résolution de l'équation de Poisson : en revanche l'utilisation d'une grille implique que le champ de gravitation n'est décrit qu'au mieux sur une échelle de la taille d'une cellule de la grille. Une telle échelle de coupure est inexisteante à priori dans les méthodes de sommation qui permettent donc un suivi plus précis et à plus petite échelles des effondrements par exemple. L'introduction d'un lissage ϵ dans les méthodes de sommation introduisent certes une résolution limite mais ce lissage est généralement bien plus petit que la taille d'une cellule (environ 10 fois plus petit en pratique).

Pour finir, considérons rapidement la différence entre particules de matière noire et étoiles, qui toutes deux sont l'objet de la dynamique non-collisionnelle. Dans les 2 cas, les méthodes exposées ici sont appliquées de façon identique, les deux fluides diffèrent en ce que leurs membres n'évoluent pas de la même manière. Les particules de matières noires n'évoluent pas, leur masse individuelle reste constante, leur nombre initial fixe la quantité de matière noire et il n'a pas d'annihilation ni de création de telles particules. Les étoiles évoluent : elles doivent apparaître lorsque les conditions s'y prêtent et elles peuvent voir leur masse évoluer : en effet une particule 'stellaire' constitue en pratique un amas stellaire de plusieurs centaines d'étoiles à plusieurs millions de masse solaires. Elles représentent donc davantage une population qu'une étoile individuelle en tant que tel : lorsque la partie étoile massive de ces amas explose en supernovae, la masse est rendue au milieu interstellaire au bout de quelques millions d'années et numériquement cela peut correspondre à une masse variable de particule. Notons toutefois qu'il existe toujours au sein de ces particules stellaires une composante 'étoile de faible masse' à durée vie supérieure au temps de Hubble : de façon générale une particule stellaire voit sa masse diminuer mais ne peut complètement disparaître du fait de cette population à grande durée de vie.

Hydrodynamique

EN CONTREPOINT de la dynamique non-collisionnelle, les codes de simulation numériques peuvent également suivre la dynamique du gaz présent dans l'Univers. Ces baryons ne représentent certes que $\sim 18\%$ de la matière disponible mais ils sont observables ou bien sont à l'origine des étoiles qui sont également observables : par conséquent ils permettent une comparaison plus directe des résultats simulés aux observations. Par ailleurs au centre des galaxies, le gaz peut être dominant et sa dynamique est suffisamment différente de celle de la matière noire et des étoiles pour devoir être modélisée indépendamment.

LE JEU D'ÉQUATION à résoudre est connu, ce sont les équations d'Euler⁴¹ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\partial \rho v)}{\partial x} = 0 \quad (248)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (249)$$

La première équation indique que la densité ne varie que sous l'effet du flux de masse ($\frac{(\partial \rho v)}{\partial x}$) tandis que la seconde indique que l'impulsion varie sous l'effet du flux de moment ($v \frac{\partial v}{\partial x}$) et des forces de pression ($\frac{\partial P}{\partial x}$) et de gravitation ($\frac{\partial \phi}{\partial x}$)⁴².

Ces équations peuvent être toutes deux écrites sous une forme *conservative* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\partial \rho v)}{\partial x} = 0 \quad (250)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{(\partial \rho v v)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (251)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{(\partial E v)}{\partial x} = -v \frac{\partial P}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (252)$$

auquel nous avons ajouter l'équation de conservation de l'énergie E . Ces 3 équations suivent une structure similaire, typique d'équations de conservations d'une quantité A avec un terme source :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial F(A)}{\partial x} = S(A). \quad (253)$$

Dans les 3 cas, une quantité A est modifiée sous l'effet d'un flux $F(A)$, qui déplace la quantité en question, et d'un terme source qui modifie A sans déplacement. Dans le cas de la densité, ce terme source est strictement nul ce qui indique une conservation stricte de la masse, dans le cas de l'impulsion, ce terme source est constitué

41. représentées ici à 1D. On y distingue l'équation de la conservation de la masse et de l'impulsion. $\rho(x, t)$ désigne la densité de gaz, $v(x, t)$ sa vitesse, $P(x, t)$ sa pression et $\phi(x, t)$ le potentiel gravitationnel.

42. il s'agit juste d'une formulation alternative du principe fondamental de la dynamique

des forces qui s'exercent sur le fluide et dans le cas de l'énergie il est finalement constitué du travail de ces même forces.

La façon la 'plus naturelle' de résoudre des équations du type de Eq. 253 est de considérer un volume fini, comme celui d'une cellule cubique et de mesurer les flux des quantités conservées (densité, impulsion et énergie) au travers des faces de cette cellule. Intuitivement, le flux mesuré au travers d'une face dépend des valeurs physiques de part et d'autre de cette face : la procédure qui permet de trouver le flux de A connaissant A de part et d'autre de l'interface s'appelle une *resolution de problème de Riemann*.

Il existe nombre de façons de résoudre un problème de Riemann, avec des niveaux d'approximations plus ou moins importants. Soit par exemple $F(A_{i+1/2})$, le flux existant entre 2 cellules successives i et $i + 1$ alors résoudre le problème de Riemann revient à trouver \mathcal{R} tel que :

$$A_{i+1/2} = \mathcal{R}(A_i, A_{i+1/2}). \quad (254)$$

Une façon simple de procéder revient à comparer les 'vents' dans les cellules adjacentes en comparant leurs vitesses : si $v_i > v_{i+1}$ le vent vient de la cellule i et on peut considérer que la valeur de A à l'interface est dominée par A_i . Cette procédure dite *upwinds* va par exemple assigner :

$$A_{i+1/2} = \mathcal{R}(A_i, A_{i+1/2}) \sim A_i \quad (255)$$

et donc $F(A_{i+1/2}) \sim F(A_i)$. On peut toutefois montrer que ce type de schéma est soit extrêmement diffusif soit particulière instable et il existe toute une littérature de schéma de plus haut niveau plus ou moins adaptés en fonction du problème que l'on cherche à résoudre.

Connaissant le flux en $i - 1/2$ et $i + 1/2$, la quantité A peut être mise à jour par le même type de différence finie que celle utilisée précédemment pour le déplacement de particule non-collisionnelle :

$$\frac{A_i^{p+1} - A_i^p}{\Delta t} = -\frac{F(A_{i+1/2}^p) - F(A_{i-1/2}^p)}{\Delta X} + S(A_i^p) \quad (256)$$

ou bien

$$A_i^{p+1} = A_i^p - \Delta t \frac{F(A_{i+1/2}^p) - F(A_{i-1/2}^p)}{\Delta X} + \Delta t S(A_i^p). \quad (257)$$

Notez que cette mise à jour à l'instant $p + 1$ ne nécessite la connaissance que des données à l'instant p et tous les termes du membre de droite sont évalués à cet instant. Cette approche est dite *explicite* et n'est que conditionnellement stable. Si le pas de temps Δt est trop important, une amplification des erreurs s'opère la stabilité n'est garantie que si la condition de Courant est satisfaite :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > v. \quad (258)$$

Cette équation traduit que la vitesse numérique, la vitesse de mise à jour, doit être supérieure à la vitesse typique du processus physique que l'on cherche à reproduire : pour une résolution spatiale donnée cela équivaut à mettre une limite supérieure au pas de temps choisi⁴³ Notons qu'il existe aussi une approche dite *implicite* où tous les termes de mise à jour sont exprimés à l'instant $p + 1$: toutefois ces termes sont inconnus au moment du calcul et la mise à jour implique dès lors un problème typique d'inversion, souvent compliqué, en lieu et place de la simple expression algébrique obtenue ici. En revanche l'approche implicite est généralement inconditionnellement stable, ce qui permet l'utilisation de pas de temps plus grands pour simuler un problème donné.

43. Notons que la même chose existe pour les particules de la partie précédente. Si l'on souhaite qu'une particule ne parcourt pas une trop grande distance durant un pas de temps, il faut limiter ce dernier.

Bibliographie

Robert Bringhurst. *The Elements of Typography*. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5.

Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8.

Edward R. Tufte. *Visual Explanations*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1997. ISBN 0-9613921-2-6.

Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 2001. ISBN 0-9613921-4-2.

Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7.

Hideo Umeki. The *geometry* package. <http://ctan.org/pkg/geometry>, December 2008.

Index

énergie
 cinétique, [19](#)
 mécanique, [20](#)
 potentielle, [20](#)
équation
 Friedmann, [22](#)

densité

critique, [20](#)
paramètre, [21](#)
distance
 comobile, [18](#)
 physique, [18](#)
facteur d'échelle, [17](#)

Hubble
 temps, [23](#)
fonction, [19](#)
modèle
 Einstein- de Sitter, [22](#)