

MANUSCRIT ENTAMÉ LE 29 JUIN 2017 À L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE
DE STRASBOURG.

PAUL RAND

DOMINIQUE AUBERT

COSMOLOGIE PHYSIQUE

ELLIPSES

Table des matières

<i>Etat des connaissances</i>	13
<i>Prélude : Cosmologie Newtonienne</i>	23
<i>Concepts Fondamentaux</i>	31
<i>Dynamique de l'Univers Homogène</i>	51
<i>l'Univers Chaud</i>	65
<i>Histoire thermique de l'Univers et Nucléosynthèse primordiale</i>	79
<i>Le Fond Diffus Cosmologique</i>	87
<i>La Matière Noire</i>	103
<i>Formation des grandes structures</i>	127
<i>Formation des 'petites' structures</i>	149
<i>Bibliographie</i>	159

Introduction

ON NE MESURE PAS ASSEZ LA CHANCE de pouvoir faire de la cosmologie. Cette possibilité nous est offerte aujourd’hui car nous disposons de moyens instrumentaux capables de sonder l’Univers le plus distant et le plus ancien, car nous disposons de théories et modèles suffisamment matures et également parce que la nature aura bien voulu se laisser observer, se présentant dans un état d’évolution tel que le cosmos intéressant est aujourd’hui accessible. L’objectif de ce livre est donc de célébrer cette opportunité qui nous est donnée.

La cosmologie se fixe pour objectif démesuré, délirant voire mégalomaniac d’étudier l’Univers dans sa globalité comme on étudierait une ville, un espèce dans son habitat ou un système de pensée philosophique. On se dit qu’on peut le faire, osant dire ‘chiche’ devant l’énormité de la tâche. L’Univers est actuellement en train d’évoluer, on ne peut le reproduire en laboratoire, nous faisons partie de l’expérience, il ne nous est pas entièrement inaccessible et pourtant l’ambition de la cosmologie est de passer outre ces obstacles et de faire au mieux pour pouvoir comprendre, prédire et décrire ce qui contient tout ce qui est, tout ce qui est passé et tout ce qui adviendra.

Ce que cet ouvrage va tenter de montrer, alors que tout semble indiquer que cette tâche est impossible à priori, c’est que la cosmologie est viable : elle fonctionne, en dépit du bon sens. L’édifice des théories physiques développé au cours des siècles parvient autant que faire ce peut à dégager un modèle cohérent, relativement simple de notre Univers. Nous avons affaire à un objet naturel, le cosmos, que la science permet d’aborder sous de multiples aspects et chacun de ses aspects produit une vision globale de notre Univers et de son évolution. La cosmologie étudie un objet avec tous les outils de la physique dont nous disposons, plutôt que de s’attacher à une théorie physique et l’appliquer aux multiples contextes où elle peut être pertinente : la cosmologie est une discipline de l’astrophysique, c’est à dire une science naturelle. C’est pour cette raison que ce livre est davantage un panorama de divers aspects de la cosmologie, sur la richesse physique nécessaire à sa description, plutôt qu’un ouvrage

totalement cohérent et autonome de l'état actuel de notre compréhension de l'Univers. Il se passe beaucoup de choses dans ce dernier et l'emphase est mise sur la diversité des modèles physiques qu'il faut invoquer pour tenter de comprendre toutes ses facettes.

Une autre des motivations qui pousse cet ouvrage à être écrit ainsi est la conviction que l'astrophysique (et la cosmologie en particulier) est le lieu idéal pour promouvoir la physique, sa richesse, sa capacité à décrire les régimes naturels les plus inattendus. En particulier, la physique est traversée de démarches constantes et similaires appliquées dans les contextes les plus divers : la cosmologie permet de mettre cette versatilité en avant. De façon récurrente, il est des régimes d'approximations ou d'extrapolations qui permettent à des théories physiques, de prime abord trop complexes, de décrire simplement et précisément des processus à l'oeuvre dans le cosmos. On réalise ceci progressivement, avec l'expérience, avec les confrontations multiples à l'étude de cas physiques divers et variés : l'objectif de ce livre est aussi d'amorcer cette prise d'expérience pour le lecteur.

Enfin, l'astrophysique et la cosmologie ont besoin des mathématiques : c'est une évidence qui ne peut et ne doit pas être niée. Pour cette raison, ce livre a un biais théorique et affiche un grand nombre d'équations. Ceci étant posé, je considère que les mathématiques ont plus besoin de l'astrophysique que l'inverse et de fait je pense également que la physique en général permet d'appréhender, de façon intuitive, comment est structurée une équation, comment des quantités pertinentes peuvent être anticipées. La physique permet une approche empirique des mathématiques, qui dans bien des cas permet de faciliter leur compréhension et démontrer en quoi elles sont puissantes et utiles et dans quels contextes.

LA COSMOLOGIE FONCTIONNE mais comme montré dans cet ouvrage, cela a un coût. Ce coût est d'une part la perte de certaines intuitions façonnées par notre expérience quotidienne : la perte d'une définition absolue de l'espace en est l'exemple le plus frappant. Par l'expérience, c'est toute une habitude, une façon de penser qui doit être rapidement prise par le lecteur : cet ouvrage cherche aussi dédramatiser cet aspect et par extension à tordre le cou à certaines idées reçues ou mal expliquées. D'autre part, le modèle standard de la cosmologie a un coût important en ce qu'il nous impose d'admettre notre grande ignorance. Par exemple 95% du bilan énergétique actuel de l'Univers nous est simplement inconnu¹ : l'influence de ce 'secteur sombre' est parfaitement décrite par nos théories, rencontre grand nombres de succès, mais sans que sa nature nous soit accessible. C'est la grande ombre qui plane sur cette discipline, telle l'épée de Damoclès : toute difficulté rencontrée par ce modèle nous force

^{1.} par exemple environ un quart de cette énergie est sous forme de matière noire et environ deux tiers est sous la forme d'énergie noire

à lever la tête vers cette incertitude permanente, vers la pensée lancerine que cet échafaudage n'est pas forcément des plus stables. Et pourtant bien des choses sont trop belles pour qu'on ne puisse pas envisager qu'elles soient vraies. C'est pour cette raison que ce livre cherchera en permanence à mettre en regard succès et faiblesses de la cosmologie moderne.

Les thèmes qui y sont abordés sont relativement standards, tout comme son organisation. Les premiers chapitres sont dédiés à l'Univers parfait, homogène et à sa dynamique afin d'établir sa caractéristique la plus spectaculaire à savoir *l'expansion*. Cette expansion, prédictive par la théorie de la relativité générale donne à notre Univers un début, une histoire et par extension un avenir que nous sommes capables de lui prédire. Par la suite, l'ouvrage se focalise sur l'Univers à ses débuts, lorsque les températures sont élevées et les densités importantes : c'est le royaume de la cosmologie primordiale, de la physique des énergies inaccessibles aux accélérateurs actuels. La conclusion de cette phase est la production² de l'objet le plus important de la cosmologie, le fond diffus cosmologique, et peut-être l'objet naturel le plus important de toute la physique : étudié sous toutes ses coutures, compris à des degrés rarement égalés dans d'autres disciplines, le fond diffus est presque une anomalie dans le paysage de l'astrophysique. Sa compréhension est maîtrisée et son importance maintenue fois démontrée et c'est probablement la source la plus importante de notre savoir actuel sur l'Univers. Les chapitres suivants sont axés sur l'Univers hétérogène et la formation des structures, la thématique de la matière noire, ou la Réionisation du milieu intergalactique : ces sujets sont le pont entre la cosmologie simple et pure et l'astrophysique complexe. C'est le fondement de la théorie de la formation des galaxies, sujet qui ne sera pas abordé en détails dans ce livre, car il mérite plusieurs ouvrages en soi³. Toutefois, un chapitre est dédié aux simulations cosmologiques, programmes informatiques qui visent à modéliser cette cosmologie hétérogène dans toute sa complexité : ce chapitre est à nouveau l'occasion d'exposer la variété des physiques pertinentes à la cosmologie et c'est également un sujet rarement abordé dans des livres équivalents. Comme il s'agit de mon sujet de recherche principal, ce chapitre est l'occasion de présenter une expertise qui m'est chère. On m'excusera par avance de ne pas dédier de chapitre aux moyens d'observations équivalents : ces moyens et les techniques associées sont généralement décrits au sein des différents chapitres lorsque cela est nécessaire et par ailleurs, il existe nombre de livres de grande qualité dédiés à l'observation astronomique⁴ qui seront bien plus utiles au lecteur que ce que j'aurais pu rapidement proposer ici. L'ouvrage se termine sur des sujets plus spéculatifs ou plus abstraits, comme l'Inflation ou le rôle de l'entropie.

2. 380 000 ans après le Big-Bang

3. et de multiples références existent d'ores et déjà

4. la bibliographie donnée en fin d'ouvrage mentionne de tels ouvrages

pie en cosmologie : c'est à nouveau l'occasion de mettre l'emphase sur la variété d'outils physiques qu'il faut mobiliser pour avoir une compréhension de notre Univers.

LE PUBLIC VISÉ par ce livre est celui d'étudiantes et d'étudiants de filière scientifiques, de Licence, de Master et d'écoles d'ingénieurs. Le pré-requis sont ceux d'une maîtrise de l'analyse et de l'algèbre de terminale scientifique, même si l'ouvrage essaie autant que faire ce peut de présenter différents niveaux de lecture et fournir des explications ou des conclusions qui ne nécessitent pas forcément de suivre les démonstrations mathématiques. De fait, je tiens à préciser que ce livre n'est pas complet, parfois imprécis et prend sans honte un certain nombre de raccourcis : il existe de multiples références qui sont elles complètes dans leurs démonstrations, exhaustives dans leurs analyses parfois au prix d'une complexité élevée. Ici, on vise davantage à exposer les démarches, les idées en sacrifiant ici et là à des simplifications. De fait, cette démarche reflète ma propre approche de la discipline : je ne suis pas moi-même un spécialiste de cosmologie à proprement parler, mais mon activité de recherche centrée sur la production de modèles où le contexte cosmologique est extrêmement important m'a conduit à développer une connaissance large, empirique de cette discipline. C'est ce rassemblement d'idées, d'approches, de compréhensions parfois superficielles mais dont l'utilité m'a été démontrée par ma pratique de la science que je souhaite partager dans cet ouvrage. De fait, j'ose espérer que cet ouvrage intéressera le non-physicien, voire le non-scientifique mais plus généralement toute personne intéressée par la mise en hypothèse, le raisonnement, la conceptualisation.

CET OUVRAGE DOIT BEAUCOUP à mes collègues de l'Observatoire Astronomique de Strasbourg et d'ailleurs, à mes étudiants et aux mentors qui ont tous façonné d'une manière ou d'une autre ma trajectoire de scientifique et d'enseignant à l'Université. Je tiens ainsi à remercier Pierre Ocvirk, Jonathan Chardin, Nicolas Gillet, Nicolas Deparis, Joe Lewis, Sébastien Derrière, Arnaud Siebert, Caroline Bot, Thomas Keller, Thomas Boch, Sandrine Langenbacher, Romaric David, Medhi Amini, Nicolas Martin, Ariane Lançon, Christian Boily, Rodrigo Ibata, Benoit Famaey, Jean-Marie Hameury, Olivier Bénaymé, Hervé Wozniak et Pierre-Alain Duc. La contribution implicite de Christophe Pichon et de Romain Teyssier à cet ouvrage est incomensurable. Ce livre doit également beaucoup à certaines rencontres dont celles avec Benoit Sémerin, Jérémie Blaizot, Mathieu Langer, Marian Douspis, Yann Rasera, Mathias Gonzalez, Edouard Audit, Françoise Combes, Francis Bernardeau, Nabila Aghanim, Guilaine

Lagache, Jean-Loup Puget, François Bouchet, Stéphane Colombi, et
Stéphane Basa. Pour finir je tiens à remercier Anne-Catherine, Anouk
& Raoul, mes phares immuables au sein de ce cosmos infini.

Etat des connaissances

L'objectif de ce chapitre est de faire un court panorama de l'état de nos connaissances sur les propriétés observées de l'Univers. Les chapitres suivants seront eux consacrés à l'élaboration des concepts et des théories qui permettent de rendre compte de ces propriétés observées.

Concernant notre connaissance des propriétés de l'Univers, elle repose souvent sur *l'interprétation d'observations au travers de théories et de modèles*. Par conséquent les propriétés décrites dans ce chapitre sont essentiellement valables dans le contexte du modèle standard de la cosmologie décrit dans les chapitres suivants. Si un changement de paradigme vient à opérer, rien n'empêche à priori que ces observations soit réinterprétées et donc conduisent à modifier ce que nous savons de l'Univers.

Observation fondamentale : le décalage vers le rouge

L'observation première de la cosmologie, à l'origine même de l'émergence de la discipline au début du 20ème siècle, est la constatation que tous les objets observés à grande distance sont plus "rouges" qu'attendus. La mesure du spectre de ces objets indiquent que les systèmes de raies observés, parfois complexes, sont tous à des longueurs d'ondes plus importantes que ce que l'observation de ces mêmes éléments aurait donné dans un laboratoire. On définit le décalage vers le rouge ou "redshift" par la quantité z

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (1)$$

où λ est la longueur d'onde⁵ observée et λ_0 celle mesurée en laboratoire. En corrélant cette quantité avec la distance des objets, on observe que ce rougissement est d'autant plus grand que la source est éloignée.

Dans le cadre du modèle standard de la cosmologie, ce rougissement est de nature *cosmologique* et traduit le phénomène *d'expansion* de l'Univers. Dans ce processus d'expansion, toute distance prise

5. avec $\lambda = cT = c/\nu$ où T et ν sont respectivement les périodes et fréquences d'oscillation de l'onde électromagnétique associée

entre 2 points de l'Univers est amenée à évoluer⁶. Notons dès à présent que cette augmentation n'est pas le symptôme d'un déplacement des sources par rapport à leur espace local mais plutôt la conséquence d'une 'dilatation' de l'espace entre l'observateur et la source. Cette dilatation agit également sur la longueur d'onde des photons⁷ en vol et conduit au rougissement observé. Cette dilatation agit aussi sur les densités, diluant au cours du temps de telles quantités et on peut montrer qu'elle produit des dilatations des durées, on allongeant tout type d'intervalles temporels. Enfin, cette interprétation cosmologique permet également d'expliquer pourquoi ce décalage vers le rouge est d'autant plus important que la source est éloignée.

Notons que comme le redshift croît avec la distance, z est de façon indirecte un indicateur de *distance* et comme la lumière nous parvient avec une vitesse finie et connue, z est également un indicateur de *l'époque* à laquelle la source est observée. En cosmologie, l'action de désigner un objet ou un phénomène par son redshift z implique à la fois une information spectrale, spatiale et temporelle.

Le processus d'expansion a débuté il y a 13.8 milliards d'années : c'est le *Big-Bang*. Aux premiers instants, les distances étaient présumément courtes, l'Univers était donc de fait très dense. Régnaient également une température très élevée, qui fut amenée à décroître au cours du temps⁸. De fait le modèle accepté permettant de décrire les origines de l'Univers est parfois dénommé modèle du *Big Bang chaud*.

6. en l'occurrence à augmenter dans un modèle standard d'Univers

7. et donc sur leur énergie donnée par $E = hv = hc/\lambda$

8. Par exemple la température du 'gaz de photons cosmiques', le fond diffus cosmologique, est aujourd'hui de 2.73 K mais était environ 1000 fois plus chaud lorsqu'il a été libéré.

Propriétés générales de l'Univers

L'Univers dans lequel nous vivons peut, semble-t-il, être décrit par une poignée de paramètres. La connaissance de ceux-ci, ajoutée à la connaissance de ce que nous croyons être les bonnes lois de la physique, permet d'expliquer une très grande partie des propriétés globales de l'Univers et également une grande partie des processus astrophysiques qui subissent la cosmologie qui les entoure.

Paramètres cosmologiques

Comme détaillé dans les chapitres suivant, l'Univers peut être décrit à un haut niveau de précision en considérant qu'il est homogène, isotrope et possédant une dynamique régie par les équations de la relativité générale. Toutefois cette description nécessite la connaissance à priori de certains paramètres qui permettent d'expliquer l'Univers tel qu'il est observé. L'observation de l'état actuel du cosmos met des contraintes sur la valeur de ces paramètres.

Paramètre de Hubble Le premier paramètre est le paramètre de Hubble H_0 , qui caractérise le taux d'expansion actuel. Sa valeur est d'environ 70 km/s/Mpc. On utilise parfois le paramètre de Hubble réduit h tel que $H_0 = 100h$ km/s/Mpc : sa valeur est proche $h \sim 0.7$.

Paramètres de densité Les différents types d'énergie présentes dans l'Univers ont une grande influence sur ses propriétés et leurs contributions au budget énergétique total sont caractérisées par des paramètres de densité Ω_i . En pratique c'est le rapport de la densité d'énergie de type i à une densité d'énergie de référence appelée *densité critique*. On distingue la densité de matière Ω_m , la densité de baryons (protons+neutrons(+électrons))⁹ Ω_b , la densité de rayonnement Ω_r , la densité d'énergie des neutrinos Ω_ν et la densité d'énergie noire Ω_Λ . Il faut noter que la contribution de la matière contient celle des baryons, par conséquent $\Omega_m \geq \Omega_b$: actuellement on a $\Omega_m \sim 0.3$ et $\Omega_b \sim 0.05$, la différence étant la contribution apportée par une matière *non baryonique* et invisible, appelée la matière noire. Les contributions des espèces relativistes (photons, neutrinos) est aujourd'hui négligeable, bien que ce type de particules soit très abondant en nombre.

Spectre de fluctuations initiales L'Univers tel qu'observé actuellement n'est pas strictement homogène, en particulier sur des échelles inférieures à la dizaine de Mpc. Les galaxies et amas qui nous entourent trouvent leur origine dans des fluctuations initiales de densité de très faible amplitude. Ces fluctuations sont caractérisées par un spectre dit 'de puissance' $P(k)$ qui donne la distribution des amplitudes des fluctuations de taille $L = 2\pi/k$. On suppose actuellement que celles-ci trouvent leur origine dans la période *d'Inflation* qui prédit un spectre primordial de la forme :

$$P(k) \sim k^{n_s}, \quad (2)$$

n_s constitue également un paramètre cosmologique et les modèles Inflationnaire lui prédise une valeur *proche mais différente* de l'unité¹⁰. L'amplitude globale du spectre doit également être paramétrée, par exemple sous la forme d'une amplitude de fluctuation sur une échelle arbitraire de 8 Mpc, notée σ_8 . Notons enfin que les modèles d'Inflation prédisent un fond d'ondes gravitationnelles, caractérisé par un spectre de fluctuations tensorielles, similaire à celui des fluctuations de densité (dites également scalaires). Le rapport d'amplitude entre fluctuations tensorielles et scalaires est noté r et sa valeur est supposée faible.

9. en termes rapides, les baryons constituent la matière 'normale' à laquelle nous sommes habitués

10. le satellite Planck mesure ainsi une valeur proche de 0.96

Etat d'ionisation de l'Univers Le dernier paramètre canonique de la cosmologie permet de décrire l'état d'ionisation de l'Univers au cours de son histoire. Cet état se mesure en contrignant le nombre moyen de diffusions des photons sur les électrons libres du cosmos. Cette quantité est notée τ avec une valeur typique $\tau \sim 0.07$. L'essentiel de ces électrons libres sont produits au cours de la Réionisation de l'Univers au redshift $z_{\text{reion}} \sim 8$: dans les modèles les plus simples τ et z_{reion} sont directement liés.

Modèle minimal L'ensemble des paramètres décrits précédemment permet de rendre compte d'une grande variété de propriétés observables. D'autre part, certaines hypothèses permettent encore de réduire le nombre de paramètres libres. Par exemple, l'Inflation prédit une courbure intrinsèque nulle qui se traduit en pratique par $\sum_i \Omega_i = 1$. D'autre part l'amplitude des modes tensoriels (i.e. les ondes gravitationnelles issues de l'Inflation) étant attendue comme très faible, on peut aisément poser $r = 0$. Enfin, le paramètre de densité de rayonnement Ω_r est très précisément connue, par la mesure précise de la température du fond diffus ($T = 2.7255 \pm 0.0006$ K) et ne permet donc plus de latitude significative sur sa valeur. Enfin, en l'absence de physique exotique la densité d'énergie des neutrinos Ω_ν est directement liée à celle des photons¹¹. Au final, un modèle extrêmement solide peut être construit avec seulement 6 paramètres libres. Un choix typique de "sextet" est $(\Omega_b, \Omega_m, H_0, \sigma_8, n_s, \tau)$. Bien sûr d'autres combinaisons de paramètres libres sont possibles.

11. tout en étant quasi nulle aujourd'hui

Principales sondes observationnelles

Les paramètres précédents sont contraints par l'observation croisée de différentes sondes observationnelle. La convergence de ces valeurs conduit à ce qui est communément nommé *le modèle de concordance* ou *modèle standard*. Voici une liste (non-exhaustive) de ces sondes cosmologiques.

Mesure directe de H_0 Cette mesure s'effectue à l'aide de chandelles standards qui permettent de mesurer indépendamment la distance d'un objet extra-galactique et son redshift z . La chandelle de référence est la relation période-luminosité des étoiles variables de type Céphéides : la mesure de la période de variation de leur flux apparent permet de déterminer leur luminosité intrinsèque¹² et la connaissance de ce flux et cette luminosité permet d'obtenir la distance¹³. Les Céphéides sont des indicateurs primaires et permettent de calibrer des indicateurs secondaires : courbes de lumières des supernovæ, relation de Tully-Fisher, etc... Ce type d'indicateurs donne

12. une Céphéide intrinsèquement brillante varie lentement, une Céphéide faible varie rapidement

13. via $\text{Flux} = \text{Lum}/4\pi(\text{dist})^2$

une valeur de $H_0 \sim 73$ km/s/Mpc. Le fond diffus cosmologique permet également une mesure indépendante de $H_0 \sim 67$ km/s/Mpc en légère tension avec les estimateurs précédents.

Supernovæ et cosmologie La grande luminosité des supernovæ permet leur détection à des distances cosmologiques : ce terme désigne les stades finaux des étoiles les plus massives incapables de maintenir des réactions de fusion nucléaires en leur sein, conduisant à leur explosion. De plus certains types de supernovæ, celles dite de type 'SN1A', ont un caractère quasi standard car elles résultent de l'explosions de naine blanche dans des systèmes binaires pour lesquelles il existe une forte corrélation entre luminosité et paramètres de la courbe de luminosité. L'accélération¹⁴ de l'expansion de l'Univers a été mise en évidence pour la première fois à l'aide de ce type d'indicateurs, en proposant pour la première fois la combinaison $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$. De plus ces mêmes indicateurs indiquent que la densité d'énergie noire est probablement une constante en temps et en espace, donc équivalente à une constante cosmologique¹⁵.

Le fond diffus cosmologique Le fond diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background, CMB) est constitué des photons produits lors de la Recombinaison, 380 000 ans après le Big-Bang. Il constitue le plus grand réservoir de photons du cosmos et présente une brillance homogène à des niveaux de 1 pour 100 000. Le CMB présente néanmoins de faibles inhomogénéités qui tracent les inhomogénéités de matière à cette époque. La structure spatiale (en fait angulaire sur le ciel) comprend des informations sur toute l'histoire de croissance des structures depuis le Big-Bang jusqu'à 380 000 ans plus tard et sur les processus de couplage entre le rayonnement et la matière. L'étude de ces fluctuations permet par exemple d'établir la platitude de la géométrie de l'Univers, fournit une mesure de la quantité de baryons Ω_b , confirme la nécessité d'une matière non-baryonique et l'absence d'évolution de l'énergie noire. Le CMB indique également que le spectre de fluctuation initial est compatible avec les modèles d'Inflation et pour l'instant les modes tensoriels restent indétectables. Enfin le nombre de diffusions des photons sur les électrons est de l'ordre de $\tau \sim 0.07$ correspondant à une Réionization vers un redshift de $z \sim 8$. Le CMB constitue à l'heure actuelle la sonde la plus précise et la plus complète d'informations cosmologiques. C'est l'objet d'étude de missions spatiales et sol de très grande ampleur, dont par exemple le satellite européen *Planck*.

Grands relevés de Galaxies Les galaxies constituent des traceurs (biaisés) de la distribution de matière dans le cosmos. Par conséquent des

14. c'est-à-dire le fait que les distances augmentent de plus en plus rapidement aujourd'hui

15. on rencontrera aussi parfois le terme d'énergie du vide

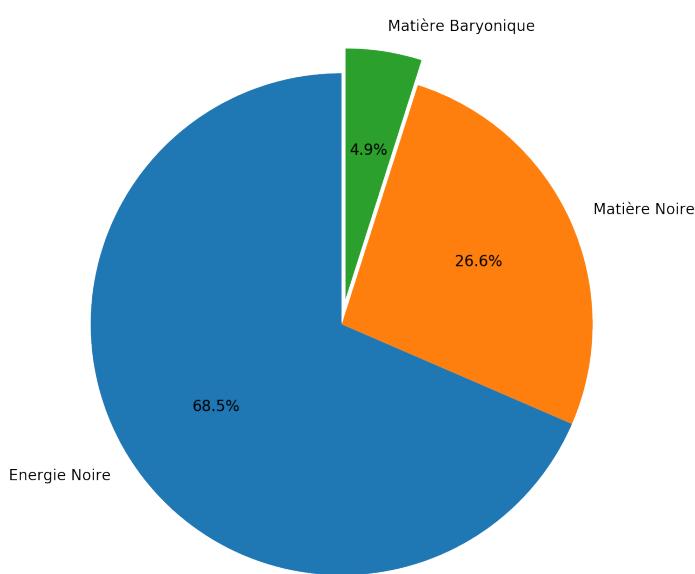


FIGURE 1: La répartition des différentes formes d'énergie au bilan énergétique total de l'Univers, d'après les mesures du satellite *Planck*. On note l'absence de contribution du rayonnement et des neutrinos, dont le poids énergétique est trop faible pour pouvoir être représenté ici. La matière 'normale', désignée comme 'baryonique' et composée de protons, neutrons et électrons ne représente que $\sim 5\%$ du total. Le reste constitue le *secteur sombre*.

efforts importants sont réalisés pour collecter de façon homogène, les positions dans le ciel et les propriétés de millions de galaxies, sous forme de grands relevés : parmi les plus connus on citera le *Sloane Digital Sky Survey*, SDSS, ou bien le futur relevé du satellite européen *Euclid*. En théorie, l'étude de la distribution spatiale de ces objets dans des grands relevés doit permettre de contraindre le déroulé du processus de croissance des structures de l'Univers et par extension la cosmologie. Parmi les mesures les plus spectaculaires autorisées par ce type de relevés est la détection des oscillations baryoniques acoustiques (BAOs) à bas redshift. Les BAOs sont déclenchés dans l'Univers pré-Recombinaison et consistent en des ondes acoustiques dans le gaz baryonique entretenues par la compétition entre la pression de rayonnement et la gravitation produite par toute la matière. Ces BAOs sont gelés après la Recombinaison et se manifestent sur des échelles d'environ 150 Mpc dans toute distribution de matière qui échantillonnent ces distances, dont le CMB et les grands relevés de galaxies. La cosmologie issue des relevés de galaxies permet généralement de lever les dégénérescence entre paramètres, par exemple pour les estimations issues du CMB, et sont donc d'une importance essentielle. De plus les relevés opèrent à différents redshifts z et offrent des vues à différents instants d'une même sonde cosmologique (par exemple sur les BAOs) et sont donc des outils

extrêmement puissants.

Amas de Galaxies Les amas de galaxies constituent les plus grands objets qui se sont effondrés gravitationnellement aujourd’hui. Ils peuvent comprendre plusieurs milliers de galaxies et atteindre des masses allant jusqu’à $10^{15} M_{\odot}$. Le décompte de ces objets et leur fonction de masse permet ainsi de contraindre le champ de matière aux échelles qui viennent seulement de s’effondrer, sous l’action de la gravité¹⁶. Généralement on extrait de l’étude des amas les quantités $\sigma_8 \sim 0.8$ et $\Omega_m \sim 0.3$. Ces amas sont généralement des émetteurs X, dont l’émissivité permet de déterminer la masse. On les détecte également dans le signal du CMB, comme des distorsions locales du spectre via l’effet Sunyaev-Zeldovich.

Milieu Intergalactique La structure du gaz dans le milieu intergalactique (IGM) nous renseigne également sur la distribution spatiale de la matière à différents redshifts, via la mesure du spectre de puissance de la matière $P(k)$. La sonde la plus commune de l’IGM est la *forêt Lyman-alpha*, qui se manifeste dans les spectres de quasars distants comme un ensemble de raies d’absorptions qui tracent la distribution de nuages absorbants le long de la ligne de visée. Dans le meilleur de cas, les BAOs peuvent même être retrouvés (c’est le cas par exemple vers $z \sim 2$) grâce à de multiples spectres pris le long de multiples directions vers des quasars différents. Une autre application de l’étude de l’IGM pour la cosmologie consiste à observer les tunnels d’absorptions dans les spectres de quasars à très grand redshift $z > 5.5$: l’Univers y est jeune ($t < 1$ Gyr) et encore neutre. La mesure de ces tunnels permet de contraindre l’histoire de la Réionisation de l’Univers et le paramètre cosmologique τ .

Lentilles Gravitationnelles Les lentilles gravitationnelles traduisent la déformation de l’espace temps à proximité d’objets massifs, ce qui conduit également à une déformation de la trajectoire des rayons lumineux entre une source et un observateur. Dans les cas les plus spectaculaire (strong lensing) cela conduit à la production d’images multiples et à de fortes déformations de types arcs gravitationnels. Sur de grandes portions du ciel, le signal est beaucoup plus modéré bien que l’on s’attende à ce que par exemple le CMB ou bien la distribution de galaxies à un certain z soient déformés par la distribution de matière entre eux et nous observateurs (weak lensing). Ces faibles déformations peuvent toutefois être analysées statistiquement pour conduire à des contraintes sur la distribution de la matière déformante $P(k)$ et à l’amplitude des fluctuations associées σ_8 .

16. on parle aussi de passage au régime non linéaire, en référence à la nature non linéaire des équations qui permettent de décrire ce processus

Une Histoire du Cosmos

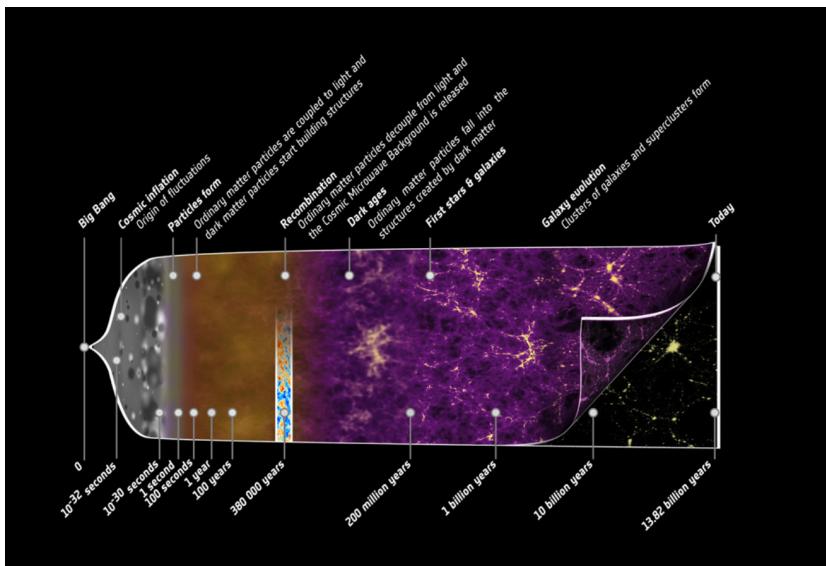


FIGURE 2: Les grandes étapes dans l'histoire du cosmos. Cette frise couvre environ 13.8 milliards d'années d'évolution depuis le Big-Bang (à gauche) jusqu'à nos jours (à droite). Crédit :Planck-ESA

POUR FINIR, nous allons donner un cours descriptif des grandes étapes de l'histoire de l'Univers. Ces grandes étapes décrivent des processus physiques ou des transitions spécifiques qui opèrent à certains stades de l'évolution du cosmos : par extension leurs noms sont aussi utilisés pour désigner des instants. Par exemple on parle de la Réionisation pour désigner la fin du premier milliard d'années de l'Univers ou bien de l'*Inflation* pour désigner ses premiers instants.

L'Univers a connu une phase extrêmement dense et chaude, il y a 13.8 milliards d'années. Nos théories actuelles ne nous permettent pas actuellement de remonter en deçà d'un temps de Planck ($\sim 10^{-44}$ s), désignant une durée sur laquelle les effets de gravité quantique pourraient se manifester¹⁷. A cette incertitude près, l'histoire de l'Univers débute à cette époque, nommée le *Big-Bang*. A partir de cet instant, l'Univers va subir un effet d'expansion de l'espace et de baisse de sa température. Dans le cadre du modèle cosmologique standard, les grandes étapes de son évolution sont les suivantes (cf. figure 2) :

1. L'*Inflation* $t \sim 10^{-34}$ secondes : cette phase est encore spéculative et consisterait en une phase d'expansion accélérée de l'Univers dans ces instants quasi-initiaux. Si ce processus a bien eu lieu, il permettrait d'expliquer naturellement la grande homogénéité initiale de l'Univers, sa platitude et donnerait une origine quantitative aux fluctuations initiales de matière qui sont à l'origine des

¹⁷. gravité quantique pour laquelle nous n'avons à ce jour pas de théorie satisfaisante

grandes structures actuelles de l'Univers. Ce processus aurait également été la source d'ondes gravitationnelles qui seraient toujours détectables et dont la découverte signerait la confirmation de l'existence d'une phase d'Inflation.

2. l'Univers primordial $t < 3$ minutes : au cours de cette époque l'Univers reste extrêmement chaud et dense. Il s'y déroule des processus à très haute énergie : plasma quark-gluons, confinement des quarks, baryogénèse (i.e. l'annihilation matière anti-matière), découplage des neutrinos, nucléosynthèse des éléments légers jusqu'à l'hélium.
3. l'Equivalence $z = 3400$ $t=50$ 000 ans l'Univers voit son bilan énergétique passer d'une domination par les espèces relativistes (le rayonnement) à une domination par la matière.
4. La Recombinaison $z = 1100$ $t=380$ 000 ans : l'Univers devient suffisamment froid ($T=3000$ K) et peu dense pour permettre la création d'atomes neutres et l'émission du fond diffus cosmologique (CMB).
5. les âges sombres $1100 > z > 30$ l'Univers est rempli de gaz froid et neutre. Le gaz se structure sous l'effet de la gravitation mais n'est pas encore en mesure de former des étoiles.
6. la Réionisation $30 > z > 6$ le gaz parvient à des densité lui permettant de se convertir en étoiles. Ces étoiles vont émettre un rayonnement ionisant qui vont réioniser ($x_{\text{HI}} \sim 0.0001$) et réchauffer totalement l'Univers ($T \sim 10000$). C'est les stades initiaux de la formation des galaxies.
7. la formation des galaxies et des grandes structures $30 > z > 0$ à partir de la formation des premières étoiles vont se former les premières galaxies. Elles vont croître de façon hiérarchique par assemblage de petits objets pour former les plus gros, sous l'effet de processus d'instabilité gravitationnelle dominés par une matière non baryonique. Les amas de galaxies vont apparaître vers $z = 1$.
8. Accélération de l'expansion cosmique $z \sim 0.3$, $t \sim 10$ milliards d'années. Le bilan énergétique de l'Univers devient dominé par l'énergie noire, induisant une expansion accélérée de l'Univers.
9. Aujourd'hui $z = 0$. L'Univers a 13.8 milliards d'années .

Prélude : Cosmologie Newtonienne

Ce chapitre est à la fois optionnel et indispensable : optionnel car le reste de l'ouvrage n'en dépend pas et les quelques points qui y sont abordés sont décrits bien plus en détail dans les chapitres suivants. Il n'en reste pas moins indispensable en ce qu'il permet d'introduire facilement et simplement beaucoup de concepts utilisés couramment en cosmologie.

Ce prélude porte sur un modèle *Newtonien* de cosmologie. Ce modèle possède une portée limitée mais permet une introduction progressive à certains concepts et à certains modes de raisonnements propres à la cosmologie. On discutera de sa validité et des hypothèses sous-jacentes en fin de chapitre, après en avoir exploré tous les recoins.

CONSIDÉRONS un 'gaz de galaxies' homogène et isotrope au sein duquel on trace un volume sphérique de rayon R et d'origine O . Au sein de ce volume chacune de ces galaxies est repérée grâce à un rayon vecteur $r(t)$, variable au cours du temps. Ce modèle repose sur l'hypothèse que toutes ces galaxies vont voir leur position évoluer *radialement* par rapport à O suivant une loi homothétique :

$$r(t) = a(t)r_0. \quad (3)$$

$r(t)$ est le rayon à un instant donné tandis que r_0 est le rayon mesuré pour chacune de ces galaxies à un instant arbitraire t_0 . La dépendance temporelle est encodée dans le facteur d'échelle¹⁸, $a(t)$. Ce dernier est un facteur sans dimension et dont on voit que par définition :

$$a(t_0) = a_0 = 1. \quad (4)$$

Cet instant t_0 peut être choisi arbitrairement mais il est d'usage de dire qu'il correspond au *moment présent* : pour $t < t_0$ on regarde le système dans le passé et $t > t_0$ il s'agit du futur. De même, toute quantité indiquée avec 0 est prise à sa valeur aujourd'hui et par exemple $r(t_0) = r_0$.

Dès à présent, on peut constater que la notion de distance à l'origine n'est pas univoque : elle peut désigner la distance à un moment

18. appelé aussi *facteur d'expansion*

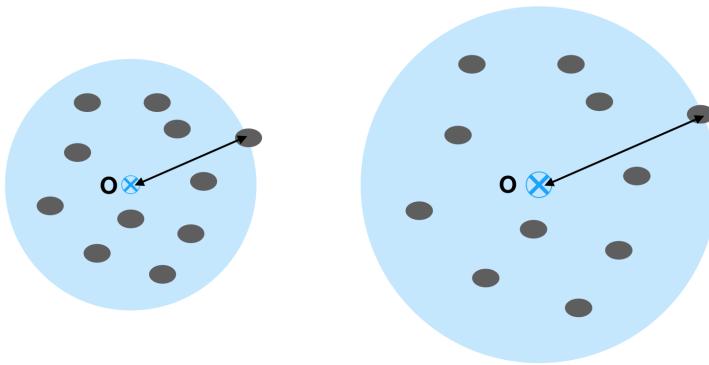


FIGURE 3: Le modèle Newtonien. La sphère représente une portion de gaz de galaxies, uniforme et isotrope centrée sur O . Seules quelques galaxies sont représentées ici sous forme d'ellipses : la plus éloignée d'entre elles fournit le rayon maximum de notre *volume de contrôle* (montré ici sous la forme d'une flèche). Deux instants sont représentés ici, le temps s'écoulant de la gauche vers la droite et le volume subit alors une transformation homothétique. Notons que la galaxie la plus éloignée reste toujours la même à tous les instants.

donné ou bien la distance variant au cours du temps. Pour lever cette ambiguïté, on appelle $r(t)$ la *distance physique* : à chaque instant elle représente l'intervalle qui sépare physiquement une galaxie de l'origine. De même on appelle r_0 la distance comobile : c'est la distance mesurée à un instant de référence t_0 , mais on peut également la considérer comme une mesure effectuée dans un système de coordonné en mouvement avec la matière (d'où le nom comobile). Enfin, le facteur d'expansion peut également être envisagé comme une mesure du rayon en unité du rayon comobile.

Si on considère maintenant le bord externe de notre volume de contrôle $R(t)$, celui-ci subit la même loi d'expansion $R(t) = a(t)R_0$ ¹⁹. Ce volume de contrôle est sphérique, il évolue au cours du temps et son expression précise est :

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}R(t)^3 = a(t)^3 \frac{4\pi}{3}R_0^3 = a^3 V_0. \quad (5)$$

Son volume varie en a^3 , comme tous les volumes attachés à de la matière. De même on peut aisément démontrer que sa surface varie en a^2 comme toutes les surfaces attachées à de la matière : dans les deux cas, la dépendance de ces quantités par rapport aux longueurs impose une certaine dépendance par rapport au facteur d'expansion. Ce type d'arithmétique est très fréquente en cosmologie et peut être aisément étendue à d'autres quantités, comme par exemple la densité de galaxies dans notre volume de contrôle :

$$n = \frac{N_{\text{gal}}}{\frac{4\pi}{3}R(t)^3} = a^{-3}n_0. \quad (6)$$

A cause de la dilution des longueurs et des volumes, la densité décroît au cours du temps avec une puissance -3 du facteur d'expansion.

19. se faisant on considère que ce rayon est 'attaché' ou ancré à une galaxie, la galaxie la plus externe

Notons dès à présent, que la masse ou le nombre de galaxies restent invariantes malgré l'évolution des distances. Dit autrement, le flux net au travers de la surface de contrôle est nul : aucune galaxie ne rattrape ou ne se fait dépasser par une galaxie initialement plus interne ou plus externe. En effet si $R_{0,a} < R_{0,b} < R_{0,c}$ alors à chaque instant $R_a < R_b < R_c$.

LA CINÉMATIQUE de ce système mérite aussi d'être étudiée. La vitesse de fuite de chacune de ces galaxies est simplement donnée par :

$$\dot{r} = r_0 \dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} r. \quad (7)$$

A un instant t donné, la vitesse de fuite est donc directement proportionnelle à la distance d'une galaxie : plus elle est éloignée de l'origine, plus elle s'en éloigne rapidement. Cela est cohérent avec l'absence de flux net au travers des limites du volume de contrôle. Le rapport de proportionnalité varie au cours du temps et est noté $H(t)$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (8)$$

Dans ce cadre Newtonien, cette fonction est l'analogie à la fonction de Hubble que nous rencontrerons par la suite et nous retrouvons cette propriété observée dans notre univers. La vitesse de récession des objets est proportionnelle à leur distance :

$$v = Hr \quad (9)$$

Cette loi est linéaire, ce qui a une grande importance. En effet, si la loi avait été quadratique ($v \sim r^2$) ou bien à vitesse de récession constante ($v \sim r^0$), on peut aisément montrer que l'homogénéité initiale est détruite, ce qui n'est pas une propriété désirable de notre modèle d'Univers. Par ailleurs, on peut également démontrer que cette hétérogénéité serait dépendante du point de vue, de l'origine utilisée, ce qui est une autre propriété indésirable. Cette loi de Hubble, linéaire, est la seule qui permette de conserver une homogénéité et une égalité des points de vues.

L'ÉNERGÉTIQUE du système nous est à présent accessible. Calculons la quantité d'énergie disponible dans ce gaz de galaxies, que ce soit sous forme cinétique ou potentielle. L'énergie cinétique est obtenue en sommant l'énergie cinétique de chaque coquille de rayon r et d'épaisseur dr en récession²⁰ :

$$E_c = \int_0^R dE_c = \int_0^R \frac{1}{2} \rho v^2(r) 4\pi r^2 dr. \quad (10)$$

En utilisant la loi de Hubble (Eq. 9) et la relation entre masse et densité, on obtient aisément l'expression suivante pour l'énergie cinétique totale du gaz en expansion²¹ :

20. ρ désigne la densité massique de galaxies. Elle est indépendante de r , le système étant homogène

21. M désigne la masse dans le volume de contrôle (conservée au cours du temps) et R le rayon de ce dernier

$$E_c = \frac{3}{10} M H^2 R^2. \quad (11)$$

On y retrouve aisément une dépendance en vitesse au carré²². De même l'énergie potentielle totale de gravitation se trouve en intégrant l'énergie potentielle de chaque coquille²³ :

$$E_p = \int_0^R dE_p = - \int_0^R \frac{GM(< r)}{r} dm. \quad (12)$$

Ayant $M(< r) = 4/3\pi\rho r^3$ et $dm = 4\pi r^2 \rho dr$, on obtient :

$$E_p = - \frac{16\pi^2 G}{3} \rho^2 \frac{R^5}{5} = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (13)$$

expression pour laquelle on retrouve bien une forme d'énergie potentielle de gravitation.

Quelques éléments de dynamique

Après avoir étudié ces quelques propriétés simples de notre modèle Newtonien, nous allons procéder à une première analyse de son évolution. Pour ce faire nous nous en tiendrons à une simple analyse énergétique. A partir des expressions des énergies cinétiques et potentielles, calculons l'énergie mécanique totale de notre système auto-gravitant :

$$E = E_c + E_p = \frac{3}{10} M H^2 R^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (14)$$

Comme tout système auto-gravitant, sa stabilité nous est donnée par le signe de son énergie mécanique. Une énergie totale positive va conduire à un système libre, avec une expansion infinie (voire asymptotiquement infinie si elle est exactement nulle) tandis qu'une énergie négative correspond à celle d'un système lié, voué à s'effondrer au bout d'un certain temps.

QUELLE CONDITION faut-il satisfaire pour avoir un système lié ?

Ecrivons l'inégalité correspondante :

$$\frac{3}{10} M H^2 R^2 < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (15)$$

Cette inégalité peut se réécrire sous la forme d'une condition sur la densité :

$$\frac{3H^2}{8\pi G} < \frac{M}{4/3\pi R^3} = \rho. \quad (16)$$

Dit autrement si la densité de notre gaz de galaxies est supérieure à une certaine densité critique, le système est voué à atteindre un rayon limite et à s'effondrer. Cette densité critique est donnée par :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (17)$$

22. via le terme Hr

23. l'énergie potentielle de gravitation est considérée nulle à l'infini. L'énergie potentielle d'une coquille de rayon r ne dépend que de $M(< r)$, la masse à l'intérieur de son rayon.

et correspond exactement à la densité critique obtenue par un traitement relativiste exact. De même on montrera qu'un gaz de galaxies sous-dense, avec $\rho < \rho_c$, n'est pas lié et connaîtra une expansion illimitée.

Compte tenu du rôle joué par cette densité critique, il est d'usage d'exprimer les densités massiques en unités de cette densité de référence. On parle alors de paramètre de densité Ω :

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (18)$$

Un système lié voué à l'effondrement équivaut à $\Omega > 1$ tandis qu'un système en expansion infinie équivaut à $\Omega < 1$. Le cas limite $\Omega = 1$ correspond à un comportement asymptotique avec une expansion nulle à l'infini. A nouveau, cette relation sera très exactement retrouvée dans le cadre d'un traitement relativiste complet.

Equation de Friedmann

Ce paramètre de densité Ω intervient également dans l'équation différentielle qui régit l'évolution du facteur d'expansion $a(t)$. On rappelle que ce terme encode toute l'évolution temporelle des distances dans notre modèle Newtonien d'Univers, via la relation $r(t) = a(t)r_0$. Prenons la galaxie la plus lointaine²⁴, dont la distance à l'origine est donnée par $R(t)$. Comme la mécanique Newtonienne peut s'appliquer, le principe fondamental de la dynamique donne²⁵ :

$$\ddot{R} = -\frac{GM(< R)}{R^2}. \quad (19)$$

En l'absence de flux net au travers de R , la masse $M(< R)$ reste constante ce qui permet d'intégrer simplement en multipliant par $2\dot{R}$:

$$2\dot{R}\ddot{R} = -2GM\frac{\dot{R}}{R^2} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{K}{R^2} \quad (21)$$

où K désigne une constante d'intégration. On reconnaît alors dans le terme de gauche le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a = \dot{R}/R$. Introduisons également la valeur de ce paramètre aujourd'hui $H_0 = H(t_0)$:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \frac{\rho_0}{a^3} + \frac{K}{(R_0 H_0)^2 a^2} \right). \quad (22)$$

On reconnaît l'expression de la densité critique prise aujourd'hui ρ_{c0} dans le terme lié à la densité de matière ρ_0 . De plus le second terme lié à la constante d'intégration doit également être sans dimension et

24. ce choix est arbitraire, le même raisonnement peut être tenu pour n'importe quelle galaxie à l'intérieur du volume de contrôle

25. notons que le mouvement est purement radial en l'absence de mouvements initiaux tangentiels. $M(< R)$ désigne la masse à l'intérieur du rayon R et la force ressentie par la galaxie est celle créée par toute cette masse rassemblée en O.

constant, à la dépendance en a^{-2} près. Pour ces raisons, cette équation est généralement présentée sous la forme suivante :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} \right). \quad (23)$$

qui donne l'évolution du paramètre de Hubble au cours du temps²⁶, en fonction du contenu en masse, Ω_m , de notre modèle d'Univers.

La constante K a généré un terme supplémentaire qui ne dépend que des conditions aux limites et qui doit satisfaire :

$$\Omega_m + \Omega_K = 1. \quad (24)$$

Ce terme n'est pas libre et correspond à une quantité qui possède une dépendance en inverse de la longueur au carré²⁷ : il correspond à un terme de courbure intrinsèque. L'équation 23 contient toute l'information pour permettre de calculer $a(t)$, connaissant Ω_m et H_0 : elle constitue l'une des formes de l'équation de Friedmann .

PRENONS UN UNIVERS CRITIQUE : dans ce type de modèle, $\Omega_m = 1$ et produit une dynamique que l'on sait être asymptotiquement en expansion pour un temps infini. L'équation 23 est alors très simple à intégrer à partir de²⁸ :

$$\dot{a} = \frac{H_0}{\sqrt{a}} \quad (25)$$

ou bien

$$\sqrt{a} da = H_0 dt. \quad (26)$$

En intégrant entre $t = 0$ et un temps t quelconque on obtient la loi d'expansion de ce modèle d'Univers :

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (27)$$

On reconnaît une évolution temporelle lente asymptotique avec comme dérivées du facteur d'expansion :

$$\dot{a} \sim t^{-1/3} \quad (28)$$

$$\ddot{a} < 0. \quad (29)$$

La dérivée tend vers 0 à l'infini et la courbure est négative, donnant une expansion qui décélère : ce comportement est typique des Univers remplis de matière. Ce modèle est appelé modèle de *Einstein-de Sitter* .

L'AGE DE L'UNIVERS s'obtient également très facilement : il suffit de prendre le temps correspondant à un facteur d'échelle unité, c'est à dire le temps qu'il s'est écoulé depuis $t = 0$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (30)$$

26. via la dépendance temporelle en $a(t)$

27. par analogie avec le terme en densité qui varie en a^{-3} alors que celui ci varie en a^{-2}

28. ici on ne considère que la solution croissante, correspondant à l'Univers observé qui s'avère être en expansion

On constate alors que l'inverse du facteur de Hubble actuel est l'âge de l'Univers à un facteur proche de 1 près. De fait on nomme cette quantité le *temps de Hubble*²⁹ :

$$t_H = H_0^{-1}. \quad (31)$$

Dans tous les modèles d'Univers, cette quantité constitue une bonne approximation de l'âge de l'Univers. De fait toute quantité temporelle qui est désignée comme étant de l'ordre du temps de Hubble est implicitement désignée comme une quantité longue ou lente en évolution. C'est l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'évolution de l'Univers.

Remarquons d'emblée que l'âge de l'Univers prédit par ce modèle simple est problématique. Pour une valeur typique de $H_0 \sim 70$ km/s/Mpc³⁰, le modèle d'Einstein-de Sitter conduit à un âge actuel d'Univers d'environ 9.2 milliards d'années, or il existe des populations d'étoiles³¹ qui présentent des âges de plus de 13 milliards d'années. Ne pouvant avoir un Univers plus jeune que son contenu, il faut envisager autre chose qu'un Univers composé uniquement de matière avec une densité critique.

Commentaire sur la validité du modèle

A ce stade, on peut s'interroger sur les conditions d'applications de ce modèle Newtonien. Rappelons que nous considérons une sphère de "gaz" de galaxies dans un Univers homogène : il s'avère que dans certains cas, le traitement Newtonien est exact³². En effet, faisons l'expérience de pensée qui consiste à retirer une sphère de matériau à cet ensemble homogène : quelle est la structure de l'espace-temps au sein de ce creux nouvellement créé ? La solution est donnée par le théorème de Birkhoff : l'espace-temps y est plat³³. Par conséquent lorsque la matière est remise dans ce creux la mécanique y est celle d'un espace plat, à savoir Newtonienne.

Ceci n'est toutefois vrai qu'à certaines conditions, la première étant que la matière que nous remettons dans ce volume n'y courbe pas significativement l'espace afin que l'on puisse continuer à raisonner sans relativité générale. On peut par exemple imposer que l'énergie potentielle de gravitation est faible par rapport à son énergie de masse :

$$\frac{GM}{Rc^2} \ll 1 \quad (32)$$

Par ailleurs, il faut la taille de notre volume soit petite par rapport à l'horizon, pour que les effets de propagation de l'interaction gravitationnelle³⁴ ne se fassent pas sentir :

$$\frac{RH}{c} \ll 1, \quad (33)$$

29. Notons que la loi de Hubble $v = Hr$ suggérait déjà que H constituait l'inverse d'un temps

30. correspondant à un temps de Hubble $t_H \sim 14$ Gyrs

31. par exemple au sein d'amas globulaires

32. voir par exemple *Physical Cosmology* de P.J.E Peebles

33. De la même façon, quel est le champ Newtonien de gravitation créé à l'intérieur d'une sphère creuse ? D'après le théorème de Birkhoff, la réponse est un champ de gravitation nul, dont l'équivalent relativiste est une absence de courbure de l'espace temps.

34. qui se fait à la vitesse de la lumière

ce qui est équivalent à considérer une vitesse de fuite très inférieure à la vitesse de la lumière. Donc de fait, le système ne peut être ni trop grand (pour éviter les grandes vitesses) ni trop petit (pour éviter les trop grandes densités). Par contre dans le cadre de ces hypothèses, le traitement est exact.

Une autre difficulté rencontrée par ce problème est qu'il est limité à l'action de la matière seule : qu'en est-il d'un modèle à l'intérieur duquel se trouve également du rayonnement ou bien toute autre forme d'énergie ? Le cadre Newtonien ne peut répondre à cette question or l'on comprend bien que ces autres types d'énergie doivent aussi contribuer à créer de la gravitation, comme indiqué par la relativité générale. On peut faire appel de façon ad hoc à un résultat relativiste en disant que toute forme d'énergie va contribuer sous la forme d'une densité *équivalente* de matière de la forme³⁵ :

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{c^2}(\epsilon + 3P). \quad (34)$$

Dans le cas d'une matière froide³⁶, on retrouve $\tilde{\rho} = \rho$. Pour le cas d'un gaz de rayonnement on peut démontrer que la densité équivalente est $\tilde{\rho} = 2\epsilon/c^2$. Par exemple pour un corps noir³⁷, la densité d'énergie ϵ et la pression P sont des fonctions simples de la température T ³⁸ :

$$\epsilon = \frac{4\sigma}{c}T^4 \quad (35)$$

$$P = \frac{4\sigma}{3c}T^4. \quad (36)$$

Ces relations conduisent bien à la densité équivalente décrite ci-dessus. Toutefois, cette 'astuce' ne permet pas d'expliquer quel rôle joue la pression et pourquoi elle contribue à modifier la dynamique de l'espace-temps. Cet aspect sera décrit plus en détail dans le chapitre suivant.

35. ϵ désigne la densité d'énergie associée à l'énergie en question et P est sa pression

36. sans pression

37. qui est l'exemple typique d'un gaz de photons fortement couplé avec la matière

38. ici $\sigma \sim 5.6 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ désigne la constante de Stefan-Boltzmann

Concepts Fondamentaux

Définition de l'Univers et de la Cosmologie

Il faut 3 constituants pour définir complètement un Univers :

1. un contenu en énergie, qui peut être sous diverses formes,
2. un jeu de lois physiques qui régissent l'entrejeu des différentes énergies,
3. un espace-temps, qui est la scène sur laquelle cet entrejeu prend place.

L'enjeu de la *cosmologie* est précisément d'étudier le contenu, les lois physiques et la structure de l'Univers. Par conséquent la cosmologie est liée aux aspects théoriques les plus fondamentaux de la physique mais également à des problèmes astrophysiques et il existe plusieurs manières de faire de la cosmologie. On cherchera par exemple à déterminer quelles sont les lois à l'œuvre dans le cosmos (point 2), ce qui est davantage du domaine de la physique théorique, ou bien à déterminer les paramètres (point 3) qui caractérisent la structure spatio-temporelle (e.g. sa forme ou bien son histoire) de l'Univers comme en cosmologie observationnelle. De même comprendre comment les différentes formes d'énergie (matière, lumière, etc...) s'organisent ou évoluent au cours du temps (point 1) (e.g. comment les grandes structures de l'Univers se mettent en place) permet d'avoir un éclairage sur les deux autres aspects du problème cosmologique.

Principe Cosmologique

L'objectif de la cosmologie est ambitieux et cette ambition n'est pas sans obstacles. L'un des problèmes les plus importants est notre incapacité à garantir que ce que nous observons autour de nous reste valable à l'échelle du cosmos, *y compris dans les régions de l'Univers qui nous serons à jamais inaccessibles*. Par exemple, rien ne garantit absolument que la neutralité électrique soit vraie dans tout le cosmos ou bien que la densité de matière mesurée dans notre Univers observable soit effectivement celle de l'Univers entier³⁹. Aujourd'hui, il

39. on distingue parfois *Cosmos* et *Univers*, où le Cosmos est la sous-partie de l'Univers qui nous est accessible. Par simplicité, aucune différence ne sera faite entre les deux termes dans cet ouvrage.

ne viendrait à l'idée de personne d'attribuer au cosmos une densité égale à celle de la Terre, pour autant c'est peu ou prou ce que nous faisons en cosmologie.

Pour autant, *nous n'avons pas le choix*. Par définition, il est impossible de connaître les propriétés de régions dont on ne peut extraire de l'information et toujours par définition, il existe de telles régions dans l'Univers. Quelle option reste-t-il à la personne désireuse de faire de la science à l'échelle de l'Univers, si ce n'est de supposer que ce qui nous est accessible est valide dans tout le cosmos ? En l'absence d'une telle hypothèse, il est tout simplement impossible de faire de la science avec l'Univers.

Cette supposition est à la base du *Principe Cosmologique*. Si nous revenons sur les 3 constituants définis en début de chapitre, il est aisément de reconnaître que cette supposition implique que le contenu universel en énergie doit être le même que celui que nous constatons autour de nous. De même, la structure spatio-temporelle universelle doit être la même que celle que nous constatons dans l'Univers observable. Toutefois cette hypothèse "universaliste" implique également que nous supposons que les mêmes lois de la nature s'appliquent dans tout le cosmos, y compris dans les régions qui nous sont inaccessibles ou pour lesquelles l'information n'est pas extractible. Le *Principe Cosmologique* que nous retiendrons est le suivant : le contenu en énergie de l'Univers, sa structure spatio-temporelle et les lois qui y opèrent sont les mêmes partout et par conséquent sont celles que nous constatons autour de nous. Notons tout de suite que cette universalité des composants s'applique aux échelles pertinentes pour la cosmologie et n'empêche pas des départs locaux aux valeurs universelles.

Tautologie

A ce stade, il nous semble que la cosmologie peut être définie par une tautologie : *la cosmologie est la science qui met le principe cosmologique à l'épreuve*. Si nous nous retrouvons dans une situation qui reste inexplicable dans ce que nous croyons être le jeu universel de contenu énergétique, spatio-temporel et "législatif" de l'Univers, alors les options sont réduites :

- soit nous continuons de croire que le principe cosmologique reste valide et c'est le détail de son contenu qui doit être révisé. Par exemple on modifiant les lois de la physique pour qu'elles rendent compte des nouveaux phénomènes tout en continuant à être une bonne description des processus locaux. C'est la voie scientifique standard.
- soit nous renonçons au principe cosmologique et donc à l'universalité de ses composants et nous renonçons en même temps

à l'ambition de décrire tout l'Univers avec la science que nous connaissons.

Principe cosmologique pragmatique

Le principe cosmologique est souvent décliné dans une version plus pragmatique qui est la suivante :

1. la gravitation est correctement décrite par la théorie de la relativité générale d'Einstein ,
2. l'Univers est homogène et isotrope.

Le point 2 revient à appliquer au cosmos ce que nous voyons de l'état de l'Univers autour de nous (contenu, géométrie, évolution etc...).

Le point 1 revient à définir les lois universelles de la gravité : une emphase particulière est mise sur cette interaction⁴⁰ car elle est la seule qui *in fine* est toujours de portée infinie et donc cosmologique. Par ailleurs, une fois la théorie de relativité générale choisie comme description correcte de la gravité, le point 2 a des conséquences sur les régimes qui vont être explorés avec cette théorie.

Relativité Générale : notions

La gravitation est centrale à l'étude de la cosmologie car elle est la seule "force" dont l'action ne peut être écrantée et dont la portée soit infinie⁴¹. De fait, elle est la seule force qui soit effective lorsque des échelles cosmologiques sont abordées. De plus la gravitation peut être décrite comme la manifestation des propriétés de l'espace-temps. Or il s'avère que la structure spatio-temporelle de l'Univers n'est pas triviale comme l'indique par exemple le phénomène d'expansion de l'Univers. Par conséquent l'observation de l'expansion du cosmos nous dit également des choses sur la façon dont la gravitation est à l'œuvre dans le cosmos. Compte tenu du rôle central de la gravitation pour les études cosmologiques, nous allons faire un aperçu de la théorie de la relativité générale et sur son application dans le cadre cosmologique⁴².

Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence existe sous forme de différentes saveurs. La plus triviale est la suivante, où l'on considère le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{F_z}{m_i} = \ddot{z}. \quad (37)$$

Ici l'on explique que l'accélération suivant la direction z est proportionnelle à la force appliquée au système étudié et *inversement*

40. On rappelle qu'on distingue 4 interactions fondamentales : la *gravitation*, la *force électromagnétique* et les deux forces corpusculaires *fortes* et *faibles*.

41. les forces corpusculaires sont de courte portée tandis que la force électromagnétique est en pratique toujours écrantée car une charge n'est jamais isolée sur les échelles qui nous intéressent

42. le lecteur intéressé pourra par exemple se reporter à l'excellent ouvrage d'introduction *A first course in general relativity* par B. Schutz.

proportionnelle à un coefficient, que l'on nomme *masse inertie*. Par conséquent, deux systèmes soumis à la même force vont réagir différemment selon la valeur du coefficient m_i qui les caractérisent.

Intuitivement on comprend assez rapidement que ce coefficient est lié à la quantité de matière que le système possède, d'où son qualificatif de masse : soumis à la même force, un système fortement chargé en matière réagira moins qu'un système ayant une quantité de matière plus faible. Maintenant considérons l'expression de F_z si cette force se trouve être une force de pesanteur :

$$F_z = m_g g \quad (38)$$

où g est la norme du champ de pesanteur. Cette force F_z est d'autant plus forte que le coefficient m_g est important : ce coefficient caractérise également la quantité de matière dans le système et un système avec une grande quantité de masse va naturellement avoir une valeur élevée de m_g et donc une pesanteur importante. Cette masse m_g est aussi dénommée *masse grave*.

A ce stade, nous avons donc deux coefficients qui tracent la quantité de matière dans un système physique : le premier m_i lié aux équations de la dynamique, et sans aucune référence à priori à une force de pesanteur (ou de gravitation), et le second m_g qui lui pour le coup est complètement lié à la présence d'un champ de pesanteur. Il faut alors se rappeler qu'à priori, *rien* ne nous informe d'une quelconque relation quantitative entre les deux et qu'il faut postuler une éventuelle relation entre les masses inertielles et graves.

Toutefois, l'expérience nous indique que tous les systèmes soumis à un champ de pesanteur donné semblent posséder la même accélération \ddot{z} et ceci quelles que soient leurs masses inertielles et graves. Ceci implique que $m_g \sim m_i$. Plutôt qu'une vague égalité, le principe d'équivalence stipule une exacte identité entre ces deux quantités :

$$m_g = m_i. \quad (39)$$

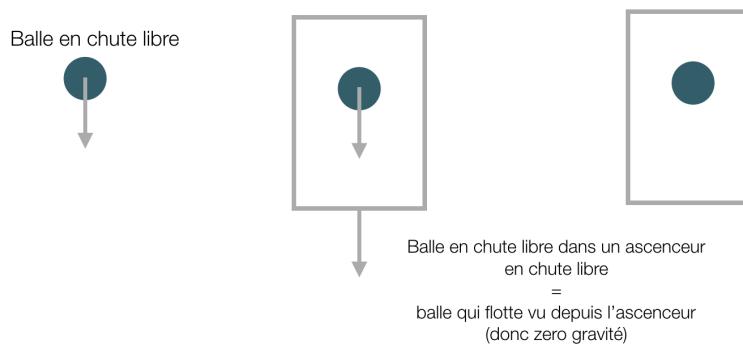
Cette égalité est fortement suggérée par l'expérience, mais ne peut être démontrée comme étant absolument valide⁴³. Selon ce principe, la quantité de matière intervient au travers d'une valeur unique qui est la *masse* $m = m_g = m_i$. On peut noter dès à présent que cette égalité confère à la gravitation un rôle spécial : la masse *inertie* est liée à la loi décrivant la dynamique des systèmes, y compris en l'absence de gravitation. Par exemple, une particule chargée dans un champ électrique verra son accélération modulée en q/m_i . La force électrostatique, comme toutes les autres forces subit l'impact de ce coefficient d'origine dynamique. D'après le principe d'équivalence, la gravitation quant à elle possède *dans sa propre expression* ce même coefficient, avant expression d'un quelconque problème dynamique.

43. actuellement les mesures expérimentales excluent toute différence relative entre les 2 masses supérieure à 10^{-12}

Elle dispose donc de façon innée d'une sorte d'élément d'information sur la façon dont la dynamique est régie, information que ne possèdent pas les autres interactions.

Référentiel inertiel

L'équivalence entre masse grave et inertie a plusieurs conséquences. Comme déjà mentionné, elle permet de rendre compte de l'universalité de l'accélération de systèmes différents dans un même champ de pesanteur. C'est la fameuse expérience de la tour de Pise où des masses différentes lachées de la même hauteur parviennent au sol au même instant car étant accélérées exactement de la même façon. Il en découle également que si l'on fait le choix d'étudier la chute libre de plusieurs objets dans un référentiel lui-même en chute libre, ces objets apparaissent tous comme en "flottaison" comme si l'on avait annulé la gravitation dans ce référentiel et ceci même si ils sont tous très différents. A nouveau cela n'est possible que parce que la chute libre dans un champ de pesanteur est la même quel que soit l'objet considéré.



Ce type de référentiel est appelé *référentiel inertiel*. Généralement un tel référentiel ne peut être construit que localement et par exemple dans un champ de pesanteur radial, il est possible de construire une collection de référentiel inertiels qui annuleront la gravité localement mais aucun de ces référentiels ne peut annuler globalement le champ de pesanteur. A ce titre il est usuel de se référer à ce type de référentiel sous l'appellation *référentiel localement inertiel*. Cette possibilité d'annuler localement la gravité est intrinsèquement lié à l'égalité $m_i = m_g$. Ce lien est si fort que l'on va considérer que *la possibilité d'annuler la gravitation par un choix approprié de référentiel est aussi un énoncé du principe d'équivalence*.

De fait, cette approche renverse le point de vue habituellement

FIGURE 4: Dans cette expérience de pensée, on considère une balle en chute libre dans un champ de pesanteur. Si on encage cette balle dans un ascenseur lui-même en chute libre, on crée un référentiel concrétisé par les parois de l'ascenseur, à l'intérieur duquel la balle 'flotte'. Dans ce jeu de coordonnées précis, on annule la gravitation : un observateur à l'intérieur de l'ascenseur est incapable de dire si on a éteint la gravité, ou bien si il se trouve dans un ascenseur en chute libre. Notons que comme tous les objets tombent à la même vitesse, l'observateur ne peut pas se renseigner en faisant la même expérience avec des objets divers : tous les objets, quelles que soient leur masse et leur composition vont flotter de la même manière.

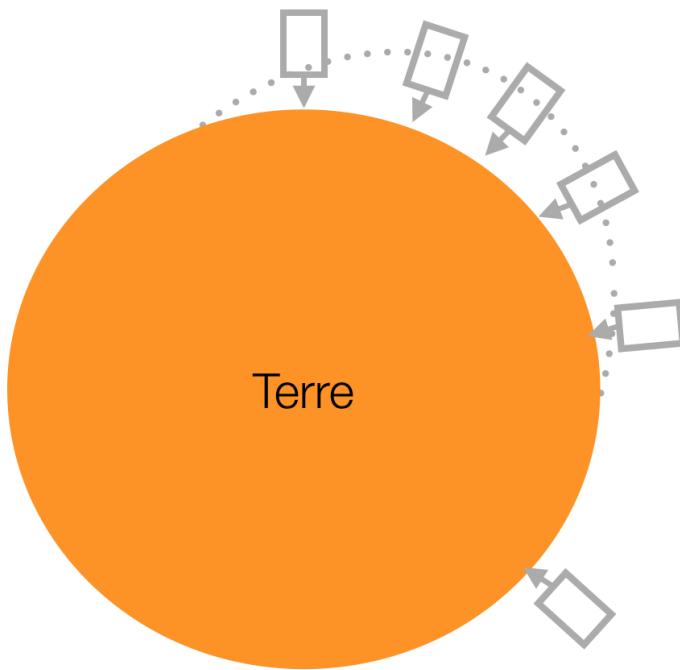


FIGURE 5: Tous ces ascenseurs en chute libre, *localement*, vont annuler le champ de pesanteur. En revanche, ils sont tous orientés différemment, suivant le champ de pesanteur local : on ne peut pas construire un système de référence global qui annule tous les champs de gravité. Ces référentiels inertiels sont locaux.

adopté sur le comportement mécanique des objets. Le point de vue standard consiste à supposer l'existence d'un champ de pesanteur qui va par exemple 'tordre' la trajectoire d'un objet initialement rectiligne en une parabole⁴⁴. Dans cette approche, la trajectoire d'un système est toujours rectiligne dans les référentiels localement inertiels : en effet, en l'absence de pesanteur, le système se déplace toujours en ligne droite. Mais comme les référentiels ne sont pas tous 'alignés' les uns avec les autres, la trajectoire apparaît comme 'tordue' : les systèmes se propagent en ligne droite dans des systèmes de références qui ne sont pas 'alignés', créant ainsi toutes les variétés de trajectoires que nous connaissons.

Notez qu'à l'aide d'un choix approprié de référentiel on peut également créer de la gravité. Si des systèmes libres sont placés dans un référentiel uniformément accéléré, ils percevront leur mouvement relatif comme induit par une force de gravitation. *De façon générale il est impossible localement de distinguer un référentiel uniformément accéléré d'un champ de gravitation.*

Qu'est-ce que la gravitation ?

A nouveau, on peut créer ou "détruire" un champ gravitationnel par un choix approprié de référentiel. Or un référentiel pourrait se

44. c'est le cas par exemple de la trajectoire ballistique standard en $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t + x_0$.

résumer à un ensemble de règles et d'horloges ayant un certain comportement donc à un objet qui n'a qu'une nature géométrique et non pas physique. A partir de cette constatation, il est tentant de considérer alors que la gravitation n'est qu'une manifestation géométrique de l'espace dans lequel évoluent les systèmes. C'est le choix que fait la théorie de la relativité générale (RG par la suite), où la gravitation n'est pas une force à proprement parler mais davantage une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. En RG, les systèmes se déplacent librement dans une géométrie qui, si elle est non triviale, produit des effets qui peuvent être interprétés comme le produit d'une interaction. A ce titre on peut dire que *la gravitation n'existe pas*, elle n'est qu'une interprétation d'un effet de nature fondamentalement géométrique.

Ainsi, on verra par la suite que c'est la courbure de cette géométrie qui produit les effets gravitationnels⁴⁵. A l'inverse, une géométrie sans courbure, i.e. une géométrie plane, produit un environnement sans effets de gravitation. Or il est aisément d'imaginer qu'il est toujours possible de trouver *localement* un jeu de coordonnées qui rendent une géométrie plane, i.e. une transformation *locale* qui permette de détruire la gravitation. Par analogie, une fonction régulière peut être approximée comme une collection de tangentes sur lesquelles il n'y a pas de courbures et qui localement sont des représentations exactes de la fonction originale. C'est une manifestation du principe d'équivalence : *il est toujours possible de trouver une transformation locale qui rende la géométrie de l'espace-temps plane*. Plus précisément c'est parce que l'on considère la gravitation comme étant de la géométrie que le principe d'équivalence se trouve naturellement réalisé.

Cette capacité à créer un jeu de coordonnées qui puisse annuler la gravitation est d'une importance majeure, pour la physique en général. En effet, comment faire pour faire de la physique en présence d'un champ de gravitation ? Il suffit d'annuler la gravitation, par un choix approprié de système de référence, pour retomber sur le cas sans gravitation et que généralement on arrive à formuler. D'un point de vue technique, si l'on parvient en l'absence de gravitation à exprimer les lois dans la nature dans une formulation qui s'accorde bien avec les changements de référentiels 'propres'⁴⁶, nous sommes capables de les exprimer en présence de gravitation car il existe toujours un 'point de vue' qui permet d'annuler ses effets. C'est le cas par exemple des lois de l'électromagnétisme, qui possèdent une telle formulation.

Cette vue de la gravité comme géométrie de l'espace-temps est l'école classique d'interprétation de la RG. Elle n'est toutefois pas sans poser problème par exemple si l'on cherche à quantifier la gravitation. Si cette dernière est pure géométrie alors on peut arguer qu'il

45. mathématiquement, cela se manifeste par des dérivées secondes de la géométrie par rapport aux variables qui décrivent l'espace-temps

46. on parle de formulation *covariante*

n'y a rien à quantifier et par exemple il n'y a pas de raison à priori d'invoquer l'existence d'un boson porteur de l'interaction, coupant court à toute tentative de quantification et donc d'unification. Si l'on estime que la quantification est nécessaire alors la vision géométrique n'est qu'une interprétation, certes très puissante, d'un processus qui n'est pas pure géométrie. Dans ce cadre le principe d'équivalence devient prééminent : il faut le supposer réalisé par un mécanisme encore inconnu et sa réalisation conduit à une possible interprétation géométrique⁴⁷. L'approche classique vue précédemment raisonne de façon inverse.

Espace-temps et Métrique

La théorie de la relativité générale décrit la gravitation comme une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. Cet espace temps possède 4 dimensions, une de temps et trois d'espace. L'outil mathématique permettant de décrire cette géométrie est la géométrie différentielle. Une quantité centrale est *la métrique* : fondamentalement elle est l'outil qui permet de calculer des distances (des produits scalaires) dans une géométrie arbitraire. En notation d'Einstein⁴⁸, le calcul d'une distance s'écrit de la façon suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (40)$$

où les indices μ, ν courent sur les indices des coordonnées, ds^2 est un scalaire donnant la distance couverte par un intervalle (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3). La quantité $g_{\mu\nu}$ est la métrique et permet de relier la distance aux composantes de l'intervalle. Si la géométrie est plane, la métrique aura une certaine forme et si la géométrie est courbe et complexe, cette expression sera différente. En géométrie euclidienne plane à 3D le calcul de distance est le suivant :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (41)$$

En géométrie de Minkowski, correspondant à l'espace-temps plat utilisé par la relativité restreinte, le calcul devient

$$ds^2 = (dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad (42)$$

où $dx^0 = cdt$ est la composante liée au temps. L'expression générale est elle donnée par Eq. 40.

Cette métrique synthétise la structure spatio-temporelle de la variété que l'on cherche à étudier. Pour faire de la cosmologie, il faut ainsi se doter d'une telle métrique, la plus à même de représenter ce que l'on croit être les caractéristiques génériques du cosmos.

47. c'est par exemple l'approche adopté par S. Weinberg dans le livre *Gravitation & Cosmology*

48. la notation d'Einstein consiste à omettre le signe de sommation sur les indices répétés. Par exemple $g_{\alpha\beta}x^\alpha = \sum_\alpha g_{\alpha\beta}x^\alpha$

Métrique de Friedmann-Robertson-Walker

En se rappelant l'énoncé du principe cosmologique pragmatique, la métrique devant servir à décrire l'Univers doit refléter les propriétés d'homogénéité et d'isotropie. La métrique la plus générique satisfaisant ces contraintes est la métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A l'aide de celle-ci, l'intervalle de distance 4D est donné par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr_0^2}{1 - Kr_0^2} + r_0^2 d\theta^2 + r_0^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (43)$$

On note que cette métrique fait usage d'un système de coordonnées sphériques (r_0, θ, ϕ) pour sa partie espace. On note également que par rapport aux exemples Euclidien et Minkowskien, FRW couple explicitement les parties temporelles et spatiales, via le facteur d'expansion $a(t)$ ⁴⁹.

r_0 est une *distance comobile* : c'est une coordonnée de nature spatiale et indépendante du temps. Ici elle désigne une distance radiale prise à partir de l'origine du système de coordonnées et est également prise en compte pour calculer les contributions à l'intervalle des séparations angulaires $d\theta$ et $d\phi$. Le paramètre K est un paramètre de courbure auquel on peut éventuellement associer un rayon de courbure $R_K = K^{-1/2}$ ⁵⁰.

Si l'on considère deux événements sur une même ligne de visée (donc avec $d\theta = d\phi = 0$), l'intervalle peut se représenter sous une forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2, \quad (44)$$

avec

$$dr = \frac{a(t)dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (45)$$

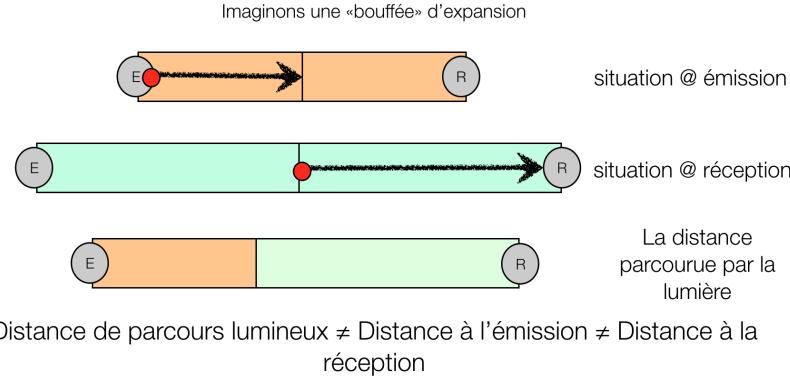
Ici dr désigne la distance *physique* de la partie spatiale (donc 3D) de l'intervalle que nous étudions. Cette distance dépend du temps, donc de l'instant considéré, et est modulé par une éventuelle courbure. A proximité de l'origine ($r_0 \rightarrow 0$) ou dans des régimes de très faible courbure ($R_K \rightarrow \infty$ ou $K \rightarrow 0$), distance physique et distance comobile sont directement reliées par :

$$dr = a(t)dr_0. \quad (46)$$

Là où la distance comobile était une quantité statique, la distance physique est une quantité évolutive, dont la dépendance temporelle est encodée par le facteur d'expansion $a(t)$. Notons que si l'on considère le parcours d'un photon sur un intervalle infinitésimal (t est alors quasi constant et $r_0 \ll 1$) alors $dr = cdt$ et la distance physique

49. appelé aussi facteur d'échelle

50. une simple analyse dimensionnelle montre par exemple que Kr_0^2 doit être sans dimension



est celle effectivement parcourue par le rayon lumineux. Considérons à présent un intervalle non-infinitésimal : si la géométrie intrinsèque de l'Univers est plane, nous avons $K = 0$ et la distance de parcours lumineux *dans ce cas précis* vaut

$$D_L = \int_{t_e}^{t_r} dr = \int_{t_e}^{t_r} a(t)dr_0, \quad (47)$$

où t_e et t_r désignent les instants d'émission et de réception de ce photon sur notre intervalle. Or cette quantité est différente des distances physiques mesurées à l'instant t_e et à l'instant t_r :

$$r(t_e) = a(t_e)r_0 \neq D_L \quad (48)$$

$$, r(t_r) = a(t_r)r_0 \neq D_L \quad (49)$$

car $a(t)$ varie au cours de la trajectoire du photon. On a donc 3 distances différentes (voir aussi la figure 6) alors que les extrémités sont identiques dans les 3 cas : ces 3 définitions sont valides mais il faut savoir exactement de quoi il est question⁵¹ ! Par ailleurs, si la courbure de l'espace est positive et non nulle, $K > 0$, alors

$$D_L > \int_{t_e}^{t_r} a(t)dr_0 \quad (50)$$

et dans le cas d'une courbure négative, $K < 0$

$$D_L < \int_{t_e}^{t_r} a(t)dr_0. \quad (51)$$

Cette différence traduit le fait que la lumière voyage en épousant à chaque instant la géométrie de l'espace qu'elle parcourt⁵², rallongeant ou raccourcissant son trajet par rapport à la distance physique 'brute' des points qu'elle relie.

De façon générale, la courbure induit un départ de la distance physique par rapport à une fonction simple de la distance comobile. Considérons à nouveau la distance physique en se plaçant à

FIGURE 6: On considère un photon émis en E et reçu en R. Pour simplifier, les distances subissent une expansion instantanée au moment où le photon a parcouru la moitié de la distance initiale entre E et R. 3 distances peuvent être également considérées dans cette expérience de pensée : la distance physique entre E et R à l'émission (représentée par 2 blocs courts), la distance physique entre E et R à la réception (représentée par 2 blocs longs) et la distance effectivement parcourue par le photon entre l'émission et la réception (représentée par un bloc long et un bloc court). Ces trois distances sont différentes dans un Univers non statique.

51. en particulier, les articles 'grand public' entretiennent fréquemment cette confusion

52. la lumière parcourt des géodésiques de l'espace-temps

un instant donné et en calculant $r(t)$ entre 2 points A et B, séparés d'une distance comobile R_0 le long d'une direction avec (θ, ϕ) donnés. En pratique il s'agit d'intégrer l'équation 45 tout en considérant t constant. On a alors

$$a(t)R_0 \quad (52)$$

$$r(t) = a(t)R_K \arcsin(R_0/R_K) \quad (53)$$

$$a(t)R_K \operatorname{argsh}(R_0/R_K) \quad (54)$$

pour une courbure $R_K = K/|K|^{3/2}$ respectivement nulle, positive et négative. Notons que les termes de courbure sont indépendants du temps. Les trois solutions peuvent être résumées sous la forme d'une équation unique $r(t) = a(t)S_K(r_0)$. A nouveau, les distances physiques sont des fonctions du temps qui ne dépendent que de la variation temporelle du facteur d'expansion $a(t)$. Si a est un fonction croissante, *toutes* les distances physiques augmentent avec le temps et on parle d'Univers en expansion. A l'inverse, $a(t)$ peut être une fonction décroissante du temps dans certains modèles, auquel cas l'Univers est en contraction.

Pour finir, mentionnons que les distances physiques aujourd'hui sont obtenues en prenant la valeur du facteur d'expansion prise aujourd'hui. Ces types de quantités mesurées aujourd'hui sont notées par convention avec l'indice 0. Par exemple le temps qui a pu s'écouler depuis le Big-Bang jusqu'à aujourd'hui est noté t_0 : c'est la définition même de l'âge actuel de l'Univers. De même le facteur d'expansion aujourd'hui est noté $a_0 = a(t_0)$. *Par convention* le facteur d'expansion est normalisé à cette valeur actuelle et

$$a_0 = a(t_0) = 1. \quad (55)$$

Il en découle que

$$r(t_0) = S_K(r_0). \quad (56)$$

et dans le cas sans courbure, on constate que la distance physique mesurée aujourd'hui est égale à la distance comobile $r(t_0) = r_0$.

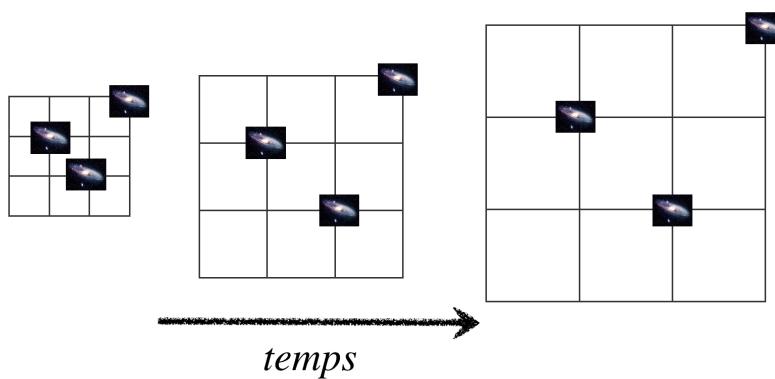
Facteur d'expansion, Loi de Hubble

La distance physique $r(t)$ entre deux points peut être simplement dérivée au cours du temps.

$$\dot{r}(t) = \dot{a}S_K(r_0) = \frac{\dot{a}}{a}r(t). \quad (57)$$

On définit la *fonction de Hubble* comme la fonction dépendante du temps donnée par :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (58)$$



A l'aide de cette nouvelle fonction, le taux de variation des distances peut s'exprimer comme une fonction linéaire de la distance, *la loi de Hubble*

$$\dot{r}(t) = H(t)r(t). \quad (59)$$

Si a est une fonction croissante, les distances physiques varient d'autant plus qu'elles sont importantes.

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos des Eqs 58 et 59. La première est que la fonction de Hubble n'est pas une constante temporelle, en revanche sa valeur ne dépend pas du point de l'espace considéré : on peut considérer que c'est une constante *spatiale* de valeur donnée dans tout l'Univers à un instant donné. Suivant une convention générique en cosmologie sa valeur actuelle est notée avec un indice 0 et vaut environ

$$H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}. \quad (60)$$

Cette valeur est déterminée expérimentalement via par exemple la mesure conjointe des distances et des vitesses de fuites d'objets à grande distance. Cette mesure nécessite une connaissance de la luminosité intrinsèque de ces objets⁵³ : par comparaison avec leur luminosité apparente, la distance peut être déduite tandis que la vitesse s'obtient à partir du décalage vers le rouge. Un diagramme de Hubble peut alors être construit pour obtenir la valeur de H_0 (voir Fig. 8).

On peut constater au vu des unités employées et au vu de la structure de l'équation 58, que le paramètre de Hubble a la dimension de l'inverse d'un temps. On définit ainsi le temps de Hubble par $t_H = H^{-1}$: on verra par la suite que ce temps de Hubble est une bonne approximation de l'âge de l'Univers.

La seconde remarque porte sur le caractère linéaire de l'équation 59 : on peut montrer que cela permet de conserver le caractère iso-

FIGURE 7: Une représentation schématique de la différence entre distance comobile et physique. Ces trois galaxies s'éloignent les unes des autres au cours du temps sous l'effet de l'expansion de l'Univers : l'espace se "dilate" comme indiqué par la grille dont les carreaux deviennent de plus en plus grands. La distance comobile est la distance mesurée en unités de carreaux : ces distances ne varient pas au cours du temps, car les galaxies sont immobiles par rapport à leur espace local. La distance physique, est la vraie distance mesurée avec une règle sur cette page : de façon évidente celle-ci varie pour toute les paires de galaxies. Notons que ces distances physiques varient mais fondamentalement les galaxies sont toutes immobiles par rapport à l'espace sur lesquelles elles reposent.

53. on parle aussi de chandelles standards

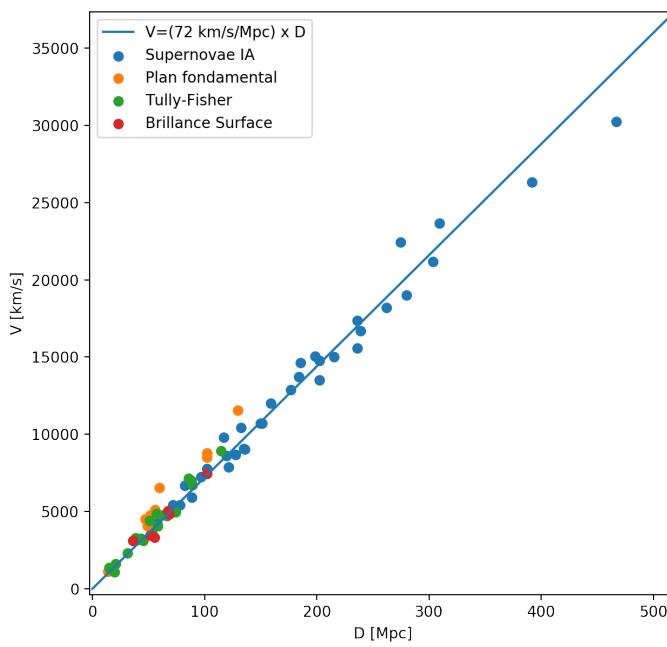


FIGURE 8: Diagramme de Hubble représentant la vitesse de fuite de différentes sondes astrophysiques à partir des données de Freedman et al. (2000). La ligne trace la relation attendue pour une valeur $H_0 = 72$ km/s/Mpc tandis que chaque point représente un objet dont la distance et la fuite sont connues. Les objets considérés sont soit des supernovae (points bleus) soit des galaxies (points orange, vert et rouge) dont la distance est déterminée avec 3 techniques différentes. On note que les supernovae permettent de sonder les distances les plus lointaines et sont donc les plus contraignantes pour la mesure du paramètre de Hubble.

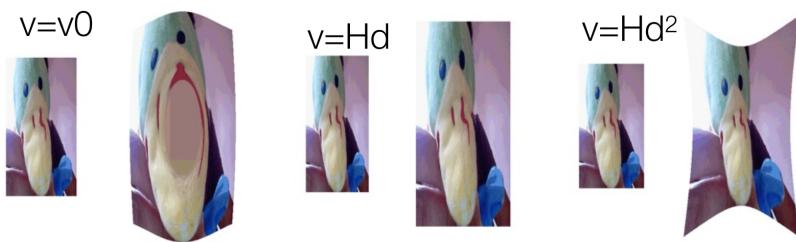
trope et homogène des points de vue (cf. Fig. 9), comme exigé par le principe cosmologique. Si la loi avait été constante ($\dot{r} \sim r^0$) ou bien quadratique ($\dot{r} \sim r^2$), l'homogénéité aurait été perdue.

La dernière remarque porte sur le fait que la loi donnée par l'Eq. 59 donne l'impression que des récessions supraluminique sont autorisées ($\dot{r} > c$) : il s'avère que cela est exact, mais le taux de variation de distance calculé ici n'implique pas de déplacement par rapport à un référentiel local inertiel (qui lui serait limité par c)⁵⁴ mais se rapporte à une dilatation même de l'espace : dit rapidement, ceci n'est pas la vitesse d'un corps en déplacement. Par exemple, insistons sur le fait que cette dilatation ne permet pas de transmettre d'information.

Décalage vers le rouge

Nous venons de voir que la forme de la métrique FRW conduit naturellement à la Loi de Hubble. Dans le même ordre d'idée, la métrique FRW conduit naturellement à une modification de la perception des intervalles temporels. Si l'on considère par exemple l'émission d'un photon depuis un point E jusqu'à sa réception au point R, l'intervalle séparant les deux évènements est nul, $ds^2 = 0$, comme c'est toujours le cas pour une particule sans masse et se dé-

54. et qui est le régime d'application de la relativité restreinte



plaçant à la vitesse de la lumière. Soit E l'origine du système de référence, alors E et R se trouvent sur un seul et même rayon-vecteur ($d\theta = d\phi = 0$) et FRW permet d'écrire :

$$\int_{t_E}^{t_R} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (61)$$

Considérons un 2ème photon qui va effectuer le même parcours mais en étant émis à l'instant $t_E + \delta_E$ et reçu à l'instant $t_R + \delta_R$. Dans un espace-temps statique, on s'attend à obtenir $\delta_E = \delta_R$. Pour ce 2ème photon FRW permet d'écrire :

$$\int_{t_E + \delta_E}^{t_R + \delta_R} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_E}^{r_R} \frac{dr_0}{\sqrt{1 - Kr_0^2}}. \quad (62)$$

Notons que les bornes d'intégration du second membre restent inchangées, le 2nd photon passant par les 2 même endroits en coordonnées comobiles : par conséquent les 2 intégrales temporelles des 2 photons sont identiques permettent d'écrire la relation :

$$\int_{t_E}^{t_E + \delta_E} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_R}^{t_R + \delta_R} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (63)$$

Si l'on suppose que les délais temporels δ_E et δ_R sont suffisamment petits par rapport au temps typique d'évolution du facteur d'expansion a , alors l'on obtient que le délai mesuré à la réception diffère du délai à l'émission :

$$\delta_R = \frac{a(t_R)}{a(t_E)} \delta_E. \quad (64)$$

Cette relation est valable pour tous les délais : si la métrique n'est pas statique $a(t_E) \neq a(t_R)$, les délais sont modifiés. Par exemple on constate que les courbes de lumières de supernovæ sont affectées par cette modification des délais. De même les flux de photons⁵⁵ subissent une "dilution" cosmologique à cause d'une modification de la durée s'écoulant entre 2 photons successifs. Enfin la *longueur d'onde*

FIGURE 9: La loi de Hubble établit une relation linéaire entre vitesse et distance physique. L'image du milieu montre comment une image est déformée par une telle loi linéaire, en fonction de la distance du pixel au centre de l'image : le canard devient plus grand mais n'est en pratique pas déformé. Les deux autres exemples montrent le même type de transformation mais en appliquant une déformation constante en fonction de la distance ou bien une déformation variant comme le carré de la distance. Dans ces 2 cas, le canard est déformé : si ce type de transformation avait été appliquée à un milieu homogène, cette dernière aurait été brisée. Par ailleurs, cette brisure dépendrait du choix de l'origine, en contradiction avec le principe d'homogénéité des points de vues.

55. flux qui sont des nombres de photons reçus par intervalle de temps

$\lambda = cT$ est directement proportionnelle à une durée (la période). La longueur d'onde d'un rayonnement électromagnétique reçu aujourd'hui est donc aussi affectée :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_E}{a(t_E)} \quad (65)$$

où on a utilisé la convention $a(t_0) = 1$. Il en découle que le décalage vers le rouge est donné par

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_E}{\lambda_E} = \frac{1}{a_E} - 1. \quad (66)$$

Si le facteur d'expansion était plus petit dans le passé (comme attendu pour un Univers en expansion), le décalage vers le rouge (ou *redshift*) est positif ou nul. Notons qu'à aucun moment il n'est fait mention de vitesse de déplacement de source ou de récepteur. Le seul effet est celui d'un espace-temps non-statique qui donne un effet similaire à un effet Doppler mais qui en aucun cas ne nécessite que la source ou l'émetteur possèdent une vitesse non-nulle par rapport à son référentiel localement inertiel.

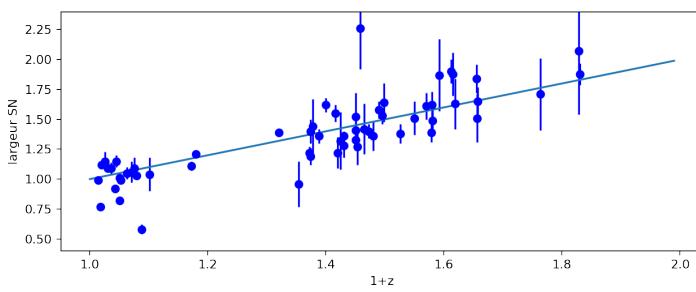


FIGURE 10: Un exemple de mesure des durées des supernovae cosmologiques en fonction du redshift. Tous ces objets ont des courbes de lumières identiques car correspondant à l'explosion d'objets très similaires (des naines blanches d'environ $1.4 M_\odot$). On constate que la durée des courbes de lumières associées varient en suivant une loi en $1 + z$ où z est le redshift : c'est l'effet cosmologique de dilatation des durées qui opère ici. Données issues de Goldhaber et al. 2001.

Source de la gravitation

A ce stade, l'élément essentiel qui reste à préciser est la loi qui régit l'évolution du facteur d'expansion et par extension celle de la métrique FRW. Plus généralement quelles sont les lois qui permettent de relier la métrique $g_{\mu\nu}$ (donc la structure de l'espace-temps) aux sources de la gravitation ? Ces relations sont connues et portent le nom d'équations d'Einstein. Leur détermination exacte est une démarche relativement complexe mais le cheminement logique qui aboutit à leur obtention peut être aisément décrit.

Un bon point de départ est l'équation de champ de la gravitation Newtonienne, à savoir l'équation de Poisson. Elle relie la densité de matière ρ au potentiel gravitationnel $\phi(x)$, qui est une fonction

simple du champ de gravitation :

$$\Delta\phi = \rho. \quad (67)$$

Clairement, le potentiel gravitationnel a pour source la densité de matière. En RG, l'objectif est d'obtenir une équation de champ analogue mais reliant $g_{\mu\nu}$ à ses sources. Disons d'emblée que dans le régime des champs faibles(dans lequel la gravitation Newtonienne s'applique) métrique et potentiel gravitationnel sont directement reliés.

Quelles sont à priori les sources de la métrique en RG ? Une première tentative peut être effectuée en considérant directement la densité de matière ρ comme source : c'est le cas quand les champs sont faibles et la matière est source de gravitation donc de géométrie. Toutefois on sait également que la masse en tant que tel ne joue pas de rôle central dans les théories relativistes, c'est davantage *l'énergie E* qui joue un rôle de premier plan.

La *densité énergie* serait-elle cette source ? Il est clair qu'elle doit jouer un rôle, par exemple au travers de la densité d'énergie de masse ρc^2 , ce qui reviendrait simplement à considérer la contre-partie énergie de la source de gravité Newtonienne. La difficulté de cette option réside dans le fait que l'énergie n'est pas directement une quantité fondamentale, y compris en relativité restreinte : l'énergie n'est qu'une composante d'un concept plus vaste qui est l'énergie-impulsion⁵⁶. Par conséquent si l'énergie source la gravité en RG, c'est au travers de l'énergie-impulsion et non seule. Plus précisément c'est au travers d'une *densité d'énergie-impulsion*.

Si on note l'énergie impulsion (P^0, P^1, P^2, P^3) où $P^0 = E$ (en supposant $c = 1$), on arrive à des expressions de densités de type :

$$\frac{dP^\mu}{dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma}. \quad (68)$$

Notons que α, β, γ désigne toutes les coordonnées disponibles, *temps* compris. Bien sûr la densité d'énergie sus-mentionnée fait partie des sources :

$$\frac{dE}{dxdydz}, \quad (69)$$

tandis que l'expression suivante est tout aussi légitime pour constituer un terme source de la gravité :

$$\frac{dP_x}{dtdydz}. \quad (70)$$

Cette dernière expression désigne une force (dP_x/dt) par une unité de surface à x constant⁵⁷, à savoir une pression suivant la direction x . Notons qu'une pression est homogène à une densité d'énergie.

56. par ailleurs la valeurs de l'énergie dépend du système de référence choisi, ce qui plaide en sa défaveur

57. c'est littéralement le flux de P par unité de temps au travers de la surface $dydz$ perpendiculaire à dx

En généralisant cette expression, on obtient le tenseur des contraintes ou *tenseur énergie-impulsion*

$$T^{\mu\delta} = \frac{dP_\mu}{dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma}. \quad (71)$$

obtenu en considérant la densité de la composante μ de P sur la "surface" de coordonnées x^δ constante. C'est la source de la métrique, qui généralise la densité de masse du cas newtonien. Comme mentionné ci-dessus, la densité d'énergie a donc un rôle à jouer mais également la pression, de même que le cisaillement⁵⁸. Par la suite la contribution d'un type d'énergie à la dynamique de l'espace-temps devra s'évaluer au vu de toutes ces quantités.

Notons que T obéit à une équation analogue à généralisation de la conservation de l'énergie dans un espace-temps quelconque :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (72)$$

cette relation est tensorielle et non triviale et définit une "conservation" globale de l'objet T . La densité d'énergie est l'une des composantes de cet objet et n'est pas généralement conservé *individuellement*, ne serait-ce que parce que l'expression de la densité d'énergie dépend du système de coordonnées choisi.

A ce stade, le terme source de la dynamique de l'espace-temps est connu, reste à expliciter l'opérateur différentiel qui agit sur la métrique et qui joue un rôle analogue au laplacien de l'équation 67. En d'autres termes quel est le tenseur G , fonction de la métrique qui permette d'avoir :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (73)$$

Sans rentrer dans les détails, on cherchera à obtenir un opérateur différentiel du second ordre, tout comme pour l'équation de Poisson newtonienne. De plus il faut que l'équation 72 soit satisfaite par G . L'opérateur différentiel du second ordre le plus simple permettant de satisfaire à cette contrainte est le *tenseur d'Einstein*

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{R}{2}g^{\mu\nu} \quad (74)$$

où $R^{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci ou *tenseur de courbure* et qui dépend de dérivées de second ordre de $g^{\mu\nu}$. R est la trace de ce tenseur et est appelé aussi scalaire de courbure ou scalaire de Ricci.

Pour résumer, l'équation de champ de la gravité dans le cadre de la relativité générale décrit le comportement de la métrique en fonction du contenu local en énergie, via :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (75)$$

58. qui est une force parallèle à une surface, complémentaire à la pression qui est perpendiculaire à une surface

Plusieurs remarques peuvent être faites à ce stade. La première est que nous sommes passé d'une équation scalaire dans le cas newtonien à une équation tensorielle avec dans l'absolu $4 \times 4 = 16$ équations couplées à résoudre. Toutefois le tenseur d'énergie-impulsion est symétrique et au final seules 10 équations indépendantes restent réellement dans le cas générique. De plus si les sources d'énergies possède un certain degré d'anisotropie (comportement de fluide parfait⁵⁹ par exemple) les composantes anisotropes de la pression ne rentrent pas en jeu et le système peut encore être réduit. La seconde remarque porte sur la structure du tenseur d'Einstein (Eq. 74). On constate ainsi que l'opérateur est non linéaire en métrique (via par exemple $\frac{R}{2}g^{\mu\nu}$), ce qui rend l'équation de champ particulièrement complexe à résoudre dans le cas général. On constate également que la métrique $g^{\mu\nu}$ est elle-même source de courbure. Cela est particulièrement manifeste en écrivant l'équation 75 avec un terme supplémentaire :

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \quad (76)$$

où Λ est un scalaire constant dans l'espace-temps. Compte tenu de $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, il en découle que 76 reste valable et dans ce cas également la métrique est source de courbure. Notons que le scalaire Λ introduit dans l'équation Eq. 76 s'interprète comme une *constante cosmologique*.

Equations de Friedmann

Comme indiqué dans la section précédente, l'hypothèse d'un Univers homogène et isotrope conduit à une forme de la métrique donnée par FRW. Considérant de plus que la relativité générale fournit une bonne description de la dynamique de l'espace temps, on est en principe capable de résoudre les équations d'Einstein pour une métrique FRW. Le résultat de cette opération est *l'équation de Friedmann*. Elle repose sur la RG, sur la métrique de FRW et considère que le contenu en énergie de l'Univers est bien décrit par des "fluides" parfaits, de pression isotrope et sans viscosité.

L'équation de Friedmann est une relation scalaire qui relie le facteur d'expansion $a(t)$, qui restait la dernière quantité non précisée de la métrique, au contenu en énergie de l'Univers :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P), \quad (77)$$

où ρc^2 est la densité d'énergie de l'Univers et P sa pression, qui sont toutes deux fonctions du temps et donc de a . On constate que comme prévu, la dynamique de l'espace temps est lié à son contenu énergétique. Notons que *à priori* le second terme est défini positif, donc

59. c'est-à-dire un fluide sans viscosité ni cisaillement

la dynamique de l'Univers semble être décélérée $\ddot{a} < 0$. Un modèle d'Univers se définira à partir d'une solution de cette équation différentielle, qui elle même dépendra du contenu en énergie. C'est l'objet du chapitre suivant.

Dynamique de l'Univers Homogène

Nous savons dorénavant que la distance physique r entre deux points dans l'Univers peut évoluer au cours du temps, suivant une simple loi d'échelle :

$$r(t) = a(t)r_0 \quad (78)$$

où r_0 désigne la distance actuelle entre 2 points⁶⁰. La facteur sans dimension $a(t)$ encode toute la dépendance temporelle de l'évolution des distances dans l'Univers homogène. Reste à présent à déterminer l'évolution temporelle de ce facteur $a(t)$, appelé aussi *facteur ou paramètre d'expansion*⁶¹. En particulier l'un des objectifs est de parvenir à comprendre l'histoire observée de notre Univers avec un Big-Bang ($a \rightarrow 0$ quand $t \sim 0$), des distances qui augmentent avec le temps ($\dot{a} > 0$) et une expansion récente accélérée ($\ddot{a} > 0$ quand $t \sim t_0$).

60. appelée aussi distance comobile

61. appelé aussi facteur d'échelle

Fluides Cosmologiques

On désigne par *fluides* les différentes formes sous lesquelles l'énergie-impulsion se trouve stockée dans l'Univers. Ces fluides opèrent comme termes sources de l'équation de Friedmann (Eq. 77) et régissent donc la dynamique de l'espace-temps.

Ces fluides sont supposés isotropes et parfaits (non visqueux) : leur pression se résume donc à un scalaire comme pour un fluide "standard". Par la suite on distinguera 3 types de fluides cosmologiques :

- la *matière* qui désigne plus précisément la matière non-relativiste et qui se distingue par une pression négligeable,
- le *rayonnement* qui désigne par abus de langage toute forme de matière relativiste⁶². Sa pression est non nulle,
- le *volume* qui désigne une forme d'énergie dont la densité volumique est constante. Comme expliqué par la suite, on parle aussi de *vide*.

62. dont les photons et les neutrinos par exemple

Ces 3 fluides cosmologiques sont définis par des densités d'énergie et des pressions dont les comportements diffèrent, notamment en

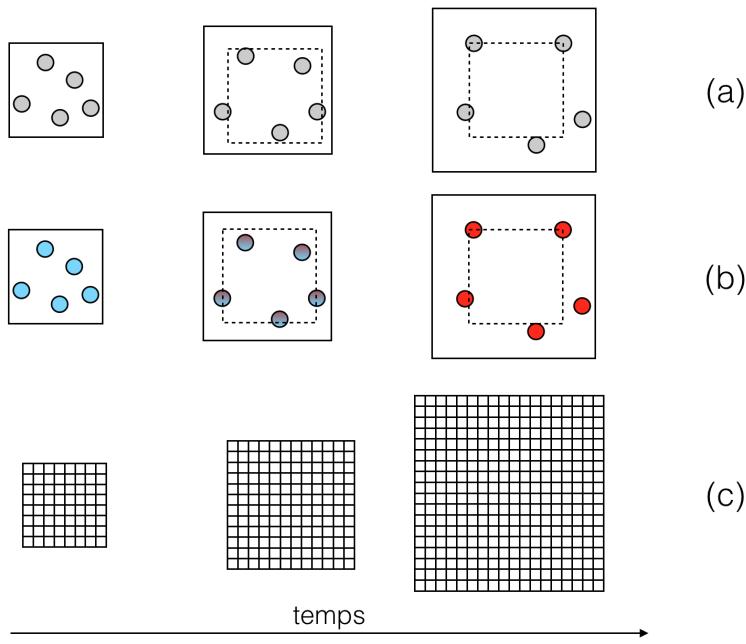


FIGURE 11: Evolution schématique des 3 fluides cosmologiques sous l'effet de l'expansion. Pour la matière non-relativiste (a), le nombre de particules reste constant, l'énergie totale est constante et la densité d'énergie diminue avec le volume. Pour la matière relativiste (b), le nombre de particules reste constant mais l'énergie individuelle de chacune diminue sous l'effet du rougissement cosmologique : l'énergie totale diminue et la densité d'énergie diminue sous le double effet du rougissement et de la dilution. Pour le 'volume' (c), la densité d'énergie est constante dans chaque élément de volume (représenté par une case) et l'énergie totale à l'intérieur du volume de contrôle augmente avec l'expansion.

fonction du paramètre d'expansion a . Par la suite, on pourra démontrer que leurs contributions à l'histoire de la dynamique de l'Univers vont se faire à différentes époques et suivant différentes dépendances temporelles.

Afin de comprendre leurs influences respectives sur la dynamique du cosmos, la procédure à suivre sera toujours plus ou moins identique. Rappelons l'expression de l'équation de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P). \quad (79)$$

Nous voyons que la dépendance temporelle de $a(t)$ (décrise par le membre de gauche de l'équation) est 'sourcée' par les quantités du membre de droite qui caractérisent la matière contenue dans l'Univers. Pour intégrer cette équation et trouver une expression pour $a(t)$, il s'agit donc de connaître la densité d'énergie du fluide cosmologique ainsi que la pression qui l'accompagne : ces quantités constituent les *sources* de la variation de a et donc de la dynamique des distances dans l'Univers.

Notons que dans le cas général, $\rho = \rho(t) = \rho(a)$ et $P = P(t) = P(a)$. Le terme source va donc varier au cours du temps (ou de façon équivalente en fonction de la valeur du facteur d'expansion), et va donc modifier le comportement de $a(t)$. Si jamais plusieurs fluides se trouvent être présents simultanément, chacun aura sa propre contribution au terme source de l'équation de Friedmann dont l'expression

devient alors :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_i^{\text{fluides}} (\rho_i c^2 + 3P_i). \quad (80)$$

Généralement, la densité d'énergie $\rho_i c^2$ est facilement obtenue en faisant un bilan du nombre de particules du fluide considéré. Ici le fluide est considéré comme libre⁶³, non-soumis à une interaction extérieure, et chacun de ses éléments emmène une énergie :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (81)$$

constitué de son énergie cinétique et de son énergie de masse .

La pression nécessite généralement un peu plus d'effort. Afin d'évaluer cette pression, une approche consiste à considérer que la *variation* d'énergie interne avec le volume est due au travail des forces de pression. Ainsi si on considère un volume de contrôle que l'on fait varier d'une quantité dV , la variation interne d'énergie est proportionnelle à cette pression :

$$dE = -PdV, \quad (82)$$

il ne s'agit ni plus ni moins que d'une application du premier principe de la thermodynamique⁶⁴. En cosmologie, la source de variation du volume d'un contour est la dynamique de l'Univers, via le facteur d'expansion. Ainsi le volume V mesuré à n'importe quel instant peut être exprimé en fonction du volume mesuré aujourd'hui, V_0 , du même contour :

$$V = V_0 a^3, \quad (83)$$

d'où l'expression suivante pour la variation dV

$$dV = V_0 3a^2 da = 3V \frac{da}{a}. \quad (84)$$

Notons par exemple que le taux de variation du volume est donné par :

$$\frac{dV}{dt} = 3HV \quad (85)$$

et fait intervenir la fonction de Hubble, $H(a) = \dot{a}/a$.

La matière non-relativiste

Le premier fluide considéré est la matière non-relativiste, celle qui nous est la plus familière. On y trouve les baryons et toute forme de matière noire froide⁶⁵. Cette matière se caractérise par une énergie par particule dominée par l'énergie de masse et une énergie cinétique négligeable devant cette dernière ($pc \ll mc^2$) :

$$E \sim mc^2. \quad (86)$$

63. sans influence exercée par une force extérieure

64. appliqué ici en l'absence de flux de chaleur, qui est nul dans un Univers homogène

65. *froid* désigne ici un fluide dont les particules sont animées de faibles vitesses, voir le chapitre dédié à la matière noire

Supposons un volume de contrôle V à l'intérieur duquel se trouve N particules non-relativistes (voir Fig. 11 (a)). A l'intérieur, la densité d'énergie vaut :

$$\rho_m c^2 = \frac{Nm c^2}{V} = \frac{Nm c^2}{a^3 V_0} = \rho_{m0} c^2 \frac{1}{a^3}. \quad (87)$$

Ici la masse d'une particule est supposée constante et le volume de contrôle contient toujours le même nombre de particules. Cette dernière hypothèse revient à considérer qu'il n'y a aucune création ou destruction nette de particules et que le flux net au travers de la surface délimitant ce volume est nul⁶⁶ : pour un Univers homogène, donc sans variations spatiales susceptibles de générer des mouvements de matière, cette dernière hypothèse est raisonnable. L'équation 87 nous renseigne sur l'évolution temporelle de la densité d'énergie de la matière non-relativiste. Dans un Univers en expansion, a est une fonction croissante du temps : on constate alors que cette densité diminue au cours du temps, par simple dilution d'un nombre constant de particules (et donc d'énergie totale) dans un volume de plus en plus grand. Toujours dans le cas d'un facteur d'expansion croissant avec le temps, on constate que la densité d'un tel fluide était plus importante dans le passé.

Qu'en est-t-elle de la pression de ce fluide non relativiste ? Si l'on met à profit l'équation 82, on obtient :

$$P_m = -\frac{dE_m}{dV} \quad (88)$$

où E_m est l'énergie totale dans le volume de contrôle considéré. Dans le cas présent cette énergie est complètement dominée par l'énergie de masse, qui est constante dans ce volume, y compris lorsque le volume est modifié par la dynamique de l'Univers. Par conséquent, pour un fluide non-relativiste, la pression est considérée comme négligeable :

$$P_m = 0. \quad (89)$$

Ceci n'est pas une totale surprise : en effet nous avons défini ce fluide non-relativiste comme étant *absolument froid*, i.e. avec une contribution nulle (en pratique négligeable) de l'énergie cinétique à son énergie interne totale⁶⁷. Pour mémoire, la pression est une manifestation des mouvements microscopiques des particules individuelles : celles-ci étant figées, il en résulte une pression égale à zéro.

La Matière Relativiste

On désigne par matière relativiste toute forme de matière pour laquelle la contribution de son énergie cinétique domine celle de

66. voir aussi le chapitre dédié au modèle newtonien de cosmologie

67. la température est une mesure de la dispersion de vitesses : être 'froid' implique donc une faible contribution de l'énergie cinétique, voir le chapitre dédié à la matière noire

son énergie de masse. Pour une particule de ce fluide, nous avons $mc^2 \ll pc$ et son énergie individuelle est donnée par :

$$E \sim pc, \quad (90)$$

où p désigne l'impulsion de la particule. Cela concerne bien évidemment les photons mais également toute particule très légère comme les neutrinos. Supposons le même volume de contrôle que pour la matière non relativiste, avec une densité N de particules chacune porteur d'une énergie pc (voir Fig. 11 (b)). Comme précédemment, la densité d'énergie de ce volume de contrôle est donnée par :

$$\rho_r c^2 = \frac{Npc}{V}. \quad (91)$$

Toutefois, contrairement à la masse, l'impulsion est sensible à la dynamique de l'Univers puisqu'elle peut s'exprimer en fonction de la longueur d'onde qui elle-même subit les effets de rougissement cosmologique⁶⁸ :

$$p = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{a\lambda_0} = \frac{p_0}{a} = p_0(1+z). \quad (92)$$

Il en résulte une dépendance temporelle de la densité d'énergie relativiste qui est différente de celle trouvée précédemment pour la matière non-relativiste :

$$\rho_r c^2 = \frac{Np_0c}{a^4 V_0} = \rho_{r0} c^2 \frac{1}{a^4}. \quad (93)$$

Comparée à la matière non-relativiste, la densité d'énergie varie ici plus rapidement (et baisse plus rapidement si a croît avec le temps). La raison est simple : en plus de l'effet de dilution géométrique s'ajoute une baisse de l'énergie individuelle portée par chaque particule à cause du rougissement cosmologique.

Calculons maintenant la pression comme taux de variation de l'énergie totale avec le volume :

$$P_r = \frac{dE_r}{dV} = -\frac{d(Npc)}{dV}. \quad (94)$$

Grâce à l'équation 84 la pression peut être réexprimée en fonction de la densité d'énergie :

$$P_r = Nc \frac{d(p)}{dV} = Nc \frac{dp}{da} \frac{da}{dV} = -Nc \frac{-p_0}{a^2} \frac{a}{3V} = \frac{1}{3} \rho_r c^2. \quad (95)$$

Dans ce cas la pression est non nulle et est une fonction simple de la densité d'énergie. A nouveau cela n'est pas une surprise puisque nous avons défini ces particules comme ne possédant qu'une énergie cinétique, qui est la source de pression.

68. on rappelle que le redshift z est relié au facteur d'expansion via $a = \frac{1}{1+z}$

Le "Volume"

De prime abord, le dernier type de fluide est de nature hypothétique et est *défini* par une densité d'énergie constante :

$$\frac{dE_v}{dV} = \Lambda = \text{const.} \quad (96)$$

On appellera ce fluide "volume" car il ne repose pas sur l'existence d'une particule le composant mais davantage sur une quantité d'énergie qu'apporte nécessairement un volume donné. Remarquons que si le volume de contrôle augmente (sous l'effet d'un facteur d'expansion croissant par exemple), la quantité d'énergie présente dans ce volume de contrôle augmente aussi (voir Fig. 11 (c)). On parle aussi d'énergie du "vide", puisqu'une telle énergie est présente y compris en l'absence de matière ou de rayonnement.

Compte tenu de cette définition, la densité d'énergie ne varie pas au cours du temps et vaut :

$$\rho_v c^2 = \rho_{v0} c^2, \quad (97)$$

tandis que la pression vaut

$$P_v = -\frac{dE_v}{dV} = -\rho_v c^2. \quad (98)$$

On constate qu'un tel type de contribution énergétique produit une pression *négative*. A l'inverse du comportement d'un fluide standard, son énergie interne augmente avec son volume, le 'vide' ne subit pas de détente⁶⁹. Cela résulte de la non-variation de la densité d'énergie à l'intérieur du volume de contrôle même si celui-ci évolue sous l'effet du facteur d'expansion.

A nouveau ce fluide est une hypothèse de travail. Toutefois il s'avère que ce type de fluide exotique permet une bonne représentation de la dynamique *observée* des distances dans l'Univers. Ce fluide est la fameuse *énergie noire*, dont la nature nous échappe complètement actuellement et qui permet de rendre compte de l'accélération observée de l'expansion de l'Univers. La densité d'énergie étant constante dans le temps et dans l'espace, on parle aussi de *constante cosmologique*.

69. habituellement c'est l'inverse : un gaz chauffe quand on le comprime

Epoques de domination

Le bilan des trois fluides étudiés est donné dans la table suivante. On notera qu'on utilise la nomenclature standard des trois fluides : "matière" pour la matière non relativiste, "rayonnement" pour la matière relativiste et "vide" pour l'énergie de volume.

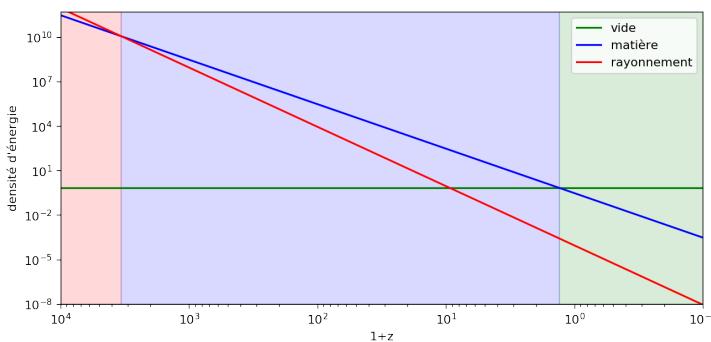


FIGURE 12: Evolution temporelle de la densité d'énergie des 3 fluides cosmologiques pour une cosmologie standard ($\Omega_m \sim 0.31$, $\Omega_v \sim 0.69$ et $\Omega_r \sim 9.1 \times 10^{-5}$, Planck 2015). Le temps s'écoule de la gauche vers la droite, l'époque actuelle correspondant à $1 + z = 1$. Les 3 époques de dominations successives sont celles du rayonnement (rouge), de la matière (bleu) et du vide (vert). La première transition, entre rayonnement et matière est l'*équivalence*, avec $z_e \sim 3371$ et la seconde, vers un Univers dominé par l'énergie du vide, prend place vers $z_v \sim 0.3$.

TABLE 1: Les 3 fluides cosmologiques

	Caractéristique	Densité d'énergie	Pression
Matière	$E \sim mc^2$	$\rho_m c^2 = a^{-3} \rho_{m0} c^2$	$P_m = 0$
Rayonnement	$E \sim pc$	$\rho_r c^2 = a^{-4} \rho_{r0} c^2$	$P_r = \rho_r c^2 / 3$
Vide	$dE/dV \sim \text{cst}$	$\rho_v c^2 = \rho_{v0} c^2$	$P_v = -\rho_v c^2$

En réinjectant ces résultats dans l'équation de Friedmann (eq. 77) on obtient une expression détaillée du terme source qui permet déjà d'entrevoir certaines caractéristiques de la dynamique des distances dans l'Univers :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + 2\frac{\rho_{r0}}{a^4} - 2\rho_{v0} \right). \quad (99)$$

Dans un premier temps, il apparaît que la matière et le rayonnement ont un même effet qualitatif et tendent à décélérer la variation du facteur d'expansion (en imposant $\ddot{a} < 0$). Cette décélération est d'autant plus faible que les distances sont grandes (i.e. $\ddot{a} \rightarrow 0$ quand a augmente) et que les densités d'énergies associées sont faibles, permettant d'anticiper sur une sorte de "régulation". A l'inverse, le "vide" produit une accélération de la variation de a (avec $\ddot{a} > 0$) : cela résulte du terme de pression négative qui produit une contribution nette positive de ce fluide au terme source de l'équation de Friedmann. Notons que cette contribution reste constante au cours du temps, avec \ddot{a} augmentant avec a^{70} , indiquant dès à présent un effet "catastrophique" non régulé.

Enfin on constate que les contributions au terme source de l'équation de Friedmann ont des dépendances temporelles différentes en fonction du fluide considéré (voir Fig. 12). En supposant une évolution de a croissante au cours du temps, il apparaît qu'entre le rayonnement (qui varie en $a^{-4} = (1+z)^4$) et la matière (qui varie en $a^{-3} = (1+z)^3$), la première domine aux époques qui correspondent aux faibles valeurs de a (donc généralement au début) tandis que la matière doit prendre le dessus aux plus grandes valeurs du facteur

70. en effet nous avons $\ddot{a} \sim \rho_{v0}a$. Plus a augmente, plus sa croissance accélère et devient 'incontrôlée'

d'expansion (donc généralement plus tard). Il existe donc une époque où ces deux fluides ont exactement la même densité d'énergie : cette époque est appelée *l'époque d'équivalence*⁷¹. Avant, la matière relativiste domine, après la matière non-relativiste dicte la dynamique de l'Univers.

Mais qu'en est-il de la densité d'énergie du vide, dont la valeur est par définition constante ? Le verdict est sans appel : compte tenu du fait que les densités d'énergie des deux autres fluides sont des fonctions décroissantes de a , il existe *toujours* une valeur seuil du paramètre d'expansion au delà de laquelle le vide domine⁷². Tout modèle d'Univers avec une énergie du vide finira par être dominé par cette dernière, pour peu que l'on attende suffisamment longtemps.

Pour finir, disons clairement que les relations obtenues entérinent la non-conservation de l'énergie totale du Cosmos. Pour un Univers dominé par une énergie du vide de densité d'énergie constante, l'expansion implique nécessairement des volumes croissants et donc une énergie totale croissante. Même en l'absence de ce fluide inconnu, le rougissement individuel des photons fait que l'énergie totale stockée dans la matière relativiste doit décroître : la densité d'énergie varie en a^{-4} et le volume en a^3 conduisant à une énergie totale non constante, inversement proportionnelle à a . Seul un Univers contenant uniquement de la matière non-relativiste, par conservation du nombre de particules d'énergie constante, garantit à priori une conservation de l'énergie totale : cet Univers n'est toutefois pas le nôtre qui contient à minima du rayonnement en plus de cette matière. Rappelons que cette non-conservation n'est pas problématique : la relativité générale ne garantit pas de façon générale la conservation du scalaire 'énergie' mais propose une relation plus complexe, plus générale sur le *tenseur énergie-impulsion*⁷³. Par ailleurs, on peut se souvenir que la conservation de l'énergie est une traduction de l'invariance par translation temporelle du résultat d'une expérience donnée⁷⁴ : dans un Univers où la géométrie possède une évolution, cette invariance n'est bien sûr pas garantie.

Paramètre de densité Ω

A ce stade il nous faut introduire une nouvelle expression, le paramètre de densité Ω , qui apparaît naturellement lorsque l'on intègre l'équation 99. Cette intégration se fait naturellement en multipliant l'équation 99 par $2\dot{a}a$, qui permet d'obtenir :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H(a)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_{v0} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (100)$$

Notez l'introduction d'une constante d'intégration k que nous discuterons par la suite. Le terme de gauche n'est autre que le carré de

71. l'équivalence est en place pour $z \sim 3000$

72. cette transition a eu lieu il y a environ 3 milliards d'années, pour $z \sim 0.3$

73. voir aussi le chapitre sur les fondamentaux

74. de même que l'invariance par translation spatiale implique une conservation de l'impulsion ou l'invariance par rotation implique une conservation du moment cinétique

la fonction de Hubble au cours du temps : aussi pour des raisons de symétrie, il est tentant de multiplier le terme de droite par H_0 , ce qui permet d'écrire :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_v - \frac{\Omega_k}{a^2} \right). \quad (101)$$

C'est cette équation qu'il faudra intégrer par la suite pour obtenir l'évolution temporelle du facteur d'échelle a et elle introduit les paramètres de densités (dans l'ordre) de la matière, du rayonnement, du vide et de la constante d'intégration. Ces quantités sont sans dimension et égales à :

$$\Omega = \frac{\rho_0 c^2}{\rho_c c^2}, \quad (102)$$

où ρ_c désigne la *densité critique* dont l'expression est donnée par⁷⁵ :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (103)$$

Les paramètres de densités sont donc l'expression des densité d'énergie *mesurées aujourd'hui* des différents fluides en unités de cette densité critique.

Si l'on applique l'équation 101 aujourd'hui quand $a = a_0 = 1$ on obtient une contrainte que doivent satisfaire tous les paramètres de densité, à savoir :

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1 + \Omega_k. \quad (104)$$

Que représente Ω_k ? Si l'on remonte à l'expression des équations d'Einstein qui ont servi à produire l'équation de Friedmann, ce terme apparaît comme une courbure constante intrinsèque et est lié au coefficient de courbure K de la métrique FRW (eq. 43). Si $\Omega_k > 0$, donc $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v > 1$ alors cela équivaut à une courbure positive donc sphérique. A l'inverse $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v < 1$ produit une courbure négative de type hyperbolique. Enfin, $\Omega_k = 0$ (correspondant à $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1$) est la marque d'une géométrie plane.

Il est à noter qu'une simple inspection de la contribution de Ω_k au terme source de l'équation 101 nous renseigne sur sa nature. En effet, on peut constater que les dépendances en a de tous les paramètres en densité sont liés aux dépendances des densités d'énergies associées : la matière est en a^{-3} (densité d'énergie inversement proportionnelle au volume), le rayonnement en a^{-4} (densité d'énergie inversement proportionnelle au volume + effet de rougissement) et le vide en a^0 (densité d'énergie constante en temps et en espace). Pour Ω_k , on constate une dépendance en a^{-2} comme le serait celle d'une courbure qui a bien la dimension de l'inverse du carré d'une longueur⁷⁶.

^{75.} notons que l'on retrouve les grandeurs obtenus dans le chapitre dédié à la cosmologie Newtonienne

^{76.} bien sûr ce n'est pas une démonstration, juste la vérification d'un comportement cohérent avec ceux des fluides cosmologiques

Valeurs expérimentales des paramètres de densité

Il existe plusieurs manières de déterminer ces quantités par l'observation, dont un aperçu a été donné dans la partie dédié à l'état des connaissances. On peut toutefois rappeler les valeurs standards de ces paramètres.

Dans un premier temps, on constate que l'Univers possède une géométrie de courbure nulle. De même la contribution actuelle des espèces relativistes est proche de zéro. Enfin, on constate actuellement que l'Univers est en expansion ($\dot{a} > 0$) et en accélération ($\ddot{a} > 0$) ce qui indique une contribution significative de la densité d'énergie du vide. Au bilan voici qualitativement la répartition des différentes sortes d'énergie aujourd'hui :

- $\Omega_k < 0.001$,
- $\Omega_r \sim 0.0001$,
- $\Omega_m \sim 0.31$,
- $\Omega_v \sim 0.69$.

On peut ajouter à ses paramètres la valeur actuelle du paramètre de Hubble $H_0 = 67 \text{ km/s/Mpc}$ et du paramètre de densité des baryons $\Omega_b \sim 0.049$. Il en résulte un paramètre de densité pour la matière non baryonique de l'ordre de $\Omega_c = \Omega_m - \Omega_b \sim 0.27$. Avec ce jeu de paramètres, le temps nous séparant du Big-Bang (à savoir l'âge de l'Univers) est $t(a=1) = t_0 \sim 13.8$ milliards d'années.

On constate que nous vivons actuellement dans un Univers dominé par l'énergie du vide. L'équivalence entre matière et rayonnement se produit pour $1 + z_e = \Omega_m / \Omega_r$ et donne

$$z_e \sim 3100 \quad (105)$$

correspondant à un Univers âgé de $t_e \sim 60600$ ans. De même l'Univers a commencé à être dominé par le vide quand $1 + z_\Lambda = (\Omega_v / \Omega_m)^{1/3}$ et donne

$$z_\Lambda \sim 0.3 \quad (106)$$

correspondant à un Univers âgé de $t_\Lambda \sim 10.2$ milliards d'années.

Si l'on rassemble tous ces résultats, on observe que l'Univers est passé par 3 phases successives de domination de chacun des 3 fluides (voir aussi Fig. 12). Dans un premier temps, le bilan énergétique de l'Univers est dominé par le *rayonnement*, au cours des 60 000 premières années. Puis c'est la *matière* qui va être le contributeur majeur de la dynamique de l'Univers pendant quelques milliards d'années. Enfin le *vide* devient le fluide dominant, ce qui est toujours le cas aujourd'hui et dont la primauté ne fera que s'accentuer dans le futur.

Modèles d'Univers

Nous sommes à présent armés pour étudier des modèles simples d'Univers. L'équation maîtresse de ce type d'étude est l'équation 101 et l'objectif est d'obtenir l'expression de $a(t)$, la dépendance temporelle du facteur d'expansion. En toute généralité, cela nécessite de connaître les paramètres de densités et la solution ne peut être obtenue que par intégration numérique. Il existe toutefois toute une classe de modèles simples qui peuvent être résolus analytiquement et qui fournissent un bon aperçu du comportement quantitatif de la dynamique de l'Univers dans des cas plus généraux.

Modèle d'Einstein-de Sitter : $\Omega_m = 1$

Ce modèle a une grande importance historique car il fut long-temps privilégié du fait de son caractère naturel. Le modèle *Einstein-de Sitter*, appelé aussi *Univers poussière*, considère un Univers plat et composé uniquement de matière, $\Omega_m = 1$. L'équation 101 devient alors simplement :

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^{3/2}}. \quad (107)$$

Elle s'intègre facilement pour donner :

$$a(t) = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3}. \quad (108)$$

ou bien

$$t = \frac{2}{3H_0} a^{3/2}. \quad (109)$$

L'équation horaire du facteur d'expansion donne une loi de puissance "faible", décélérée comme attendue. Ce modèle inclut également un Big-Bang :

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0 \quad (110)$$

impliquant des distances faibles et donc un Univers dense aux premiers instants.

L'âge de l'Univers peut également être déterminé en posant simplement $a = 1$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (111)$$

On constate que le temps de Hubble mesuré aujourd'hui $t_H = H_0^{-1}$ est à peu de chose près l'âge de l'Univers. Prenant $H_0 = 67$ km/s/Mpc on obtient alors un âge d'Univers proche de 9.6 milliards d'années, bien en dessous de l'âge estimé de certaines étoiles par exemple ou de certains amas globulaires⁷⁷. Bien que naturel, ce modèle ne permet pas d'expliquer l'âge observé de l'Univers.

^{77.} ces amas globulaires sont des objets présents dans le halo stellaire des galaxies et contiennent typiquement 10^5 étoiles généralement très vieilles. Les plus anciens de ces amas ont plus de 13 milliards d'années.

Une option longtemps envisagée fut de considérer une Univers à géométrie hyperbolique avec $\Omega_m < 1$ auquel cas l'âge de l'Univers devient :

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_m}}. \quad (112)$$

Pour $\Omega_m \sim 0.3$ comme observé, on obtient un âge d'Univers compatible avec les plus vieux objets astronomiques, mais au prix d'une géométrie non plane. De plus il ne permet pas de produire une accélération de l'expansion, telle qu'observée aujourd'hui.

Univers-Lumière, $\Omega_r = 1$

Dans ce cas, le contenu énergétique de l'Univers est dominé par le rayonnement et nous savons que ce n'est pas le cas aujourd'hui. Toutefois toute la physique de l'Univers primordial ($t < 3$ minutes) se fait dans un régime où les espèces relativistes sont dominantes, comme dans ce modèle d'Univers-Lumière. Le principe est le même que précédemment où le paramètre de Hubble est donné par

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^2}, \quad (113)$$

qui donne après intégration

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \quad (114)$$

Comme pour l'Univers poussière, ce modèle prédit un Big-Bang. L'expansion y est également décélérée avec toutefois une loi de puissance légèrement moins forte pour la variation temporelle du facteur d'expansion $a(t)$ (puissance $1/2$ au lieu de $2/3$). Cette différence trouve son origine dans une dilution plus rapide du terme source associé au rayonnement, avec une décroissance en a^{-4} au lieu de a^{-3} .

Univers de Sitter, $\Omega_v = 1$

Cet Univers est dominé par le vide avec une densité d'énergie constante et $\Omega_v = 1$. Comme l'Univers lumière, ce modèle dit de *de Sitter* ne peut être une représentation fidèle du cosmos observé mais il peut nous permettre d'avoir une vue qualitative de la dernière phase de la dynamique de l'Univers, régie par l'énergie du vide. Dans ce modèle, l'intégration de l'équation 101 donne

$$t = H_0^{-1} \int_{\epsilon}^a \frac{da}{a}, \quad (115)$$

où l'on ne peut intégrer que depuis un temps arbitrairement faible mais non nul ϵ et ceci pour garantir la convergence de l'intégrale. La résolution de cette équation donne une loi d'expansion *exponentielle*

$$a(t) = \epsilon e^{H_0 t}. \quad (116)$$

Contrairement au deux modèles précédents, un tel Univers ne permet pas d'atteindre des distances arbitrairement faibles aux premiers instants et ne prédit pas de Big-Bang. Notons également que le paramètre de Hubble ne varie pas au cours du temps dans ce modèle :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0. \quad (117)$$

Clairement, l'expansion est accélérée et est liée à l'absence de "dilution" de la densité d'énergie associée au vide : bien qu'il y ait expansion, cela ne conduit pas à une diminution du terme source de l'équation de Friedmann. L'expansion ne peut être tempérée sous forme de loi de puissance douce et produit une dépendance exponentielle du facteur d'échelle.

Pour finir, il faut mentionner que les théories de l'inflation suggèrent une histoire d'expansion primordiale (pour un Univers plus jeune que 10^{-34} seconde) de même nature, avec une évolution exponentielle de $a(t)$. Comme expliqué dans le chapitre dédié à la période d'Inflation, cela suggère l'existence d'un champ (pour l'instant inconnu) dont le potentiel varie lentement (et donc une densité d'énergie quasi-constante) et à même d'entretenir cette expansion exponentielle.

Cas général, modèle standard Λ CDM

Dans une cosmologie arbitraire, l'évolution du facteur d'échelle ne peut être obtenue qu'en intégrant numériquement l'équation 101, mais cette tâche ne présente aucune difficulté particulière avec les bons outils.

La figure 13 présente différents modèles de cosmologie. On note par exemple, qu'un modèle extrêmement dominé par Ω_Λ possède une évolution exponentielle typique et repousse le Big-Bang loin dans le passé. A l'inverse, un modèle d'Univers sur-dense conduit à une évolution bornée, où les distances atteignent une distance maximale pour évoluer ensuite vers un Big-Crunch, où toutes les distances dans l'Univers tendent vers zéro⁷⁸. Les modèles dominés par la matière possèdent tous une décélération caractéristique (qu'on peut remarquer via la courbure négative de $a(t)$).

Parmi ces modèles figure le modèle standard de la cosmologie, dit Λ CDM dont les paramètres de densité sont proches de $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_v = 0.7$. Dans ce cas précis, le Big-Bang a eu lieu il y a environ 13.5 milliards d'années, suivi d'une période d'accélération décélérée dominée par la matière pour quelques milliards d'années. La courbure de $a(t)$ s'inverse alors pour passer dans un régime d'expansion accélérée et c'est la période dans laquelle nous nous trouvons actuellement. C'est parce qu'il ajuste le mieux les observations et en

78. ce modèle sert également de base à l'étude de l'effondrement sphérique des petites structures, voir le chapitre dédié à la formation des 'petites' structures

particulier cette dernière phase d'expansion accélérée que ce modèle Λ CDM constitue la modèle standard de la cosmologie : cet ajustement se fait au prix de l'inclusion d'une énergie du vide dont les effets sont apparents mais dont la nature nous échappe aujourd'hui complètement.

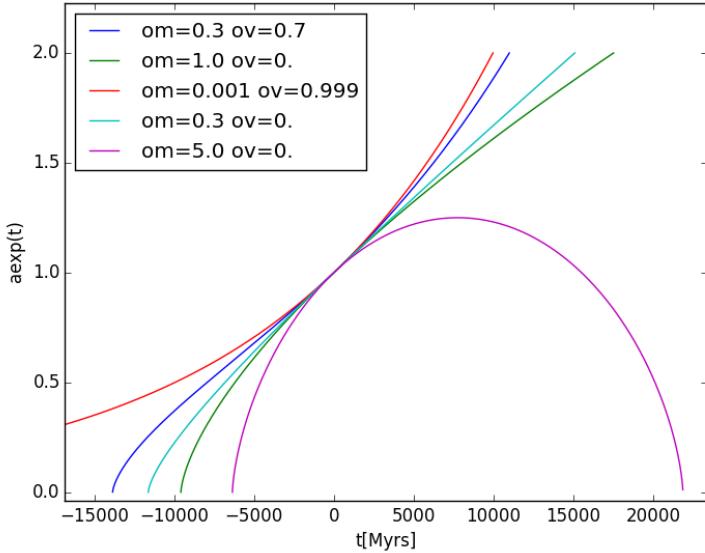


FIGURE 13: Evolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ pour différentes cosmologies. Ici Ω_m désigne le paramètre de densité de la matière et Ω_v désigne celui de l'énergie noire. Notez que le facteur d'échelle est normalisé à 1 pour $t = 0$.

Le fait que l'Univers connaissent une phase d'expansion accélérée n'est pas sans conséquences sur notre capacité future à faire de l'astrophysique et de la cosmologie. En effet actuellement, nous avons accès à des galaxies lointaines qui nous fuient, tandis que certaines galaxies proches sont actuellement en train de tomber sur nous et vont fusionner. De même, le rayonnement contribue peu au bilan énergétique de l'Univers mais reste détectable. Dans le futur, les galaxies lointaines vont échapper à nos télescopes : trop lointaines, ou avec des vitesses de fuites trop grandes. Les galaxies proches auront fusionné avec nos systèmes locaux et nous n'auront qu'une 'méga' galaxie locale, peuplée d'un seul type d'étoile (vieilles et peu brillantes), dépourvue de gaz qui aura flambé lors des multiples fusions. Pour finir la densité de rayonnement deviendra inexorablement trop faible pour pouvoir être détectée, et les recherches actuelles faites sur le fond diffus cosmologique par exemple ne pourront avoir lieu. En résumé, nous sommes actuellement dans une époque 'bénie' pour faire de la cosmologie : l'Univers futur sera 'ennuyant' et beaucoup moins propice à la compréhension des objets astrophysiques et à la cosmologie.

l'Univers Chaud

Dans ce chapitre nous allons étudier de premières bases se rapportant à l'Univers quasi-primordial âgé de quelques minutes au plus. Durant cette période, la dynamique de l'Univers est régie par les espèces relativistes, avec une dépendance temporelle du facteur d'expansion en $a(t) \sim \sqrt{t}$: durant ces époques les influences respectives de la matière et de la constante cosmologique sont faibles. Ces premiers instants sont proches du Big-Bang et l'Univers s'y trouve dense et chaud : ces conditions sont propices aux interactions entre atomes et particules subatomiques. C'est durant cette époque que les abondances des particules reliques et des éléments légers⁷⁹ sont fixées : c'est de ces abondances dont nous allons discuter dans ce chapitre.

79. terme qui désigne les éléments de faible nombre de masse tels que H, He, Li ou Be

Equilibre & Gel de Réactions

Les deux concepts fondamentaux des processus qui règlent les abondance sont les notions *d'abondance à l'équilibre* et de *gel des réactions*. Dans notre cas, le terme d'abondance désigne la densité numérique d'une espèce atomique, subatomique, isotopique, etc... Par exemple l'abondance des atomes d'hydrogène se note n_H et s'exprime en atomes par m^3 . Les réactions qui permettent de modifier ces abondances font généralement intervenir d'autres réactifs. La photoionisation par exemple se caractérise par la réaction suivante :



et dépend non seulement de l'abondance des atomes d'hydrogène mais également de celle du nombre de photons ionisants⁸⁰. Toutefois dans un très grand nombre de cas, la variation d'une espèce peut s'écrire comme ne dépendant que de sa propre abondance à l'équilibre n_e et d'un taux de réaction Γ constant. Soit n une abondance quelconque, son évolution pourra être suivie par une équation différentielle du type :

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma(n - n_e). \quad (119)$$

80. en l'occurrence surtout des photons ultra-violets

Celle-ci est simple à comprendre. Si une abondance est déjà à l'équilibre $n = n_e$ et son abondance, par définition, ne varie pas. Si son abondance est supérieure à l'équilibre, le taux de réaction va agir comme une force de rappel⁸¹, traduisant de fait une tendance à favoriser les réactions de destruction de l'espèce étudiée. A l'inverse si l'abondance est en déficit par rapport à l'équilibre, les réactions vont avoir tendance à la rétablir à des valeurs plus élevées. Notons que l'inverse du taux de réactions fournit un temps caractéristique de retour à l'équilibre $t_e = \Gamma^{-1}$.

Toutefois il existe une autre manière de faire varier la densité numérique d'une espèce dans le contexte qui est le nôtre : il s'agit de la dilution cosmologique, déjà rencontrée dans le chapitre précédent. En effet, compte tenu de l'expansion de l'Univers, si l'on dispose d'un certain nombre de particules d'un type donné dans un certain volume, sa *densité* va évoluer même en l'absence de réaction (c'est à dire de destructions/creations). Ainsi la densité numérique d'une espèce donnée varie cosmologique de la façon suivante :

$$n = \frac{n_0}{a^3}, \quad (120)$$

ce qui ne fait que traduire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn, \quad (121)$$

où H est la fonction de Hubble usuelle , fonction du temps ou du paramètre d'expansion $H = \dot{a}/a$ ⁸². Comme déjà indiqué, le temps de Hubble $t_H = H^{-1}$ fournit le temps caractéristique d'évolution significative des distances dans le cosmos.

Dans le cas cosmologique général, les deux procédés se superposent et l'abondance d'une espèce arbitraire est régie par une équation de type :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \Gamma(n - n_e), \quad (122)$$

cette équation demande en toute généralité à être résolue numériquement. Toutefois 2 cas limites se détachent facilement :

- si $H \gg \Gamma$: l'expansion est beaucoup plus efficace que les réactions. C'est un régime où le 2nd terme de l'équation 122 peut être négligé, on retrouve $n \sim a^{-3}$ et le nombre de particules dans un volume en expansion donné est *constant*. On dit que l'espèce est *gelée*.
- si $H \ll \Gamma$: on peut négliger la dilution cosmologique et les temps de retour à l'équilibre sont très courts. L'abondance est celle de l'équilibre, qui est éventuellement une fonction du temps $n \sim n_e(a)$.

81. on note que l'équation différentielle est similaire à celle décrivant la dynamique d'un ressort

82. le facteur 3 est typique de la dilution cosmologique d'une quantité *volumique*, qui dépend du cube de la longueur

En règle générale H et Γ sont tous deux fonctions du temps et Γ a tendance à dominer au début de l'histoire de l'Univers (quand les densités et températures sont très élevées) pour être ensuite dominé par H . En effet à ces époques, la dynamique est dominée par le rayonnement et

$$H \sim \frac{1}{a^2} \quad (123)$$

tandis qu'un taux de réaction est du type $\Gamma \sim \sigma v n$ où $v \sim a^{-i}$ est une vitesse typique des réactifs, σ une section efficace et $n \sim a^{-3}$ une densité volumique de réactifs. En supposant une section efficace de réaction constante, on a une dépendance de *Gamma* en facteur d'expansion a qui est au moins de l'ordre de :

$$\Gamma \sim \frac{1}{a^{3+i}}. \quad (124)$$

La vitesse décroît avec la température, dont on verra qu'elle décroît avec le paramètre d'expansion a et donnant $i > 0$: les taux de réactions dépendent plus fortement de l'histoire d'expansion pour dominer puis être dominés par H au cours de la croissance de a . Par conséquent l'histoire typique de l'abondance d'une espèce suit d'abord celle de l'équilibre avant d'être gelée et n'être plus modifiée que par la dilution cosmologique. Cette transition porte le nom de "gel" ou *freeze-out* en anglais.

Statistique d'un gaz

La question qui se pose à présent est celle de déterminer l'abondance à l'équilibre d'une espèce (hydrogène, photons, neutrinos, etc....). Celle-ci nous est donnée par la physique statistique.

On se place dans le cas simple d'une particule libre⁸³, auquel cas son énergie ne dépend que de son impulsion \vec{p} , ou bien de façon équivalente que de son vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ ⁸⁴ :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = \hbar^2 c^2 k^2 + m^2 c^4 \quad (125)$$

Plus précisément l'énergie d'une particule ne dépend que de la norme k du vecteur d'onde. Par conséquent, l'ensemble des points dans l'espace des \vec{k} qui fournissent une énergie donnée sont à l'intérieur d'une coquille de rayon k . De plus, le peuplement de cet espace est quantifié : en effet les nombres d'ondes accessibles (i.e. les impulsions accessibles) doivent être de la forme $\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)2\pi/L$ où L désigne la taille de la "cuve" dans laquelle s'effectue l'étude et où le triplet est un triplet de valeurs entières. Par conséquent, une particule ne peut se trouver que sur les nœuds d'une maille pavant cet espace.

83. non soumise à un potentiel extérieur

84. ici $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ désigne la constante de Planck réduite

Ces considérations nous permet d'évaluer le *nombre d'états accessibles à une énergie E donnée*. Ce nombre est donné par le rapport entre le volume de l'espace des \vec{k} à énergie E donnée (la coquille) :

$$4\pi k^2 dk \quad (126)$$

et le volume occupé par un état unique (le volume de la maille) :

$$(2\pi/L)^3. \quad (127)$$

On obtient alors le nombre d'états accessible à une particule libre d'énergie E à dE près

$$N(E)dE = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3}. \quad (128)$$

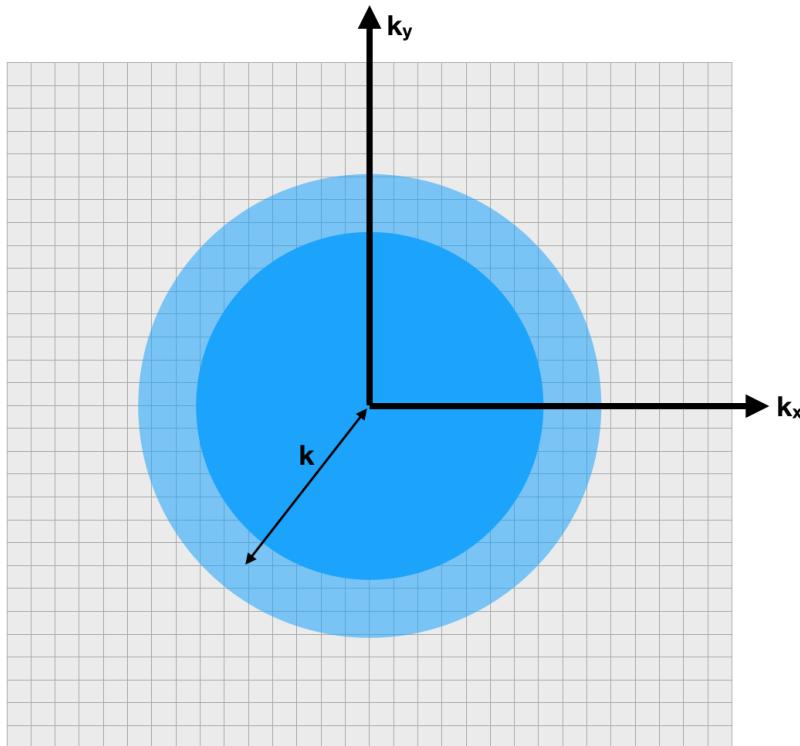


FIGURE 14: Comment calculer le nombre d'états d'énergie donnée ? Les états sont quantifiés et 'positionnés' sur une maille correspondant à des valeurs de k_x et k_y multiples de $2\pi/L$. Tous les états de même énergie partagent le même module k : leur nombre est donc donné par la surface de la coquille ($2\pi k dk$) divisé par la surface d'un élément de la maille ($(2\pi/L)^2$). A 3D, ce nombre devient $4\pi k^2 dk / (2\pi/L)^3$.

L'équation 128 n'est pas suffisante pour calculer l'abondance d'une particule : elle nous renseigne sur la quantité d'états accessible mais reste à déterminer combien de particules résident sur un état donné. Le *niveau d'occupation* dépend du type de particule : si celle-ci est un fermion⁸⁵ alors elle est soumise au principe d'exclusion de Pauli qui stipule qu'un état quantique donné ne peut être occupé, au plus, que par une particule. Si celle-ci est un boson⁸⁶, cette restriction

85. une particule dont le spin est demi-entier comme l'électron ou le proton

86. une particule dont le spin est entier, comme le photon

ne s'applique pas. Plus précisément, les niveaux d'occupation sont donnés par les statistiques de Fermi-Dirac et Bose-Einstein

$$n(E) = \frac{g(E)}{\exp(\beta(E - \mu)) \pm 1}. \quad (129)$$

Le signe positif (resp. négatif) au dénominateur désigne la statistique de Fermi-Dirac (resp. Bose-Einstein). La quantité $\beta = 1/k_B T$ dépend est une représentation de la température, μ est le potentiel chimique de l'espèce étudiée et $g(E)$ est la dégénérescence d'un état d'énergie E . Cette dernière quantité dépend également de la particule considérée. On note que dans le cas d'une statistique de Fermi-Dirac, s'appliquant aux fermions, $n(E) \leq g(E)$: cela découle du principe d'exclusion de Pauli l'occupation est au mieux égale à la dégénérescence du niveau d'énergie. A l'inverse les bosons, soumis à la statistique de Bose-Einstein, peuvent avoir des niveaux d'occupation arbitrairement grands.

A ce stade, l'abondance d'une particule peut être déterminée et le nombre total de particules d'une espèce donnée dans une cuve de volume $V = L^3$ à température T est

$$N = \int_{E_{\min}}^{\infty} n(E) N(E) dE. \quad (130)$$

Notons que cette intégrale porte sur toutes les énergies, depuis la plus faible jusqu'aux infinis. Cette valeur plancher de l'énergie dépend de la particule considérée. Par exemple pour une particule de masse nulle⁸⁷, on aura $E_{\min} = 0$ tandis que pour une particule massive on aura $E_{\min} = mc^2$, correspondant à un état de repos (et donc d'impulsion minimale) absolu.

87. telle le photon

Les photons

Le cas des photons permet d'illustrer le calcul de la section précédente tout en étant d'une grande pertinence cosmologique : ils appartiennent aux particules dites relativistes et c'est elles qui dominent le budget numérique actuel de l'Univers.

Le calcul de l'abondance des photons nécessite de préciser d'abord les quelques nombres nécessaires à sa bonne conduite. Dans un premier temps, les photons sont des particules de masse nulle, donc leur énergie est faite d'impulsion pure :

$$E_\gamma = pc = \hbar c k. \quad (131)$$

On rappelle que la densité d'états accessibles possédant une norme k donnée a pour expression

$$\frac{N(k)dk}{V} = \frac{4\pi k^2 dk}{V} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 = \frac{4\pi (E/\hbar c)^2 dE}{\hbar c V} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3. \quad (132)$$

Par conséquent la densité volumique d'états d'énergie E accessible aux photons est donnée par :

$$\frac{N(E)dE}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{E^2 dE}{(\hbar c)^3}. \quad (133)$$

De plus le photon est sa propre antiparticule et participe par exemple aux équations de désintégrations :

$$A + \bar{A} \leftrightarrow \gamma + \gamma. \quad (134)$$

Or $\mu_A = -\mu_{\bar{A}}$ donc $\mu_\gamma = 0$. Enfin le photon autorise deux hélicités par état d'énergie et possède un spin entier et obéit donc à la statistique de Bose-Einstein. L'état d'occupation d'un niveau d'énergie E est donc donné par :

$$n(E) = \frac{2}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}. \quad (135)$$

D'où son abondance à l'équilibre :

$$n_\gamma = \frac{1}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}. \quad (136)$$

On reconnaît dans l'intégrale la distribution de Planck, qui par définition décrit la distribution spectrale d'énergie d'un gaz de photons à l'équilibre, comme présent par exemple dans un corps noir. Cette intégrale peut être conduite analytiquement conduisant à⁸⁸ :

$$n_\gamma \approx 0.244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 m^{-3}. \quad (137)$$

Aujourd'hui la température du gaz de photons du cosmos est de l'ordre de 2.73 K, correspondant à une densité de photons actuelle de :

$$n_\gamma \approx 410 \text{ cm}^{-3}. \quad (138)$$

Pour mémoire, la densité d'atomes d'hydrogène actuelle (espèce qui domine la population de baryons) est de l'ordre de l'atome par m^3 , on est donc dans un rapport de 10^{8-9} , extrêmement en faveur des photons. Une évaluation plus précise du rapport baryon/photon η est donnée par :

$$\eta \approx 5 \times 10^{-10} \frac{\Omega_b h^2}{0.02} \quad (139)$$

Cette surabondance de lumière résulte du processus de désintégration des particules massives que nous étudieront par la suite.

88. en utilisant l'expression de la fonction zéta de Riemann avec $\zeta(3) = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.

Histoire de la Température

Si l'on examine à nouveau l'expression de la densité de photon (Eq. 137), on constate que celle ci varie en $n_\gamma \sim T^3$. Ainsi si l'on

considère une cuve de volume V elle contient à un redshift z donné le nombre de photons suivant :

$$N_\gamma(z) \sim V(z)T(z)^3. \quad (140)$$

Or compte tenu de leur gigantesque domination numérique, ce nombre de photons doit être *constant* : aucun processus (absorption/émission, à priori par des baryons extrêmement peu nombreux par rapport aux photons) ne peut changer N_γ de façon significative. Toutefois, une cuve de taille donnée verra ses limites évoluer sous l'effet de la dynamique de l'Univers. En particulier $V = V_0a^3$ d'où la loi d'évolution de la température des photons

$$T_\gamma = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z), \quad (141)$$

avec $T_0 = 2.73K$. De plus compte tenu de la domination quasi totale des espèces relativistes sur le bilan numérique des particules du cosmos (comme illustrée par la valeur de η), on peut presque considérer que cette température est celle du cosmos.

Une autre démonstration de cette relation repose sur le fait que le spectre doit conserver sa forme de courbe de Planck, y compris sous l'effet de l'expansion, car c'est effectivement ce qui est observé aujourd'hui. Or le nombre de photons qui tombe dans une bande d'énergie dE est, à une constante multiplicative près⁸⁹,

89. avec $V = a^3V_0$ et $E = \frac{E_0}{a}$.

$$V \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1} = V_0 \frac{E_0^2 dE_0}{e^{\frac{E_0}{k_B a T}} - 1}. \quad (142)$$

Pour que le spectre reste inchangé, il faut 'neutraliser' la dernière dépendance en $a(t)$ qui se trouve dans le terme de l'exponentielle, en imposant que $a(t)T$ reste constant, redonnant ainsi l'expression précédente.

Aujourd'hui l'Univers est froid, mais par le passé celui-ci était plus chaud, en plus d'être plus dense comme expliqué dans les chapitres précédents. Notons pour finir que les photons du cosmos ne sont plus à l'équilibre thermodynamique à proprement parler depuis la production du fond diffus cosmologique : aujourd'hui ces photons n'interagissent plus avec les baryons, interactions qui auraient permis de maintenir le bain de photons à l'équilibre. Toutefois dans le passé plus chaud et plus dense, ces interactions existaient et un régime de fort couplage permettait de garantir un couplage matière rayonnement suffisant pour que la situation "thermodynamique" de l'Univers s'apparente à celle d'un corps noir. Cette situation a cessé (380 000 ans après le Big Bang comme nous le verrons) mais la domination des espèces relativistes est telle qu'aucun processus n'est en mesure de changer significativement la fonction de distribution des

photons : en l'absence de processus permettant cette modification, le gaz de photons a pu conserver la mémoire d'une période antérieure d'équilibre thermodynamique.

Par la suite nous considérerons des époques durant lesquelles le bilan énergétique de l'Univers est dominé par les espèces relativistes durant lesquelles le facteur d'expansion varie en :

$$a \sim \sqrt{t}. \quad (143)$$

Il en découle les lois d'échelles suivantes⁹⁰ :

$$T \approx \frac{10^{10} K}{\sqrt{t(\text{sec})}} \approx \frac{1}{k_B} \frac{1 \text{ MeV}}{\sqrt{t(\text{sec})}}. \quad (144)$$

Ces lois permettent déjà de se faire une idée des hautes températures en place durant les phases primordiales de l'Univers et donc permettent d'anticiper que des processus très énergétiques sont en mesure d'être effectifs. Par exemple les énergies typiques du LHC sont de l'ordre du TeV = 1e6 MeV : elles correspondent aux énergies typiques dans un Univers de 10^{-12} secondes. De plus ces lois d'échelles permettent d'anticiper que certaines époques joueront un rôle pour certaines particules quand l'énergie typique du cosmos est de l'ordre de leur énergie de masse : par exemple l'électron possède une énergie de masse proche du MeV (511 keV exactement) et donc il est probable que son abondance soit significativement modifiée lorsque l'Univers aura un âge correspondant à cette masse (à savoir de l'ordre de la seconde).

90. on rappelle que le MeV désigne 1 million d'électrons-volts et constitue une énergie équivalente à $1 \text{ MeV} \sim 1.6 \times 10^{13} \text{ J}$

Evolution des abundances

Pour une "particule" quelconque, l'expression précise de son abondance va dépendre de son caractère relativiste ou non. Il existe des particules pour lesquelles ce caractère reste inchangé au cours du temps, comme les photons par exemple, mais en général, une particule aura tendance à être considérée comme relativiste aux premiers instants de l'Univers puis évoluera plus tard vers le régime non-relativiste, avec comme conséquence une variation, parfois radicale, de son abondance au cours du temps.

L'énergie d'une particule libre est donnée par :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (145)$$

Une particule est dite *ultra-relativiste* si son énergie de masse est considérée comme négligeable devant son énergie cinétique, $pc \gg mc^2$, auquel cas $E \sim pc$. C'est notamment le cas du photon, étudié en détail dans la section précédente. A l'inverse, une particule est

dite *non-relativiste* si son énergie de masse constitue l'essentiel de son énergie totale $pc \ll mc^2$. Cela correspond au fluide "matière" développé dans le chapitre précédent et dans ce cas $E \sim mc^2(1 + p^2/2m) \sim mc^2$. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces expressions pour l'énergie dans l'équation 130 va conduire à des expressions différentes des abondances.

Cas ultra-relativiste Ce cas correspond à celui étudié précédemment pour les photons : en effet, si l'on parle du principe que la masse d'une particule est négligeable, elle en devient quasi similaire à un photon et son abondance n'en diffère que par le facteur de dégénérence et par la statistique à utiliser (BE ou FD). En conséquence, l'abondance d'une particule dans ce régime ultra-relativiste sera proche de celle des photons. Un calcul précis donne l'abondance suivante pour un *boson*

$$n_B = n_\gamma \frac{g_B}{2}, \quad (146)$$

tandis que si la particule étudiée est un fermion

$$n_F = n_\gamma \frac{3g_F}{8}. \quad (147)$$

A un facteur proche de l'unité près, l'abondance d'une particule relativiste est essentiellement celle des photons $n \sim n_\gamma$.

Cas non relativiste Dans ce régime, l'énergie d'une particule est la somme de l'énergie cinétique classique et de son énergie de masse, $E \sim p^2/2m + mc^2$ et l'occupation statistique des énergies (cf. eq. 129) devient la statistique de Maxwell-Boltzmann, donnée par⁹¹ :

$$ge^{-\frac{E-\mu}{k_B T}}. \quad (148)$$

L'abondance est alors donnée par l'expression suivante⁹²

$$n = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} e^{-\frac{mc^2-\mu}{k_B T}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp. \quad (149)$$

Le calcul de son abondance donne une quantité qui dépend directement de la température

$$n = ge^{\frac{\mu}{k_B T}} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{k_B T}} \sim e^{-\frac{mc^2}{k_B T}}. \quad (150)$$

Compte tenu de l'évolution de la température, qui décroît avec le temps, l'abondance décroît de façon exponentielle. La réaction typique permettant cette décroissance est une réaction de *désintégration* :



avec un déplacement de l'équilibre vers la droite de cette équation, i.e. vers le réservoir de photons.

91. généralement cette statistique devient valable quand $e^{\frac{\min E - \mu}{k_B T}} \ll 1$. Or on verra ci-dessous que ce régime non relativiste est précisément décrit par une température faible devant l'énergie de masse $k_B T \ll mc^2$ avec $\min E = mc^2$. On note que l'intégrale porte sur ∞ alors qu'elle devrait être bornée pour satisfaire l'hypothèse non-relativiste. Toutefois, l'intégrand est une gaussienne dont la décroissance est très rapide : l'erreur est donc faible et permet de reconnaître l'expression de la (moitié de la) variance d'une distribution normale.

Transition Se pose alors la question de la détermination du régime dans lequel se trouve une particule. Il s'avère que la température d'un gaz de particule est liée à l'énergie cinétique et $E_c \sim k_B T$. Par conséquent à haute température, $k_B T \gg mc^2$, une particule tend à être ultra-relativiste⁹³ tandis qu'à basse température $k_B T \ll mc^2$, celle-ci tend à être non relativiste. On sait également que la température de l'Univers décroît au cours du temps, donc pour une particule massive donnée, il se trouvera toujours une époque reculée où cette particule est relativiste, suivie par une époque où elle basculera dans le régime non-relativiste. La transition entre les deux régimes opère lorsque l'énergie cinétique typique est de l'ordre de l'énergie de masse

$$k_B T(z^*) = mc^2. \quad (152)$$

Sachant que la température du rayonnement varie en $T_\gamma \sim (1+z)$ et qu'à l'équilibre un fort couplage existe, la transition opère à un redshift z^* donné par :

$$1 + z^* = \frac{mc^2}{k_B T_0}. \quad (153)$$

On constate ainsi qu'une particule passera dans le régime non relativiste d'autant plus rapidement qu'elle sera massive. A l'inverse, une particule de masse nulle ne pourra jamais, comme attendu, basculer dans le régime non relativiste.

Abondances résiduelles

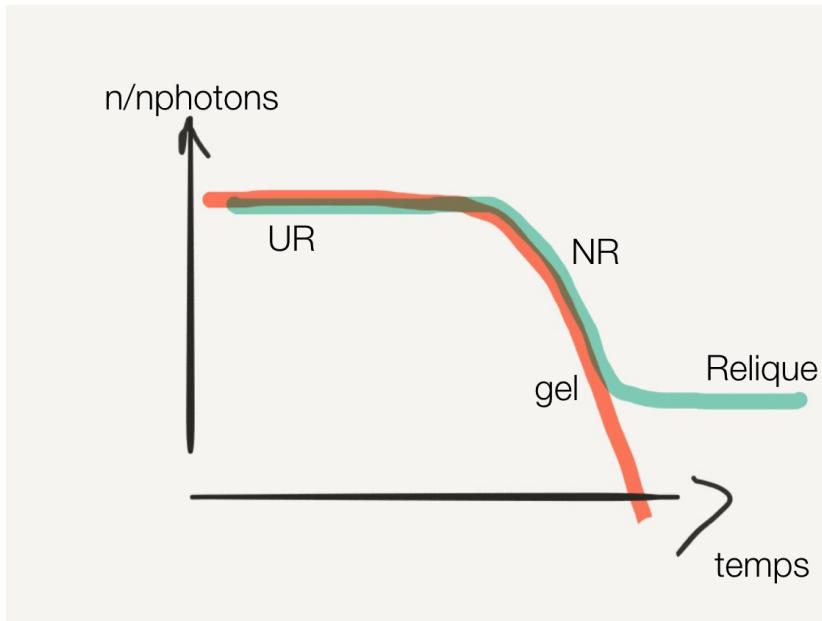
En résumé, l'abondance à l'équilibre d'une particule passe par 2 étapes distinctes :

- à grand $z > z^*$, nous avons $k_B T \gg mc^2$ et $n \sim n_\gamma$
- à bas $z < z^*$, nous avons $k_B T \ll mc^2$ et l'abondance décroît de façon exponentielle. Elle se désintègre et son abondance devient très inférieure à l'abondance des photons, $n \ll n_\gamma$.

Or nous avons vu précédemment que les réactions qui permettent le maintien de cet équilibre vont "geler"⁹⁴ et découpler une espèce de la "soupe" de particules en interaction : après ce gel, l'abondance d'une espèce va rester celle de l'équilibre au moment du découplage. Ce gel peut opérer avant ou après z^* . Si une particule gèle pour $z > z^*$, elle se trouvait dans son régime relativiste, en grande abondance. Un tel type de particule va rester très abondante jusqu'à nos jours et c'est par exemple le cas des neutrinos. Si à l'inverse elle gèle pour $z < z^*$, alors celle-ci avait déjà entamé sa désintégration durant laquelle son abondance décroît de façon exponentielle. Par conséquent la particule est en très faible abondance et aujourd'hui son abondance doit être très faible devant celle des photons (et donc des neutrinos). C'est le

93. on a la vitesse $v \sim \sqrt{k_B T}$ qui tend à devenir non-négligeable devant c .

94. appelé aussi *Freeze-out*



scénario essentiellement de toutes les particules massives, que l'on appelle aussi *particules reliques* car elles auront survécu à ce processus.

Asymétrie Matière-Antimatière

Pour conclure ces considérations sur la physique de l'Univers chaud et énergétique, quelques mots sur l'asymétrie matière-antimatière.

Les baryons ont un nombre quantique baryonique de valeur +1 et on peut leur associer des *antibaryons*, de nombre baryonique -1 : le proton et le neutron possèdent ainsi des antibaryons que sont l'antiproton et l'antineutron⁹⁵. Au delà de ces considérations sur ces nombres quantiques, l'assemblage d'antibaryons permet de faire de l'antimatière qui en tout autre point ressemble beaucoup à la matière normale : ces 2 types opposés partagent par exemple la même masse et toute réaction de type matière peut en principe être réalisée dans sa version antimatière⁹⁶.

Lorsque les particules reliques sont en phase de désintégration et voient leurs abondances chuter de façon exponentielle, l'un des canaux privilégié de cette baisse est précisément le processus d'annihilation matière-antimatière. Soit une particule A et son antiparticule \bar{A} , leur éventuelle rencontre conduit à la production d'énergie pure sous forme de photons :

$$A + \bar{A} \leftrightarrow \gamma. \quad (154)$$

Ce processus est extrêmement efficace et on peut montrer qu'en cas

FIGURE 15: Evolution schématique de l'abondance d'une particule relique. Dans le régime ultra-relativiste (UR), la particule se comporte comme un photon et son abundance est similaire. Le passage au régime non relativiste (NR) provoque la décroissance de l'abondance, exponentielle, typique d'une particule massive. Son abundance deviendrait négligeable sans le 'gel' (freeze-out) : la dilution cosmologique ainsi que l'absence de réactifs ou la baisse de température vont stabiliser la densité numérique de la particule à une abundance non nulle.

95. dans le cas de l'antiproton, cela se manifeste notamment par une charge électrique opposée et donc négative

96. on parle de réaction conjuguée

d'abondance initiale égale entre particules et antiparticules, l'abondance des particules reliques devraient être de l'ordre de :

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 10^{-18} \quad (155)$$

or nous venons de voir que l'ordre de grandeur observé actuellement du rapport baryons sur photons η est environ 10^9 plus grand. Ceci suggère fortement que le gel des abondances des baryons a été dicté par l'absence de réactifs de type antibaryons plutôt que par une perte d'efficacité de la réaction, avec un excès en faveur de la matière de l'ordre de :

$$\frac{n_A - n_{\bar{A}}}{n_A + n_{\bar{A}}} \sim 10^{-9}. \quad (156)$$

Par ailleurs, nous constatons autour de nous une absence d'abondance significative d'antimatière, qui autrement se manifesterait par la production de photons gamma à très haute énergie lors de rencontre avec la matière⁹⁷. Tout indique qu'il existait une asymétrie dans les abondances initiales de particules et d'antiparticules, faible mais non nulle et suffisante pour que notre Univers soit aujourd'hui dominé par la matière.

Ceci étant posé, comment expliquer une telle asymétrie ? Une première possibilité est qu'il s'agisse simplement d'une des caractéristiques de notre Univers. Une seconde possibilité est qu'il existe des mécanismes qui sont capables de transformer une situation initialement symétrique en situation présentant une légère surabondance de matière : ces processus auraient été à l'œuvre lors d'un événement que l'on nomme la *Baryogénèse*. Aujourd'hui, nous ne savons pas quand elle a eu lieu⁹⁸ et sous quelles modalités exactes : par contre dès 1967, Sakharov posa 3 conditions qui doivent être satisfaites à minima pour que la Baryogénèse ait pu prendre place :

1. il faut des réactions qui ne conservent pas le nombre baryonique :



C'est une condition minimale pour qu'une situation symétrique puisse évoluer vers une asymétrie.

2. il faut que les réactions conjuguées aient des taux de réactions différents.



En effet, pour une réaction qui ne conserve pas le nombre baryonique, la réaction conjuguée est également possible : si elles sont toutes aussi efficaces, le nombre baryonique global reste nul et la symétrie n'est pas brisée.

97. les photons produits par les annihilation emportent une énergie mc^2 , donc de l'ordre du GeV pour des protons-antiprotons par exemple.

98. si elle a eu lieu

3. si les 2 conditions précédentes sont réalisées, nous obtenons une population en C et \bar{C} asymétrique. Toutefois, il ne faut pas l'équilibre thermodynamique soit maintenu : comme vu précédemment l'abondance d'une particule à l'équilibre ne dépend que de sa masse, qui est identique pour les 2 types de matière. Il faut figer le déséquilibre créé et par exemple empêcher que nos réactions puissent retourner à l'état initial symétrique :

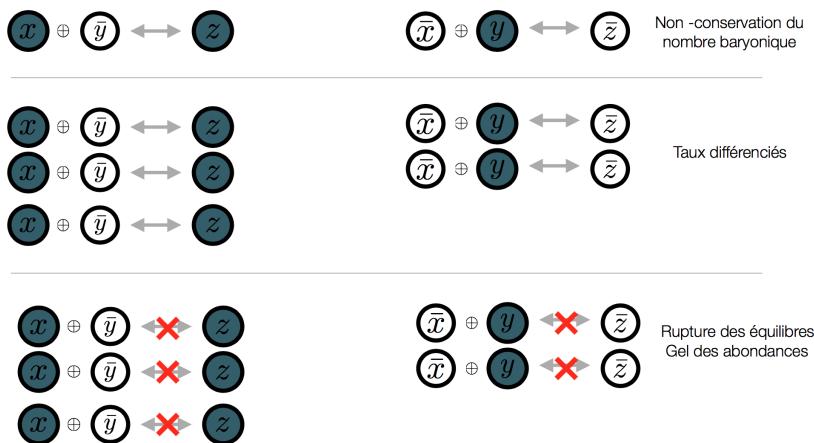


FIGURE 16: Les conditions de Sakharov, nécessaires à l'existence d'une Baryogénèse à l'origine de l'asymétrie matière-antimatière. Il faut des réactions qui ne conservent pas le nombre de baryons, qui opèrent à des taux différents quand elles sont réalisées avec de l'antimatière et un procédé qui gèle l'équilibre thermodynamique et conserve l'asymétrie conservée. Initialement, l'abondance des particules x, \bar{x}, y, \bar{y} présentait une symétrie matière-antimatière, symétrie qui est brisée pour l'abondance finale des particules z et \bar{z} .

Il s'avère que ces 3 conditions sont réunies dans la nature. Il existe des réactions qui ne conservent pas le nombre baryonique (condition 1), les taux de réaction des transformations conjuguées sont différencierées (condition 2)⁹⁹ et pour finir l'Univers, en particulier à cause de la baisse de température induite par l'expansion, fait régulièrement sortir des particules de l'équilibre thermodynamique en gelant les interactions. Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes : aujourd'hui la Baryogénèse apparaît comme une possibilité de principe mais dont on ne sait pas actuellement si elle a eu lieu et dans quelles conditions.

99. c'est notamment ce qui est testé lors des mesures de violations de conjugaison-parité (CP) dans les grands accélérateurs

Histoire thermique de l'Univers et Nucléosynthèse primordiale

Dans ce chapitre nous allons voir comment les processus à l'œuvre dans l'Univers chaud vont conduire aux abondances observées actuellement des principales particules élémentaires et des éléments légers. Ces processus se déroulent pour $t < 3$ minutes, dans un Univers dont la dynamique est dominée par les espèces relativistes. On rappelle que la température décroît avec le temps, tout comme les énergies $k_B T$ caractéristiques associées¹⁰⁰ :

$$T \approx \frac{10^{10} K}{\sqrt{t(\text{sec})}} \approx \frac{1}{k_B} \frac{1 \text{ MeV}}{\sqrt{t(\text{sec})}}. \quad (162)$$

On note que ces températures varient en $1/\sqrt{t}$, reflétant ainsi la dépendance en $1/a$ de la température du CMB et le comportement en $a \sim \sqrt{t}$ du facteur d'expansion dans les époques dominées par le rayonnement.

^{100.} on rappelle que le *MeV* désigne 1 million d'électrons-volts constitue une énergie équivalente à $1 \text{ MeV} \sim 1.6 \times 10^{13} \text{ J}$

Quelques étapes

On rappelle que 2 processus sont en compétition : la désintégration qui tend à faire décroître de façon exponentielle l'abondance d'une particule donnée et le gel qui tend à figer l'abondance de cette particule en la soustrayant au bain de réactions environnant. La séquence suivante donne un aperçu de la cascade de processus qui opèrent lors de la baisse de température de l'Univers, induite par l'expansion, $T = T_0(1+z)$ ¹⁰¹. La séquence suivante démarre au confinement des quarks dans les nucléons.

- $T \sim 3 \cdot 10^{12} \text{ K}$: ($t \sim 10^{-5} \text{ sec}$, $kT \sim 250 \text{ MeV}$) : confinement des quarks. Particules présentes $p, n, \pi^+, \pi^0, \pi^-, e, \bar{e}, \mu \bar{\mu}$ + neutrinos ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$).

Les particules $\tau, \bar{\tau}, \bar{p}, \bar{n}$ ¹⁰² sont déjà annihilées à ce stade et les neutrinos associés $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ sont gelés.

- $T \sim 10^{12} \text{ K}$: désintégration des pions

^{101.} Cette température est celle du rayonnement de fond diffus avec $T_0 \sim 2.73 \text{ K}$

^{102.} les τ , malgré leur statut de leptons qui devrait les qualifier comme légers sont des particules substantiellement massives $mc^2 \sim 1.8 \text{ GeV}$.

- $T \sim 10^{11}$ K : désintégration des muons et gel des neutrinos associés
- $T \sim 6 \cdot 10^9$ K : ($kT \sim 500$ keV, $t \sim 1$ s) désintégrations des électrons.
Gel des ν_e et gel des abundances relatives de n et p .
- $T \sim 10^9$ K : démarrage de la nucléosynthèse
- $T \sim 3000$ K : recombinaison, production du fond diffus

Entropie et fond neutrino Parmi les étapes mentionnées précédemment on constate que les neutrinos se découpent de la 'soupe cosmique' en des époques très reculées, environ 1 seconde après le Big Bang, et toujours dans leur régime relativiste. Comme expliqué au chapitre précédent, le découplage se met en place lorsque le taux d'expansion, codé par le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a$, devient plus important que le taux de réaction de l'interaction Γ que l'on cherche à étudier. Dans ces époques dominées par le rayonnement, le paramètre de Hubble est donné par :

$$H^2 \sim H_0^2 \frac{\Omega_r}{a^4}. \quad (163)$$

Durant ces époques dominées par le rayonnement le facteur d'expansion croît comme l'inverse de la température, $a \sim 1/T$ et le taux d'expansion varie en :

$$H \sim H_0 T^2 \sqrt{\Omega_r} \quad (164)$$

avec $H_0 \sim 70 \text{ km/s/Mpc}$ et $\Omega_r \sim 10^{-4}$. Par ailleurs les neutrinos interagissent avec les électrons en accord avec les processus d'interaction faible dont le taux d'interaction¹⁰³ typique varie comme :

$$\sigma v \sim G_F^2 E^2 \sim G_F^2 T^2 \quad (165)$$

où G_F désigne la constante de Fermi. Comme la densité d'une espèce relativiste varie comme T^3 , le taux de réaction impliquant les neutrinos varie très rapidement avec la température, et décroît plus rapidement que le taux d'expansion au cours du temps¹⁰⁴ :

$$\Gamma = n_\nu \sigma v \sim G_F^2 T^5. \quad (166)$$

Il arrive donc un instant où les neutrinos se découpent des électrons, donné numériquement par :

$$T \sim 1 \text{ MeV} \quad (167)$$

donc dans un Univers âgé environ $t = 1$ sec.

Par conséquent, lors du passage des électrons dans le régime non relativiste (qui opère plus tard pour $T \sim 511$ keV), ces mêmes neutrinos ne peuvent donc servir de canaux de désintégration car ils

103. défini par le produit de la section efficace σ et de la vitesse typique de rencontre des particules v pour conduire à un volume d'interaction par seconde

104. on rappelle que la température décroît avec le temps

n'interagissent plus avec ceux-ci via l'interaction faible. Cette désintégration se fait donc uniquement suivant :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma \quad (168)$$

Ce processus opère à entropie constante, donc l'entropie des électrons est reversée sur les photons et non vers le neutrinos. On peut montrer que la densité d'entropie de bosons et fermions sont reliées par :

$$s_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} s_B \quad (169)$$

Par conséquent la nouvelle entropie des photons, post-annihilation des électrons est :

$$s'_\gamma = s_\gamma + s_{e+} + s_{e-} = \frac{11}{4} s_\gamma. \quad (170)$$

De plus l'entropie d'une espèce relativiste est une fonction directe du cube de sa température : en effet l'entropie varie comme le nombre de particules, avec $n \sim T^3$ comme vu précédemment¹⁰⁵. Donc nous avons d'une part une espèce relativiste qui aura évolué de façon passive (les neutrinos avec $s'_\nu = s_\nu$) et une autre qui aura augmenté son entropie grâce aux électrons. Donc en fin de désintégration :

$$s'_\gamma = \frac{11}{4} s_\nu \quad (171)$$

ou bien

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_\gamma \quad (172)$$

Le gaz de neutrino doit être plus froid que celui de photons. Le fond neutrino peut en principe être mesuré aujourd'hui (même si cela reste encore pratiquement impossible) et doit donc présenter une température de $T_{\nu,0} = 1.95K$. L'enjeu est important : le fond diffus cosmologique de rayonnement nous permet de cartographier l'Univers agé de 380 000 ans, celui des neutrinos nous permettrait d'atteindre des périodes bien plus reculées, de l'ordre de la seconde après le Big-Bang.

^{105.} alternativement on a l'entropie qui est le rapport de l'énergie interne sur la température $S \sim \frac{U}{T}$ avec $U \sim T^4$ pour un corps noir par exemple.

Synthèse de l'hélium

La synthèse de l'hélium constitue l'évènement majeur de la production des éléments légers lors de la phase chaude du Big-Bang. L'abondance finale de cet élément va essentiellement dépendre du matériau à disposition et donc de la quantité de nucléons disponibles.

Rapport neutron/proton Environ 1 seconde après le Big-Bang, les nucléons (protons et neutrons) ne sont plus relativistes et leurs abondances (notées p et n respectivement pour les protons et neutrons) sont régies par une statistique de type Maxwell-Boltzmann

$$p \approx n \sim e^{-\frac{m_p^2}{k_B T}}. \quad (173)$$

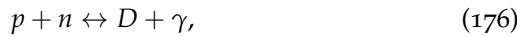
Les abondances des deux nucléons suivent des évolutions similaires car leurs masses sont proches : le proton est constitué du triplet de quarks uud et possède une masse de $m_p = 938.27$ MeV, tandis que le neutron est composé du triplet udd , pour une masse $m_n = 939.56$ MeV. En toute rigueur néanmoins, l'écart de masse $\Delta m = m_n - m_p = 1.3$ MeV suffit pour favoriser l'abondance du proton par rapport à celle du neutron, dont l'évolution en abondance est plus rapide. Le rapport d'abondance est donné par :

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{\Delta m}{k_B T}}, \quad (174)$$

Le gel des réactions impliquant neutrons et protons se produit environ 2 secondes après le Big-Bang. A cet instant le rapport neutrons sur protons vaut :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{gel}} \approx \frac{1}{6}. \quad (175)$$

Synthèse du Deutérium Le Deutérium est un noyau composé d'un proton et d'un neutron¹⁰⁶ et il fait office d'étape intermédiaire vers la production d'hélium. La production de cet élément se fait via la réaction :



cette équation doit satisfaire l'équilibre des potentiels chimiques :

$$\mu_p + \mu_n = \mu_D(+0). \quad (177)$$

A partir de l'équation 150, ces potentiels chimiques peuvent être extraits pour chaque espèce. En appliquant alors l'égalité des potentiels on obtient l'équation de Saha

$$X_D = n \times \frac{g_D}{g_n g_p} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{m_D}{m_n m_p} \right)^{3/2} \times e^{\frac{B}{kT}}, \quad (178)$$

où $X_D = \frac{n_D}{n}$ est le rapport deutérium sur proton et $B = 2.22$ MeV est l'énergie de liaison de l'élément. Il est d'usage d'exprimer l'abondance de neutrons n en fonction de l'abondance de photons $n \sim \eta n_\gamma$:

$$n \approx 0.244\eta \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3. \quad (179)$$

106. c'est un isotope de l'hydrogène à partir duquel est fabriquée l'eau lourde D_2O par exemple

La dépendance globale de l'abondance du deutérium peut alors se résumer à :

$$X_D \sim (k_B T)^{3/2} \eta e^{\frac{B}{k_B T}}. \quad (180)$$

Il apparaît une énergie caractéristique donnée par l'énergie de liaison $B \approx 2$ MeV : à première vue, en se plaçant quelques secondes après le Big-Bang, la température a suffisamment baissé pour que le deutérium devienne suffisamment abondant, via le terme exponentiel de l'équation de Saha. Toutefois les réactifs sont peu abondants ou à l'inverse les photons sont extrêmement nombreux¹⁰⁷ et empêchent un déplacement significatif de l'équation 176 vers la production de deutérium : dans l'équation 180 cela se manifeste par le terme $\eta \ll 1$ qui amortit le terme exponentiel. Il faut donc attendre une évolution significative de la température pour que finalement le deutérium puisse être produit en quantité abondante. Ce blocage au niveau du deutérium au cours de la chaîne de synthèse de l'hélium constitue un 'goulot d'étranglement', on parle de *deutérium bottleneck*.

radioactivité β En pratique il faut attendre environ 100 secondes, au bout duquel $k_B T \sim 0.1$ MeV pour que l'abondance de deutérium soit suffisante pour poursuivre la synthèse des éléments légers. Pendant ce délai, le rapport n/p continue de décroître sous l'effet de la radioactivité β qui conduit à la transformation de neutrons en protons via l'émission d'électrons. La durée de vie du neutron étant de l'ordre de 15 minutes, la modification du rapport est faible mais réelle. A la fin du deutérium bottleneck, nous avons :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{bottleneck}} \sim \frac{1}{7} \quad (181)$$

synthèse de l'hélium et autres éléments légers Le deutérium devenant disponible, l'hélium peut être synthétisé. L'énergie de liaison de ce noyau est très importante $B_{He} \sim 30$ MeV, la synthèse est quasi immédiate et quasi totale quand les températures typiques sont de l'ordre de $k_B T < 0.1$ MeV : l'intégralité des neutrons se trouvent piégés dans les noyaux d'hélium (2 protons + 2 neutrons). Disposant à cet instant de 7 protons pour chaque neutrons, cela conduit à une fraction de masse sous forme d'hélium donnée par

$$Y_{He} \sim 25\% \quad (182)$$

En nombre, l'hélium représente seulement 10% des noyaux, le reste étant quasi-exclusivement des protons, i.e. des noyaux d'hydrogène.

Quelques éléments supplémentaires sont également produits. Par exemple le Li⁷ est un élément produit en faible quantité à partir de l'hélium, ainsi que He³ qui est un résidu des réactions de production

^{107.} on rappelle le rapport baryon sur photon $\eta \sim 10^{-9}$.

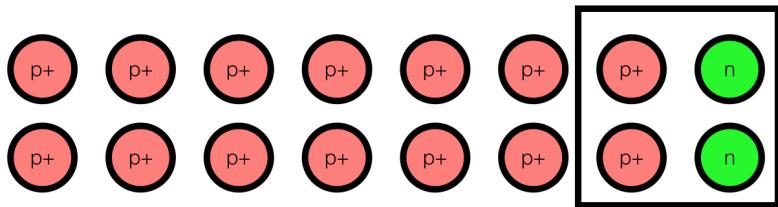


FIGURE 17: La situation après la fin du goulot du 'Deutérium'. Chaque groupe de 8 nucléons contient environ 1 neutron : un noyau d'hélium peut donc être fabriqué pour 16 nucléons, donnant un rapport de masse final d'environ 25%.

de He^4 . D'autres éléments comme Be^7 et H^3 sont également synthétisés mais leurs temps de vie courts par rapport à l'âge de l'Univers font que ces éléments ne sont plus présents aujourd'hui.

De façon générale c'est la grande stabilité du noyau d'hélium standard qui lui confère ce rôle prédominant. La Figure 18 présente une mesure de la stabilité des différents éléments en fonction de leur masse. Dans ce diagramme on constate que l'élément le plus stable de la nature est le Fer. Si l'on part des éléments les plus lourds (tels l'Uranium) et que l'on réalise de la fission nucléaire pour fabriquer des éléments plus légers (en se déplaçant vers la gauche dans ce diagramme), des éléments plus stables sont créés produisant ainsi de l'énergie. De même si l'on part des éléments les plus légers (tels l'hydrogène) et que l'on en fabrique de plus lourds, on gagne en stabilité et donc on produit de l'énergie : c'est le principe de fusion nucléaire. Toutefois l'on constate que l'hélium constitue un îlot de stabilité : il n'y a donc pas d'incitation naturelle à produire des éléments plus lourds à partir de celui-ci en fabriquant l'élément plus lourd qui lui succède immédiatement, à savoir le Lithium. Les autres éléments de masse voisine sont beaucoup plus instables (avec des énergies de liaison plus faibles) et sont donc peu enclin à se former. Il est ainsi communément dit que la nucléosynthèse primordiale s'arrête avec He^4 , 3 minutes (i.e. une grosse centaine de secondes) après le Big-Bang. Les éléments plus lourds ne pourront être produit que via des processus stellaires, notamment via la réaction triple α : le produit de cette réaction conduit à la création d'un élément à $3 \times 4 = 12$ nucléons, à savoir le carbone, dont on constate dans la figure 18, qu'il est le premier élément plus stable que l'hélium. Les conditions thermodynamiques de l'Univers quelques minutes après le Big-Bang ne permettront toutefois pas de synthèse du carbone dans ces premiers instants.

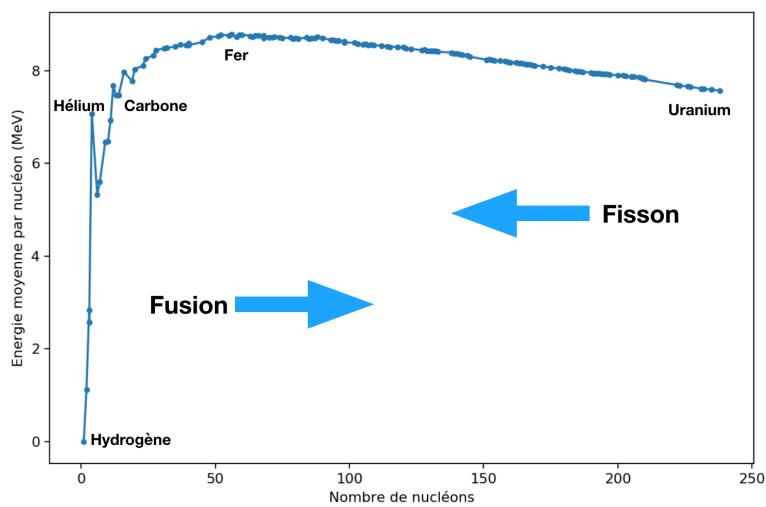


FIGURE 18: L'énergie de liaison moyenne par nucléon des différents éléments et isotopes en fonction de leur nombre de nucléons. Plus un élément est placé haut dans ce diagramme, plus il est stable. Si l'on fabrique des éléments en se déplaçant vers la droite, on fait de la *fusion nucléaire* et vers la gauche si l'on fait de la *fission*.

Nucléosynthèse et Cosmologie

La nucléosynthèse primordiale aboutit à la production de quelques éléments légers, dont en particulier l'hélium. Cette production va dépendre du nombre de baryons à disposition, permettant ainsi de contraindre le paramètre Ω_b ou de façon équivalente le rapport baryons sur photon η . La figure 19 présente la comparaison entre les mesures d'abondances et les modèles de nucléosynthèse primordiale. Les modèles prédisent par exemple que plus l'abondance de baryons est importante, plus la production d'hélium est efficace. En corollaire, l'abondance de deutérium décroît avec la quantité de baryons disponible car précisément cette conversion Deutérium vers hélium se fait plus facilement. Pour le lithium, la situation est plus complexe : dans un premier temps, augmenter le nombre de baryons a tendance à détruire plus facilement cet élément qui est fragile. Dans un second temps, son abondance augmente avec la quantité de baryons car ceux-ci permettent une fabrication plus importante de Hélium-3, He^3 et par la suite de Béryllium qui décroît en Lithium. On constate que pour He^4 et D, il y a un régime de concordance pour $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$ et $\Omega_b h^2 \sim 0.022$. L'absence d'accord avec le Lithium s'explique quand à lui par la difficulté d'estimer l'abondance *primordiale* de cet élément, cet élément pouvant être détruit au sein des intérieurs stellaires.

Ces mesures d'abondances issues des théories de nucléosynthèse sont des contraintes très fortes sur la quantité de baryons disponibles : il est aujourd'hui extrêmement difficile de considérer cette quantité comme un paramètre libre. Il est intéressant de constater

que ces contraintes sur la quantité de baryons universelle est en accord quasi parfait avec celles issues de l'étude du fond diffus cosmologique (WMAP et Planck). Cet accord est d'autant plus remarquable que ces estimations reposent sur des études très différentes : abondance primordiale d'éléments d'une part, spectre des fluctuations des baryons de l'autre.

Remarquons enfin que les abondances dépendent également de la variation temporelle de la température, régie par l'évolution du facteur d'expansion et donc in fine sur les paramètres cosmologiques. Ainsi les processus de nucléosynthèse se déroulent dans une époque où la dynamique de l'Univers est dominée par les espèces relativistes et dans l'absolu les abondances permettent de contraindre la densité d'énergie des espèces relativistes Ω_r . Par exemple, le nombre d'espèces de neutrinos peut être contraint par cette mesure et les résultats actuels ne permettent pas de dévier du nombre de neutrinos prédit par le modèle standard, à savoir 3.

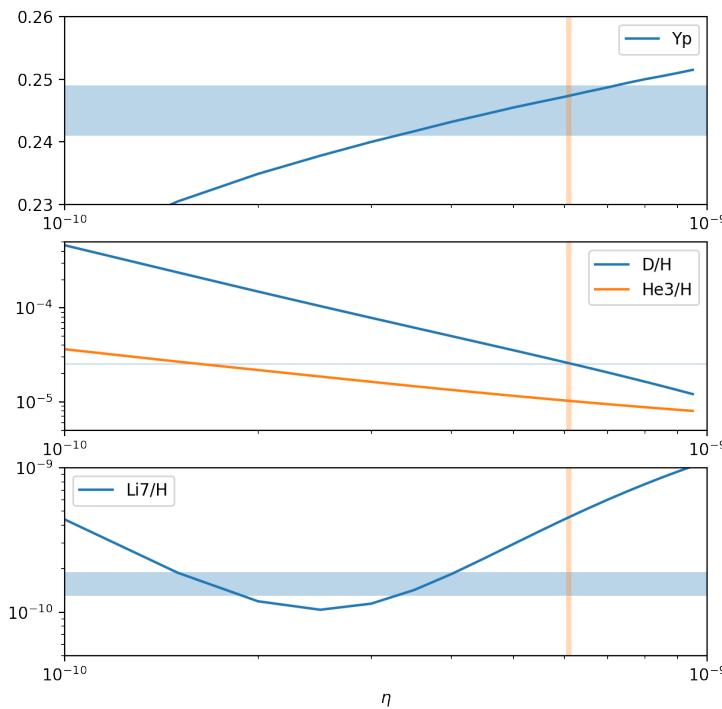


FIGURE 19: Comparaison des abondances observées des éléments légers (régions bleues horizontales, Fields et al. (2015)), des modèles (lignes) et des contraintes Planck (région orange verticale). Ces abondances sont données en fonction du rapport baryon sur photon η . Abondances théoriques calculées avec *AlterBBN* (A. Arbey).

Le Fond Diffus Cosmologique

Le fond diffus constitue la pierre angulaire de la cosmologie actuelle et se présente comme l'un des objets astrophysiques les mieux connus et les plus étudiés. C'est la conjonction d'une excellente compréhension théorique de cet objet avec l'avalanche de données de grande qualité¹⁰⁸ qui ont contribué à installer le fond diffus comme l'un des plus grands succès de la cosmologie.

Le fond diffus cosmologique est communément appelé CMB (pour *cosmic microwave background*) et est constitué des photons "libérés" lors du processus de dernière diffusion. Ce processus a opéré 380 000 ans après le Big Bang¹⁰⁹ et ces photons sont toujours détectables aujourd'hui car présents en grande quantité. Ils sont les reliques d'une époque où l'équilibre matière-rayonnement régnait et présentent une distribution spectrale de corps noir. Ce corps noir possède une température caractéristique d'environ 3K. Il se caractérise également par une intensité sur le ciel qui est uniforme à un très grand niveau de précision. Une étude détaillé de ce rayonnement fait ressortir des fluctuations qui tracent la distribution de matière à l'époque de son émission, donnant ainsi accès à une vue sans égal sur le cosmos à ces époques reculées.

108. notamment avec le satellite européen *Planck*

109. à un redshift équivalent $z \sim 1100$

Recombinaison

Si l'on se place après la fin de la nucléosynthèse primordiale ($t > 3$ minutes), protons, photons et électrons sont en interaction via 2 types de réactions, la recombinaison et la diffusion Thomson



Ces 2 couplages vont disparaître de façon simultanée sous l'effet de la baisse de la densité cosmique d'électrons (ou de protons libres). On définit la fraction d'ionisation x de la façon suivante :

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_H} \quad (185)$$

qui vaut 1 lorsque que le gaz cosmique est complètement ionisé et 0 lorsqu'il est complètement neutre. Notons qu'en raison de la neutralité électrique, la densité de protons libres n_p est égale à la densité d'électrons libres n_e ¹¹⁰. De même, le nombre d'atomes d'hydrogène (créé par l'assemblage d'un proton et d'un électron) est donné par $n_H = (1 - x)(n_p + n_H)$.

L'équation de recombinaison peut être équilibrée via les potentiels chimiques $\mu_p + \mu_e = \mu_H$ et on rappelle que pour chaque espèce son abondance n_i est donnée par :

$$n_i = g_i e^{\frac{\mu_i}{k_B T}} \left(\frac{m_i k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}}. \quad (186)$$

On obtient alors l'équation décrivant l'évolution temporelle de la fraction ionisée

$$\frac{1 - x}{x^2} = n_B \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} m_e^{-3/2} e^{\frac{\chi}{k_B T}}, \quad (187)$$

où $n_B = n_p + n_H$ désigne la densité de baryons et $\chi = 13.6$ eV est l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène. Notons également que la densité de baryons peut s'écrire en fonction du nombre de photons $n_B = \eta n_\gamma \sim T^3$ et l'équation de l'état d'ionisation peut s'écrire :

$$\frac{1 - x}{x^2} = A\eta \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\chi}{k_B T}} \quad (188)$$

où A est un pré-facteur fonction notamment des facteurs de dégénérence. Notons que le terme de droite de l'équation 188 ne dépend que du temps, par conséquent elle se résume à une équation du second degré sur x à un instant donné. On rappelle que cette évolution manifeste *un déplacement de l'équilibre* vers la droite de l'équation 183.

La figure 20 présente l'évolution de la fraction ionisée pour différentes valeurs de Ω_b . Dans tous les cas, l'Univers voit la quantité d'atomes ionisés divisée d'un facteur 100-1000 entre $z=1500$ et $z=1000$, correspondant à un âge d'Univers $t=380$ 000 ans. On peut constater que ce processus opère plutôt tardivement : l'époque correspondant à l'énergie caractéristique $\chi = 13.6$ eV s'est mise en place à $t = 180$ ans. De manière analogue au deutérium bottleneck, c'est la grande quantité de photons par rapport au nombre de baryons¹¹¹ qui empêche une mise en place plus rapide. Si l'on examine la figure 20 plus en détail on constate d'une part qu'une plus faible densité de baryon (Ω_b plus faible) conduit à une mise en place moins efficace de la recombinaison. Elle opère plus tardivement et est moins complète dans un Univers moins riche en baryons.

^{110.} par simplicité, on ignorera ici la présence d'hélium, qui ne représente que 10% des éléments

^{111.} on rappelle que les contraintes de la nucléosynthèse primordiale indiquent que le rapport baryons/photons vaut environ $\eta \sim 1e-9$, très largement en faveur des photons

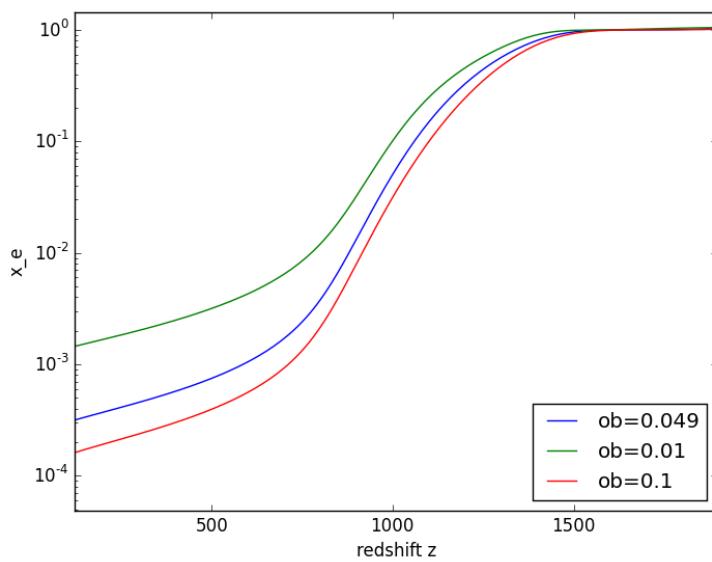


FIGURE 20: Evolution temporelle de fraction d'ionisation x_e pour trois valeur de Ω_b . L'âge typique de l'Univers aux redshifts concernés est d'environ 380 000 ans. Les atomes sont totalement ionisés, $x_e = 1$ aux grandes valeurs de z , et le gaz cosmique est sous la forme d'un plasma. Progressivement, sous l'effet de la baisse de température, les atomes vont recombiner pour donner un Univers neutre, optiquement mince au rayonnement du fond diffus.

Surface de dernière diffusion

Fin de la diffusion Thomson La baisse de la densité électronique qui accompagne la formation d'atomes neutres conduit également à réduire l'efficacité de la diffusion Thomson. Dans un environnement riche en électrons libres, la diffusion force un court libre parcours moyen des photons et empêche le rayonnement de se propager sur de longues distances¹¹² : c'est la marque d'un Univers opaque, dans lequel l'information ne peut provenir de régions lointaines. Toutefois lorsque $x \sim 0.01\%$, la diffusion gèle, et se produit alors la *dernière diffusion* à un redshift $z=1100$. A partir de cet instant, le rayonnement n'interagit plus avec les électrons et de fait se découpe de la matière : ce rayonnement peut dorénavant se propager librement et est détecté aujourd'hui sous la forme du CMB. Notons pour finir que la baisse de la densité électronique va également conduire au gel des réactions de recombinaison vers $z=1100$, avec un ionisation résiduelle de l'ordre de 0.01%.

surface de dernière diffusion A partir de $z = 1100$ les photons du fond diffus vont pouvoir se propager librement et de façon essentiellement rectiligne¹¹³. Les photons du fond diffus qui nous parviennent aujourd'hui sont donc issus de toutes les régions à une distance telle que le rayonnement mette environ 13.8 milliards d'années à nous parvenir. L'ensemble de ces régions définit une coquille, centrée sur l'observateur et de distance de parcours lumineux égale à l'âge de

112. on a une situation analogue à l'intérieur du Soleil qui est aussi un plasma. Les photons produits au centre de l'étoile ont des libre parcours moyen de l'ordre du cm

113. plus précisément en épousant la géométrie de l'espace-temps, qui s'avère être plane dans le cas de notre Univers

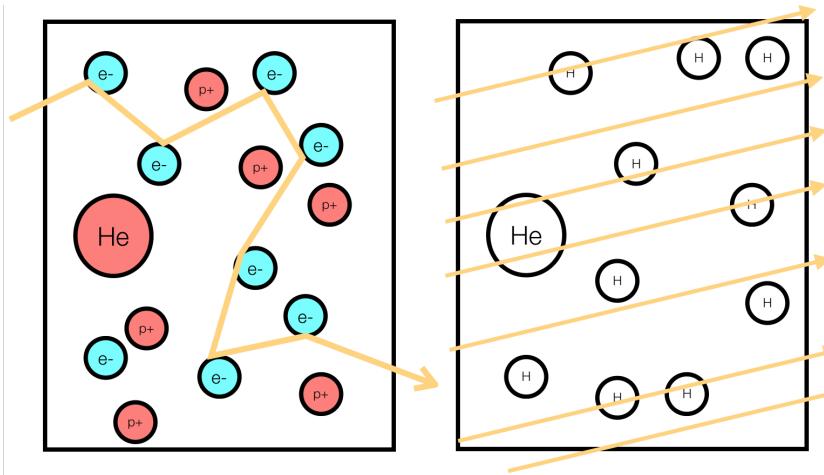


FIGURE 21: Avant la recombinaison, la présence d'électrons libres dans le plasma cosmique est à l'origine d'un processus de diffusion des photons important. Le plasma peut alors être considéré comme opaque, compte tenu de l'impossibilité d'extraire de l'information sur des grandes distances. La seule information disponible provient de la dernière diffusion. Après la recombinaison, l'absence d'électrons libres permet enfin au rayonnement de se propager librement, l'Univers devient transparent pour les photons du fond diffus cosmologique.

l'Univers. Cette coquille possède une faible épaisseur, correspondant à la durée qu'aura mis la diffusion Thomson à geler, comparable à la durée qu'à mis la recombinaison à se mettre en place ($\Delta z \sim 100$). Vu depuis l'observateur, cette coquille apparaît donc comme une surface sphérique vue depuis l'intérieur, *la surface de dernière diffusion*. Les régions au delà de cette surface de dernière diffusion nous sont inaccessibles par l'intermédiaire des photons, puisque ces derniers n'emportent que l'information de la dernière diffusion : les régions au delà de cette sphère sont opaques à toute observation et les régions en deçà (à l'intérieur) de cette sphère constituent l'Univers observable de l'observateur placé en son centre.

Rappelons que ces photons sont ultra-dominant en nombre, avec par exemple un rapport baryon/photon $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$. Cela a plusieurs conséquences : d'une part cela signifie qu'aucun processus astrophysique n'est en mesure de faire disparaître ce rayonnement et il est de fait toujours mesurable aujourd'hui. D'autre part cette domination est telle que l'impression même de signatures de processus astrophysiques entre $z=1100$ et aujourd'hui ne peut se faire qu'à des niveaux très faible. Par conséquent ce rayonnement possède toujours un spectre de corps noir (décalé vers le rouge) même si il n'est plus en situation d'équilibre avec la matière. De même les éventuelles marques des propriétés de l'Univers âgé de 380 000 ans s'y trouvent toujours. L'observation de la surface de dernière diffusion est donc une fenêtre incomparable sur l'état du cosmos à ces époques lointaines.

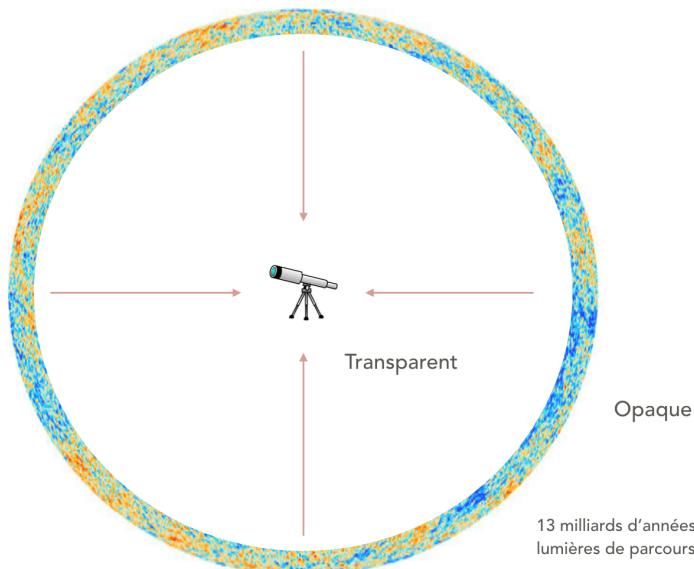


FIGURE 22: Les photons du fond diffus ont pu se propager librement à partir du même instant, correspondant à un Univers âgé de 380 000 ans. Un même instant correspond à une même distance : tous les photons reçus aujourd’hui proviennent de régions situées sur une surface sphérique, dont nous sommes le centre. Son rayon est tel que le parcours des photons est d’environ 13 milliards d’années de vol. Les régions plus distantes que cette ‘surface de dernière diffusion’ sont opaques, celle moins distante sont transparentes à ce rayonnement.

Corps noir cosmologique

Le fond diffus cosmologique est issu d’une époque où matière et rayonnement étaient couplés et par conséquent possédaient à ces époques reculées un spectre de corps noir. La densité volumique de photons dans l’intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ est donné par :

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (189)$$

Comme indiqué précédemment, la surabondance de ces photons est telle que ce signal a conservé les caractéristiques d’un tel corps noir, même dans un régime de faible couplage entre matière et rayonnement. Aujourd’hui la température de ce ‘corps noir’ est mesurée avec une très grande précision¹¹⁴ (voir aussi la figure 23) :

$$T_0 = 2.7255 \pm 0.0006 K. \quad (190)$$

Ce spectre va conserver sa forme, malgré le redshift des photons concernés et malgré la modification de leurs fréquences ν selon :

$$\nu(a) = \frac{\nu_0}{a}. \quad (191)$$

Dans un volume de contrôle de volume $V = V_0 a^3$ et dans un intervalle de fréquence $d\nu = d\nu_0/a$, le nombre de photons doit rester identique quel que soit l’instant considéré :

$$\frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} V = \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{h\nu_0/k_B T_0} - 1} V_0, \quad (192)$$

^{114.} notamment grâce aux mesures du satellite américain COBE dans les années 90

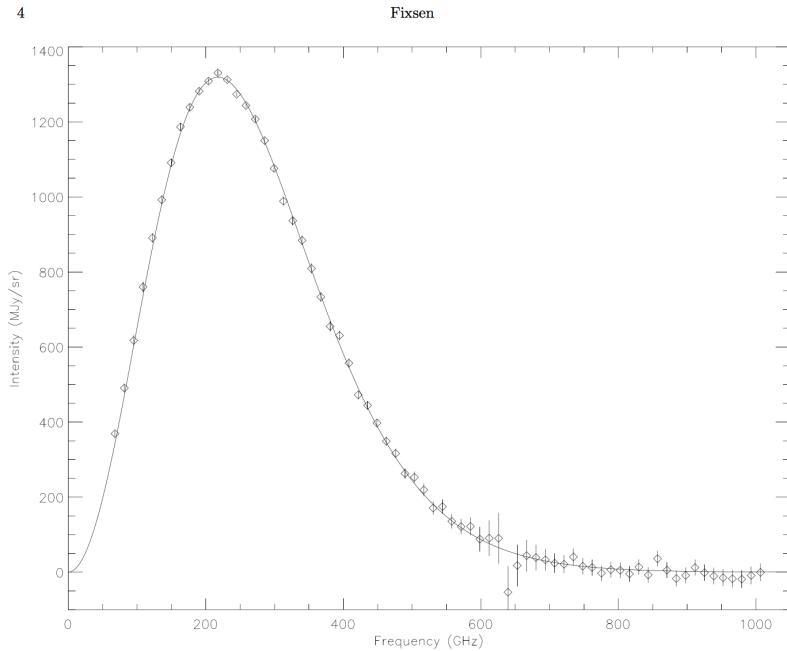


FIGURE 23: Le spectre du fond diffus cosmologique : les symboles représentent les mesures de l'instrument FIRAS, la ligne le spectre de corps noir pour une température de $T_0 = 2.725\text{K}$. Figure extraite de Fixsen 2009.

qui ne peut être satisfait que si la température caractéristique du corps noir suit la relation :

$$T = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z) \quad (193)$$

que nous avions déjà établi. On remarque ainsi que la recombinaison opérant à $z \sim 1100$, la température du gaz de photon cosmique était proche des 3300 K.

Anisotropies du CMB

Le fond diffus est représentatif d'un Univers jeune ($t=380\text{ 000 ans}$) et donc très proche de l'homogénéité parfaite. Par conséquent sa mesure fait apparaître une très grande stabilité du signal sur tout le ciel, sans fluctuations de température détectable jusqu'à des niveaux de 0.001 K. Au delà, commence toutefois à apparaître des anisotropies dans le signal : celles-ci sont essentiellement générées par la physique des baryons à l'œuvre au moment de la recombinaison et par des processus astrophysiques qui affecte le rayonnement au cours de son vol jusqu'à l'observateur. L'étude de ces anisotropies est extrêmement riche d'informations pour la physique fondamentale, la cosmologie et l'astrophysique. Notons que nous allons nous concentrer sur les fluctuations de température et implicitement le mot "fluctuation" ou "signal" désigne ce type de donnée. Il existe également des études

en *polarisation* que nous n'aborderons que très rapidement en fin de chapitre.

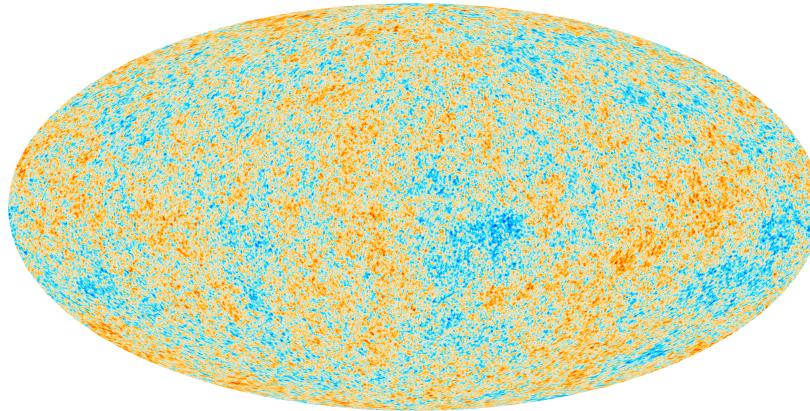


FIGURE 24: La carte des anisotropies du fond diffus obtenue par la mission européenne *Planck*. Les zones jaunes sont plus chaudes que les zones bleues. Le niveau des fluctuations représentées est de l'ordre de 0.001%.

Principe de l'analyse des anisotropies du CMB

Dans cette section, nous allons exposer rapidement les grands principes de l'analyse du signal du fond diffus. Le CMB se manifeste pour l'observateur comme un signal sur tout le ciel, généralement sous la forme d'une carte de température $\delta T(\theta, \phi)$, mesurée dans un repère sphérique. Afin de pouvoir extraire de l'information de ce type de données, l'on raisonne généralement sur la transformée de Fourier de ce signal. Cette opération permet d'une part de séparer les contributions des différentes échelles angulaires. D'autre part, nous verrons que la théorie qui permet de prédire les propriétés de ces fluctuations se fait naturellement dans l'espace de Fourier, où les différentes échelles angulaires évoluent de façon découplées en très bonne approximation.

Dans un espace sphérique, les opérations de transformées de Fourier s'effectuent via la base des harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ et la carte de températures se décompose de la façon suivante :

$$\delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (194)$$

où les coefficients (complexes) $a_{\ell,m}$ sont obtenus par projection de la carte sur la base vectorielle composée des harmoniques¹¹⁵ :

$$a_{\ell,m} = \int \int d\theta d\phi \sin \theta Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \delta T(\theta, \phi). \quad (195)$$

Les coefficients $a_{\ell,m}$ constituent ainsi la contribution de chaque harmonique à la carte de température.

^{115.} les harmoniques sphériques apparaissent aussi en mécanique quantique car elles sont les fonctions propres de la partie angulaire du Laplacien, qui encode l'opérateur de moment angulaire

Echelles angulaires Les harmoniques sphériques sont les analogues des modes de Fourier sur la sphère, à savoir une base de sinus et cosinus adaptée à une géométrie sphérique :

$$Y_{\ell,m} \sim e^{im\phi} P_{\ell,m}(\cos \theta). \quad (196)$$

Le coefficient ℓ trace l'échelle angulaire de l'harmonique qui possède ainsi une taille angulaire caractéristique $\theta \sim \pi/\ell$: on parle également de fréquence angulaire où les bas ℓ désigne les grandes échelles sur le ciel et les grands ℓ les petites échelles. Le coefficient m peut varier entre $-\ell$ et ℓ et désigne les différentes orientations indépendantes pour chaque taille angulaire caractéristique : celle-ci sont d'autant plus nombreuses que la fréquence angulaire est élevée. L'harmonique $\ell = 0$ correspond au monopole, à savoir un signal uniforme sur toute la sphère et dont le coefficient a_{00} renvoie directement à la moyenne sur tout le ciel. Les harmoniques $\ell = 1$ sont des dipôles, avec un côté 'chaud' et un côté 'froid' diamétralement opposés. Celles avec $\ell = 2$ désignent un quadrupôle, etc...

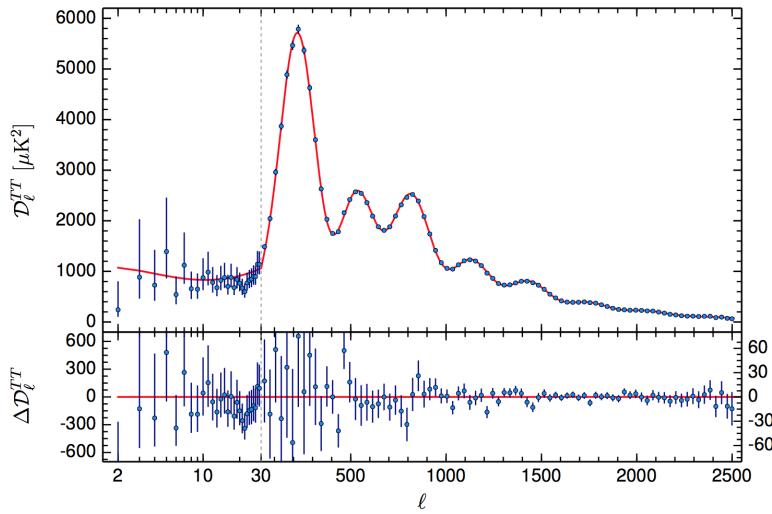


FIGURE 25: Le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique obtenu par *Planck*. Le panneau supérieur représente $D_\ell = \ell(\ell+1)C_\ell$: les points sont les données et la ligne représente le spectre prévu pour un modèle Λ CDM. Le panneau inférieur montre les résidus entre le modèle et les points de données.

Spectre de puissance Armé de la collection des coefficients $a_{\ell,m}$ d'une carte du ciel, on évalue les contributions relatives de chaque échelle par le spectre de puissance angulaire :

$$C_\ell = \langle |a_{\ell,m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell,m}|^2 \quad (197)$$

Ce faisant, on rassemble pour chaque échelle angulaire ℓ les contributions de toutes les orientations m associées. Si toutes les directions

sont à priori équivalentes et aucune n'est privilégiée, alors cette opération ne produit pas de perte d'information. C'est le cas du CMB, celui-ci étant à priori isotrope. D'autre part, une grande classe de modèles d'inflation prédisent que les fluctuations du fond diffus doivent appartenir à la classe des *champs aléatoires gaussiens* qui sont entièrement définis par leur 'variance', ce qui est précisément la nature du spectre de puissance angulaire.

Avant-plans

Avant toute chose, il est important de réaliser qu'une carte brute du ciel aux longueurs d'ondes sondées par les missions CMB est soumise à une forte contamination par des avant-plans astrophysiques. Parmi ces avant-plans, le plus spectaculaire est sans contexte la Voie Lactée dont par exemple l'émission par les poussières ou le rayonnement synchrotron empêchent d'accéder aux fluctuations du CMB en arrière plan¹¹⁶. Ces avant-plans peuvent être ajustés, modélisés et pris en compte dans des modèles d'inversion, afin d'extraire le signal d'origine cosmologique des portions du ciel affectées. Notez que ces avant-plans sont également source de recherches dédiées, notamment à propos des propriétés des poussières dans la Voie Lactée.

Dipôle Le premier niveau d'anisotropie est constitué par le dipôle du CMB. Il possède une amplitude de l'ordre de 3 mK et résulte du mouvement de l'observateur par rapport à la surface de dernière diffusion. Ce mouvement induit un effet Doppler, fonction de la vitesse de déplacement et qui fait apparaître des zones plus chaudes et plus froides que la moyenne, diamétralement opposées et alignées avec la direction de déplacement. Au premier ordre, la variation de température dans la direction du dipôle obéit à la relation :

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{dipole}} \sim \frac{v}{c} \quad (198)$$

et donne une valeur de vitesse de déplacement $v \sim 330 \text{ km/s}$ pour le barycentre du système solaire. Cette vitesse est la somme notamment de la vitesse de déplacement du Soleil dans la Galaxie et de la Galaxie dans le Groupe Local¹¹⁷.

Anisotropies Intrinsèques

Les fluctuations de température du CMB tracent des fluctuations de densité de matière. Plusieurs modèles de couplage entre matière et rayonnement existent, mais un grand nombre d'évidences observationnelles pointent vers des fluctuations de type *adiabatiques*. Dans ce mode de couplage, le rapport entre la densité de matière et celle

116. les régions du ciel couvertes par la Voie Lactée sont par ailleurs fréquemment ignorées lors des études faites sur le fond diffus, à cause des incertitudes générées par sa présence

117. Par Groupe Local, on désigne le groupe de galaxies auquel la Voie Lactée appartient et constitué de la Voie Lactée, de la galaxie d'Andromède et du Triangle ainsi que de tout un ensemble de galaxies moins massives et galaxies satellites

de rayonnement reste constant y compris au sein des fluctuations locales : le fluide de matière ne dérive pas par rapport au fluide de photons. Dans ce cas le rapport des densités reste constant :

$$\frac{n}{n_\gamma} = \text{cste} \rightarrow \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} \quad (199)$$

Pour la matière, densité de matière et d'énergie sont directement reliées $\epsilon = nm c^2$ ¹¹⁸ et

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (200)$$

118. avec $\rho = nm$

Pour les photons, nous avons déjà vu que $n_\gamma \sim T^3$:

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T}. \quad (201)$$

D'où il apparaît que les fluctuations de températures tracent les fluctuations de densité via :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{adiab}} = \frac{1}{3} \frac{\delta n}{n} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (202)$$

Dans un régime de fluctuations adiabatiques, les régions plus chaudes (respectivement plus froides) que la moyenne correspondent aux régions les plus dense (respectivement moins denses) au même moment.

Toutefois les fluctuations de densité produisent également des fluctuations de potentiel gravitationnel qui devront être gravie ou dévalées par les photons du fond diffus au moment de leur émission. Les photons en train de sortir d'un puit (correspondant à une surdensité) seront décalées vers le rouge (perte d'énergie) et ceux en train de dévaler un pic de potentiel (correspondant à une sous densité) seront décalés vers le bleu (gain d'énergie)¹¹⁹. Cet effet se nomme *effet Sachs-Wolf*

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{SW}} = -\delta \phi \quad (203)$$

119. cette sensibilité des photons au champ gravitationnel local est un effet standard de la relativité générale

où $\delta \phi$ est la fluctuation de potentiel. Par ailleurs on peut montrer que la variation de potentiel est liée à la fluctuation de densité via $\delta \rho / \rho = 2\delta \phi$ ce qui implique que la variation de température *totale* est donnée par :

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{total}} = \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{SW}} + \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{adiab}} = -\frac{1}{3} \delta \phi = -\frac{1}{6} \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (204)$$

Les points chaud du CMB correspondent à des régions sous-denses de l'Univers au moment de l'émission. La carte de température du CMB est donc une carte de la distribution de matière au même instant. Ces fluctuations se situent à des niveaux de 0.001%, indiquant par la même que l'Univers était extrêmement homogène au moment de la recombinaison.

Grandes échelles Reste à expliciter l'origine des fluctuations de densité qui conduisent aux fluctuations de températures. L'examen de la figure 25 permet de distinguer 2 régimes. Le premier régime correspond aux grandes échelles $\ell < 30$: ces modes sont plus grands que l'Horizon¹²⁰ au moment de la recombinaison et tracent les fluctuations les plus primordiales, dont on pense qu'elles sont issues d'une période inflationnaire présente aux tous premiers instants après le Big-Bang. L'étude de ces régions du spectre permet notamment de mesurer l'amplitude des fluctuations inflationnaire ainsi que le spectre de ces fluctuations. En particulier, les théories inflationnaires indiquent que le spectre de puissance tridimensionnel des fluctuations primordiales doit être invariant d'échelle et de la forme :

$$P(k) \sim k^{n_s} \quad (205)$$

avec n_s proche mais différent de 1. Les résultats de *Planck 2015* indiquent que $n_s = 0.968 \pm 0.006$ en accord avec ces théories.

Petites échelles Au delà de $\ell \sim 30$, le spectre présente un ensemble de modes correspondant à des échelles caractéristiques et qui se manifestent sous forme de pics : on en dénombre 3 principaux suivis d'environ 6 pics d'amplitude décroissante. Ces pics indiquent l'existence d'échelles privilégiées dans la carte des fluctuations : ces échelles résultent d'ondes sonores se propageant dans le plasma au moment de la recombinaison. Ces ondes sonores sont appelées *oscillations baryoniques acoustiques*¹²¹ : leur production sera décrite en détail dans le chapitre dédié à la croissance des grandes structures. Ces oscillations se mettent en place pour des échelles sub-horizon d'où leur présence seulement aux petites échelles : la position du premier pic permet ainsi de tracer la taille sur le ciel de l'horizon sonore. Connaissant la taille *intrinsèque* de cet horizon, la mesure de sa taille apparente sur le ciel permet de déduire la géométrie du cosmos le long du parcours des photons (et donc $\Omega_m + \Omega_\Lambda$). Connaissant, le rayon de la surface de dernière diffusion r_{LSS} (donnée par le redshift de la recombinaison) et la taille de l'horizon sonore L_H à cette époque, l'angle qui sous-tend ces fluctuations est simplement donné par :

$$\theta = \frac{L_H}{r_{LSS}}. \quad (206)$$

Si $\theta \neq \frac{L_H}{r_{LSS}}$ la trajectoire des photons du fond diffus est incurvée (cf. Fig 26), traçant une géométrie courbée de l'Univers contenu dans la surface de dernière diffusion : au niveau actuel de précision, on ne détecte aucun départ à la géométrie plane.

Les pics suivants tracent la taille des modes ayant effectué un nombre de battement de plus en plus important entre leur production et l'émission du fond diffus. En particulier leurs amplitudes

120. comme on le verra par la suite, ce terme désigne la plus grande distance sur laquelle un phénomène physique peut se propager : c'est essentiellement le produit de la plus grande vitesse accessible à un processus avec l'âge de l'Univers à l'instant considéré

121. BAO en anglais pour *baryonic acoustic oscillations*

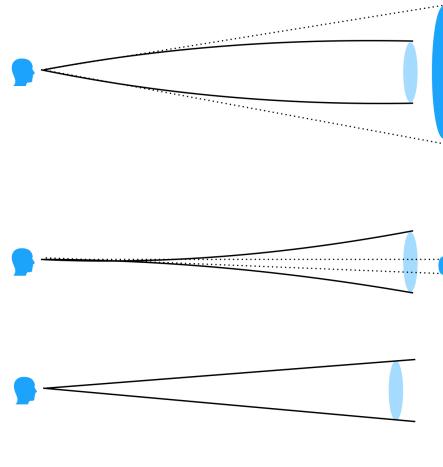


FIGURE 26: Les fluctuations les plus grandes sont de l'ordre de la taille de l'horizon au moment de la dernière diffusion, représenté sous la forme d'une ellipse bleue claire. L'observateur perçoit ces fluctuations avec une certaine taille angulaire, représentée par l'ouverture des rayons en tirets. Si la trajectoire des rayons lumineux est incurvée à cause de la géométrie globale de l'Univers, cette taille apparente va sur-estimer (cas du haut, où la géométrie est sphérique) ou sous-estimer (cas du bas, où la géométrie est hyperbolique) la taille angulaire des fluctuations par rapport à celle attendue. Cette comparaison permet d'estimer le départ à la latitude de la géométrie de l'Univers.

relatives permettent de contraindre précisément le couplage entre la matière et le rayonnement et la force de rappel qui permet d'entretenir ces battements. Cette force de rappel est induite par la gravité créée par la matière et la mesure de l'entretien de ces battements permet de contraindre la quantité de matière totale (Ω_b et Ω_m).

L'une des grandes leçons apprise par l'étude du CMB est la constatation que $\Omega_m > \Omega_b$: en particulier la grande amplitude du 3ème pic (et des suivants) ne peut s'expliquer par une matière purement baryonique. Elle nécessite une matière non couplée avec le rayonnement, en quantité significative, *la matière noire*. En l'absence de matière noire, le couplage entre matière et rayonnement n'est pas suffisamment important pour garantir un entretien maximal des oscillations baryoniques. Ce couplage imparfait conduit à un amortissement de ces dernières au cours des battements successifs : les échelles les plus petites, celles-qui oscillent le plus rapidement voient donc leur amplitude décroître. Dans le spectre de puissance angulaire, ce la se manifeste par des pics d'amplitude de plus en plus faible pour les hautes fréquences angulaires : on parle d'amortissement Silk¹²². Or l'amplitude du 3ème pic (et des suivants) est supérieure à celle attendue dans le cas d'une matière purement baryonique, i.e. en présence uniquement de matière capable d'intéragir avec le rayonnement (qui fournit le support de pression). Cet excès d'amplitude peut s'expliquer si il existe une force de rappel gravitationnelle supplémentaire, créée par de la masse qui n'est pas sensible à ce couplage rayonnement matière imparfait. Cette masse qui n'interagit pas avec le rayonnement est la *matière noire*.

Cette matière noire, pèse, entretient les BAOs et n'intéragit pas avec le rayonnement : si elle existe, elle nous est actuellement inconnue. On retrouve également trace d'un effet similaire dans la masse des amas de galaxies, dans la dynamique des galaxies et dans les

^{122.} du nom du physicien qui a mis en évidence cet effet

effets de lentille gravitationnelle.

Anisotropies secondaires

En plus des anisotropies imprimées dans le plasma au moment de la recombinaison, il existe tout un ensemble d'anisotropies créées par différents processus qui affectent les photons du CMB le long de leur parcours entre la surface de dernière diffusion et leur réception. Nous n'en citerons que 3 ici.

La réionisation La réionisation désigne l'époque à laquelle les premières sources de rayonnement ionisant apparaissent dans l'histoire du cosmos entre 400 millions et 1 milliard d'années après le Big-Bang. Ces sources (essentiellement les premières étoiles et quasars¹²³) vont ioniser à nouveau le gaz cosmique, dans un court laps de temps et vont produire une nuée d'électrons libres susceptibles d'interagir avec les photons du CMB par effet Thomson. Cette interaction va influer sur l'amplitude des fluctuations de température et affecter le spectre du CMB en polarisation aux grandes échelles. Cette interaction se mesure via la profondeur optique Thomson τ :

$$\tau = \int_{z_{\text{rec}}}^0 c \sigma_t n_e(z) \frac{dt}{dz} dt \quad (207)$$

qui est une mesure du nombre d'interactions entre un photon du CMB et les électrons de la réionisation. Notons que si la réionisation est précoce, la densité d'électrons n_e est grande et τ est grand tandis que si elle est tardive, cette densité sera plus faible par simple dilution cosmologique conduisant à une faible valeur de τ . Les mesures du CMB indiquent que la mi-réionisation a eu lieu pour $z_{\text{reion}} \sim 8$. Pour l'anecdote, les premières estimations de l'effet de la réionisation sur le fond diffus cosmologique prédisaient des époques de mi-réionisation bien plus reculées¹²⁴, vers $z \sim 17$: depuis, les estimations successives tendent à faire diminuer cette valeur vers celles que nous connaissons actuellement et plus en accord avec les mesures d'opacité du milieu inter-galactique qui mettent une fin de réionisation vers $z \sim 6$. Paradoxalement, ces mesures de plus en plus précises font du CMB une sonde de moins en moins sensible à la réionisation : une réionisation tardive implique une densité électronique plus faible et donc une diffusion Thomson secondaire plus faible, réduisant d'autant l'empreinte du processus sur les photons du fond diffus.

L'effet SZ des amas Les amas de galaxies sont les plus grandes structures virielisées de l'Univers actuel. Ils ont été formés récemment, $z \sim 1$, et contiennent typiquement plusieurs centaines ou milliers

¹²³. les quasars sont des objets très brillants, visibles en particulier à très grande distance. Ils résultent de l'énergie rayonnée par l'accrétion de matière par les trous noirs supermassifs qu'on trouve au centre de certaines galaxies.

¹²⁴. par le satellite américain WMAP par exemple

de galaxies pour des masses totales approchant les $10^{14} - 10^{15} M_{\odot}$. La masse très importante de ces objets font que le gaz piégé dans leur puit de potentiel gravitationnel est chauffé à des températures de l'ordre du million de K : à ces températures le gaz devient un fort émetteur X et est l'objet de processus d'ionisation collisionnelle. De façon analogue à la réionisation, les amas constituent des îlots denses d'électrons libres avec lesquels les photons du CMB peuvent interagir à des redshifts $z \sim 1$. On parle d'effet Sunyaev-Zeldovich, qui produisent de légères distorsions du spectre du CMB, en redistribuant l'énergie des photons vers de plus hautes valeurs. Les amas de galaxies présents sur le ciel produisent ainsi des anisotropies localisées, permettant même leur découverte dans le fond diffus avant confirmation par des observations X par exemple.

Quantitativement, le spectre du fond diffus cosmologique subit une modification en intensité qui suit :

$$\Delta I \sim g\left(\frac{h\nu}{k_B T_0}\right)y \quad (208)$$

où g est une fonction connue qui donne la dépendance en fréquence de la distortion spectrale et où y désigne le facteur de 'comptonisation' de l'amas de galaxie :

$$y = \int n_e \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \sigma_T d\ell. \quad (209)$$

Cet facteur y décrit la physique interne de l'amas, comme sa densité électronique interne n_e ou sa température électronique T_e . Pour un amas typique ce facteur est petit et de l'ordre de 0.0001. La forme fonctionnelle de la dépendance spectrale de l'effet SZ, $g(x)$ ¹²⁵, présente un pivot pour une fréquence de l'ordre de 200 GHz, quelle que soit le redshift de l'amas : en deçà de cette fréquence, les photons du fond diffus peuvent être redistribués à des énergies supérieures. Une mesure précise des propriétés du CMB doit donc prendre l'effet SZ des amas en compte, tandis qu'à l'inverse cette distortion spectrale peut être utilisée pour détecter ces amas dans une carte du fond diffus. Pour finir, notons que si l'amas de galaxie est en mouvement, une distortion supplémentaire due s'ajoute à la précédente à cause de l'effet Doppler qui modifie la perception de la fréquence des photons du CMB. Cet effet est connu sous le nom d'effet SZ *cinétique* tandis que le précédent est connu sous l'effet d'effet SZ *thermique*. L'effet thermique est lié à l'agitation cinétique des électrons libres de l'amas, tandis que l'effet cinétique est lié au mouvement global de ces électrons, piégés dans l'amas en mouvement. Cet effet cinétique est typiquement au moins 10 fois plus faible que le précédent.

125. on peut montrer que $g(x) = x^4 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left(\frac{x}{\tanh(x/2)} - 4 \right)$.

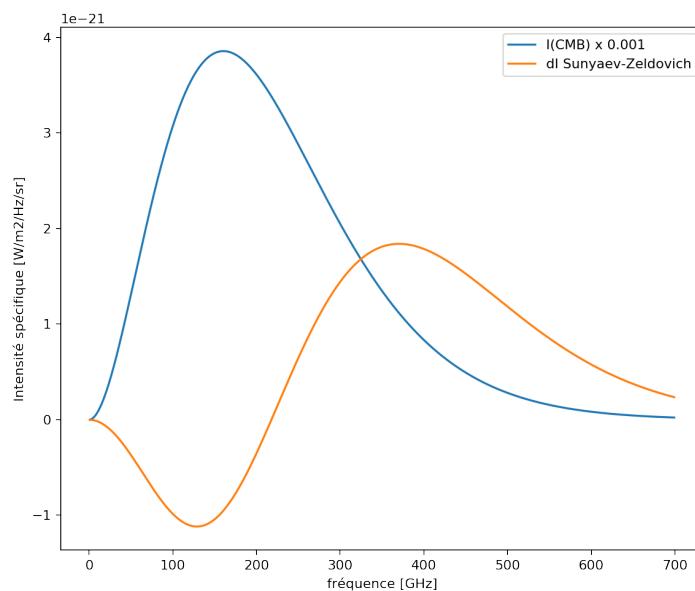


FIGURE 27: La présence de gaz chaud et ionisé dans les amas de galaxies à $z \sim 1$ est à l'origine d'une distortion du spectre du fond diffus, appelé *effet Sunyaev-Zel'dovich*. L'interaction entre les électrons énergétiques dans le gaz chaud intra-amas et les photons du fond diffus redistribue l'énergie de ces derniers vers les hautes énergies. La distortion associée en intensité spécifique est représentée ici en orange, pour un amas de galaxie typique avec une température électronique typique de $k_B T_e \sim 10$ keV. On note que l'amplitude de la distortion est faible, de l'ordre du millième par rapport à l'intensité non-modifiée du fond diffus (représentée ici en bleu)

Le lentillage gravitationnel cosmique Les grandes structures croisées par les photons du CMB au cours de leur parcours entre l'émission et leur réception vont modifier subtilement la distribution sur le ciel des anisotropies primaires par effet de lentille gravitationnelle. Une lentille résulte d'une déformation locale de la métrique par une lentille faite de matière (galaxie, amas, filaments, etc..) qui courbe la trajectoire des rayons lumineux et modifie donc l'apparence des sources d'arrière plan. Dans le cas du CMB, la lentille est constituée de toutes les grandes structures rencontrées au cours de l'histoire de l'Univers tandis que la source d'arrière plan est la source la plus reculée imaginable. Cet effet de lentille se manifeste essentiellement aux petites échelles et dans le spectre angulaire en polarisation, il nécessite donc des expériences CMB de grande résolution pour pouvoir être extrait. Il a récemment été mesuré par les expériences sol tels que le *South Pole Telescope* ou dans l'espace par *Planck*. Cette mesure est extrêmement importante car elle permet de mesurer de façon quasi indépendante les paramètres cosmologiques à partir de la croissance des grandes structures qui opère à des redshifts différents de la physique du CMB ($z \sim 2$). Elle permet une forte levée de dégénérescence des paramètres mesurés par les fluctuations de températures. Pour l'essentiel les paramètres contraints par le lentillage du CMB confirment les paramètres Λ CDM obtenus par le fond diffus.

La Matière Noire

Dans le modèle standard Λ CDM de la cosmologie, environ 80% de la contribution énergétique de la matière est due à une matière invisible sans interaction avec le rayonnement électromagnétique¹²⁶ : on la désigne sous le nom de *matière noire*. Elle est nécessaire pour expliquer notamment la distribution de matière aux plus grandes échelles, telle qu'elle est sondée par exemple par le fond diffus cosmologique ou les grands relevés de galaxies. Elle est de fait un ingrédient essentiel du processus de formation des grandes structures de l'Univers, étudié plus en détail dans un chapitre dédié. Mais avant d'étudier cette formation, nous allons dédier un court chapitre aux indices en faveur de l'existence de cette matière noire et les quelques propriétés dont on pense qu'elle est pourvue. Cette matière n'est toutefois pas sans poser problèmes, en particulier aux échelles galactiques : on décrira quelques-unes de ces difficultés ainsi que les pistes possibles d'une réduction des tensions que pose cette matière noire.

^{126.} on rappelle que la composition énergétique approximative de ce modèle est $\Omega_m \sim 0.3$; $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ et $\Omega_b \sim 0.045$

Matière noire et dynamique interne des structures

L'une des indications les plus populaires de l'existence de cette matière noire est la différence quasi-systématique entre la dynamique interne observée des grandes structures (galaxies, amas de galaxies) et celle prédictive par son contenu lumineux.

Courbe de rotation des galaxies

L'exemple le plus connu est celui de la courbe de rotation plate des galaxies. La courbe de rotation désigne la façon dont la vitesse de rotation de la matière dans un système auto-gravitant varie en fonction de la distance au centre de ce système. Par exemple, considérons une masse M ponctuelle : un corps en orbite circulaire de rayon r aura une vitesse de rotation donnée simplement par¹²⁷ :

$$V_r(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (210)$$

^{127.} il suffit de se rappeler que la force d'inertie centrifuge compense la force de gravitation $r\theta^2 = v^2/r = GM/r^2$

Ce comportement en $1/\sqrt{r}$ est par exemple celui observé dans le système solaire, où les corps les plus éloignés du Soleil sont aussi ceux qui orbitent le plus lentement (cf. Figure 28).

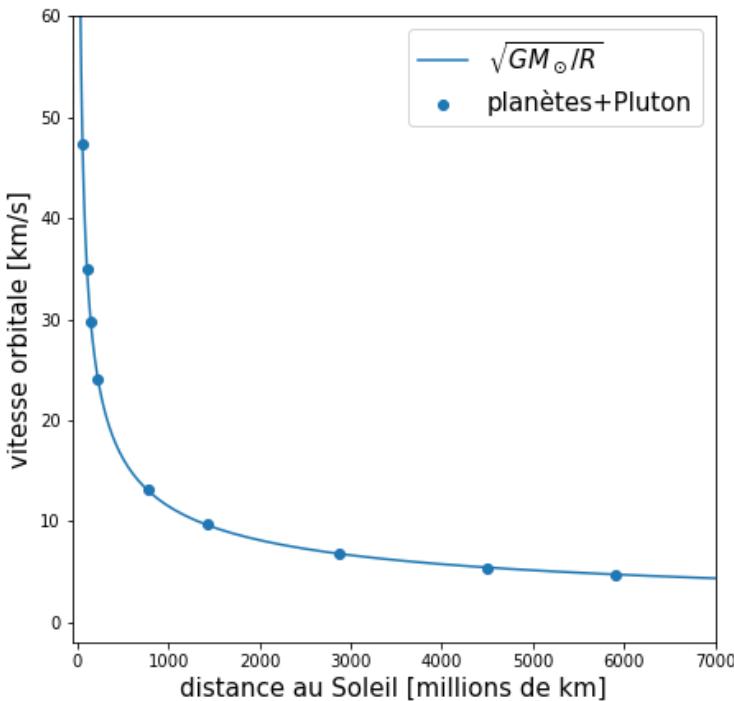


FIGURE 28: La vitesse de rotation des planètes du système solaire + Pluton en fonction de leur distance au Soleil : les points indiquent ces quantités pour les 9 corps en orbite autour du Soleil tandis que la ligne trace la vitesse attendue en fonction du rayon, compte tenue de la masse du Soleil. On obtient un comportement classique en $1/\sqrt{r}$.

Pour un système étendu avec un profil de masse la relation reste inchangée :

$$V_r(r) = \sqrt{\frac{GM(< r)}{r}}. \quad (211)$$

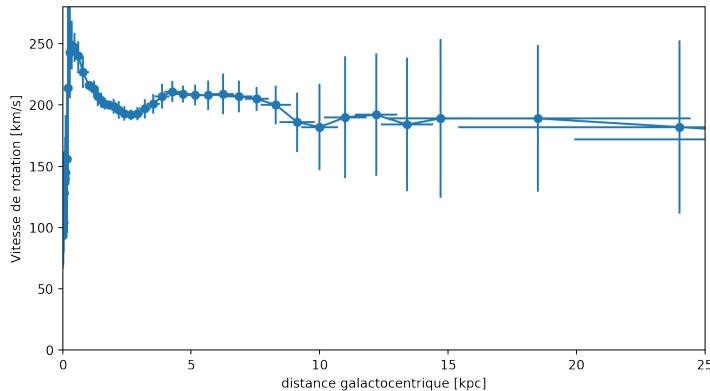
C'est la masse comprise à l'intérieur de l'orbite qui rentre en jeu : celle-ci peut augmenter avec le rayon¹²⁸, mais si il existe une distance au delà de laquelle cette masse ne varie plus¹²⁹, on retrouve la décroissance standard en $1/\sqrt{r}$ de la vitesse de rotation.

On peut faire le même exercice dans une galaxie ou dans la Voie Lactée, en mesurant la vitesse de rotation des étoiles ou de la composante gazeuse du disque. Le résultat obtenu pour la Voie Lactée est présenté dans la figure 29 : ce que l'on constate aisément c'est l'absence de décrochage de la vitesse de rotation dans la Galaxie et le maintien d'une vitesse constante, de l'ordre de 200 km/s, quelle que soit la distance considérée et ceci bien au delà de la limite du disque galactique (de l'ordre de 10 kpc). Ce type de courbe de rotation plate

^{128.} par exemple un système de densité homogène voit $M(< r) \sim r^3$ et donc $V_r \sim r$

^{129.} comme attendu pour un système de taille finie

est représentatif de la cinématique d'un grand nombre de galaxies de type disque dans l'Univers et indique que la distribution de la matière ne s'arrête pas aux limites du disque galactique mais s'étend au delà¹³⁰. Cette matière est invisible, plus étendue que la matière visible et permet le maintien de vitesses de rotation importantes de par son influence gravitationnelle : cette masse supplémentaire est nommée *matière noire*.



130. c'est l'interprétation la plus standard, d'autres possibilités sont discutées en fin de chapitre

FIGURE 29: La vitesse de rotation de la matière dans la Voie Lactée en fonction de sa distance au centre, avec leurs incertitudes. Les points de données sont issus de Sofue (2013). Cette *courbe de rotation plate* est représentative de la cinématique de la très grande majorité des galaxies de type disque dans l'Univers.

Un calcul rapide nous indique une masse dynamique pour la Voie Lactée de quelques $10^{11} M_{\odot}$, tandis que l'on estime la masse lumineuse (étoiles + gaz) à environ 10 fois moins : non seulement la cinématique oblige à considérer une masse supplémentaire invisible mais sa contribution se doit d'être dominante.

Amas de galaxies et théorème du viriel

Les galaxies de type disques ne sont pas les seules à présenter un désaccord entre la quantité de matière estimée par la production lumineuse et les sondes dynamiques. Historiquement¹³¹ ce type de désaccord a d'abord été mis en évidence dans les amas de galaxies : ces structures dont la taille typique est de l'ordre du Mégaparsec¹³² sont les plus grandes ayant pu se former au cours des 13 milliards d'années d'âge de l'Univers et peuvent contenir plusieurs centaines de galaxies.

Chacune de ces galaxies est animée d'une vitesse propre permettant d'estimer la dispersion de vitesse σ au sein de tels amas. Dans une situation d'équilibre, cette dispersion de vitesse est directement reliée à la masse totale du système. En effet, soit un système de N particules en interaction gravitationnelle¹³³, la particule i obéit au

131. dès 1933, par Zwicky

132. donc environ 100 fois plus grandes que les galaxies

133. chaque particule représente une galaxie de notre amas

principe fondamental de la dynamique

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}. \quad (212)$$

Cette relation est satisfaite pour toutes les particules. Multiplions-la par \vec{r}_i et additionnons toutes ces relations¹³⁴ :

$$\sum_i^N m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = - \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} \quad (213)$$

$$= - \sum_i^N \sum_j^{i-1} \frac{G m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \quad (214)$$

$$= E_{p,\text{total}}. \quad (215)$$

On obtient l'énergie potentielle totale du système, définie comme étant la somme de toutes les énergies potentielles créées par les paires individuelles, sans redondance. Le terme de gauche peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_i^N m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i^N m_i \vec{r}_i^2 - \sum_i^N m_i \left(\frac{d \vec{r}_i}{dt} \right)^2 \quad (216)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \sum_i^N m_i \vec{r}_i^2 - 2E_{c,\text{total}}. \quad (217)$$

On reconnaît l'énergie cinétique totale du système ainsi que la dérivée seconde du tenseur d'inertie par rapport au temps¹³⁵. Cette dernière quantité décrit la 'forme' du système : à l'équilibre la répartition des masses au sein du système doit rester constante et la dérivée du tenseur d'inertie doit être nulle. On obtient alors une expression du théorème du viriel

$$2E_{c,\text{total}} + E_{p,\text{total}} = 0. \quad (218)$$

Cette relation obtenue dans le cadre d'un système en interaction gravitationnelle n'est qu'une des multiples déclinaisons du théorème du viriel, que l'on retrouve dans de multiples contextes ayant trait à des systèmes à l'équilibre, en thermodynamique ou même dans le cadre de la mécanique quantique.

En supposant l'équilibre, on peut estimer la masse totale d'un système si l'on est capable d'estimer son énergie cinétique. Par exemple pour l'amas de Coma, on mesure une dispersion des vitesses $\sigma \sim 1000$ km/s pour ses galaxies membres dans un rayon d'environ 3 Mégaparsecs. Une application rapide du théorème de viriel permet d'écrire¹³⁶ :

$$3M\sigma^2 \sim \frac{3GM^2}{5R} \quad (219)$$

^{134.} le passage de la 1ère à la 2ème ligne s'obtient en considérant la double somme comme la somme des deux parties triangulaires identiques au signe près d'une matrice NxN de diagonale nulle

^{135.} plus précisément la dérivée de la trace du tenseur d'inertie

^{136.} le facteur 3 dans l'énergie cinétique suppose une dispersion de vitesse isotrope dans les 3 directions tandis que l'énergie potentielle est celle d'un corps homogène

conduisant à une estimation de sa masse de l'ordre de :

$$M \sim \frac{5R\sigma^2}{G} \sim 3 \times 10^{15} M_{\odot}. \quad (220)$$

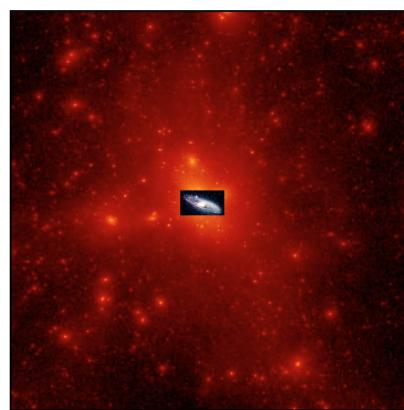
Or on estime la masse lumineuse (dans les galaxies et sous la forme de gaz intra-amas) totale de l'amas de Coma à environ 1/10ème de cette valeur. Ce désaccord entre masse dynamique et masse lumineuse est systématique dans les grands amas et illustre à nouveau le besoin d'une matière pesante non lumineuse en grande quantité.

Halos de matière noire

Les deux courts exemples précédents impose une image multi-phases des galaxies et des amas de galaxies : schématiquement une galaxie se compose d'une partie lumineuse composée d'étoiles, de gaz, de poussière et une partie sombre composée de matière noire. L'ajustement de modèles sur la dynamique observée des galaxies et des amas indique que cette matière est organisée en une composante plus étendue et moins dense que celle qui rayonne : les galaxies sont entourées d'un *halo de matière noire*. Par exemple pour une galaxie comme la Voie Lactée, la masse de son halo est de l'ordre de $10^{11} - 10^{12} M_{\odot}$ et son étendue est de l'ordre de quelques centaines de kiloparsecs. Rappelons qu'à proximité se trouve la galaxie d'Andromède légèrement plus massive et à une distance de 800 kiloparsecs environ : compte tenu de la faible séparation entre ces 2 objets, il est probable que les halos de ces 2 galaxies soient en contact.



Ce que l'on voit



Ce qui serait

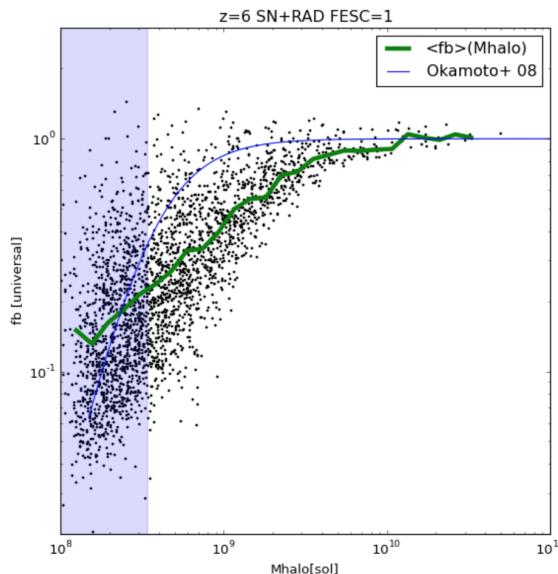
FIGURE 30: Vue schématique d'une galaxie et de son halo de matière noire. A gauche la partie lumineuse d'une galaxie, à droite la galaxie avec son halo de matière noire environnant (issue d'une prévision de simulation numérique), invisible et représentant environ 90% de sa masse totale. La figure n'est pas tout à fait à l'échelle puisque les modèles prédisent des halos de matière noire environ une dizaine de fois plus étendus que les galaxies qu'ils hébergent.

Le rapport de masse entre la composante lumineuse et noire est d'environ 1/10ème en défaveur de la matière lumineuse. Ce chiffre

n'est pas si étonnant si l'on considère le rapport cosmique de la densité d'énergie de la masse baryonique et de la masse totale :

$$f_b = \Omega_b / \Omega_m \sim 0.15. \quad (221)$$

Ce rapport est appelé *la fraction baryonique* on retrouve le même ordre de grandeur que celui estimé précédemment. Pour l'essentiel, galaxies et amas ne font que conserver ce rapport universel. Ce n'est toutefois pas le cas des galaxies de très faible masse ($< 10^{10} M_\odot$) : les modèles et les observations indiquent des fractions baryoniques plus faibles que la fraction universelle pour ces objets qui ne parviennent pas à piéger le gaz de façon aussi efficace que les structures plus massives¹³⁷. Ces petits objets sont particulièrement sensibles



^{137.} par exemple la petite galaxie de *Draco* possède une masse totale environ 400 fois supérieure à ce qui est attendu

FIGURE 31. La fraction baryonique prédictive par une simulation numérique (points) et par un modèle de Okamoto+08 (ligne) environ 1 milliards d'années après le Big-Bang. On note le départ de cette fraction à la valeur universelle pour les objets de petite masse.

aux effets astrophysiques tels que l'éjection de gaz par l'explosion d'étoiles en supernovae ou le chauffage par le fond de rayonnement UV cosmique¹³⁸. Ils sont fortement dominés par la matière noire et sont donc des lieux idéaux pour l'étude de ses propriétés.

Matière Non-Collisionnelle

On sait peu de choses sur la matière noire, si ce n'est qu'elle n'interagit pas avec le champ électromagnétique (par définition) et ne ressent que la force de gravitation. Par conséquent, un ensemble de particules de matière noire se comporte de façon similaire à un ensemble d'étoiles en interactions mutuelles et tous les outils de la dynamique des systèmes stellaires peut s'appliquer à un système composé de matière noire.

^{138.} cf. le chapitre simulation

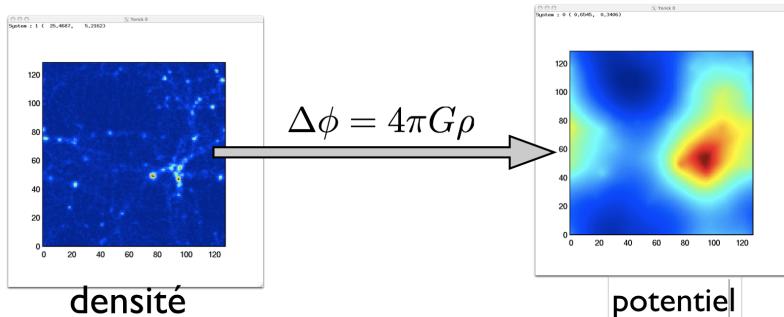
Ces systèmes dont la cohésion et la dynamique sont régies par la gravitation partagent la particularité d'être *non collisionnels*. La non collisionnalité est une propriété assez générique des systèmes auto-gravitant¹³⁹ et dont on peut saisir la nature par un examen de l'équation de Poisson¹⁴⁰ :

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = 4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (222)$$

Cette équation constitue l'équation de champ de la gravitation newtonienne et décrit explicitement la densité comme étant la dérivée seconde du potentiel. Cette relation n'est pas sans conséquences sur la forme du potentiel : une telle relation implique que le potentiel est une version *lissée* de la densité. En effet, la dérivée seconde d'une fonction quelconque est toujours plus 'bruitée' que la fonction d'origine. On peut aussi s'en rendre compte en prenant la transformée de Fourier de l'équation de Poisson pour trouver la relation entre un mode de fréquence $k = 2\pi/\lambda$ du potentiel et celui de la densité¹⁴¹ :

$$-k^2\phi_k = 4\pi G\rho_k. \quad (223)$$

La relation gagne en simplicité en devenant scalaire et on constate que chaque mode de densité est *amplifié* d'un facteur k^2 et cette amplification est d'autant plus forte que k est grand : le poids des modes à grande fréquence spatiale va s'en trouver augmenté par rapport à ceux aux basses fréquences et le signal de la densité est plus bruité que celui du potentiel. Inversement, le potentiel est une version lissée de la densité de matière.



^{139.} car il existe des exceptions, comme les amas stellaires dits globulaires qui peuplent les halos stellaires des galaxies et qui ne rentrent pas dans le cadre qui nous intéresse ici

^{140.} ϕ désigne le potentiel gravitationnel tandis que ρ désigne le champ de densité de matière

^{141.} si $\tilde{f}(k)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$, on rappelle que $\tilde{f}'(k) = ik\tilde{f}(k)$

FIGURE 32: Une illustration du lien entre densité et potentiel, via l'équation de Poisson. La vignette de gauche montre la densité de matière dans une simulation cosmologique de 12 Mpc de côté, celle de droite montre la carte du potentiel gravitationnel produite par cette densité. Le potentiel est une version filtrée de la densité.

Le potentiel étant lisse, la dynamique ressentie par une particule de matière noire est sensible aux grandes échelles et non pas aux aspérités locales du champ de densité. La trajectoire d'une particule parmi ses semblables ne sera pas heurtée (comme elle le serait si elle était l'objet de *collisions*) mais tendue et sans à-coups. On parle de système non-collisionnel.

On peut avoir une estimation un peu plus quantitative de cette non-collisionnalité. Considérons d'abord un système de N particules chacune de taille r . La section efficace d'interaction directe est $\sigma = 4\pi r^2$. Le libre parcours-moyen¹⁴² est donné par :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{4\pi R^3}{3N\sigma} \quad (224)$$

où R désigne la taille du système. Si la vitesse typique d'une particule est v , le temps entre 2 collisions est donné par :

$$t_c = \frac{\lambda}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{t_{\text{crois}}}{N} \quad (225)$$

où le temps de croisement $t_{\text{crois}} = R/v$ est la durée nécessaire pour traverser le système. Pour un 'gaz d'étoiles' comme la Voie Lactée on a $t_c \sim 10^{21}$ ans¹⁴³ : comme ce temps est très supérieur à l'âge de l'Univers, il n'y a pas de collisions entre étoiles dans un système comme la Voie Lactée. Pour la matière noire, à priori faite de particules élémentaires très nombreuses, le temps de collision est encore plus grand. Bien sûr, cela concerne uniquement les collisions directes entre étoiles et il faut également prendre en compte les interactions à grande distance qui sont susceptibles de modifier la trajectoire des particules massives via la gravitation. De fait on peut montrer qu'il suffit qu'une étoile passe à une distance b donnée par¹⁴⁴ :

$$b \sim \frac{2Gm}{v^2} \sim R/N \quad (226)$$

pour que la variation de vitesse induite par la gravitation soit du même ordre que la vitesse v elle-même. Cette quantité est un paramètre d'impact qui augmente avec la vitesse : des étoiles rapides nécessitent des approches à courte distance pour ressentir une déviation substantielle, tandis que des étoiles lentes se font plus facilement perturber à plus grande distance. Si l'on remplace r par b dans l'expression du temps de collision (Eq. 225), on obtient une estimation du temps entre 2 interactions de ce type :

$$t_b = \left(\frac{R}{b}\right)^2 \frac{t_{\text{crois}}}{N} \sim N t_{\text{crois}}. \quad (227)$$

Pour une galaxie comme la Voie Lactée, t_{crois} est de l'ordre de 10^8 ans, donc ce temps t_b reste toujours extrêmement long. Enfin, on peut également refaire cette évaluation en ne considérant pas une seule interaction à une distance b mais toutes les interactions plus faibles mais plus nombreuses qui se produisent à une distance comprise entre b (le cas le plus intense) et R (la plus grande distance possible entre une particule et sa voisine). Le temps nécessaire pour que cela

142. la distance parcourue entre 2 interactions, qui est d'autant plus courte que les interactions sont fortes (σ élevé) ou les densités importantes (n élevé)

143. on peut prendre $R = 10$ kpc, $v \sim 200$ km/s, $r \sim 700000$ km comme rayon solaire et $N \sim 10^{10}$.

144. la deuxième équivalence s'obtient en appliquant le théorème du viriel

conduise à une variation de vitesse équivalente à la vitesse typique est appelé *temps de relaxation* et il est légèrement plus court que le précédent :

$$t_{\text{relax}} = \frac{N}{10 \log N} t_{\text{crois.}} \quad (228)$$

Pour une Voie Lactée on obtient $t_{\text{relax}} \sim 10^{15}$ ans pour sa composante stellaire : cela reste largement supérieur à l'âge de l'Univers et les étoiles n'ont pas perdu la mémoire de leur vitesses initiales, le système est non-collisionnel. Comme les particules de matière noire sont supposées bien plus nombreuses que les étoiles, la même conclusion s'impose à cette composante et la matière noire est non-collisionnelle.

Cela n'est pas sans conséquence sur la dynamique interne des halos de matière noire. A cause de la non-collisionnalité, les temps de mélange sont extrêmement longs et bien moins efficaces que les mélanges hydrodynamiques qui opèrent dans le gaz par exemple. On s'attend par exemple à ce que les structures de matière noire persistent sur des temps longs ou bien qu'elle puissent se croiser lors de fusions sans trop de dégâts. Les baryons (présents sous forme de gaz) possèdent une pression qui est la manifestation macroscopique de collisions microscopiques¹⁴⁵ : cette composante peut présenter des chocs hydrodynamiques et se mélanger fort efficacement. Compte tenu de sa nature non-collisionnelle, ce n'est pas ce qui est attendu de la part de la matière noire.

¹⁴⁵. qui découlent de l'interaction électromagnétique entre atomes ou molécules

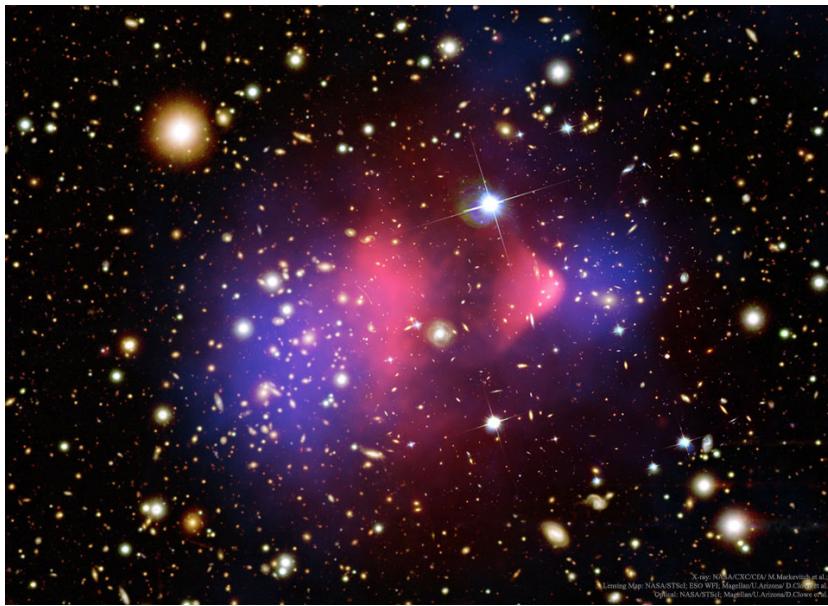


FIGURE 33: Le *Bullet Cluster*. Cette image superpose l'image optique de 2 amas en collisions, la carte de la distribution de masse (en violet) et la carte de la distribution de gaz (en rose). On distingue parfaitement le choc hydrodynamique dû à la collision et la séparation en 2 composantes l'une ayant choqué (les baryons), l'autre n'ayant pas subi de collision forte comme attendu pour la matière noire. Credit : Carte X : NASA/CXC/CfA/ M. Markevitch et al. ; Lensing : NASA/STScI; ESO WFI; Magellan/U.Arizona/ D.Clowe et al. Optique : NASA/STScI; Magellan/U.Arizona/D.Clowe et al.

Cette différence de comportement a peut-être été observée dans le *Bullet cluster* présenté dans la Figure 33. C'est une région du ciel

dans laquelle 2 amas de galaxies sont entrés en collision. On y a superposé la distribution de gaz (sondée par son rayonnement X) et la distribution de masse totale (gaz+autre). On distingue aisément dans la composante gazeuse le choc hydrodynamique dû à la collision avec une forme en arc caractéristique. On constate également aisément que la masse n'est pas superposée à l'émission du gaz, comme si l'essentiel de la masse avait pu parcourir une distance plus grande que celle des baryons lors du choc : c'est exactement le comportement attendu pour la matière noire non-collisionnelle dont on rappelle qu'elle doit dominer largement le bilan en masse. Lors de leur collision, la partie gazeuse des 2 amas a choqué et freiné tandis que la composante matière noire non collisionnelle a pu poursuivre sa route et se découpler des baryons.

Lentilles gravitationnelles

Nous venons de mentionner que la masse totale du Bullet Cluster ne présente pas la même distribution que celle de la masse baryonique : mais au fait comment fait-on pour trouver la distribution de masse totale ? La réponse se trouve dans l'utilisation de l'effet de *lentilles gravitationnelles*. Ce terme désigne les déformations créées par un objet massif sur la trajectoire des rayons lumineux émis par des objets d'arrière plans : ces déformations vont induire une modification de la perception de ces objets de fond.

Il existe toute une littérature dédiée à ce phénomène, nous allons ici présenter rapidement quelques bases dans le régime simple des lentilles minces. On considère 2 plans à 2 dimensions : le plan source où se trouvent les objets d'arrière-plan sur le ciel et à l'intérieur duquel les positions sont déterminées à l'aide d'un vecteur 2D $\vec{\beta}$, et le plan de la lentille, à l'intérieur duquel les déflections des rayons lumineux vont avoir lieu et où les positions sont déterminées à l'aide d'un autre vecteur 2D sur le ciel $\vec{\theta}$. Une image à la position $\vec{\theta}$ peut être reliée à un point du plan source via *l'équation des lentilles*

$$\vec{\beta}(\vec{\theta}) = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \quad (229)$$

Ici $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ désigne l'angle de déflection subi par le rayon lumineux qui tape le plan de la lentille à cette position : cet angle est lié à la distribution de matière dans la lentille et l'étude de la déformation des images d'arrière-plan permet de remonter à cette quantité et donc à la structure de la lentille. En effet, on peut écrire l'angle de déflection comme le gradient d'un potentiel 2D de lentille $\psi(\vec{\theta})$:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \nabla \psi(\vec{\theta}). \quad (230)$$

Ce potentiel satisfait également un analogue à l'équation de Poisson

$$\Delta\psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta}) \quad (231)$$

où $\kappa(\vec{\theta})$ s'appelle la convergence : cette quantité mesure la déformation isotrope des sources de fond et est directement reliée à la densité de matière 2D projetée $\Sigma(\vec{\theta})$ ¹⁴⁶ :

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_c}. \quad (232)$$

In fine, la mesure des déformations permet de remonter à la densité de matière projetée, via la modélisation de lentilles gravitationnelles. Le coeur de cette modélisation est le potentiel 2D projeté $\psi(\vec{\theta})$ et au vu de la relation entre l'angle de déflection et ce potentiel, $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ apparaît comme l'analogue du champ de 'force' 2D. Au passage, le fait que l'on travaille à 2 dimensions n'est pas sans conséquences : par exemple une masse projetée ponctuelle va produire un champ de déflection $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \sim 1/\theta$ et un potentiel $\psi \sim \log \theta$. En 3D, la même masse ponctuelle aurait produit respectivement un champ de force en $1/r^2$ et un potentiel en $1/r$: le fait de projeter les masses et par extension toutes les quantités va 'lisser' les comportements auxquels nous sommes habitués à trois dimensions.

On peut montrer que si la convergence est telle que $\kappa > 1$ une même source peut avoir de multiples images : on parle alors de régime de lentilles fort¹⁴⁷, le cas inverse étant celui de faibles déformations dit de lentilles faibles¹⁴⁸. Par ailleurs, on peut définir une matrice de déformation $A_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j}$: le grossissement est alors donné par :

$$\mu(\vec{\theta}) = \frac{1}{(1 - \kappa(\vec{\theta}))^2 - |\vec{\gamma}(\vec{\theta})|^2} \quad (233)$$

où γ désigne le cisaillement¹⁴⁹, c'est à dire une mesure de la déformation anisotrope¹⁵⁰. On note que le grossissement peut être infini et l'ensemble des points du plan lentille où $1/\mu = 0$ est appelé *lignes critiques* : lorsque l'on ramène ces lignes critiques dans le plan source, via l'équation des lentilles, on obtient ce qu'on appelle les caustiques. A chaque fois qu'une source traverse un jeu de caustiques, son nombre d'images augmente de 2, tandis qu'une source placée exactement sur une caustique va voir son image extrêmement déformée.

Notons qu'il existe des configurations sources-lentilles qui donnent des images particulièrement spectaculaires. Par exemple, dans le cas d'une lentille à symétrie de révolution autour de l'axe optique, la présence d'une source d'arrière plan exactement sur cet axe conduit à un *anneau d'Einstein* où la déformation de la source est telle qu'elle apparaît comme un anneau, continu, le long d'une ligne critique. Toute

^{146.} Ici Σ_c désigne une densité surfacique 'critique' qui dépend de la configuration du banc optique (distance observateur-lentille, lentille-source) ainsi que de la cosmologie

^{147.} strong lensing

^{148.} weak lensing

^{149.} on parle de 'shear' en anglais

^{150.} les 2 composantes du cisaillement sont données par $\gamma_1 = (A_{11} - A_{22})/2$ et $\gamma_2 = A_{12} = A_{21}$.

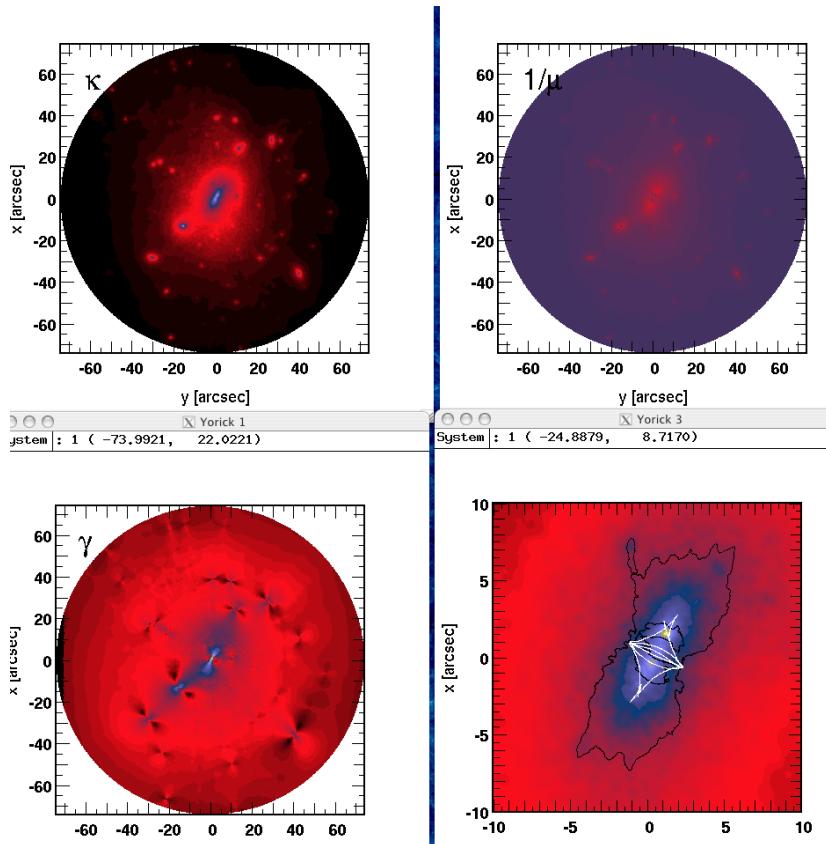


FIGURE 34: Exemple de quantités calculées pour une lentille arbitraire. Le panneau supérieur gauche montre la densité projetée de la lentille créée par un halo de matière noire simulé, analogue à sa convergence κ . Le panneau inférieur gauche montre la distribution du cisaillement tandis que le panneau supérieur droit montre l'inverse du grossissement. Les lieux où l'inverse du grossissement est nul constituent les lignes critiques dans le plan lentille (montrées en noir sur le panneau inférieur droit) tandis que les lignes caustiques associées, dans le plan lentille, sont indiquées en blanc.

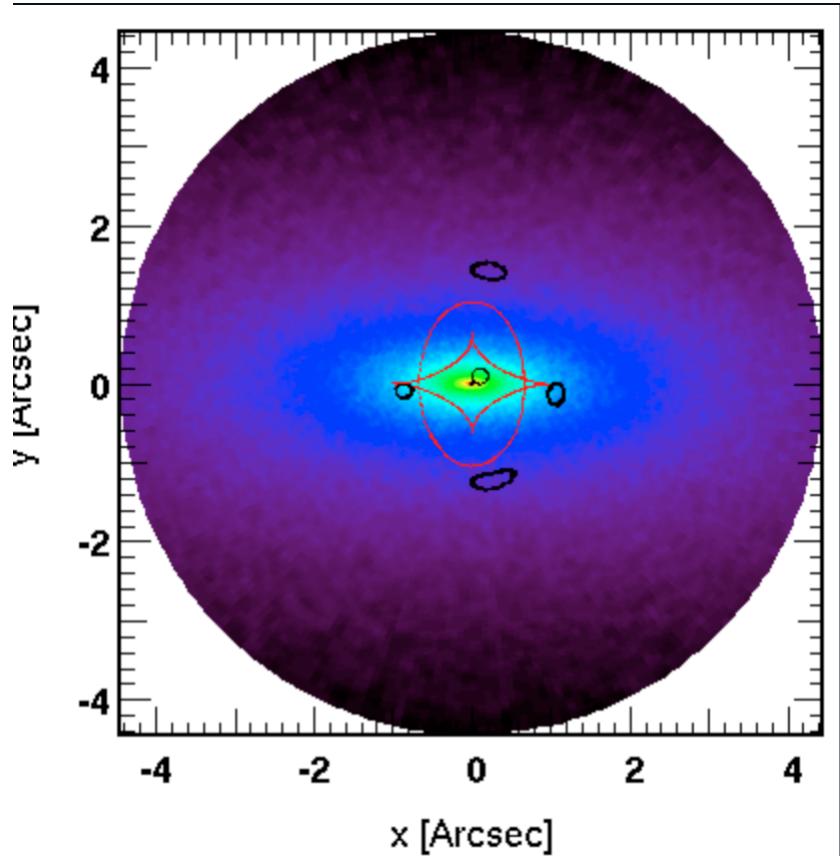


FIGURE 35: Cette image montre les images produites par la source circulaire placée au quasi-centre de l'image (contours noirs). Cette source produit 5 images, les 4 situées en croix + une centrale quasi indistinguable. Les couleurs indiquent la distribution de matière dans une lentille elliptique, tandis que les lignes rouges montrent les positions des caustiques dans le plan source. Dans ce cas précis, la source, le centre de la lentille et l'observateur sont tous quasiment alignés le long de l'axe optique.

spectaculaire qu'elle soit, ce type de configurations est régulièrement observé dans le ciel. Si le même alignement se présente pour une lentille anisotrope (aplatie dans une direction par exemple), cet anneau se 'brise' et produit de multiples images de la source d'arrière-plan : on peut alors obtenir l'effet de 'croix d'Einstein', où chaque image se trouve aux extrémités d'une croix fictive centrée sur l'axe optique (voir figure 35).

Matière noire et fond diffus cosmologique

Les discussions précédentes ont porté sur l'influence dynamique de la matière noire sur les structures telles que les galaxies ou les amas. Il s'avère que l'évidence la plus forte quant à l'existence d'une telle matière est plutôt à trouver du côté du fond diffus cosmologique. Comme indiqué dans le chapitre dédié¹⁵¹, la structure spatiale du fond diffus cosmologique trace la structure spatiale des baryons, du gaz ionisé, au moment de la recombinaison. Cette structure révèle la présence d'ondes sonores parcourant le plasma à ces époques¹⁵². Ces ondes sont supportées par la pression de rayonnement, support autorisé par le fort couplage entre les baryons et le rayonnement avant la Recombinaison. Ce couplage est toutefois imparfait, les photons possèdent un libre parcours moyen non-nul qui conduit à un amortissement progressif de ces ondes, notamment celles correspondant aux plus petites échelles spatiales et aux plus grandes fréquences temporelles d'oscillation. Cet effet, connu sous le nom *d'amortissement Silk*, efface les surdensités de petites tailles et doit en principe empêcher l'émergence de structures de masse inférieure à $M \sim 10^{13} M_{\odot}$: une structure comme la Voie Lactée n'aurait ainsi pas dû apparaître ! La matière noire fournit un contrepoint à cet amortissement car elle agit comme un fond de potentiel gravitationnel en effondrement continu : tandis que la distribution de gaz voit ses surdensités se faire effacer, la distribution de matière noire voit ses surdensités croître car insensibles aux effets de pression radiative et d'amortissement Silk. Au moment de la perte du support de pression radiative, les baryons trouvent un champ de gravitation plus fort que celui qu'ils auraient créé s'ils avaient été seuls et profitent de ce champ pour faire ré-émerger des surdensités fortement amorties : le gaz 'coule' dans les trous de champ gravitationnel créés par la matière noire.

^{151.} cf. Chapitre XX

^{152.} ces ondes sont les oscillations baryoniques accoustiques décrites à plusieurs reprises dans cet ouvrage

LA STRUCTURE DU FOND DIFFUS, telle qu'elle est mesurée sur la surface de dernière diffusion, laisse transparaître ce rôle important de la matière noire (voir Fig. 36). Son spectre de puissance angulaire C_{ℓ} mesuré par Planck présente ainsi des pics secondaires d'ampli-

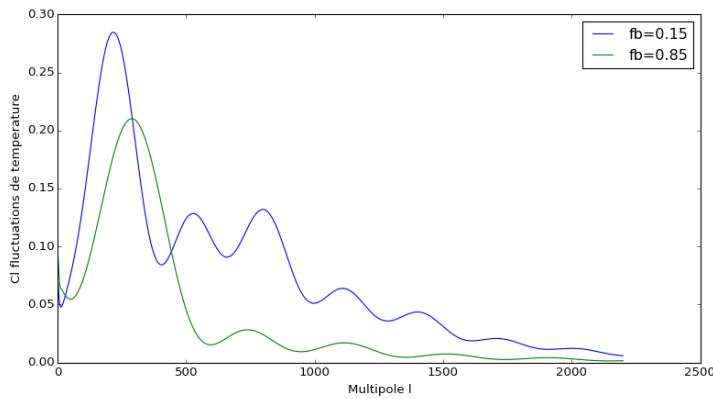


FIGURE 36: Deux modèles de spectre de puissance angulaire du fond diffus cosmologique. L'un possède une fraction de baryon faible, conforme au modèle standard Λ CDM, l'autre possède une fraction de baryon forte, où la contribution de la matière noire et celle des baryons est inversée par rapport au modèle standard. On note l'effet de l'amortissement Silk important aux petites échelles angulaires (grand ℓ) dans le cas d'un Univers dominé par les baryons. A l'inverse, le modèle standard présente des pics secondaires importants traduisant l'entretien des oscillations baryoniques par le champ de gravité de la matière noire.

tudes substantielles, bien plus importantes que celles qui auraient été obtenues dans une Univers avec seulement des baryons. On note en particulier la hauteur importante du troisième pic, qui est une forte indication sur la présence d'une matière non couplée par le rayonnement et qui ne subit pas d'amortissement spectaculaire. Remarquons enfin que l'amortissement Silk reste présent, mais sa force est atténuée par rapport à un modèle composé uniquement de baryons. Cette amplitude importante de pics secondaires est très difficile à expliquer sans invoquer une matière à faible interaction avec le rayonnement et de fait la structure spatiale du fond diffus cosmologique est un argument très important en faveur de l'existence de cette matière inconnue : la physique qui y opère est relativement simple, proche du régime linéaire et très bien connue au contraire de la physique plus complexe des galaxies et des amas, qui laissent plus de place à des interprétations alternatives.

Matière Noire Froide

LE MODÈLE STANDARD de la cosmologie considère également que la matière noire est *froide*. Ce terme permet d'indiquer que la vitesse typique de ces particules est faible, les qualifiant de fait comme des particules non-relativistes. Le qualificatif 'froid' provient de l'analogie entre dispersion de vitesse et température des particules dans un gaz, où l'énergie cinétique typique vaut :

$$m\sigma^2 \sim k_B T. \quad (234)$$

Le régime non-relativiste, où $\sigma \ll c$ implique par extension une température basse et donc froide. Ce terme de matière noire froide

est à mettre en opposition avec la matière noire chaude, composée de particules relativistes possédant des vitesses caractéristiques proches de celle de la lumière. Un candidat naturel à de la matière noire chaude aurait été le neutrino : cette particule interagit peu avec les autres particules, n'intéragit pas avec le rayonnement, satisfaisant ainsi les qualités fondamentales de la matière noire. Le neutrino est aussi une particule très légère et relativiste, lui conférant des vitesses caractéristiques élevées et une cinématique 'chaude'.

Masse de Jeans : cas d'un système non-collisionnel

LE CARACTÈRE CHAUD ou froid de la matière noire a des conséquences sur le types de structures que l'on peut construire avec cette matière. En effet les grandes dispersions de vitesses attendues dans le cas d'une matière noire chaude l'empêche de former des petites structures peu massives sous l'effet de la gravitation : il faut qu'une structure ait une masse suffisante pour que son 'poids' puisse s'opposer à l'effet de dispersion dû aux vitesses de particules. Cette masse critique se nomme la masse de Jeans¹⁵³.

L'expression de la Masse de Jeans pour un système non collisionnel peut s'obtenir en considérant l'équation qui décrit l'évolution dynamique d'un tel système, *l'équation de Boltzmann*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (235)$$

Cette équation est juste la traduction de la conservation dans l'espace des phases de la *fonction de distribution* $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ de notre fluide non-collisionnel. Cette fonction décrit la distribution des éléments de notre système au cours du temps, à différentes vitesses et positions. Par exemple la densité de particules et l'impulsion à une position \vec{x} sont données par :

$$\rho(x, t) = \int d\vec{v} f, \quad (236)$$

$$\rho\vec{v}(x, t) = \int d\vec{v} \vec{v} f. \quad (237)$$

L'équation de Boltzmann est très générique et son intégration peut conduire par exemple à l'équation de conservation de la masse¹⁵⁴ ou de l'impulsion¹⁵⁵. L'absence de collisions est à l'origine du terme source égal à zéro et de la conservation de la fonction de distribution.

DANS LE RÉGIME DES FAIBLES PERTURBATIONS, on peut linéariser l'équation de Boltzmann en ne considérant que de faibles perturbations $f_1 \ll f_0$ à la fonction de distribution, où $f_0(\vec{v}, t)$ est la fonction de distribution homogène à l'équilibre. On obtient¹⁵⁶ :

^{153.} on la retrouvera dans une approche fluide dans le chapitre sur les grandes structures

^{154.} en intégrant sur les vitesses $\int d\vec{v}$

^{155.} en intégrant sur les vitesses en $\int d\vec{v}\vec{v}$

^{156.} en pratique on obtient l'équation linéarisée en injectant $f_0 + f_1$ dans l'équation de Boltzmann, tout en tenant compte du fait que f_0 par définition satisfait sa propre équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vec{x}} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (238)$$

Le potentiel gravitationnel perturbé $\Phi_1(\vec{x}, t)$ apparaît en considérant le principe fondamental de la dynamique¹⁵⁷.

Dans quel cas a-t-on une perturbation stable ? Intuitivement, on peut considérer que la situation est stable si f_1 oscille autour d'une valeur nulle. La transposition de cette intuition consiste à développer la perturbation (et le potentiel associé) comme une onde plane¹⁵⁸ et considérer les conséquences de cette hypothèse au travers de l'équation de Boltzmann

$$f_1 = F_1(\vec{v}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (239)$$

$$\Phi_1 = P_1 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}. \quad (240)$$

L'équation de Boltzmann linéarisée devient alors :

$$(\vec{k}\vec{v} - \omega)F_1 - P_1 \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (241)$$

Par ailleurs le potentiel satisfait l'équation de Poisson¹⁵⁹ donc la relation suivante s'applique :

$$-k^2 P_1 = 4\pi G \int d\vec{v} F_1. \quad (242)$$

On obtient alors une relation de dispersion reliant la fréquence spatiale k et la pulsation ω sous forme intégrale :

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}}{\vec{k}\vec{v} - \omega} d\vec{v} = 0. \quad (243)$$

En principe, la résolution de cette équation doit nous permettre de dégager les solutions stables (avec ω réel) et les solutions instables (avec ω imaginaire¹⁶⁰). Toutefois, cette résolution est complexe et technique, en particulier du fait de la présence du terme $\vec{k}\vec{v} - \omega$ au dénominateur de l'intégrand qui rend possible l'apparition de solutions 'catastrophiques' ou résonantes. Ce type de situation est typique de la dynamique de systèmes non collisionnels et nécessite un traitement mathématique rigoureux que nous n'allons pas faire ici. Ceci étant, on peut considérer que la solution $\omega = 0$ doit constituer la transition entre régime stable et instable.

Posons $\omega = 0$ et mettons nous dans le cas simple d'une fonction de distribution 'thermique'¹⁶¹ à l'équilibre :

$$f_0(v) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2} \quad (244)$$

où ρ_0 désigne la densité de matière moyenne et $\sigma \sim \sqrt{k_B T}$ sa dispersion de vitesse. Prenons arbitrairement le mode $\vec{k} = (k_J, 0, 0)$ en cartésien et l'on obtient alors¹⁶² :

^{157.} $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi_1$

^{158.} de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et de période $T = 2\pi/\omega$

^{159.} $\Delta\Phi_1 = 4\pi G\rho$

^{160.} qui transforme l'exponentielle complexe oscillante en exponentielle réelle croissante

^{161.} Maxwellienne

^{162.} Rappel $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1$

$$1 - \frac{4\pi G\rho_0}{k_J^2\sigma^2} = 0. \quad (245)$$

La transition vers le déséquilibre, donc la perte du comportement oscillant qui conduit vers l'effondrement gravitationnel, est donc caractérisée par :

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \frac{\pi\sigma}{\sqrt{G\rho_0}}. \quad (246)$$

Il existe une longueur typique λ_J où l'onde passe dans un régime d'instabilité. C'est la longueur de *Jeans* pour un système non collisionnel qui constitue la taille *minimale* que doit avoir une fluctuation pour être instable et donc s'effondrer gravitationnellement.

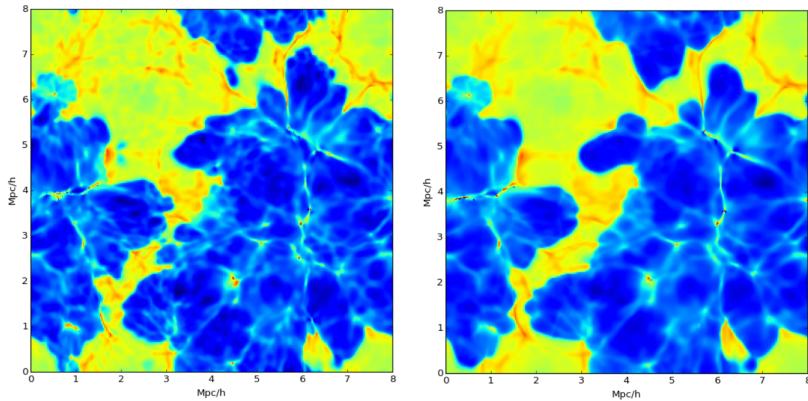


FIGURE 37: Deux simulations de la densité de gaz dans un volume d'Univers de 8 Mpc de côté, l'un avec de la matière noire froide (à gauche) l'autre avec de la matière noire chaude (à droite). On constate une granulosité plus importante dans le cas de la matière noire froide. Les régions bleues sont ionisées et les jaunes sont neutres, sans impact pour la discussion ici.

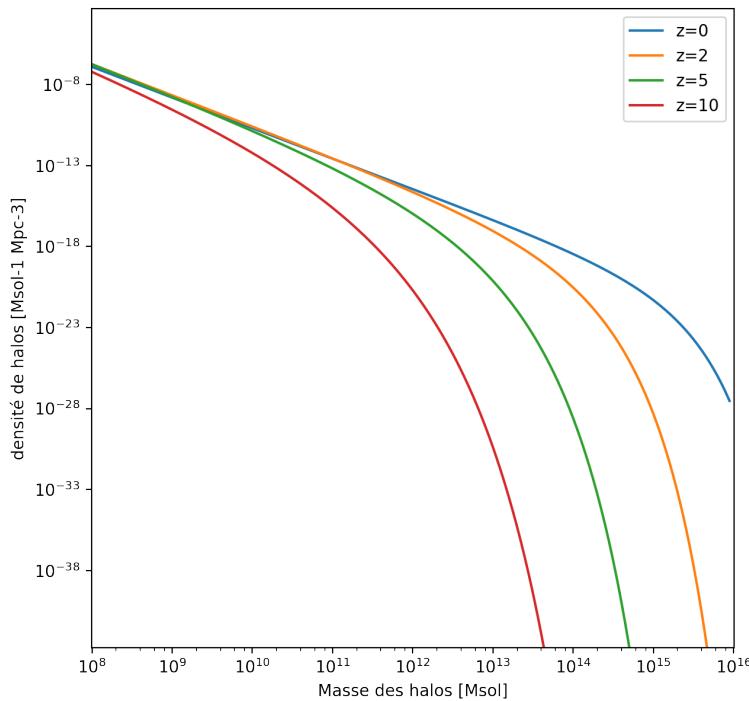
On voit aisément que cette taille λ_J augmente si la dispersion de vitesse augmente, par conséquent un système chaud créera des structures de grande taille. A l'inverse un système froid pourvu d'une faible dispersion de vitesse, à densité moyenne équivalente, sera capable de produire des structures instables de plus petites taille car la longueur de Jeans est plus faible. De la matière noire froide fera des petites structures, la matière noire chaude plutôt des grandes car elles seules sont assez massives pour contrer la grande dispersion de vitesse.

C'est une propriété que l'on peut reproduire dans des simulations numériques par exemple (voir Fig. 37) et le confrontation des modèles avec les observations permet de mettre une contrainte sur la température de la matière noire. Les résultats sont sans appel : la matière noire doit être froide et non relativiste. En effet le défaut de petites structures dans les modèles de matière noire chaude, en particulier ceux à base de neutrinos, ne permettent pas de reproduire l'abondance des galaxies observées autour de nous.

Halos de matière noire et galaxies : difficultés

LES HALOS DE MATIÈRE NOIRE HÉBERGERAIENT LES GALAXIES en leur sein. Par conséquent, il apparaît naturel d'extrapoler les prédictions faites sur les populations de halos (invisibles) aux populations de galaxies (visibles). Ceci est d'autant plus tentant que la physique de la matière noire est simple, car uniquement régie par la force de gravitation, tandis que celle devant conduire à la partie visible des galaxies fait intervenir une physique beaucoup plus complexe¹⁶³. Toutefois, le succès des modèles à base de matière noire aux grandes échelles (structure du CMB, distribution de masse dans les amas) ne se transposent pas facilement aux échelles galactiques, et nous allons mentionner ici quelques-uns des défis posés à l'hypothèse de l'existence d'une matière invisible pesante.

La fonction de masse des halos



^{163.} gravitation, hydrodynamique, chimie, physique stellaire au minimum doivent être ainsi invoquées pour prédire la lumière produite par une galaxie

FIGURE 38: La fonction de masse des halos de matière noires pour différents redshifts. On constate que les halos les plus massifs n'apparaissent que pour des époques tardives : les structures nécessitent du temps pour se mettre en place.

L'une des prédictions des modèles de formation des grandes struc-

tures¹⁶⁴ est la distribution des masses des halos de matière noire. L'obtention de cette distribution est trop complexe pour être abordée ici : elle repose sur la statistique des 'pics' de densités de matière d'amplitude suffisante pour s'effondrer en halos¹⁶⁵. Cette statistique est définie par son spectre de puissance, $P(k)$. La *fonction de masse* dépend de la cosmologie, du type de matière noire, de l'instant considéré et donne le nombre de halos de masse donnée, par unité de volume :

$$dN = f(M, z) dM. \quad (247)$$

La fonction de masse possède une forme caractéristique, décroissante avec la masse considérée : elle indique simplement que les objets peu massifs sont beaucoup plus nombreux que les objets de grande masse (voir Fig. 38). De fait, même si les objets peu massifs ont une contribution individuelle faible au bilan total de masse, en terme de *populations*, ces objets dominent ce bilan. De même son évolution temporelle indique que les objets massifs deviennent de plus en plus nombreux, au détriment relatif des plus légers : c'est le modèle de formation hiérarchique qui est à l'oeuvre où les petites structures fusionnent pour en donner de plus grandes au cours du temps. Cela indique également clairement qu'une structure massive de type amas de galaxies par exemple, ne peut apparaître que dans un Univers suffisamment évolué : il faut laisser du temps au processus de formation des structures pour qu'il puisse produire des halos lourds. Une autre façon de considérer cette distribution de masse est la mesure de l'échelle typique qu'il faut considérer pour trouver un halo de masse donnée (cf. Fig. 39) : dans ce cas plus un halo est rare, plus l'échelle considérée, plus le volume d'Univers à sonder est important. Par ailleurs, aux époques reculées, on peut constater qu'il est impossible de trouver les halo les plus lourds au sein de l'Univers observable : la raison en est simple, ces objets n'existent pas encore et n'ont pas eu le temps de se former.

Une première difficulté émerge lorsque l'on compare la distribution des masses des halos avec la distribution des luminosités des galaxies. Au premier ordre, il apparaît intuitif de penser que la lumière produite par les galaxies suit la masse des halos sous-jacents : plus un halo est lourd, plus il est mesure de contenir du gaz et plus il est susceptible de contenir des étoiles. Toutefois lorsque l'on compare les distributions de masse des halos et de luminosité, il apparaît que la fonction de luminosité présente un déficit d'objets à la fois aux grandes et aux basses masses¹⁶⁶. Cet effet est schématisé dans la figure 40. Il faut donc invoquer des mécanismes pour modérer la formation d'étoiles de part et d'autres d'une masse 'pivot' de $10^{10} M_{\odot}$. Au masses plus faibles que ce pivot, un mécanisme possible est l'injection d'énergie par les supernovae¹⁶⁷ : celles-ci injectent de

164. voir le chapitre suivant

165. de surdensité environ $\delta_c \sim 1.68$, voir le chapitre sur la formation des petites structures

166. La courbure de la fonction est plus prononcée en luminosité qu'en masse

167. qui sont des explosions d'étoiles en fin de vie

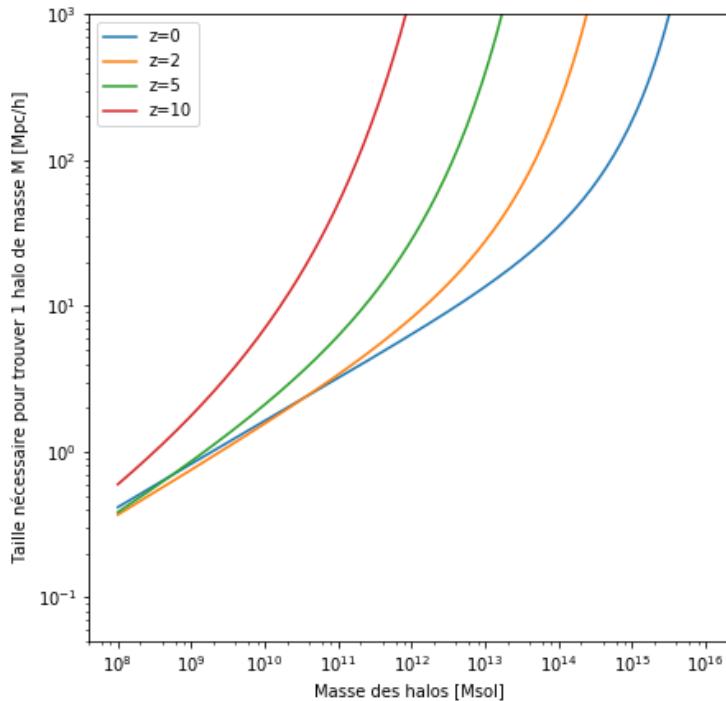


FIGURE 39: Quelle échelle d'Univers faut-il-sonder pour trouver un halo de masse donnée à un redshift donné. Cette courbe indique que plus un halo est léger, plus il est facile de le trouver et plus la taille d'Univers à sonder est petite.

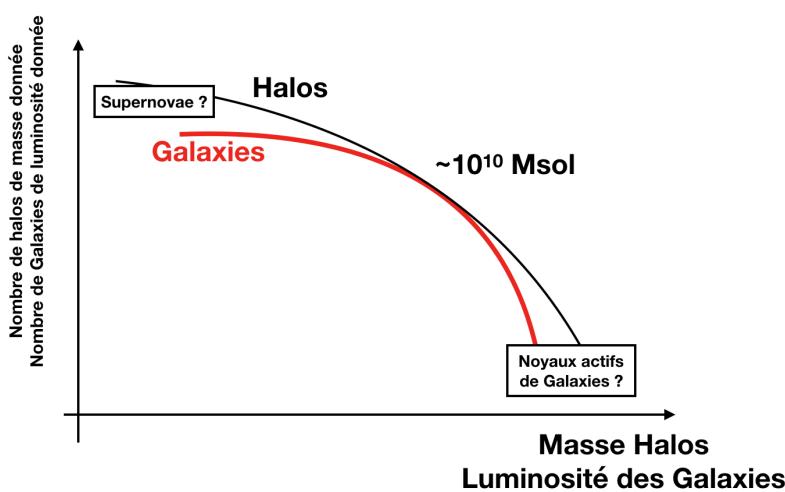


FIGURE 40: Schéma illustrant la différence entre la fonction de masse des halos et la distribution des luminosités des galaxies. Deux mécanismes sont susceptibles de prévenir la formation d'étoile : les explosions de supernovae aux faibles masses et les noyaux actifs de galaxie aux grandes masses. Schéma inspiré de Silk & Mamon.

l'énergie dans le gaz qui les entoure et le chauffage ou l'éjection de matériau ainsi produits empêchent la formation immédiate d'étoiles de la génération suivante. Aux masses les plus importantes, un mécanisme similaire est envisagé mais cette fois dû aux noyaux actifs de galaxies, dont l'énergie produite est lié à l'accrétion de matière sur un trou noir supermassif. Dans tous les cas, il faut donc invoquer des processus astrophysiques complexes pour réconcilier la prédition 'simple' issue de la dynamique de la matière noire avec les propriétés lumineuses des galaxies. Or ces processus sont complexes à appréhender, difficiles à contraindre quantitativement et le modèle de matière noire se trouve ainsi confrontée à un défi particulièrement important à cause de notre compréhension imparfaite de ces phénomènes.

Le problème des sous-structures

Une autre difficulté présentée au modèle de halos de matière noire est liée aux galaxies satellites présents autour des grandes galaxies. Les objets comme la Voie Lactée ou la galaxie d'Andromède possède un cortège de galaxies plus légères, dites 'satellites', en orbite autour de la galaxie principale. Au nombre de quelques dizaines par systèmes, ces cortèges posent un défi majeur au modèle de matière noire froide. En effet, ces modèles¹⁶⁸ prédisent des milliers de satellites pour de tels systèmes alors que leur nombre observé se limite à quelques dizaines. Même si la possibilité existe que tous ces objets ne soient pas détectés, il n'en demeure pas moins que l'écart entre théorie et observation est particulièrement frappant dans ce cas (cf. Fig.41). Pour expliquer cette différence, il faut à nouveau invoquer des processus qui limitent la création d'étoiles dans la très grande majorité de ces satellites. Ces problèmes sont néanmoins extrêmement mal connus et ne permettent pas toujours de résoudre cette tension de façon entièrement satisfaisante.

Plus récemment est également apparu le fait que la distribution spatiale de ces satellites n'est pas isotrope mais est organisée sous la forme de grands disques de satellites, fins et en rotation. C'est notamment le cas autour de la Galaxie d'Andromède sur une trentaine d'objets actuellement connus, 15 sont présent dans un grand disque dont 13 en rotation dans le même sens (cf. Fig. 42). Or il s'avère que les prédictions à base de matière noire ne parviennent pas à prédire ce type de configuration, tout au moins dans des régimes aussi extrêmes.¹⁶⁹ A nouveau, on peut invoquer des processus qui limitent la formation d'étoile de façon différenciée en fonction de la distance ou de la position de ces satellites pour expliquer cet état de fait¹⁷⁰

Ces 2 problèmes, nombre de satellites ou configuration spatiale

168. reposant essentiellement sur des simulations numériques

169. ces prédictions reposent sur des simulations et ces simulations ne parviennent pas à reproduire des disques de satellites aussi fins, aussi étendus et dont la cinématique est aussi cohérente.

170. le rayonnement provenant de la galaxie d'Andromède elle-même pourrait par exemple éteindre les satellites de façon plus ou moins efficace en fonction de leur distance, expliquant l'étendue des disques.

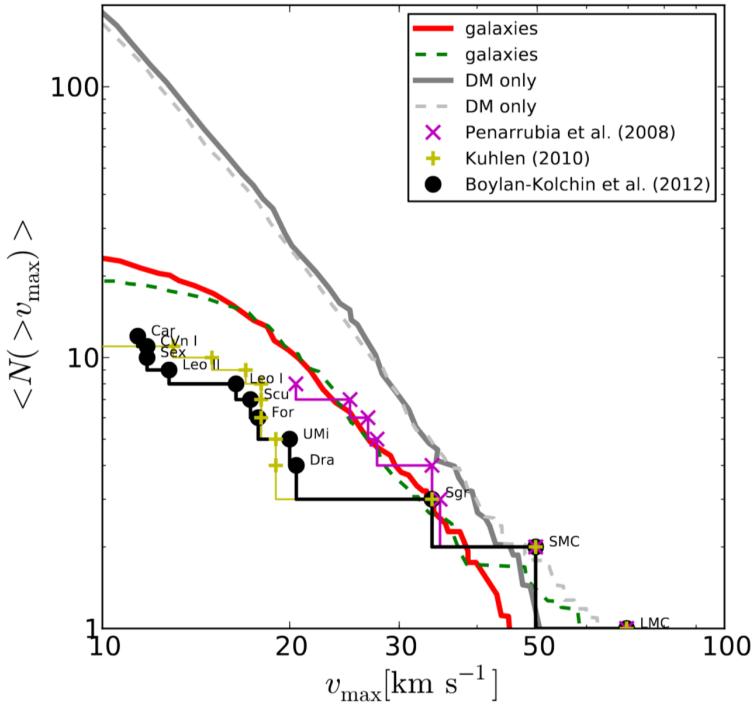


FIGURE 41: Distribution du nombre de galaxies satellites de la Voie Lactée possédant une masse supérieure à une masse donnée (la quantité v_{\max} est une mesure directe de la masse d'un satellite). Les observations sont présentées par les points noirs tandis que la prédition théorique à base de matière noire est donnée par les courbes grises. On constate que les modèles surestiment très largement le nombre observé d'objet. Figure extraite de Pawłowski et al. (2015).

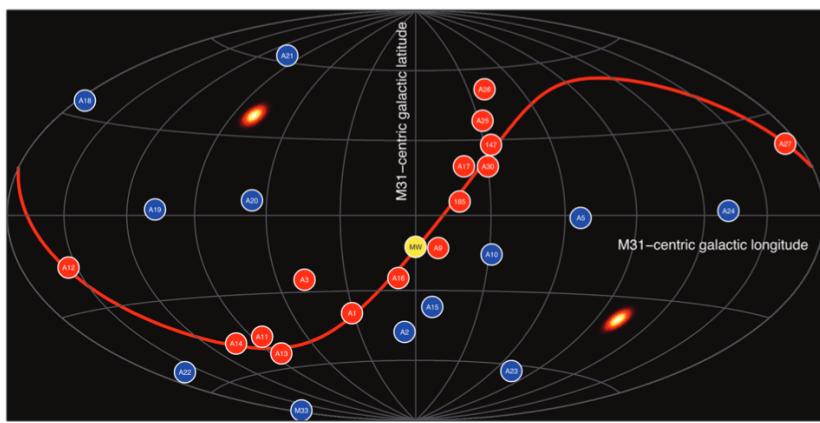


FIGURE 42: Distribution des satellites de la Galaxie d'Andromède, vue sur le ciel d'un observateur qui serait placé en son centre. Une quinzaine de satellites sont très proches d'un grand cercle sur le ciel, indiquant que ces objets sont distribués dans un plan.

de ces derniers, ne sont que deux des exemples les plus critiques auquel est confronté le modèle des halos de matière noire. Il en existe d'autres et de façon générale il faut invoquer des processus astrophysiques complexes et mal connus de modération de la formation stellaire pour expliquer les différences entre modèle et observation. Pour ces raisons, il est également possible d'envisager qu'il *n'existe pas* de matière noire et il faut donc trouver d'autres raisons pour expliquer par exemple les courbes de rotations plates des galaxies : c'est l'objectif que se fixent par exemple les modèles de gravitation modifiée¹⁷¹. Toutefois, ces difficultés rencontrées aux échelles galactiques par le modèle de matière noire froide sont à comparer aux succès réels obtenus par ce même modèle aux échelles cosmologiques, pour expliquer la structure du CMB notamment. Pour toutes ces raisons, une grande partie de l'activité actuelle de la communauté vise à tester notre compréhension des processus baryoniques et stellaires pour voir si ils parviennent à réconcilier le modèle de matière noire avec les observations aux échelles galactiques. Cette compréhension est toujours aujourd'hui grandement incomplète.

^{171.} voir par exemple le modèle phénoménologique MOND (pour *M*odified *N*ewtonian *D*ynamics) qui inclut les effets d'une accélération limite dans le régime des faibles champs de gravitation, similaire à l'effet d'une distribution de matière noire

Formation des grandes structures

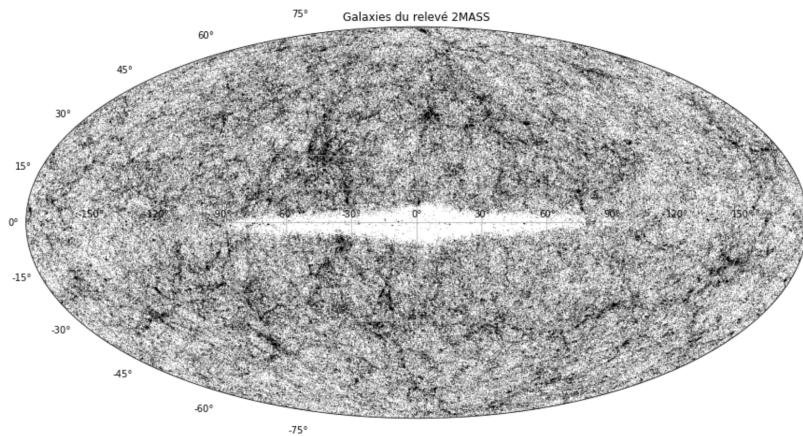


FIGURE 43: La distribution sur le ciel de 550 000 galaxies du grand relevé infrarouge 2MASS, telle qu'elle serait vue par un observateur au centre de la Voie Lactée. Chaque point est une galaxie distante : ces galaxies sont distribuées le long des *grandes structures de l'Univers* qui combinent régions denses, grands vides et filaments de matière. On note un déficit d'objets au centre de l'image, due à la présence de la Voie Lactée qui bloque les lignes de visées.

Les grandes structures de l'Univers désignent de façon générique et tout à la fois la matière diffuse, les galaxies et amas de galaxies qui s'organisent sous l'effet de la gravitation. Aujourd'hui ces grandes structures produisent une distribution de matière 'filamentaire' où des surdensités côtoient des vides, reliées entre elles par des ponts de matériau. Elles résultent de l'action du mécanisme d'instabilité gravitationnelle sur les faibles fluctuations de densité présentes dans l'Univers jeune et tracées par exemple par le CMB. Au cours des 13.8 milliards d'années, des surdensité de 0.001% parviennent ainsi à croître pour atteindre des contrastes de densité mesurés d'au moins plusieurs centaines dans les galaxies aujourd'hui. Si une grande partie des processus à l'œuvre lors de la formation des grandes structures peuvent être saisis par une approche analytique, le problème ne peut être abordé dans toute sa complexité que via l'utilisation de simulations numériques, dites simulations cosmologiques.

Densité et spectre de puissance

L'un des objectifs de l'étude de la formation des grandes structures est de prédire comme la matière va s'organiser au cours de l'histoire de l'Univers. La quantité généralement suivie est le contraste de densité :

$$\delta(x, t) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (248)$$

En l'absence de création de masse et dans un Univers homogène et isotrope, la densité moyenne $\bar{\rho}$ est une quantité de référence constante dans l'espace et pour laquelle la variation temporelle est seulement due à la dilution cosmologique¹⁷²

Toutefois, le contraste de densité à une position x donnée et à un instant donné t est finalement porteur d'assez peu d'information cosmologique, puisque l'on cherche à obtenir des contraintes qui ont une valeur 'cosmologique', i.e. globales et génériques. La première étape vers un traitement cosmologique consiste à raisonner dans l'espace de Fourier et à considérer les *modes* $\delta_k(t)$ d'une réalisation donnée de $\delta(x, t)$:

$$\delta(x, t) \sim \int_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(t) e^{ikx} dk \quad (249)$$

L'équation 249 représente la décomposition en série de Fourier du contraste de densité : en pratique cela revient à décomposer le champ de densité en une série de modes sinusoïdaux et dont les contributions des différentes fréquences sont données par δ_k . En plus d'un intérêt mathématique, cette décomposition constitue une mise en pratique de 'cosmologisation' de la densité : on se met à suivre des modes sinusoïdaux délocalisés, de taille caractéristique $\lambda = 2\pi/k$ ¹⁷³ et la position x perd de l'importance en tant que telle. L'amplitude d'un mode k est donné tout simplement par $|\delta_k|^2$: l'étude de cette amplitude et son éventuelle évolution temporelle nous renseigne globalement sur l'évolution des structures d'échelle caractéristique λ au cours du temps et sur leurs contribution relatives. Cette amplitude est aussi appelée *puissance* et l'ensemble des puissances de tous les modes k est appelé *spectre de puissance*.

^{172.} dont on rappelle qu'elle fait varier la densité en a^{-3} .

^{173.} λ qui est donc la longueur d'onde

Champ aléatoire Gaussien Le champ de matière cosmologique appartient semble-t-il à la classe des champs aléatoires gaussiens. C'est une prédiction des théories inflationnaires et il semble observationnellement que ce soit le cas : in fine cela constitue une base de travail et éventuellement on pourra être amené à mesurer des départs à cette gaussianité. Un champ aléatoire gaussien $\delta(\vec{x})$ se caractérise par une densité de probabilité (PDF) de type :

$$p(\delta(\vec{x})) \sim \exp(-\delta(\vec{x}) C^{-1} \delta(\vec{x})), \quad (250)$$

où C est une matrice de corrélation, généralement non diagonale. Cette matrice encode les corrélations qui peuvent apparaître dans le champ de matière : celui-ci possède généralement des structures possédant une certaine cohérence spatiale et cette dernière se manifeste en couplant le champ δ entre différentes positions via C ¹⁷⁴. Une propriété intéressante est que la probabilité de la transformée de Fourier de $\delta(\vec{x})$ suit le même type de PDF :

$$p'(\delta_{\vec{k}}) \sim \exp(-\delta_{\vec{k}}^* \tilde{C}^{-1} \delta_{\vec{k}}). \quad (251)$$

Une propriété encore plus intéressante est que \tilde{C} est diagonale si $\delta(\vec{x})$ est un champ aléatoire gaussien : chaque mode de Fourier peut être suivi statistiquement indépendamment des autres. Par simple inspection, il apparaît que les composantes de cette matrice de corrélation sont les variances des modes¹⁷⁵ :

$$\langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle = P(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle. \quad (252)$$

Cette mesure de la variance ne dépend que la norme $k = |\vec{k}|$ du mode considéré (plusieurs modes de directions différentes mais de modules identiques partagent donc la même variance du fait de l'isotropie) et constitue le spectre de puissance $P(k)$ du champ de matière.

Cette quantité est destinée à être mesurée au cours du temps et nous renseigne sur la croissance des structures. Si certaines échelles bénéficient d'une croissance plus rapide que d'autres, cela se manifestera par une déformation du spectre de puissance aux échelles concernées. Si le champ est vraiment un champ aléatoire gaussien, la connaissance de sa variance et donc de $P(k)$ suffit à complètement le définir : si des corrélations anisotropes sont détectées (dans les relevés de galaxies ou dans le CMB), elles confirmeront soit la nature non-gaussienne des fluctuations primordiales soit l'existence de processus physiques qui génèrent de la non-gaussianité¹⁷⁶.

Une quantité reliée au spectre de puissance est la fonction de corrélation à deux points $\xi(r)$: elle exprime l'excès de probabilité de trouver de la matière en deux points séparés d'une certaine distance r par rapport à une distribution aléatoire. On peut démontrer que la fonction de corrélation à deux points est simplement la représentation du spectre de puissance dans l'espace des positions (donc sa transformée de Fourier) :

$$\xi(r) \sim \int d\vec{k} P(k) e^{ikr}. \quad (253)$$

Notons qu'à nouveau cette excès de probabilité ne dépend que de la distance r et non pas d'une orientation ou de positions spécifiques des 2 points considérés. Généralement, la fonction de corrélation à 2 points est utilisée si l'on a une description discrète du champ de densité : c'est le cas par exemple lorsque l'on utilise des galaxies comme

¹⁷⁴. par exemple la structuration de la matière dans l'Univers est telle que les régions denses se trouvent plutôt à proximité d'autres régions denses.

¹⁷⁵. ici δ_D désigne la fonction de Dirac, nulle partout sauf en 0, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_D(x) = 1$

¹⁷⁶. notons que le spectre de puissance ne permet pas de mesurer la non-gaussianité. Deux champs, l'un gaussien l'autre non, peuvent partager les mêmes variances. Il faut utiliser des statistiques d'ordres supérieurs pour pouvoir faire cette distinction.

traceurs de la matière dans les grands relevés. Si l'on travaille avec un champ continu (comme dans des travaux analytiques), on passe directement dans une représentation en mode de Fourier en utilisant le spectre de puissance $P(k)$: ce dernier présente l'avantage d'explicitement séparer les modes de tailles différentes, là où la fonction de corrélation à 2 points "mélange" les modes et peut donc être dominé par une échelle au détriment des autres, qui peuvent pourtant contenir une information pertinente.

Longueur de Jeans

Une quantité centrale dans l'étude de l'instabilité gravitationnelle est la longueur de Jeans¹⁷⁷, notée λ_J . Elle correspond à la longueur minimale que doit avoir une structure pour s'effondrer sous l'effet de la gravitation. On y associe également une masse (la masse de Jeans) M_J donnée simplement par :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \lambda_J^3, \quad (254)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne du milieu : une structure de masse supérieure à la masse de Jeans va s'effondrer. L'existence d'une grandeur critique pour que l'effondrement se réalise traduit l'existence d'une compétition entre la gravité et un autre processus que la gravité doit 'vaincre'. En général cet autre processus est l'existence d'un support thermique qui fournit une pression à même de s'opposer à la gravitation. Pour du gaz, il s'agit généralement de la pression interne du gaz, pour des systèmes non-collisionnels (type gaz d'étoiles) c'est la dispersion de vitesse interne qui agit comme une barrière à l'effondrement¹⁷⁸.

L'expression de la longueur de Jeans peut s'obtenir avec un simple raisonnement : pour qu'une structure s'effondre il faut que l'information gravitationnelle se répartisse plus rapidement au sein d'une structure que l'information de support thermique. Dans un milieu de densité ρ l'information gravitationnelle est transportée en un temps dynamique

$$t_G \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (255)$$

Pour un gaz la transmission de l'information de support thermique dépend de la vitesse du son c_s et de la taille de la structure λ :

$$t_p \approx \frac{\lambda}{c_s}. \quad (256)$$

L'effondrement a lieu si $t_G < t_p$, donc si la taille de la structure considérée obéit à la condition :

$$\lambda > \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \equiv \lambda_J. \quad (257)$$

^{177.} voir aussi le chapitre dédié à la matière noire

^{178.} voir aussi le chapitre dédié à la matière noire

Faire baisser λ_J revient à favoriser l'effondrement gravitationnel, le cas limite étant $\lambda_J \rightarrow 0$ où toute structure s'effondre. Ce régime s'obtient dans un milieu très dense ou bien très froid, i.e. sans support thermique. A l'inverse, une grande valeur de λ_J réduit la possibilité d'effondrement et $\lambda_J \rightarrow \infty$ revient à empêcher toute structure de s'effondrer : cela correspond à un milieu sous-dense, donc très léger, ou bien très chaud avec une grande vitesse du son. Pour un système non-collisionnel, la même expression existe pour la longueur de Jeans en remplaçant la vitesse du son par la dispersion de vitesse du milieu.

Traitements perturbatifs

Une dérivation plus rigoureuse peut être obtenue par un traitement perturbatif au premier ordre. On considère un gaz de densité moyenne $\bar{\rho}$ et d'équation d'état reliant¹⁷⁹ :

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2. \quad (258)$$

Ce gaz obéit aux équations de Poisson, qui est l'équation de champ de la gravité newtonienne liant potentiel ϕ et densité :

$$\Delta\phi(x, t) = 4\pi G\rho \quad (259)$$

et aux équations fluides, conservation de la masse¹⁸⁰

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{u} = 0, \quad (260)$$

et conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \vec{\nabla}\phi. \quad (261)$$

On réalise un traitement perturbatif (à 1D par simplicité)¹⁸¹ :

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}(1 + \delta(x, t)) \quad (262)$$

$$u(x, t) = v_1(x, t) \quad (263)$$

$$\phi(x, t) = \phi_1(x, t) \quad (264)$$

$$P = P_0 + P_1(x, t) \quad (265)$$

En injectant ces développements, on parvient aisément à écrire :

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = -\bar{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (266)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = 0 \quad (267)$$

d'où l'équation maîtresse de l'instabilité :

$$\ddot{\delta} - c_s^2\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (268)$$

¹⁷⁹. ici P désigne la pression du gaz.

Notons par exemple que dans le cas du gaz parfait $P = \rho k_B T$, nous avons $k_B T \sim c_s^2$ qui est conforme à cette formulation d'une équation d'état

¹⁸⁰. ici u désigne la vitesse du fluide

¹⁸¹. notons qu'on considère ici que le milieu n'est pas animé d'une vitesse globale à l'équilibre $v_0 = 0$ et que le milieu à l'équilibre ne présente pas de variations spatiales de potentiel : ce potentiel ϕ_0 constant dans l'espace est sans influence dynamique et est donc ignoré. Les quantités δ, v_1, ϕ_1, P_1 sont des petites quantités

Effondrement et Oscillations

Cette équation s'analyse plus facilement en prenant sa transformée de Fourier spatiale :

$$\ddot{\delta}_k + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}) \delta_k = 0. \quad (269)$$

Deux régimes peuvent être facilement distingués :

- si $c_s^2 k^2 > 4\pi G \bar{\rho}$ c'est une équation d'oscillateur harmonique. Le mode correspond à une onde sonore en $e^{i\omega t}$ de pulsation¹⁸² $\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}}$. Cela correspond à des grandes fréquences spatiales, donc des petites structures : notons que la pulsation est d'autant plus grande que ces structures sont petites.
- si $c_s^2 k^2 < 4\pi G \bar{\rho}$, la solution est hyperbolique avec une contribution exponentielle croissante en $e^{t/\tau}$, qui correspond à l'instabilité gravitationnelle. Ce régime correspond aux faibles valeurs de k donc aux grandes échelles. Le temps caractéristique d'instabilité est $\tau = (4\pi G \bar{\rho} - c_s^2 k^2)^{-1/2}$ qui se résume au temps dynamique¹⁸³ si k est suffisamment faible donc si le mode étudié est suffisamment grand.

On remarque que le cas critique $\frac{4\pi^2 c_s^2}{\lambda^2} = 4\pi G \rho$ nous redonne la longueur de Jeans

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho}} \quad (270)$$

Cas cosmologique

LE CAS COSMOLOGIQUE se doit de prendre en compte l'expansion de l'Univers. Comme on le verra en fin de démonstration, cela change finalement peu de choses par rapport au cas exposé précédemment. Toutefois cette étude présente un intérêt technique en rapport avec la manipulation de grandeurs comobiles dans des équations différentielles couplées. Pour cette raison le calcul sera décrit en détail.

LES ÉQUATIONS IMPORTANTES sont les mêmes que dans le cas d'un Univers statique¹⁸⁴ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (271)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \quad (272)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{r}^2} = 4\pi G \rho. \quad (273)$$

La principale difficulté découle de la dépendance temporelle de la distance physique $\vec{r} = a(t) \vec{x}(t)$ où \vec{x} désigne la position comobile :

182. et donc de fréquence temporelle $\nu = 2\pi/\omega$

183. c'est à dire $1/\sqrt{G\rho}$

184. ρ est la densité de matière, \vec{u} la vitesse, \vec{r} la position physique, P la pression et ϕ le potentiel gravitationnel

la dérivée par rapport à \vec{r} doit donc être prise avec précaution. Par commodité on préfère généralement écrire ces équations en fonction de données comobiles pour extraire au moins l'effet de flot cosmologique encodé par le facteur d'expansion $a(t)$.

La première étape consiste à transformer les dérivées temporelles prises à \vec{r} constant en dérivée prises à \vec{x} constant¹⁸⁵ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)_t, \quad (274)$$

de même les dérivées spatiales deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}. \quad (275)$$

Pour finir, il faut établir que la vitesse comporte une partie liée au flot de Hubble¹⁸⁶ :

$$\dot{u} = \dot{a} \vec{x} + a \dot{\vec{x}} = \dot{a} \vec{x} + \vec{v} \quad (276)$$

où \vec{v} désigne une vitesse particulière superposée au flot cosmologique. Enfin la densité sera également exprimée en fonction de la densité de fond, $\bar{\rho} \sim a^{-3}$ qui subit l'expansion cosmologique :

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\vec{x}, t)). \quad (277)$$

LA CONSERVATION DE LA MASSE est modifiée comme suit : nous allons prendre les différents termes un par un. La dérivée temporelle de la densité comprend 2 termes, le premier¹⁸⁷ :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_r, \quad (278)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho}(1 + \delta), \quad (279)$$

185. on rappelle que pour $f(r) = a(t)x, t)$
alors $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_r + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t}$

186. le terme $\dot{a} \vec{x}$ peut facilement se réécrire
sous la forme $H \vec{r}$, i.e. la loi de Hubble

et le second :

$$\frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial \vec{x}}. \quad (280)$$

Le terme de flux de cette même équation devient quant à lui :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)(\vec{v} + \dot{a} \vec{x})) \quad (281)$$

$$= \frac{\bar{\rho}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{v}) + \frac{\bar{\rho} \dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{x}) \quad . \quad (282)$$

187. notez la dérivée temporelle de
 $\bar{\rho} \sim a^{-3}$ qui intervient ici

Le dernier terme de cette égalité peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\bar{\rho} \dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\rho}(1 + \delta)\vec{x}) \quad (283)$$

$$= \bar{\rho} \frac{\dot{a}}{a} 3(1 + \delta) + \bar{\rho} \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \vec{x}}. \quad (284)$$

En rassemblant le tout on obtient l'équation de conservation de la masse dans sa formulation comobile :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} ((1 + \delta) \vec{v}) = 0 \quad (285)$$

L'ÉQUATION D'EULER COMOBILE¹⁸⁸ se dérive de la même manière.
Prenons le premier terme de dérivée temporelle de la vitesse :

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}. \quad (286)$$

La dérivée temporelle à \vec{x} constant donne :

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \ddot{a} \vec{x}, \quad (287)$$

tandis que le terme de Hubble donne¹⁸⁹ :

$$\frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \frac{\dot{a}^2}{a} \vec{x}. \quad (288)$$

Le terme d'advection ne présente pas de difficulté particulière¹⁹⁰ :

$$\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad (289)$$

$$+ \frac{\dot{a}^2}{a} \vec{x} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}. \quad (290)$$

En rassemblant tous ces premiers termes on obtient une expression comobile pour le membre de gauche de l'équation d'Euler :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \ddot{a} \vec{x}. \quad (291)$$

Le terme correspondant aux forces de pression ne pose pas de difficultés tandis que le terme correspondant aux forces de gravitation peut être modifié en lui incluant le terme en $\ddot{a} \vec{x}$ de l'équation 291 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} + a \ddot{a} \vec{x} \right) \quad (292)$$

$$= \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}}, \quad (293)$$

où $\Phi(\vec{x}, t)$ est un potentiel gravitationnel effectif, prenant en compte les effets de fonds changeant :

$$\Phi = \phi + \frac{a \ddot{a} \vec{x}^2}{2}. \quad (294)$$

En rassemblant partie différentielle et termes sources, on obtient une équation d'Euler comobile qui ressemble beaucoup à sa contrepartie physique avec l'inclusion d'un terme de friction de Hubble¹⁹¹ :

188. qui n'est autre qu'une équation de conservation de l'impulsion

189. on utilise $\vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{x} = \vec{e}$

190. on utilise $\vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{x} = \vec{e}$

191. le second terme du membre de gauche contenant $H = \dot{a}/a$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = -\frac{1}{a \bar{\rho}(1+\delta)} \frac{\partial P}{\partial \vec{x}} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}}. \quad (295)$$

L'ÉQUATION DE POISSON doit également être reformulée en faisant notamment intervenir le potentiel effectif Φ ¹⁹² :

192. en utilisant $\frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} \vec{x}^2 = 6$

$$\Delta \phi = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \quad (296)$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}^2} - 3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (297)$$

$$= 4\pi G \bar{\rho} (1 + \delta). \quad (298)$$

Or l'équation de Friedmann¹⁹³ permet de relier l'évolution du facteur d'expansion avec la densité du fond et permet notamment d'établir que :

193. $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \bar{\rho}$

$$4\pi G \bar{\rho} a^2 + 3a\ddot{a} = 0, \quad (299)$$

d'où l'équation de Poisson comobile :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{x}^2} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad (300)$$

EN PRÉSENCE D'EXPANSION, l'équation maîtresse devient (pour chaque mode de Fourier) :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho})\delta_k = 0. \quad (301)$$

où toutes les quantités sont des quantités comobiles¹⁹⁴. On retrouve essentiellement la même équation et les mêmes conclusions s'imposent, à savoir instabilité si $\lambda > \lambda_J$ et oscillations sonores dans le cas inverse. On note toutefois la présence du terme $2H\dot{\delta}_k$ qui s'apparente à un terme d'amortissement dû à l'expansion. On montrera qu'à cause de ce terme qui tempère les solutions, les modes instables ne seront plus exponentiels mais en loi de puissance et les modes stables oscillants seront amortis sur des temps caractéristiques de l'ordre du temps de Hubble¹⁹⁵.

194. avec $k = 2\pi/\lambda$ et λ est comobile

A ce stade il faut rappeler, que le traitement décrit juste ici est approché. Par exemple la matière noire¹⁹⁶ ne peut pas, à priori, être correctement décrite par les équations 'fluides' utilisées ici. Comme ses particules sont non collisionnelles, on ne peut réduire la pression¹⁹⁷ à un scalaire et elle peut être anisotrope. La question se pose dans les mêmes termes pour le rayonnement. Un traitement rigoureux doit passer par l'utilisation de l'équation de Boltzmann qui encode directement l'évolution de la fonction de distribution des ces fluides dans l'espace des phases et non simplement celle des ses moments (densité, impulsion, etc...). Heureusement le résultat obtenu reste très similaire à celui présenté dans l'équation 301 et elle fera donc l'affaire pour les raisonnements à suivre.

195. temps donné par H^{-1}

196. qui compose 80% du bilan énergétique de la matière

197. qui est une mesure des propriétés du tenseur des dispersions de vitesses

L'autre difficulté est lié à la nature multi-fluides des perturbations.

Nous avons :

- les photons : relativistes, avec une pression de rayonnement associée,
- les baryons : non-relativistes mais couplés avec le rayonnement avant la Recombinaison. Les photons vont donc leur fournir une source de support dynamique bien plus importante que la simple pression thermique,
- la matière noire : non-relativiste et sans pression.

Ces 3 fluides vont évoluer selon des termes donnés par l'éq. 301. Par ailleurs ces fluides sont couplés et s'influencent l'un l'autre : c'est vrai via la pression de rayonnement pour les baryons et les photons mais également via le terme $4\pi G\bar{\rho}\delta_k$. Ce terme trace une source gravitationnelle de perturbation et doit donc inclure toutes les contributions au bilan énergétique de l'Univers, photons compris. C'est notamment vrai durant les époques avant l'Equivalence¹⁹⁸ durant lesquelles la source principale de potentiel est la contribution des photons. En pratique, nous avons donc un jeu d'équations multiples couplées qu'on ne peut résoudre de façon analytique : les grands principes peuvent toutefois être explorés en appliquant des hypothèses raisonnables comme décrit dans les parties suivantes.

^{198.} correspondant à $z > 3000$ ou $t < 60000$ ans où matière et rayonnement contribuent de manière égale au bilan énergétique du cosmos

Croissance des perturbations : cas sub-horizon

LES ÉCHELLES EXPLORÉES dans cette partie sont suffisamment compactes pour être plus petites que l'Horizon à un instant donné. Cela permet en particulier le transport d'une information dynamique au sein des structures en jeu, autorisant effondrement ou ondes de pression par exemple. L'équation à interpréter est celle donnée par l'éq. 301 et nous allons être amenés à distinguer 2 époques, avant l'Equivalence (dominée par le rayonnement RD) et après l'équivalence (dominée par la matière MD). Les facteurs d'expansion et la fonction de Hubble¹⁹⁹ durant RD sont donnés par :

$$a \sim \sqrt{t}, \quad (302)$$

$$H = \frac{1}{2t}, \quad (303)$$

^{199.} avec $H = \dot{a}/a$

tandis que les relations équivalentes durant MD sont données par :

$$a \sim t^{2/3}, \quad (304)$$

$$H = \frac{2}{3t}. \quad (305)$$

Matière sans pression

Prenons d'abord le cas d'une matière sans pression, correspondant à celui de la matière noire : la vitesse du son est négligeable et pourra donc être annulée dans Eq. 301.

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LE RAYONNEMENT, le terme source de gravitation est dominé par la contribution des photons. Toutefois, on considérera ce terme comme négligeable : les photons possèdent une pression intrinsèque élevée et une grande longueur de jeans. Ils ne peuvent se structurer et leur densité ne peut croître de façon substantielle²⁰⁰ :

200. de fait elle aura un comportement oscillant, voir section suivante

$$\bar{\rho}\delta_k \sim (\bar{\rho}\delta_k)_\gamma \sim 0. \quad (306)$$

L'équation résultante pour la matière sans pression est donc :

$$\ddot{\delta}_k + \frac{1}{t}\dot{\delta}_k \sim 0 \quad (307)$$

dont la solution est de type logarithmique :

$$\delta_{k,RD} \sim \log(t). \quad (308)$$

Dans le cadre qui est le nôtre, une croissance logarithmique peut être assimiliée à une absence de croissance, au mieux à une croissance très lente.

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LA MATIÈRE, le terme source est dominé par la matière elle-même : toute croissance sera donc entretenu par une croissance du potentiel, conduisant naturellement à une augmentation de la perturbation. L'équation à traiter est donnée par :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k = 4\pi G\bar{\rho}\delta_k. \quad (309)$$

En introduisant explicitement les dépendances temporelles on obtient²⁰¹ :

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k = 0. \quad (310)$$

Cette équation possède une solution croissante donnée par²⁰² :

$$\delta_{k,MD} \sim t^{2/3} \sim a(t). \quad (311)$$

201. en utilisant $\bar{\rho} \sim \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

202. il existe aussi une solution décroissante en $\delta = 1/t$, qui est de peu d'intérêt car dominée par la solution croissante

Le contraste avec la solution précédente est frappant : la présence d'un terme source de gravitation permet à la fluctuation de prospérer tandis que précédemment son absence conduit à une non-croissance de la perturbation.

Matière avec pression

Ce cas correspond à celui des baryons : durant ces époques pré-recombinaison, le couplage important entre les photons et les baryons confère à ces derniers une pression importante²⁰³ et une vitesse du son proche de la vitesse de la lumière $c_s \sim c$.

203. via la pression de radiation

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LE RAYONNEMENT, on continuera à négliger le terme source induit par les photons. Par contre le terme de pression ne peut plus être omis et l'équation des perturbations devient :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta} + c_s^2 k^2 \delta \sim 0. \quad (312)$$

La solution est oscillante avec un amortissement induit par l'expansion²⁰⁴. De notre point de vue, c'est également une solution 'sous contrôle', non-croissante. En l'absence de gravitation, les fluctuations baryoniques s'organisent en ondes de pression, en ondes acoustiques stables.

204. avec un temps caractéristique
 $\tau \sim 1/2H$.

DURANT L'ÉPOQUE DOMINÉE PAR LA MATIÈRE, le terme source de gravitation devient non négligeable mais n'est pas dominé par les baryons²⁰⁵. L'équation à résoudre devient alors²⁰⁶ :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta} + c_s^2 k^2 \delta 4\pi G \bar{\rho}_{DM} \delta_{k,DM} \quad (313)$$

On a donc un terme source de fond, mais ce terme n'est pas en mesure de produire une augmentation de l'amplitude des oscillations : ce terme évolue lentement par rapport aux temps caractéristiques d'oscillations et ne peut donc produire de résonances par exemple. Ce terme de forçage n'implique pas de croissance incontrôlée de l'amplitude des fluctuations baryoniques qui sont toujours dans un régime oscillant comme précédemment.

205. qui ne représente que 20% de la matière totale

206. ici DM dénote la matière noire pour *dark matter*.

CES OSCILLATIONS constituent de notre point de vue une 'absence de croissance' : les ondes de pressions passent mais ne 'grossissent pas' de façon incontrôlée. En pratique c'est même l'opposé qui va se produire : à cause du couplage imparfait entre photons et rayonnement, la pression apportée par les photons ne garantit pas un entretien perpétuel des oscillations et elles vont s'amortir²⁰⁷. L'effet d'amortissement est même catastrophique au sens où toute structure baryonique contenant une masse inférieure à $10^{13} M_\odot$ ²⁰⁸ doit être 'effacée' du spectre des fluctuations. Cette masse est supérieure à celle de la Voie Lactée actuellement : il faut donc trouver un mécanisme pour entretenir les fluctuations de masse inférieure à cette limite pour pouvoir expliquer les structures observées aujourd'hui.

207. on parle aussi d'amortissement Silk, du nom du physicien anglais à l'origine de la découverte de cet effet

208. et donc de taille inférieure à une certaine taille critique

LA MATIÈRE NOIRE va fournir ce mécanisme : comme vu précédemment, la matière sans pression va voir ses fluctuations croître de façon permanente durant l'époque dominée par la matière. Au moment de la Recombinaison, les baryons auront vu une grande partie de leurs fluctuations être réduites par l'amortissement que nous venons juste de mentionner. Toutefois la Recombinaison s'accompagne de la perte de support de pression offert par les photons²⁰⁹ : les baryons sont alors libres de s'effondrer dans les trous de potentiel créés par la matière noire. Vers un redshift $z \sim 100$ les fluctuations baryoniques ont convergé vers les fluctuations de la matière noire, autorisant la formation de structures de masses moins importantes que la masse limite mentionnée précédemment.

209. le découplage matière-rayonnement permettant aux photons de s'échapper sous forme du fond diffus

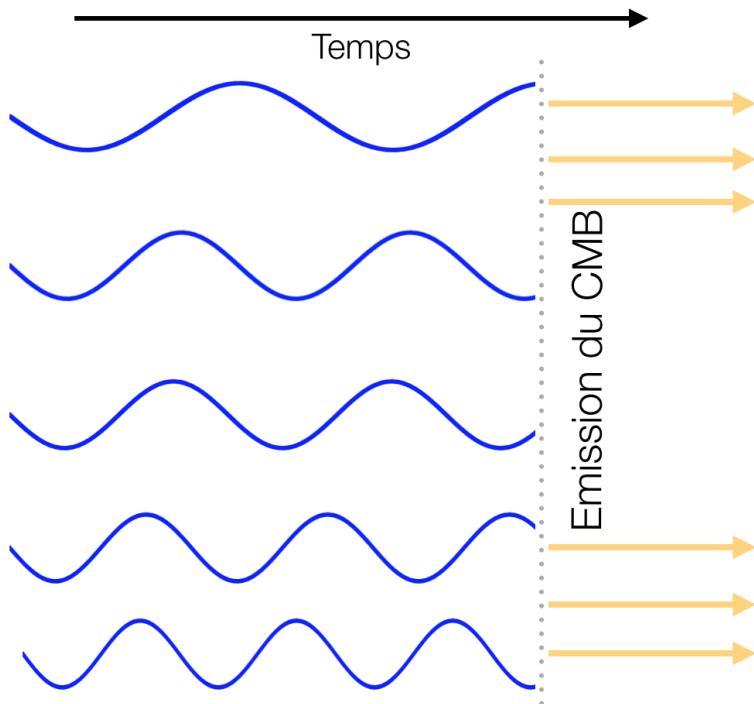


FIGURE 44: Les oscillations baryoniques évoluent sur des fréquences différentes, dépendant de leur taille. Les grandes structures oscillent lentement, les petites rapidement. Certains modes vont être en extremum d'amplitude au moment de la Recombinaison et donc au moment de la dernière diffusion du fond diffus cosmologique. Ces modes vont donc être privilégiés dans la carte du CMB.

CES OSCILLATIONS BARYONIQUES sont des ondes acoustiques (BAOs, de l'anglais *baryonic acoustic oscillations*) car elles sont entretenues par l'entrejeu entre gravité et pression (de rayonnement dans le cas présent). Par simple inspection de l'équation différentielle maîtresse, on peut constater que la fréquence d'oscillation dépend de la taille du mode étudié²¹⁰ : un mode à grande fréquence spatiale implique une fréquence temporelle élevée et vice-versa. Par conséquent, l'amplitude du mode au moment de la Recombinaison va dépendre du mode en question : au moment de l'émission du fond

210. avec $\omega \sim 2\pi c_s / \lambda$

diffus, certains modes seront en amplitude maximale, d'autres en amplitude plus modérée. En simplifiant (voir Fig. 44), on peut imaginer que certains modes vont osciller un nombre de fois exactement entier entre leur déclenchement et la Recombinaison, parvenant ainsi à un extremum d'amplitude tandis que d'autres seront dans une phase quelconque avec des amplitudes moins remarquables. Les échelles qui se détachent sous la forme de 'pics' dans le spectre de puissance du fond diffus cosmologique (voir Fig. 45) sont la manifestation de ces modes qui parviennent en extremum d'amplitude au moment où le rayonnement fossile est produit.

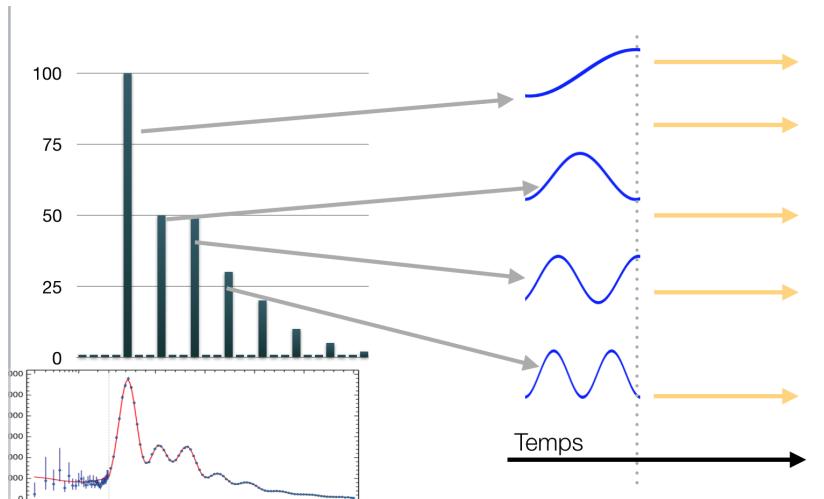


FIGURE 45: Les pics accoustiques du spectre de puissance du fond diffus cosmologique correspondent aux modes qui sont en extremum d'amplitude au moment de la Recombinaison. Le premier pic correspond à une compression, le second une compression + une détente, le troisième une compression + une détente + une compression, etc.... Au premier ordre, nous voyons des harmoniques d'un même mode fondamental.

Croissance des perturbations : cas super-horizon

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur les petites échelles. Regardons à présent le comportement d'un mode de très grande taille, dont la longueur caractéristique est plus grande que l'*horizon cosmologique* à l'instant considéré. Ces modes sont appelés super-horizon, tandis que les modes de petite taille précédemment étudiés sont par analogie désignés comme étant sub-horizon.

L'**HORIZON** désigne la plus grande échelle sur laquelle un phénomène de propagation peut opérer. Sa valeur est simplement donnée par :

$$L_H = \frac{c}{H} \quad (314)$$

où H^{-1} apparaît comme une mesure de l'âge de l'Univers à un instant donné. L'horizon est donc le produit de la plus grande vitesse

par la plus grande durée. Son expression comobile présente une évolution temporelle qui dépend de la période de domination. Durant la période dominée par le rayonnement on a comme horizon comobile²¹¹ :

$$\ell_{H,RD} = \frac{c}{aH} \sim a \quad (315)$$

et durant la période dominée par la matière²¹² :

$$\ell_{H,MD} \sim \sqrt{a}. \quad (316)$$

Dans les 2 cas, l'horizon grandit avec le temps et un mode de taille comobile donnée va donc successivement être plus grand que l'horizon (super-horizon) puis plus petit (sub-horizon) : usuellement, on désigne cette transition par l'expression *passer sous l'horizon*. Le cas super-horizon demande un traitement en relativité générale complet donnant l'équation de croissance des structures suivantes :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k = \frac{3}{2}H^2(1+w)(1+3w)\delta_k \quad (317)$$

où $w = 0$ durant l'époque MD et $w = 1/3$ durant l'époque RD²¹³.

Cette équation est similaire à celle obtenue dans le cas sub-horizon. Pour l'époque de domination de la matière on retrouve le même taux de croissance que celui obtenu pour la matière noire :

$$\delta_{k,MD} \sim t^{2/3} \sim a(t), \quad (318)$$

tandis que durant l'époque de domination du rayonnement on obtient :

$$\delta_{k,RD} \sim t \sim a(t)^2. \quad (319)$$

Dans ce cas, le comportement est substantiellement différent de celui obtenu dans le cas sub-horizon : les modes croissent au lieu de stagner. Ceci reflète l'absence d'influence des forces de pression sur ces échelles hors de leur horizon et équivaut à négliger la vitesse du son c_s .

Croissance des perturbations : synthèse et spectre de puissance

La synthèse des résultats précédents pour le cas de la matière noire est présenté dans la figure 46. On constate qu'une petite perturbation peut voir son histoire de croissance gelée si elle passe sous l'horizon durant l'époque dominée par le rayonnement. A l'inverse un mode de grande longueur d'onde devra attendre la période dominée par la matière pour changer de régime et ne connaîtra pas la phase de non-croissance qu'auront connu les plus petites structures.

Grâce à cette synthèse on peut prédire l'amplitude d'un mode au moment de la recombinaison δ_f en fonction de son amplitude δ_i bien

^{211.} avec $H \sim a^{-2}$

^{212.} avec $H \sim a^{-3/2}$

^{213.} pour ces échelles plus grandes que l'horizon, la pression ne peut jouer un rôle significatif : baryons et matière noire ont le même comportement

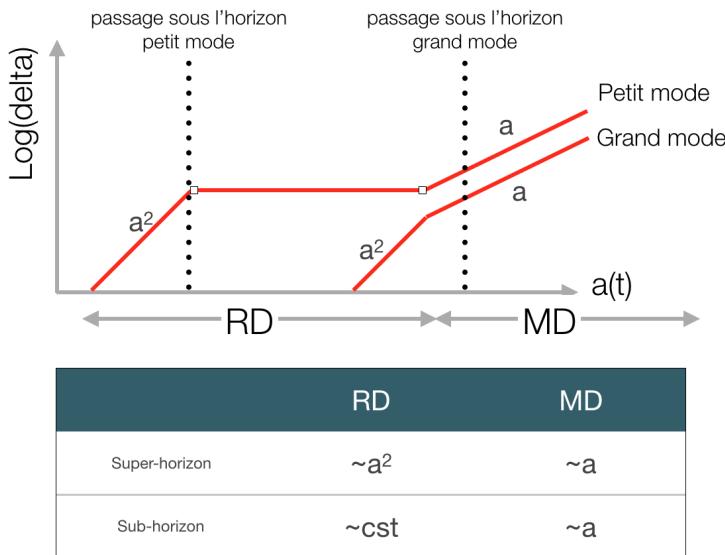


FIGURE 46: Synthèse de la croissance des perturbations. Un petit mode possède une taille caractéristique suffisamment petite pour passer sous l'horizon durant l'époque dominée par le rayonnement.

avant l'équivalence matière-rayonnement. Considérons d'abord le cas d'un grand mode, sans période de gel de croissance, son amplitude au moment de l'équivalence est donné par²¹⁴ :

$$\delta_e = \frac{a_e^2}{a_i^2} \delta_i. \quad (320)$$

Son amplitude finale est alors donnée par :

$$\delta_f = \frac{a_f}{a_e} \delta_e = \frac{a_f a_e}{a_i^2} \delta_i. \quad (321)$$

La chose à noter est l'indépendance du facteur reliant l'amplitude initiale et finale vis à vis de la taille du mode²¹⁵ : tous les modes vont croître dans les même proportions entre les instants i et f .

Pour les petits modes la situation est différente. L'amplitude au passage sous l'horizon est donnée par

$$\delta_L = \frac{a_L^2}{a_i^2} \delta_i. \quad (322)$$

où a_L est l'instant de passage sous l'horizon. L'amplitude au moment de l'équivalence est identique à δ_L car la croissance est gelée et l'amplitude finale est alors donnée par :

$$\delta_f = \frac{a_f}{a_e} \delta_e = \frac{a_f}{a_e} \delta_L = \frac{a_L^2 a_f}{a_i^2 a_e} \delta_i. \quad (323)$$

Ici le facteur de lien entre δ_f et δ_i dépend de a_L et donc de la taille du mode considéré. En effet cet instant est déterminé par $\lambda = L_{H,RD} \sim$

214. l'indice e désigne une valeur prise au moment de l'Équivalence

215. bien sûr a_e ne dépend pas du mode considéré

a_L donc

$$\delta_f \sim \frac{1}{k^2} \delta_i. \quad (324)$$

On a une coupure d'autant plus forte que la fréquence spatiale du mode est élevée, d'autant plus forte que la taille du mode considéré est petite.

POUR LE SPECTRE DE PUISSANCE, les conséquences sont simples.

Pour les k suffisamment faibles, donc les grands modes, on a

$$P_f(k) \sim \delta_k^2 \sim P_i(k), \quad (325)$$

par contre pour les hautes fréquences, donc les petits modes, le spectre de puissance est filtré suivant la relation :

$$P_f(k) \sim \frac{1}{k^4} P_i(k) \quad (326)$$

Comme le spectre de puissance primordial est en loi de puissance tel que²¹⁶ :

$$P_i(k) \sim k \quad (327)$$

on obtient un spectre caractéristique aux hautes fréquences en

$$P_f(k) \sim \frac{1}{k^3}. \quad (328)$$

Le spectre de puissance résultant possède donc 2 régimes caractéristiques, l'un aux grandes échelles en $P(k) \sim k$ et l'autre aux petites échelles en $P(k) \sim k^{-3}$. La transition entre les deux correspond à l'échelle qui passe sous l'horizon exactement au moment de l'Équivalence (cf. Fig 47).

216. on parle de spectre invariant d'échelle, comme prédict par exemple par les théories d'Inflation

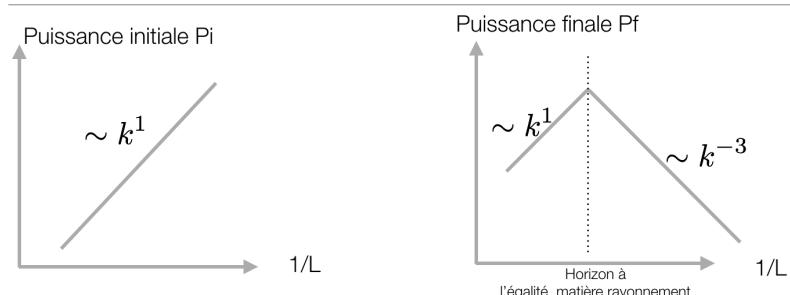


FIGURE 47: Schématique du filtrage du spectre de puissance des fluctuations initiales. Le spectre primordial est invariant d'échelle en $P(k) \sim k$ et le gel de la croissance des fluctuations sous l'horizon durant l'époque de domination du rayonnement produit un filtrage au hautes fréquences qui produit une pente caractéristique en $P(k) \sim k^{-3}$.

POUR RÉSUMER, le spectre de puissance de la matière est une version filtrée du spectre de puissance primordial. Ce filtre opère sur les échelles suffisamment petites pour passer dans l'Horizon cosmologique tôt dans l'histoire de l'Univers, durant l'époque dominée par le

rayonnement. Les échelles plus grandes ne permettant pas ce passage ont crû de façon indifférenciée et ont donc conservé les caractéristiques du spectre primordial. L'ensemble des prédictions développées dans ce chapitre, et notamment la mise en place du spectre de puissance $P(k)$ est fermement confirmée par de multiples observations (voir Fig. 48) : c'est un des grands succès du modèle Λ CDM aux grandes échelles.

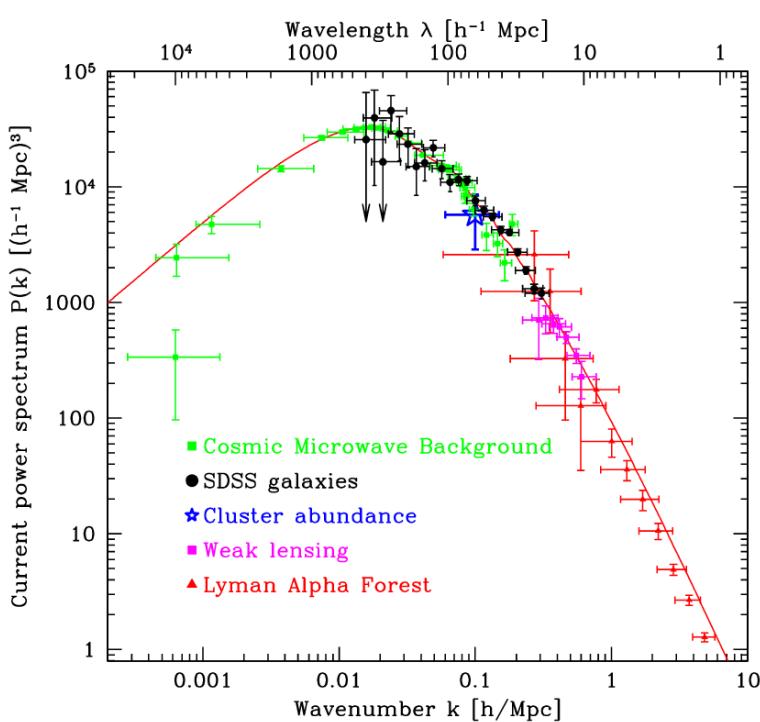


FIGURE 48: Le spectre de puissance $P(k)$ Λ CDM théorique est représenté ici avec une compilation des estimations observationnelles issues de différentes sondes : lensing, relevés de galaxies, CMB, comptage d'amas, Forêt Lyman- α . On note l'excellent accord en théorie et prédition. Figure extraite de Tegmark et al. 2003.

LES OSCILLATIONS BARYONIQUES, mentionnées dans le cas de la matière avec pression et vues dans le CMB, se manifestent également dans le spectre de puissance de la matière totale. Ces ondes sonores se propageant dans le gaz vont légèrement modifier la structure globale de la matière : même si les baryons ne représentent qu'une faible fraction ²¹⁷ de la masse totale, cette fraction est non nulle et joue sur la dynamique globale à l'oeuvre. Ces oscillations se manifestent à nouveau comme des modes légèrement privilégiés dans le spectre de puissance $P(k)$. Par ailleurs, ces modes privilégiés vont persister dans la distribution de matière bien au delà de la Recombinaison, jusqu'à nos jours. Par exemple, le spectre de puissance de la distribution actuelle des galaxies ²¹⁸ présente des modes privilégiés aux fréquences attendues à des niveaux faibles de l'ordre du % mais non nuls(voir

217. $\frac{\Omega_b}{\Omega_m} \sim 0.15$

218. mesurée à $z=0$ dans des grands relevés de millions de galaxies comme le Sloane Digital Sky Survey (SDSS)

Fig. 49). De même, la distribution du gaz diffus intergalactique à $z=2$ ²¹⁹ manifeste ces mêmes modes privilégiés. Ces ondes de pression primordiales, ont laissé leur empreinte dans toutes les structures qui ont émergé tout au long de l'histoire de l'Univers.

219. sondée dans les spectres de Quasars distants

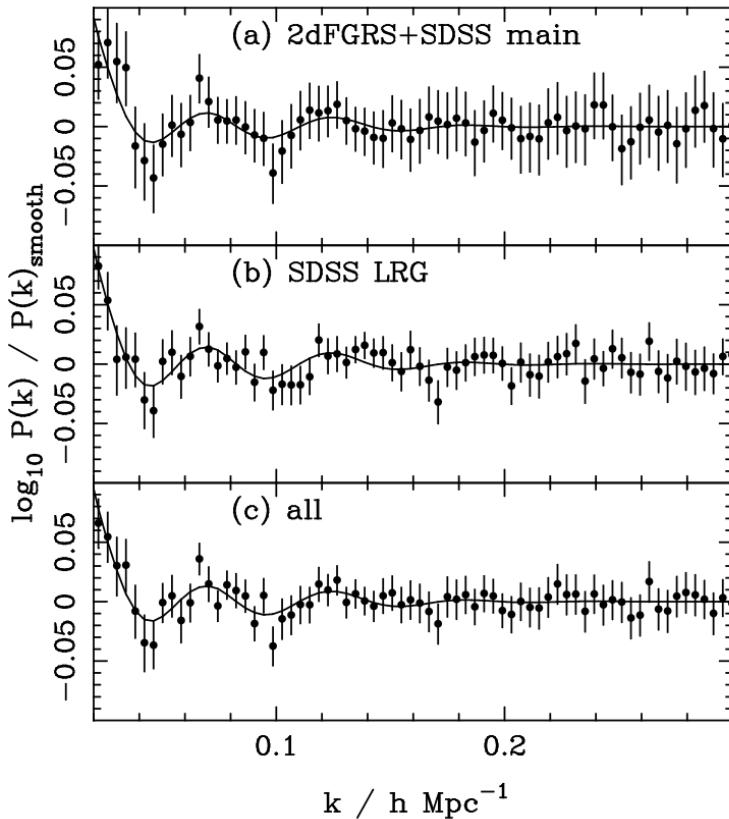


FIGURE 49: Détection des BAOs dans le spectre de puissance du grand relevé de galaxies SDSS. Les courbes représentées sont le rapport du spectre mesuré dans les données sur le spectre lissé, sans BAO, pour 3 échantillons de galaxies différents. Les BAOs sont très clairement apparent (points) aux positions prédictes par la théorie (lignes). Figure extraite de Percival et al. 2007.

Et après ?

Une fois le mécanisme d'instabilité déclenché, tous les modes vont parvenir à des régimes de surdensité qui vont au delà du régime linéaire et qui sortent du cadre dans lequel nous nous sommes placés. Dans certains cas académiques, le régime non-linéaire peut être abordé analytiquement mais en toute généralité il requiert l'utilisation de simulations numériques. La culmination de ce régime non linéaire est la création de structures denses, dominées par les baryons et au sein duquel se forment les sources de rayonnement : ce sont les galaxies qui nous entourent. L'apparition de ces objets est donc conditionnée par un contexte cosmologique et par extension il n'est pas illogique d'affirmer que l'étude de la formation des galaxies est

une extension naturelle de la cosmologie. Toutefois, des phénomènes astrophysiques commencent à rentrer en jeu aux échelles considérées : thermodynamique du gaz, processus physico-chimique de refroidissement, champ magnétique, formation et rétroaction stellaire, production et impact des éléments plus lourds que l'hélium, etc.... Chacun de ces phénomènes est un objet d'étude à part entière et chacun de ces phénomènes est compris de façon toute relative. On en décrira quelques-uns par la suite, mais de façon générale on peut aisément avancer qu'aujourd'hui l'extension de la théorie cosmologique à celle de la formation des galaxies présente des défis majeurs. Ces défis, à l'heure où ces lignes sont écrites ne sont pas résolus.

Formation des 'petites' structures

Au-delà du régime linéaire : le modèle d'effondrement sphérique

UNE SURDENSITÉ DE MATIÈRE va nécessairement sortir du régime des faibles valeurs au bout d'un certain temps : le mécanisme d'instabilité gravitationnelle va condenser les structures vers des grandes densités et le jeu d'équations linéarisées utilisé ci-dessus n'est plus valable. Nous allons ici développer un modèle simple de surdensité qui permet de suivre l'évolution d'une telle structure en effondrement. Le destin d'une telle structure est de finir en halo de matière à l'équilibre, dont on exposera aussi les propriétés de base. A des fins de simplification, nous allons par la suite nous limiter au cas d'un Univers rempli uniquement de matière noire, non-collisionnelle, avec $\Omega_m = 1$. Comme vu précédemment, cet Univers de Einstein-de Sitter est régi par une expansion en :

$$a(t) \sim t^{2/3}. \quad (329)$$

Considérons une surdensité, sphérique de rayon r , baignant dans un Univers de densité $\bar{\rho}$. A l'intérieur de cette surdensité, la densité est initialement légèrement plus grande que celle du fond avec $\rho = (1 + \delta)\bar{\rho}$ et uniforme à l'intérieur de ce rayon²²⁰. Ce modèle ressemble grandement au modèle de cosmologie newtonienne abordé en début d'ouvrage : dans ce modèle de cosmologie et pour la surdensité qui nous intéresse, sa dynamique est régie uniquement par la matière qui se trouve à l'intérieur et la couche la plus externe de la surdensité suit le principe fondamental de la dynamique :

$$\ddot{r} = -\frac{GM(< r)}{r^2}. \quad (330)$$

Rappelons que $r(t) = a(t)r_0$ et dans le cas où cette couche est en expansion infinie²²¹, on peut facilement intégrer l'équation différentielle précédente pour obtenir :

$$r(t) = \left(\frac{9GM(< r)}{2} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad (331)$$

220. On parle aussi de modèle 'chapeau haut-de-forme' à cause du profil de densité en crête associé

221. avec $a > 0$

avec une dépendance temporelle en $t^{2/3}$ conforme au modèle Einstein - de Sitter. Toutefois, cette dépendance ne peut représenter l'effondrement d'une structure, puisqu'on attend d'elle que son rayon diminue au delà d'un certain temps²²².

LA BON POINT DE DÉPART est l'équation de conservation de l'énergie spécifique de la couche externe de notre structure :

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r} \quad (332)$$

où $M = M(< r)$ désigne la masse à l'intérieur de la couche la plus externe. Rappelons que dans ce type de modèle les couches ne se croisent pas²²³ et cette masse interne M reste constante. Enfin, notre structure est vouée à s'effondrer, son énergie mécanique totale est donc négative, $E < 0$. Dans ce type de situation, on peut montrer que la solution $r(t)$ s'exprime sous forme *paramétrique* (voir aussi la figure 50) :

$$r(\theta) = A(1 - \cos \theta) \quad (333)$$

$$t(\theta) = B(\theta - \sin \theta) \quad (334)$$

où θ est un paramètre tel que $\theta \in [0, 2\pi]$. La vitesse de la couche peut également s'écrire sous forme paramétrique²²⁴ :

$$v(\theta) = \dot{r} = \frac{A \sin \theta}{B(1 - \cos \theta)}. \quad (335)$$

Ici, A et B sont respectivement des rayons et temps caractéristiques du problème traité avec :

$$A = \frac{GM}{2|E|} \quad (336)$$

$$B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} \quad (337)$$

$$A^3 = GMB^2 \quad (338)$$

où la dernière relation est similaire à la troisième loi de Kepler qui relie période et rayon des orbites autour d'un corps massif.

Ces relations paramétriques permettent de caractériser les grandes étapes du processus d'effondrement. D'abord, on constate que l'évolution du rayon n'est pas monotone, celui-ci croît, atteint un maximum et décroît pour devenir nulle : notre surdensité évolue d'abord avec le fond, suivant l'expansion globale, puis elle atteint une extension maximale avant de se *découpler* du flot global. La structure se réduit en taille avant d'atteindre une extension nulle et par conséquent sa densité devient infinie ! Cette évolution²²⁵ conduit naturellement à des régimes de densité non linéaires. Par simple inspection, on

222. donc l'hypothèse $\dot{a} > 0$ ne tient plus et nous empêche d'intégrer simplement l'équation différentielle

223. comme indiqué par $r(t) = a(t)r_0$: une couche externe reste toujours une couche externe

224. obtenue en dérivant l'équation sur le temps puis en l'injectant dans celle sur le rayon

225. qui est la même que celle d'un Univers de densité supérieure à la densité critique

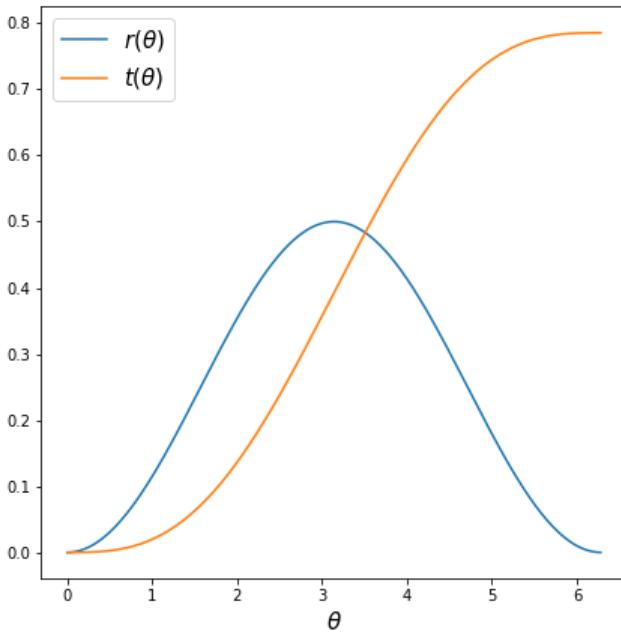


FIGURE 50: Les solutions du modèle d'effondrement sphérique en fonction du paramètre θ . Le temps t est une fonction monotone de ce paramètre tandis que le rayon de la surdensité passe par un maximum, correspondant au découplage de la structure par rapport au fond cosmologique, avant de tendre vers 0 à la fin de l'effondrement.

constate que le découplage, correspondant au maximum de r , opère pour $\theta = \pi$ et

$$r_d = 2A \quad (339)$$

$$t_d = \pi B. \quad (340)$$

L'effondrement final correspond quant à lui à $\theta = 2\pi$ et

$$r_e = 0 \quad (341)$$

$$t_e = 2\pi B. \quad (342)$$

Le temps nécessaire à l'effondrement²²⁶ total de la structure est le double de celui nécessaire au découplage : $t_e = 2t_d$.

LA SURDENSITÉ VARIE AUSSI DE FAÇON PARAMÉTRIQUE. La densité à l'intérieur de la structure est donnée par :

$$\rho = \frac{M}{4/3\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3(1 - \cos \theta)^3}, \quad (343)$$

tandis que la densité du fond, égale à la densité critique dans notre modèle est donnée par²²⁷ :

$$\bar{\rho} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{B^2 6\pi G (\theta - \sin \theta)^2}. \quad (344)$$

226. on utilise aussi fréquemment les termes anglais de *turn-around* pour le découplage et de *collapse* pour l'effondrement

227. on rappelle que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ et $a \sim t^{2/3}$ dans Einstein- de Sitter

On obtient alors la formulation paramétrique de l'évolution de la surdensité :

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = 1 + \delta = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3}. \quad (345)$$

Bien sûr, cette équation ne rend pas compte des phases ultimes de l'effondrement : cet effondrement doit s'arrêter lorsqu'un équilibre est atteint après réorganisation de la matière et des vitesses. Les coquilles se croisent, la masse à l'intérieur de la coquille change et de l'énergie est échangée entre les couches.

Toutefois, une bonne approximation du processus à l'oeuvre peut être obtenue en invoquant le théorème du Viriel. Une fois l'équilibre atteint, notre couche externe doit satisfaire

$$2T + U = 0, \quad (346)$$

où T et U désignent respectivement l'énergie cinétique et potentielle de notre couche externe après viriélation. Comme par ailleurs l'énergie reste conservée, l'énergie totale en fin de viriélation est donnée par :

$$E = \frac{U}{2} = -\frac{GM}{2r_v} \quad (347)$$

où l'on considère que la masse interne n'a pas été modifiée significativement par la redistribution. A l'équilibre, l'énergie totale de la couche est complètement définie par son énergie potentielle : c'est également le cas lors du découplage, durant lequel l'énergie cinétique est nulle par définition²²⁸

$$E = -\frac{GM}{r_d}. \quad (348)$$

Par conservation de l'énergie de la couche on obtient alors une relation entre le rayon de la couche externe à l'équilibre r_v et celui lors du découplage r_d :

$$r_v \sim \frac{1}{2} r_d, \quad (349)$$

le rayon de la structure se stabilise autour d'une valeur correspondant à la moitié du rayon lors du découplage. Ce rayon est aussi appelé *rayon de viriel*, et est utilisé de façon générique pour désigner les bords 'externes' d'un halo de galaxie.

On peut également évaluer la valeur de la surdensité finale après la phase de viriélation. On cherche à évaluer

$$1 + \delta_v = \frac{\rho(t_v)}{\bar{\rho}(t_v)}, \quad (350)$$

ce qui nécessite d'évaluer les deux densités ρ et $\bar{\rho}$ post-viriélation. La densité du fond est simple à obtenir, car la viriélation opère au

^{228.} en effet le découplage correspond au maximum d'extension de la surdensité avec $\dot{r} = 0$ par définition

temps $t_v = t_e = 2t_d = 2\pi B$, on obtient donc :

$$\bar{\rho}(t_v) = \frac{1}{6\pi G t_v^2} = \frac{1}{4}\bar{\rho}(t_d). \quad (351)$$

De même, sachant que le rayon de viriel est la moitié du rayon de découplage, il existe une relation simple entre la densité à l'équilibre et celle lors du découplage :

$$\rho(t_v) = \frac{3M}{4\pi r_v^3} = 8\rho(t_d) \quad (352)$$

d'où la relation :

$$1 + \delta_v = \frac{8\rho(t_d)}{\frac{1}{4}\bar{\rho}(t_d)} = 32(1 + \delta_d). \quad (353)$$

Sachant que le découplage opère pour $\theta = \pi$, l'évaluation de l'équation 345 pour cette valeur donne $\delta_d \sim 5.55$ et une valeur de densité à l'équilibre

$$1 + \delta_v \sim 178. \quad (354)$$

En résumé, une structure qui s'effondre sous l'effet de l'instabilité gravitationnelle voit sa densité se stabiliser autour de 200 fois celle du fond. Pour cette raison, on désigne fréquemment le rayon de viriel r_v sous le terme de r_{200} et par exemple, c'est comme cela qu'on détermine l'extension d'un halo de galaxie dans une simulation numérique : son extension est choisie de telle façon à ce que la surdensité interne soit proche de 200.

ON PEUT ÉGALEMENT PROPOSER UNE EXTRAPOLATION LINÉAIRE du calcul qui vient d'être réalisé. Il s'agit de calculer la surdensité au moment de l'effondrement mais telle qu'elle est prédite dans le régime linéaire. L'intérêt d'un tel calcul est qu'il permet de prédire simplement les régions qui vont s'effondrer sans avoir à réaliser un calcul non-linéaire complet : en se donnant un champ de densité, on peut prédire aisément sa croissance linéaire et désigner quelles régions vont s'effondrer et à quel instant. Si l'on reprend notre modèle paramétrique, le régime des faibles perturbations est celui qui opère au début, donc quand $\theta \ll 1$. Ce paramètre devient alors une simple fonction de t ²²⁹ :

$$\theta \sim \left(\frac{6t}{B}\right)^{1/3}. \quad (355)$$

229. obtenu via un développement limité de $t(\theta)$

De même dans ce régime et en utilisant les bons développements limités, l'équation 345 peut être réécrite :

$$1 + \delta = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \sim 1 + \frac{3}{20} \theta^2. \quad (356)$$

D'où l'expression de δ_l dans le régime linéaire en fonction du temps :

$$\delta_l = \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B} \right)^{2/3} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left(\frac{t}{t_d} \right)^{2/3}. \quad (357)$$

On note d'ores et déjà que l'on retrouve la fameuse dépendance en $t^{2/3}$, propre aux modèles dominés par la matière. Au moment de l'effondrement, $t = t_e = t_v = 2t_d$, ce qui donne $\delta_l = 1.69$. Cette valeur revêt un caractère un peu 'magique' : si on évolue une champ de densité linéairement, les régions qui dépassent ce seuil vont s'effondrer. Ce type de raisonnement permet de prédire quelles régions vont former des structures et à quel instant : c'est ce qui permet par exemple de faire des prédictions analytiques sur la fonction de masse des halos de matière noire ou bien sur leur histoire de formation. Ce types de prédictions sont à la base de modèles *analytiques* de formation des galaxies où la connaissance de l'histoire de formation de ces objets peut être utilisée pour prédire l'évolution des baryons en leur sein et les propriétés des galaxies qui s'y forment.

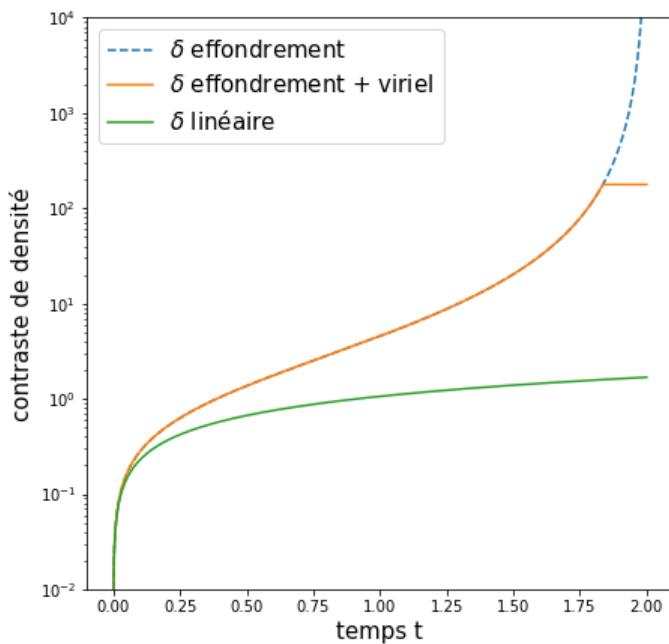


FIGURE 51: Les différentes solutions pour le contraste de densité $\delta = \rho/\bar{\rho} - 1$ au cours du temps. On constate que le contraste non-linéaire évolue vers une singularité au moment de l'effondrement, la densité tend vers l'infini. Pratiquement, la surdensité va se stabiliser autour d'un contraste d'environ 200, correspondant à un état d'équilibre issu d'une redistribution de la matière et des vitesses appelée virérialisation. L'approximation linéaire suit la solution non-linéaire dans le régime des petits contrastes mais évolue plus lentement aux temps ultérieurs pour atteindre une valeur de 1.68 au moment où la structure devrait s'effondrer.

Propriétés générique des halos post-effondrement

Les structures effondrées étudiées dans la partie précédente sont de fait les halos de matière noire qui entourent les galaxies. Nous

venons par exemple de prédire que la densité typique interne à ces objets doit être de l'ordre de 200 fois celle du fond, mais qu'en est-il du profil de densité de ces halos ? Les simulations cosmologiques montrent que le profil résultant de la virielisation est de forme *universelle* et qu'une forme fonctionnelle simple permet d'ajuster le profil de la distribution de matière sur des grandes gammes de masses d'objet. La plus célèbre de ces formes fonctionnelles est le profil NFW²³⁰ :

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}. \quad (358)$$

230. du nom de ses découvreurs Navarro, Frenk et White

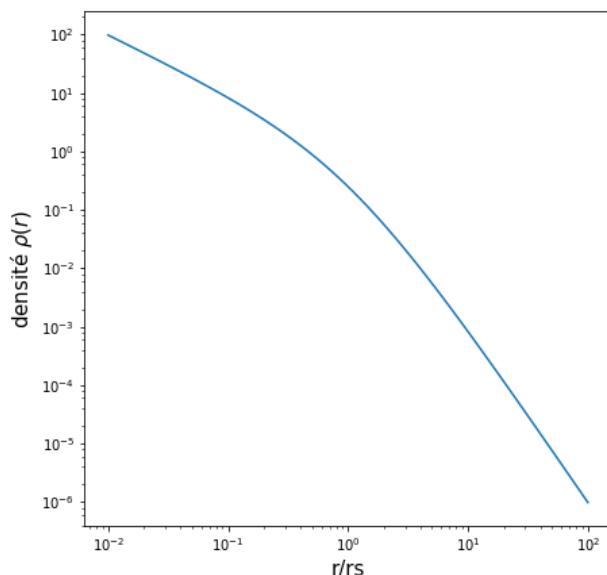


FIGURE 52: Le profil de densité de NFW est le profil universel des halos de matière noire mesuré dans les simulations de formation des grandes structures. Ce profil se caractérise par le 'pic' en r^{-1} au centre : ce type de distribution de matière n'est pas observé dans la cinématique des étoiles centrales des galaxies naines par exemple, posant difficulté aux prédictions des modèles de matière noire. L'injection répétée d'énergie dans le gaz central pourrait conduire à une redistribution de la matière dans ces régions, y compris dans la composante matière noire, pour 'aplatiser' ce profil.

Ce profil se comporte en r^{-3} à grande distance et en r^{-1} près du centre du halo et on qualifie ce profil de 'piqué'. Le rayon r_s est le rayon de transition entre ces deux régimes de pentes à courte et grande distance. Les mêmes simulations montrent que le rapport entre ce rayon de transition et le rayon de viriel étudié précédemment, appelé aussi concentration, est de l'ordre de :

$$c = \frac{r_v}{r_s} \sim 10 \quad (359)$$

sachant que les petits halos sont plutôt plus concentrés que cette valeur et les plus massifs sont plutôt moins concentrés. Ce comportement piqué au centre n'est pas sans poser problèmes car les mesures de cinématiques au centre des galaxies naines semblent indiquer un profil de densité possédant plutôt un coeur plat²³¹. Bien que cela soit

231. avec des profils en $\rho \sim r^0$

encore un sujet de recherche actif, le consensus grandissant est que la physique baryonique, et notamment les processus d'injection d'énergie répétée dans le gaz par les générations successives de supernovae au centre des halos, conduirait à une redistribution des profils centraux de matière vers des profils à 'coeur' : c'est l'absence de prise en compte de ces effets dans les simulations qui conduirait à cette différence entre modèles et observations.

LE GAZ N'EST PAS EN RESTE dans le processus de viréolisation. Une fois l'équilibre atteint, le gaz va aussi s'organiser dans le potentiel gravitationnel du halo dominé par la matière noire. On peut par exemple lui assigner une température d'équilibre appelée aussi température de Viriel. Conformément au théorème du Viriel, l'équipartition entre énergie cinétique et potentielle des baryons peut s'écrire :

$$3 \frac{M_g k_B T}{\mu m_p} - \alpha \frac{GM_v M_g}{r_v} = 0. \quad (360)$$

Ici μm_p désigne la masse typique d'une particule (atome d'hydrogène, hélium, électron), M_g est la masse de gaz totale et α est un facteur de forme proche de l'unité dépendant du profil de masse du gaz. La température de viriel du gaz est donc une fonction simple de la masse et de la taille du halo : $T_v \sim M_v / r_v \sim V_v^2$ ²³², et pour une masse de halo donné cela implique que si un processus quelconque (comme l'arrivée de rayonnement) chauffe le gaz au dessus de cette température, celui-ci ne peut rester à l'équilibre et éventuellement l'évaporer. Bien sûr la température du gaz à l'intérieur d'une vraie galaxie n'est pas constante et cette température de Viriel n'est qu'une estimation des régimes typiques des températures atteintes au sein des halos.

Toutefois, un gaz dispose d'un canal d'évacuation d'énergie interne inaccessible à la matière noire : les processus baryoniques régis par les interactions électro-magnétiques et la production de rayonnement qui peut emporter de l'énergie interne du gaz. On appelle ces processus des *processus de refroidissement*, caractérisé par une fonction de refroidissement $\Lambda(x, T)$ qui dépend de la température du gaz T et de sa fraction d'ionisation x ²³³ : la quantité d'énergie évacuée par le gaz, en $J/m^3/s$, est donnée par :

$$\Delta e_{\text{int}} = n_H^2 \Lambda(x, T). \quad (361)$$

Cette fonction de refroidissement dicte la quantité d'énergie évacuée à chaque instant par les processus atomiques d'excitation collisionnelle, d'ionisation, de recombinaison et de brehmstrahlung : tous ces processus dépendent du nombre d'atomes neutres et d'électrons disponibles, d'où la dépendance de la fonction de refroidissement en

^{232.} ici $V_v = \sqrt{GM_v/r_v}$ désigne la vitesse du Viriel, la vitesse circulaire au rayon de viriel, qui est une mesure de sa masse.

^{233.} $x = 1$ désigne un gaz dont tous les atomes sont ionisés, $x = 0$ où ils sont tous neutres

fraction d'ionisation. Ces processus de refroidissement produisent de la lumière, font diminuer l'énergie interne du gaz qui perd en support thermique et peut donc se contracter davantage : le gaz va devenir de plus en plus dense dans un halo de matière noire qui lui va rester à l'équilibre de viriel. La conséquence ultime de ce processus de condensation est la formation d'une galaxie et au sein de celle-ci la formation d'étoiles. Bien sûr, si le refroidissement n'est pas assez efficace, le gaz va retrouver son équilibre hydrostatique et l'effondrement du gaz n'aura pas lieu : la compétition entre ces deux effets s'évalue en comparant les temps de refroidissement et de rééquilibrage :

$$t_{\text{ref}} \sim \frac{n_H k_B T}{n_H^2 \Lambda} \quad (362)$$

$$t_{\text{eq}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (363)$$

On note que le temps d'équilibrage n'est rien d'autre que le temps d'effondrement dynamique, qui est le temps typique de réorganisation de la matière sous l'effet de la gravitation. Si $t_{\text{eq}} \ll t_{\text{ref}}$ le refroidissement n'est pas assez efficace, l'effondrement baryonique s'arrête. Dans le cas inverse, l'énergie peut être évacuée par rayonnement assez rapidement et la contraction est catastrophique pouvant finalement mener à la formation de galaxie et d'étoiles. On note que le refroidissement varie comme ρ^{-1} tandis que l'équilibrage varie en $\rho^{-1/2}$: plus le milieu est dense, plus le refroidissement est efficace par rapport à l'équilibrage et favorise ainsi l'effondrement.

Quand on inspecte rapidement la fonction de refroidissement, on note celle-ci est maximale pour des températures comprises entre 10^4 et 10^6 degrés : en-dessous, les énergies ne sont pas suffisantes pour enclencher les processus atomiques, au dessus le gaz est trop ionisé, limitant les possibilités en termes de processus atomiques disponibles. Par conséquent, les halos trop légers, avec des températures de viriel trop faibles ($M_v < 10^9 M_\odot$), ne peuvent refroidir efficacement. De même les objets très lourds ($M_v > 10^{13} M_\odot$) présentent en principe les mêmes limitations car possédant des températures caractéristiques trop élevées. En pratique toutefois, les plus gros objets disposent de sous régions denses qui refroidissent efficacement. De même, les plus petits objets bénéficient également de la possibilité de refroidir via les processus *moléculaires* du H_2 notamment, qui étend les capacités de refroidissement à de plus faibles températures. De même la présence d'éléments plus lourds que l'hélium, désignés sous le terme de métaux, fournit de multiples transitions atomiques et multiplie les canaux d'évacuation de l'énergie : l'enrichissement du gaz par les générations successives d'étoiles favorise le refroidisse-

ment du gaz.

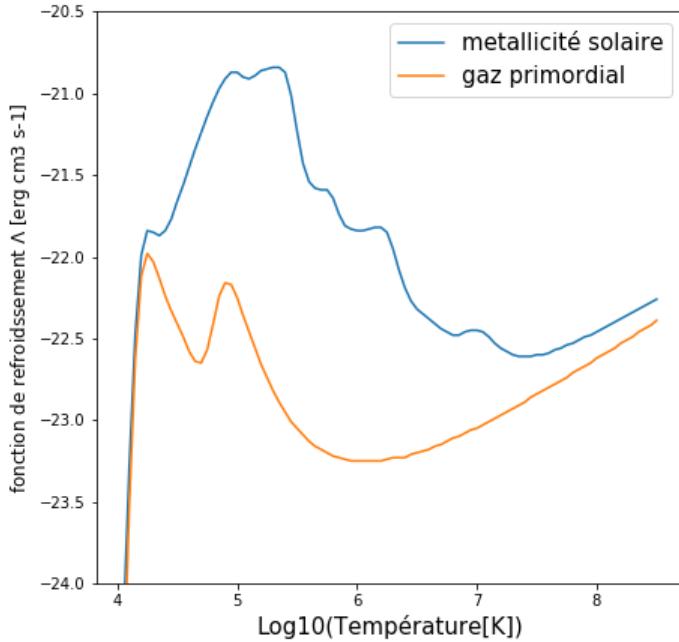


FIGURE 53: La fonction de refroidissement du gaz de Sutherland et Dopita, pour un gaz sans métaux, dit 'primordial' et un gaz avec une métallicité solaire. Dans les 2 cas, le refroidissement n'est efficace qu'au dessus de 10 000 K tandis que les hautes températures présente un comportement en \sqrt{T} typique du Brehmstrahlung. Pour le gaz primordial on observe les 2 'bosses' caractéristiques des processus d'excitation collisionnelle de l'hydrogène et de l'hélium. Le gaz enrichi en métaux est globalement plus efficace car disposant des multiples canaux de refroidissement des éléments plus lourds que l'hélium. Les cas présentés ici suppose un équilibre d'ionisation.

Pour finir, on a rapidement réalisé que lorsqu'il était actif, ce processus de refroidissement devenait trop efficace en particulier à grand redshift lorsque la matière était très dense, donnant des petites galaxies trop abondantes, un nombre trop important d'étoiles ou des galaxies de tailles trop faible, trop concentrées²³⁴. Il faut donc réinjecter de l'énergie dans le gaz pour qu'il arrête ce refroidissement catastrophique, via par exemple l'énergie injectée par les explosions d'étoiles en fin de vie ou par la présence d'un fond de rayonnement ultra-violet. On reviendra sur ces sujets dans la partie dédiée aux simulations numériques.

²³⁴. par exemple dans les travaux de White & Rees à la fin des années 70 ou Navarro & White dans les années 90s

Bibliographie

Robert Bringhurst. *The Elements of Typography*. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5.

Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8.

Edward R. Tufte. *Visual Explanations*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1997. ISBN 0-9613921-2-6.

Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 2001. ISBN 0-9613921-4-2.

Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7.

Hideo Umeki. The *geometry* package. <http://ctan.org/pkg/geometry>, December 2008.

Index

Λ CDM, 63
 Λ CDM, 103
équilibre, 66
thermodynamique, 72

abondance, 65, 72
à l'équilibre, 74
abondance à l'équilibre, 65
accélération, 33
expansion, 17, 56, 57, 64
accélération
expansion, 63
âge
Univers, 61
âge de l'Univers, 21, 28, 41, 42
âges sombres, 21
amas de galaxies, 19, 21, 105, 122
amas globulaire, 29, 109
amas globulaires, 61
amortissement Silk, 98, 116
annihilation, 75
antimatière, 75
antiparticule, 70
asymétrie matière-antimatière, 75
atome, 65

béryllium, 84
BAO, 19, 97
Baryogénèse, 76
baryogénèse, 21
baryon, 15, 17
baryons, 53, 60, 85
Big-Bang, 14, 20, 41, 51, 60, 63
Bose-Einstein, 69
statistique, 69, 70
boson, 38, 68, 73
Bullet cluster, 111

Céphéides, 16

champ aléatoire gaussien, 95
choc, 112
chute libre, 35
conditions de Sakharov, 76
conservation
énergie, 58
conservation de l'énergie, 47
constante cosmologique, 17, 48, 56
contraction, 41
corps noir, 30, 70, 71, 87, 90, 91
pression, 30
température, 30
cosmologie Newtonienne, 23
cosmologie primordiale, 9
courbe de luminosité, 17
courbe de rotation, 103, 104
courbure, 16, 28, 37, 39, 40, 59

décélération
expansion, 57
dégénérescence, 69
délais temporels, 44
de Sitter, 62
modèle d'Univers, 62

densité
énergie des espèces relativistes, 86
d'énergie, 52
matière, 46
densité critique, 15, 26, 27, 59
densité d'états, 68
dernière diffusion
surface, 90
Deutérium, 82
bottleneck, 83
deutérium
bottleneck, 88
diffusion Thomson, 87, 89, 90, 99
dipôle, 94
dipole, 95

distance, 38
comobile, 24, 39, 51
physique, 24, 39, 51
distance de parcours lumineux, 40
domination
période, 57

échelle angulaire, 94
échelles angulaires, 93
effet Sachs-Wolf, 96
Effet Sunyaev-Zeldovich, 19
effet SZ, 99
Einstein- de Sitter, 28
Einstein-de Sitter, 61
électron, 16, 72
électrons, 80
élément légers, 65
énergie, 46
énergie-impulsion, 46
cinétique, 25, 53, 72
mécanique, 26
masse, 53, 72, 74
potentielle, 26, 29
vide, 56
énergie cinétique, 106
énergie de liaison, 82
énergie potentielle, 106
énergie-impulsion, 48
énergie noire, 15, 17, 21, 56
entropie, 10, 81
équation
de Boltzmann, 119
de Boltzmann, 118
des lentilles, 112
Poisson, 109
équation de Friedmann, 28
équation de Saha, 82
équation d'Einstein, 45
équation de Friedmann, 48, 52

- équation de Poisson, 45, 119
 lentille gravitationnelle, 113
 équation de Poisson, 47
 équivalence matière-rayonnement, 21
 espace-temps, 31, 37, 38
 plat, 29
 étoiles, 21
 expansion, 9, 13, 24, 41, 51, 66
 accélération, 21

 facteur d'échelle, 23, 27, 39, 51
 Fermi-Dirac, 69
 statistique, 69
 fermion, 68, 73
 fluctuations adiabatiques, 95
 fluctuations de densité, 15
 fluide cosmologique, 51
 fluide parfait, 48
 flux, 25, 44
 fonction de distribution, 118
 Maxwell, 119
 fonction de masse des halos, 122
 fond diffus, 80
 anisotropies, 92
 avant-plan, 95
 fond diffus cosmologique, 9, 16, 17,
 21, 64, 71, 87, 116
 de neutrinos, 81
 fond UV, 108
 forêt Lyman- α , 19
 force, 33
 formation des galaxies, 9, 21
 formation hiérarchique, 21, 122
 fréquence
 rayonnement électromagnétique, 13
 fraction baryonique, 108
 fraction ionisée, 88
 Friedmann-Robertson-Walker
 métrique, 39, 43, 45, 48

 géométrie, 37
 euclidienne, 38
 Minkowski, 38
 géométrie de l'Univers, 17
 géométrie différentielle, 38
 galaxie, 17, 23
 galaxie d'Andromède, 124
 galaxies
 fonction de luminosité, 122
 satellites, 124
 gel des réactions, 65, 67, 74, 79, 89

 grande structure de l'Univers, 18, 21
 grands relevés, 18, 103
 gravitation, 33
 gravitation modifiée, 126
 gravitation quantique, 37

 hélium, 21, 81
 fraction de masse, 83
 halo de matière noire, 121
 harmoniques sphériques, 93
 homogénéité, 25, 33, 39, 92
 horizon, 29, 97
 Hubble
 diagramme, 42
 fonction, 25, 28, 41, 53, 59, 66
 loi, 25, 42
 paramètre, 15, 60
 temps, 29, 42, 66
 hydrogène, 65
 densité, 70

 Inflation, 9, 15, 17, 20, 63
 inflation, 97
 information, 43
 instabilité, 119
 instabilité gravitationnelle, 21
 interaction fondamentale, 33
 intervalle, 38
 invariance, 58
 ionisation, 16, 21, 65
 isotropie, 33, 39
 du fond diffus, 95

 lentille gravitationnelle, 19, 100, 112
 lentilles gravitationnelles
 convergence, 113
 potentiel, 112
 lentilles gravitationnelles, 99
 angle de déflexion, 112
 caustiques, 113
 cisaillage, 113
 densité critique, 113
 grossissement, 113
 lignes critiques, 113
 LHC, 72
 libre parcours moyen, 110
 ligne de visée, 39
 linéaire, 25
 lithium, 83
 longueur d'onde, 13, 45
 longueur de Jeans, 120

 luminosité, 42

 métrique, 38
 masse de Jeans, 118
 masse dynamique, 105
 masse grave, 34
 masse inertielle, 34
 matière
 non relativiste, 56
 relativiste, 56
 matière noire, 15, 17, 98, 103, 105, 111,
 112, 116
 chaude, 118
 froide, 53, 117
 halo, 107, 124
 sous-structures, 124
 matière noire chaude, 120
 matière noire froide, 120
 matière relativiste, 54
 Maxwell-Boltzmann, 82
 statistique, 73
 milieu intergalactique, 19
 modèle standard, 8, 13, 16, 20
 Λ CDM, 63
 muons, 80

 neutralité électrique, 31, 88
 neutrino, 21, 51, 81, 118, 120
 neutrinos, 55, 74, 79, 80
 nombre, 86
 neutron, 82
 niveau d'occupation d'un état, 68
 nombre d'états, 68
 nombre d'onde, 67
 notation d'Einstein, 38
 noyau actif de galaxie, 124
 nucléosynthèse, 21, 80

 onde gravitationnelle, 21
 ondes gravitationnelles, 15
 ondes sonores, 116
 oscillation baryonique accoustique,
 97, 116
 oscillation baryonique acoustique, 18

 période
 rayonnement électromagnétique, 13
 paramètre
 densité, 58
 paramètre cosmologique, 14
 paramètre d'impact, 110

- paramètre de densité, 15, 27
 particule
 non-relativiste, 73
 ultra-relativiste, 72, 73
 particule libre, 67, 72
 particule relique, 65
 particules reliques, 75
 photon, 14, 16, 17, 39, 43, 69
 densité, 70
 diffusion, 17
 UV, 65
 pions, 79
 Planck
 distribution, 70, 71
 satellite, 86, 116
 potentiel chimique, 69, 88
 potentiel gravitationnel, 45, 109, 119
 pression, 46, 53, 55, 57
 de rayonnement, 116
 principe cosmologique, 31, 32, 39, 43
 principe d'équivalence, 33, 34
 principe d'exclusion, 69
 principe fondamental de la dynamique, 27, 106
 proton, 82
- quantification, 38
 quark, 21
 quarks, 79, 82
- quasar, 19, 99
- référentiel, 35
 référentiel inertiel, 35
 Réionisation, 16, 19
 réionisation, 99
 radioactivité, 83
 rapport baryon/photon, 70
 Recombinaison, 17, 18, 21, 116
 recombinaison, 80, 87, 88, 90
 redshift, 13, 42, 45, 55
 relativité générale, 14, 30, 33, 37
- simulations cosmologiques, 9
 spectre, 13
 spectre de puissance, 15, 17, 19, 116, 122
 amplitude, 15
 stabilité, 119
 statistique d'un gaz, 67
 supernovae, 17, 44, 108, 122
 supraluminique, 43
 surface de dernière diffusion, 89
 système auto-gravitant, 26
 système non collisionnel, 109
 système non-collisionnel, 109
- taux de réaction, 65
 température, 14, 20, 69, 73, 79
 fluctuations, 92
- gaz de photons, 70, 92
 neutrino, 81
 photon, 71
 rayonnement, 74
 temps
 de collision, 110
 de croisement, 110
 de relaxation, 111
 temps de Planck, 20
 tenseur d'Einstein, 47
 tenseur d'inertie, 106
 tenseur de Ricci, 47
 théorème de Birkhoff, 29
 théorème du viriel, 105, 106
 transformée de Fourier, 93, 109
 travail, 53
 triple- α , 84
 trou noir, 124
- Univers Lumière, 62
 Univers Poussièvre, 61
- vecteur d'onde, 67
 vitesse
 dispersion, 105, 117
 fuite, 25
 récession, 25
 rotation, 103
 Voie Lactée, 104, 107, 124

Table des figures

1	Le bilan énergétique de l'Univers	18
2	Les grandes étapes dans l'histoire du cosmos	20
3	le modèle cosmologique Newtonien	24
4	Annulation du champ de pesanteur	35
5	Référentiels localement inertiels	36
6	Distance de parcours lumineux	40
7	Coordonnées comobiles et expansion	42
8	Diagramme de Hubble	43
9	loi de Hubble et homogénéité	44
10	Durée des supernovaes en fonction du redshift	45
11	Evolution des fluides cosmologiques	52
12	Epoques de domination des fluides cosmiques	57
13	Facteur d'échelle pour différentes cosmologie	64
14	Calcul de la densité d'état libres	68
15	Evolution schématique de l'abondance d'une particule relique.	75
16	Les conditions de Sakharov	77
17	La situation après la fin du goulot du Deutérium	84
18	Energies de liaisons des différents éléments	85
19	Comparaison des abondances observées des éléments légers	86
20	Evolution temporelle de fraction d'ionisation x_e pour trois valeur de Ω_b . L'âge typique de l'Univers aux redshifts concernés est d'environ 380 000 ans. Les atomes sont totalement ionisés, $x_e = 1$ aux grandes valeurs de z , et le gaz cosmique est sous la forme d'un plasma. Progressivement, sous l'effet de la baisse de température, les atomes vont recombiner pour donner un Univers neutre, optiquement mince au rayonnement du fond diffus.	89
21	Le plasma cosmique avant la recombinaison	90
22	L'Univers devient transparent au CMB	91
23	Le spectre du fond diffus cosmologique	92

24	Les fluctuations de températures vues par Planck	93
25	Le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique obtenu par <i>Planck</i> .	94
26	CMB et géométrie	98
27	L'effet SZ	101
28	La vitesse de rotation des planètes du système solaire	104
29	La vitesse de rotation de la matière dans la Voie Lactée	105
30	Une galaxie et son halo de matière noire	107
31	La fraction baryonique prédite par une simulation numérique	108
32	Une illustration du lien entre densité et potentiel, via l'équation de Poisson.	109
33	Le <i>Bullet Cluster</i>	111
34	Les quantités pertinentes d'une lentille gravitationnelle	114
35	Exemple de calcul de lentilles gravitationnelles	115
36	Deux modèles de spectre de puissance angulaire du fond diffus cosmologique	117
37	Deux simulations de la densité de gaz dans un volume d'Univers de 8 Mpc de côté	120
38	La fonction de masse des halos de matière noires pour différents redshifts	121
39	Quelle échelle d'Univers faut-il-sonder pour trouver un halo de masse donnée à une époque donnée	123
40	Schéma illustrant la différence entre la fonction de masse des halos et la distribution des luminosité des galaxies	123
41	Distribution du nombre de galaxies satellites de la Voie Lactée	125
42	Distribution des satellites de la Galaxie d'Andromède	125
43	Le relevé de galaxies 2MASS	127
44	Les oscillations baryoniques évoluent sur des fréquences différentes, dépendant de leur taille.	139
45	Les pics accoustiques sont des extrema	140
46	Synthèse de la croissance des perturbations	142
47	Schématique du filtrage du spectre de puissance des fluctuations initiales.	144
48	Le spectre de puissance observé	144
49	Les BAOs dans les relevés de galaxies	146
50	Les solutions paramétriques de l'effondrement sphérique	151
51	Evolution temporelle du contraste de densité pour l'effondrement sphérique	154
52	Le profil de densité NFW	155
53	La fonction de refroidissement du gaz	158