

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

Maksimizacija maksimalnog stepena u uređenim grafovima najbližih suseda

Dimitrije Rađenović

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

januar 2026.

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani radovi

Primene

Zaključak

Reference

- *Péter Ágoston* – Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.
- *Adrian Dumitrescu* – Algorsearch L.L.C., Milwaukee, WI, USA.
- *Arsenii Sagdeev* – Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany.
- *Karamjeet Singh* – Indraprastha Institute of Information Technology, Delhi, India.
- *Ji Zeng* – University of California San Diego, La Jolla, CA, USA & Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.

Saradnja je započela tokom *Focused Week on Geometric Spanners* (23–29. oktobar 2023, Budimpešta, Mađarska).

- **Naslov rada:** *Maximizing the maximum degree in ordered nearest neighbor graphs.*
- **Časopis:** *Computational Geometry: Theory and Applications.*
- **Tom:** 132 (2026).
- **Broj članka:** 102229.
- **Dostupnost online:** od 18. septembra 2025.
- **DOI:** 10.1016/j.comgeo.2025.102229.
- Ranija verzija ovog rada objavljena je u *Zborniku radova konferencije CALDAM 2025 (13-15. februar 2025, Koimbatore, Indija).*

Graf najbližih suseda

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

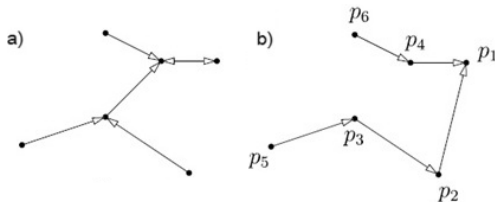
Primene

Zaključak

Reference

Za dati skup tačaka u metričkom prostoru, **graf najbližih suseda** (engl. *Nearest Neighbor Graph*, NNG) je usmereni graf u kome svaki čvor ima tačno jednu **izlaznu ivicu** ka svom najbližem susedu.

- **Neuređeni NNG**: svaka tačka bira najbližu među *svim* ostalim tačkama (Slika 1a).
- **Uređeni NNG**: tačke se pojavljuju *jedna po jedna*; svaka nova tačka bira najbližu među *već uvedenim* tačkama (Slika 1b).



Slika 1: a) Neuređeni i b) uređeni graf najbližih suseda nad istim skupom od šest tačaka (Ágoston et al., 2026).

Teorema 1

Za svaki skup od n tačaka na pravoj, postoji poredak takav da odgovarajući uređeni graf najbližih suseda ima maksimalni ulazni stepen najmanje $\lceil \log n \rceil$. Sa druge strane, postoji skup od n tačaka na pravoj takav da za svaki poredak, ulazni stepen svake tačke je najviše $\lceil \log n \rceil$.

Ključne ideje dokaza:

- **Gornja granica** - Skup $P_{k+1} = P_k \cup (3^k + P_k)$ ima dve polovine razdvojene više nego što je njihov dijametar, pa svaka tačka prima najviše jednu ivicu iz druge polovine. Indukcijom sledi da maksimalni ulazni stepen ne prelazi $\lceil \log n \rceil$.
- **Donja granica** - Konstruiše se algoritam koji rekurzivno postavlja centar većeg podskupa na početak, pa zatim krajnju tačku druge strane koja se povezuje s njim. Svaki nivo rekurzije dodaje jednu ivicu tom centru, pa je maksimalni ulazni stepen $\geq \lceil \log n \rceil$.

Teorema 2

Za svaki skup od n tačaka u \mathbb{R}^d , postoji poredak takav da odgovarajući uređeni graf najbližih suseda ima maksimalni ulazni stepen bar $\frac{\log n}{4d}$.

Ključne ideje dokaza:

- Izračunati dijametarski par ab sa $|ab|=1$. Neka je $A=\{p\in P:|pa|\leq|pb|\}$ i $B=\{p\in P:|pb|\leq|pa|\}$. Bez gubitka opštosti, $|A|\geq|B|$, stoga $|A|\geq n/2$.
- Prema Korolaru 1, A se podeli na najviše $16^d/2$ podskupova prečnika manjeg od $1/2$. Jedan od njih, $C\subseteq A$, sadrži bar $n/16^d$ tačaka.
- Poredati tačke: prvo tačka iz C koja ima maksimalni ulazni stepen u rekursivnom poretku nad C , zatim b , pa sve ostale tačke iz C , i na kraju tačke iz $P\setminus(C\cup\{b\})$.
- Tu tačku iz C definišemo kao centar skupa P .

Korolar 1: Neka je P konačan skup tačaka u \mathbb{R}^d takav da $\text{diam}(P) \leq 1$. Tada se P može podeliti na najviše $16^d/2$ podskupova čiji je dijametar manji od $1/2$.

- *Agarwal, Eppstein & Matoušek (1992)*: uređeni NNG u dinamičkim algoritmima bez analize ekstrema. → Rad *Ágoston et al. (2026)* donosi **prvu sistematsku analizu** najgoreg slučaja.
- *Eppstein, Paterson & Yao (1997)*: ograničenje stepena u neuređenom NNG-u. → Rad *Ágoston et al. (2026)* postavlja **novu problematiku**: maksimalni ulazni stepen u uređenom NNG-u.
- *Bose, Gudmundsson & Morin (2004)*: uvođenje uređenih θ -grafova. → Rad *Ágoston et al. (2026)* pruža **nov pristup** osnovnom slučaju ($k = 1$), u kontekstu maksimalnog ulaznog stepena.
- *He and Fox (2021)*: Ramsey-teorijski rezultat za 3-uniformne hipergrafove. → Rad *Ágoston et al. (2026)* ostvaruje **prvu primenu** te metode u računarskoj geometriji.

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani radovi

Primene

Zaključak

Reference

- **Prvi sistematski rezultat** o maksimalnom ulaznom stepenu u uređenom NNG-u.
- **Dualni pristup:** umesto minimizacije, maksimizacija maksimalnog ulaznog stepena.
- **Dokazane su** vrednosti maksimalnog ulaznog stepena:
 - na pravoj: $\lceil \log n \rceil$ - optimalno;
 - u \mathbb{R}^d : $\frac{\log n}{4d}$ - optimalno do na faktor $1/(4d)$;
 - u metričkim prostorima: $\Omega\left(\sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}}\right)$ - optimalnost je otvoren problem.
- Osim konkretnih rezultata, **značaj** rada ogleda se u metodološkom doprinosu kombinacijom diskretne geometrije i Ramseyjeve teorije - otvarajući put budućim istraživanjima.

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani radovi

Primene

Zaključak

Reference



P. Ágoston, A. Dumitrescu, A. Sagdeev, K. Singh, and J. Zeng, "Maximizing the maximum degree in ordered nearest neighbor graphs", *Computational Geometry: Theory and Applications*, **132**, 102229 (2026).



P. Agarwal, D. Eppstein, and J. Matoušek, "Dynamic half-space reporting, geometric optimization, and minimum spanning trees", in: *Proc. of the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 80–90 (1992).



D. Eppstein, M.S. Paterson, and F.F. Yao, "On nearest-neighbor graphs", *Discrete Comput. Geom.*, **17**, 263–282 (1997).



P. Bose, J. Gudmundsson, and P. Morin, "Ordered theta graphs", *Comput. Geom.*, **28**, 11–18 (2004).



X. He and J. Fox, "Independent sets in hypergraphs with a forbidden link", *Proc. Lond. Math. Soc.*, **123**, 384–409 (2021).