

Maksimizacija maksimalnog stepena u uređenim grafovima najbližih suseda

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

Dimitrije Rađenović

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

januar 2026.

Autori i afilijacije

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

- *Péter Ágoston* – Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.
- *Adrian Dumitrescu* – Algoresearch L.L.C., Milwaukee, WI, USA.
- *Arsenii Sagdeev* – Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany.
- *Karamjeet Singh* – Indraprastha Institute of Information Technology, Delhi, India.
- *Ji Zeng* – University of California San Diego, La Jolla, CA, USA & Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.

Saradnja je započela tokom *Focused Week on Geometric Spanners* (23–29. oktobar 2023, Budimpešta, Mađarska).

Detalji objavljivanja

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

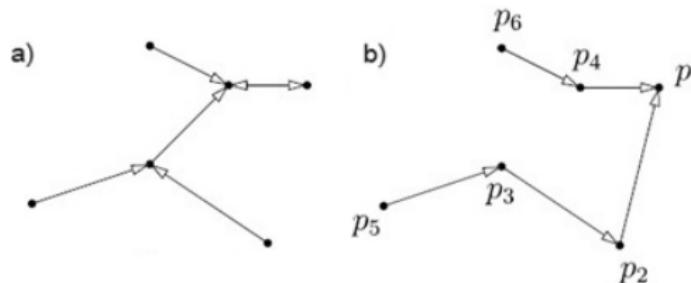
Reference

- **Naslov rada:** *Maximizing the maximum degree in ordered nearest neighbor graphs.*
- **Časopis:** *Computational Geometry: Theory and Applications.*
- **Tom:** 132 (2026).
- **Broj članka:** 102229.
- **Dostupnost online:** od 18. septembra 2025.
- **DOI:** [10.1016/j.comgeo.2025.102229](https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2025.102229).
- Ranija verzija ovog rada objavljena je u *Zborniku radova konferencije CALDAM 2025* (13-15. februar 2025, Koimbator, Indija).

Graf najbližih suseda

Za dati skup tačaka u metričkom prostoru, **graf najbližih suseda** (engl. *Nearest Neighbor Graph*, NNG) je usmereni graf u kome svaki čvor ima tačno jednu **izlaznu ivicu** ka svom najbližem susedu.

- **Neuređeni NNG:** svaka tačka bira najbližu među *svim* ostalim tačkama (Slika 1a).
 - **Uređeni NNG:** tačke se pojavljuju *jedna po jedna*; svaka nova tačka bira najbližu među već *uvedenim* tačkama (Slika 1b).



Slika 1: a) Neuređeni i b) uređeni graf najbližih suseda nad istim skupom od šest tačaka (Ágoston et al., 2026).

Problem i njegov značaj

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

- U neuređenom NNG-u, stepen svakog čvora ograničen je konstantom koja zavisi samo od dimenzije prostora \mathbb{R}^d .
- U uređenom NNG-u, **ulazni stepen** (broj tačaka koje biraju datu tačku kao najbližeg prethodnika) zavisi od **poretka** tačaka.
- **Cilj rada** je da se pronađe **poredak tačaka** koji **maksimizuje maksimalni ulazni stepen**, tj. *poredak u kome postoji tačka koja postaje najbliži prethodnik što većem broju narednih tačaka.*
- Ovo predstavlja **dualni pristup** klasičnom problemu minimizacije maksimalnog stepena.
- Rešavanje ovog problema daje **značajan doprinos** teoriji uređenih NNG-ova i računarskoj geometriji.

Rezultat za tačke na pravoj

[Opšte o radu](#)[O problemu](#)[Rezultati](#)[Povezani radovi](#)[Primene](#)[Zaključak](#)[Reference](#)

Teorema 1

Za svaki skup od n tačaka na pravoj, postoji poredak takav da odgovarajući uređeni graf najблиžih suseda ima maksimalni ulazni stepen najmanje $\lceil \log n \rceil$. Sa druge strane, postoji skup od n tačaka na pravoj takav da za svaki poredak, ulazni stepen svake tačke je najviše $\lceil \log n \rceil$.

Ključne ideje dokaza:

- **Gornja granica** - Skup $P_{k+1} = P_k \cup (3^k + P_k)$ ima dve polovine razdvojene više nego što je njihov dijametar, pa svaka tačka prima najviše jednu ivicu iz druge polovine. Indukcijom sledi da maksimalni ulazni stepen ne prelazi $\lceil \log n \rceil$.
- **Donja granica** - Konstruiše se algoritam koji rekurzivno postavlja centar većeg podskupa na početak, pa zatim krajnju tačku druge strane koja se povezuje s njim. Svaki nivo rekurzije dodaje jednu ivicu tom centru, pa je maksimalni ulazni stepen $\geq \lceil \log n \rceil$.

Rezultat za tačke u \mathbb{R}^d

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

Teorema 2

Za svaki skup od n tačaka u \mathbb{R}^d , postoji poredak takav da odgovarajući uređeni graf najbližih suseda ima maksimalni ulazni stepen bar $\frac{\log n}{4d}$.

Ključne ideje dokaza:

- Izračunati dijometarski par ab sa $|ab|=1$. Neka je $A=\{p \in P : |pa| \leq |pb|\}$ i $B=\{p \in P : |pb| \leq |pa|\}$. Bez gubitka opštosti, $|A| \geq |B|$, stoga $|A| \geq n/2$.
- Prema Korolaru 1, A se podeli na najviše $16^d/2$ podskupova prečnika manjeg od $1/2$. Jedan od njih, $C \subseteq A$, sadrži bar $n/16^d$ tačaka.
- Poređati tačke: prvo tačka iz C koja ima maksimalni ulazni stepen u rekurzivnom poretku nad C , zatim b , pa sve ostale tačke iz C , i na kraju tačke iz $P \setminus (C \cup \{b\})$.
- Tu tačku iz C definišemo kao centar skupa P .

Korolar 1: Neka je P konačan skup tačaka u \mathbb{R}^d takav da $\text{diam}(P) \leq 1$. Tada se P može podeliti na najviše $16^d/2$ podskupova čiji je dijometar manji od $1/2$.

Rezultat za proizvoljni metrički prostor

[Opšte o radu](#)[O problemu](#)[Rezultati](#)[Povezani
radovi](#)[Primene](#)[Zaključak](#)[Reference](#)

Teorema 3

Za svaki metrički prostor sa n elemenata, postoji poredak takav da odgovarajući uređeni graf najbližih suseda ima maksimalni ulazni stepen $\Omega\left(\sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}}\right)$.

Ključne ideje dokaza:

Primenom Teoreme 5 za $k = c' \sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}}$ (za dovoljno malo $c' > 0$), obezbeđuje se postojanje monohromatske specijalne strukture i samim tim postojanje poretku takvog da odgovarajući uređeni NNG ima maksimalni ulazni stepen bar $k - 1$, čime se dokazuje Teorema 3.

Teorema 5: Neka je $K_n^{(3)}$ potpun 3-uniformni hipergraf nad uređenim skupom čvorova $[n]$, čije su ivice obojene crvenom, zelenom ili plavom bojom. Ako $K_n^{(3)}$ ne sadrži ni crvenu *clique* $K_k^{(3)}$, ni zelenu *forward star* $S_k^{(3)}$, ni plavu *forward star* $S_k^{(3)}$, tada važi $n \leq \exp(O(k^2 \log k))$.

Pregled rezultata

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

Okruženje	Maksimalni ulazni stepen
Prava	$\lceil \log n \rceil$ (Teorema 1)
\mathbb{R}^d	$\geq \frac{\log n}{4d}$ (Teorema 2)
Proizvoljan metrički prostor	$\Omega\left(\sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}}\right)$ (Teorema 3)

- Za tačke na pravoj, rezultat je **optimalan**.
- Za tačke u \mathbb{R}^d , rezultat je **najbolji mogući** do na faktor $1/(4d)$.
- U proizvoljnim metričkim prostorima, ostaje **otvoreno pitanje** da li se može postići veći maksimalni ulazni stepen.

Povezanost sa relevantnim radovima

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

- *Agarwal, Eppstein & Matoušek (1992)*: uređeni NNG u dinamičkim algoritmima bez analize ekstrema. → Rad Ágosoton et al. (2026) donosi **prvu sistematsku analizu** najgoreg slučaja.
- *Eppstein, Paterson & Yao (1997)*: ograničenje stepena u neuređenom NNG-u. → Rad Ágosoton et al. (2026) postavlja **novu problematiku**: maksimalni ulazni stepen u uređenom NNG-u.
- *Bose, Gudmundsson & Morin (2004)*: uvođenje uređenih θ -grafova. → Rad Ágosoton et al. (2026) pruža **nov pristup** osnovnom slučaju ($k = 1$), u kontekstu maksimalnog ulaznog stepena.
- *He and Fox (2021)*: Ramsey-teorijski rezultat za 3-uniformne hipergrafove. → Rad Ágosoton et al. (2026) ostvaruje **prvu primenu** te metode u računarskoj geometriji.

Potencijalne primene

- **Dinamičke geometrijske strukture:** maksimalni ulazni stepen može rasti logaritamski s brojem tačaka, što narušava lokalnu ravnotežu.
- **Kontrolisani redosled i rebalansiranje:** kako bi se očuvali balansirani stepeni u dinamičkim strukturama, potrebno je kontrolisati redosled umetanja tačaka, ili primeniti odgovarajući mehanizam za rebalansiranje.
- **Pohlepni algoritmi** (engl. *greedy algorithms*): poredak tačaka kritično određuje strukturu grafa, čak i u najjednostavnijem modelu.
- **Uređeni Yao/Theta grafovi:** NNG odgovara slučaju $k=1$; temelj za njihovu generalizaciju na $k \geq 2$.

Opšte o radu

O problemu

Rezultati

Povezani
radovi

Primene

Zaključak

Reference

- **Prvi sistematski rezultat** o maksimalnom ulaznom stepenu u uređenom NNG-u.
- **Dualni pristup:** umesto minimizacije, maksimizacija maksimalnog ulaznog stepena.
- **Dokazane su** vrednosti maksimalnog ulaznog stepena:
 - na pravoj: $\lceil \log n \rceil$ - optimalno;
 - u \mathbb{R}^d : $\frac{\log n}{4d}$ - optimalno do na faktor $1/(4d)$;
 - u metričkim prostorima: $\Omega\left(\sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}}\right)$ - optimalnost je otvoren problem.
- Osim konkretnih rezultata, **značaj** rada ogleda se u metodološkom doprinosu kombinacijom diskretnе гeometrije i Ramseyeve teorije - otvarajući put budućim istraživanjima.

Dalji pravci istraživanja

- **Poboljšanje rezultata u proizvoljnim metričkim prostorima:** Da li za svaki metrički prostor sa n tačaka postoji poredak tačaka takav da je maksimalni ulazni stepen u odgovarajućem uređenom NNG-u bar $\lceil \log n \rceil$?
- **Problem 1 (iz rada):** Za metrički prostor V sa n elemenata i tačku $v \in V$, neka je $d(v)$ maksimalni ulazni stepen tačke v u uređenom NNG-u, posmatran preko svih $n!$ mogućih poredaka tačaka. Može li suma $\sum_v 2^{-d(v)}$ biti veća od 1?
- **Generalizacija na uređene Yao/Theta grafove za $k \geq 2$:** najavljena za naredni rad Ágoston i saradnika.

Reference

-  P. Ágoston, A. Dumitrescu, A. Sagdeev, K. Singh, and J. Zeng, "Maximizing the maximum degree in ordered nearest neighbor graphs", *Computational Geometry: Theory and Applications*, **132**, 102229 (2026).
-  P. Agarwal, D. Eppstein, and J. Matoušek, "Dynamic half-space reporting, geometric optimization, and minimum spanning trees", in: *Proc. of the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 80–90 (1992).
-  D. Eppstein, M.S. Paterson, and F.F. Yao, "On nearest-neighbor graphs", *Discrete Comput. Geom.*, **17**, 263–282 (1997).
-  P. Bose, J. Gudmundsson, and P. Morin, "Ordered theta graphs", *Comput. Geom.*, **28**, 11–18 (2004).
-  X. He and J. Fox, "Independent sets in hypergraphs with a forbidden link", *Proc. Lond. Math. Soc.*, **123**, 384–409 (2021).