

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia C - Traccia 1

Nome del Progetto

Gruppo AG

Autori: Filippo Valmaggi, Cristiano Pelliccia, Enrico Tornabene

Il progetto riguarda il controllo di una sospensione attiva di un veicolo, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{z} = v; \quad (1a)$$

$$m\dot{v} = -mg - bv - kz - \beta(v^3 + nv \sin^2(nv)) + u \quad (1b)$$

dove il parametro $m \in \mathbb{R}$ indica la massa del veicolo agente sulla sospensione, il parametro $b \in \mathbb{R}$ indica il coefficiente d'attrito dinamico dovuto alla presenza dello smorzatore, il parametro $k \in \mathbb{R}$ rappresenta la costante elastica lineare della molla, mentre $\beta, n \in \mathbb{R}$ rappresentano i coefficienti di non linearità della molla.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix}, \quad u := mg, \quad y := z.$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := y$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g - \frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 - \frac{\beta}{m}(x_2^3 + nx_2 \sin^2(nx_2)) + \frac{1}{m}u \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = h(x, u) = x_1. \quad (3b)$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u_e = gm + kx_{1e} \quad (5)$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_e = 199525 \quad (6)$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx , δu e δy come

$$\begin{aligned}\delta x &\approx \tilde{x} = x - x_e, & \delta u &\approx \tilde{u} = u - u_e, & \delta y &\approx \tilde{y} = y - y_e. \\ &\text{con } y_e = h(x_e, u_e)\end{aligned}$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (7a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \quad (7b)$$

dove le matrici A , B , C e D vengono calcolate come

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, u) \end{array} \right) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & *(x_2) \end{array} \right) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \quad (8a)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$B := \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x, u) \end{array} \right) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$C := \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(x, u) \end{array} \right) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = [1 \quad 0] \quad (8c)$$

$$D := \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = 0. \quad (8d)$$

$$*(x_2) = -\frac{b}{m} - \frac{\beta}{m}[3x_2^2 - n \sin^2(nx_2) - 2n^2 x_2 \sin(nx_2) \cos(nx_2)] \quad (9)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\ &= [1 \quad 0] \left(\frac{1}{s^2 + s * \frac{b}{m} + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 = \\ &= \frac{1}{s^2 + s * \frac{b}{m} + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s * \frac{b}{m} + \frac{k}{m}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k}\end{aligned}$$

Semplificando e sostituendo i valori otteniamo:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 \cdot 2500 + s \cdot 350 + 5 \cdot 10^5} \quad (10)$$

Dunque il sistema linearizzato (7) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (2) con due poli complessi coniugati e nessuno zero:

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \approx -0.07 + j\sqrt{200} \quad (11)$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \approx -0.07 - j\sqrt{200} \quad (12)$$

In Figura (1) mostriamo il corrispondente diagramma di Bode:

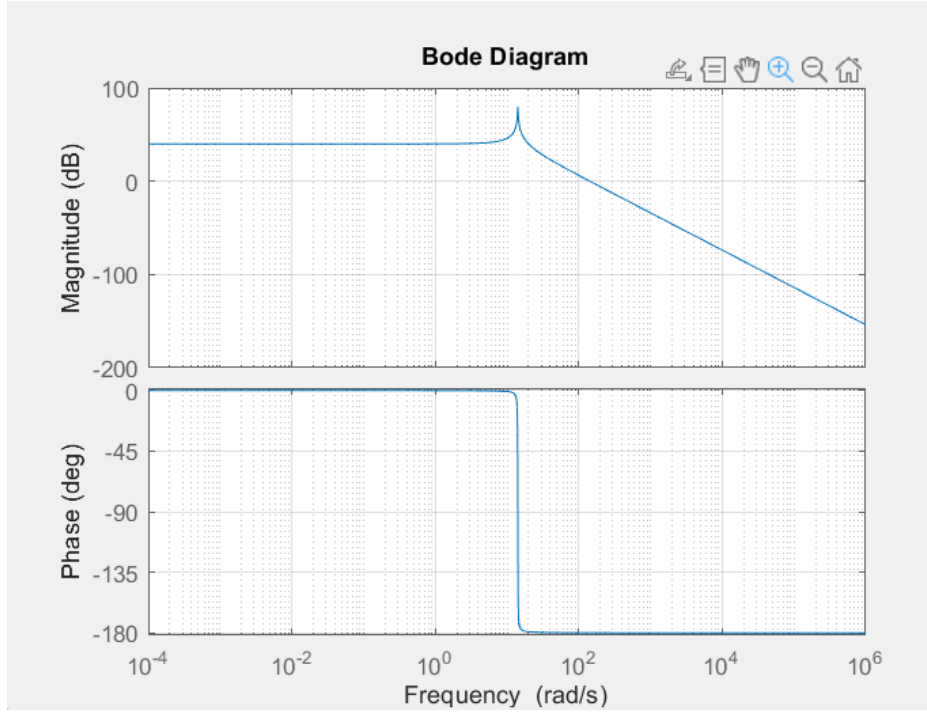


Figura 1: Funzione di trasferimento $G(s)$

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

- 1) Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.02$ in risposta a un gradino $w(t) = 1(t)$ e $d(t) = 1(t)$.
- 2) Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 30^\circ$.
- 3) Il sistema può accettare una sovralongazione percentuale al massimo del 5% : $S\% \leq 5\%$.
- 4) Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 10^{-2}s$.
- 5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$, deve essere abbattuto di almeno 30 dB.
- 6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[8 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 75 dB.

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto le specifiche richieste:

Per la definizione del margine di fase, abbiamo definito:

$$\xi^* = \left| \frac{\ln(\frac{S^*}{100})}{\sqrt{\pi^2 + \ln(\frac{S^*}{100})^2}} \right| = 0.6901 \quad , \quad M_{f,S^*} = \xi^* \cdot 100 \quad (13)$$

Dove: ξ^* (coefficiente di smorzamento minimo) rappresenta il valore per cui viene rispettato il vincolo sulla sovralongazione; S^* è la sovralongazione percentuale massima consentita dalle specifiche (in questo caso $S^* = 5\%$).

Prediamo quindi il margine di fase minimo come:

$$M_f \geq 69^\circ \quad (14)$$

Per il tempo di assestamento minimo, dobbiamo lavorare su ω_{cmin} :

$$\omega_{cmin} \geq \frac{460}{T^* \cdot M_f} = 6.66 \cdot 10^2 \text{ rad/s} \quad (15)$$

Per l'attenuazione del disturbo sull'uscita $d(t)$ vogliamo che $|S(j\omega)|_{dB} \leq -30dB$ pertanto:

$$|S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (16)$$

Quindi:

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq A_d dB = 30dB \quad (17)$$

Per l'attenuazione del disturbo di misura $n(t)$ vogliamo che $|F(j\omega)|_{dB} \leq -75dB$ pertanto:

$$|F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (18)$$

Quindi:

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_n dB = -75dB \quad (19)$$

Pertanto, in Figura (2), mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche:

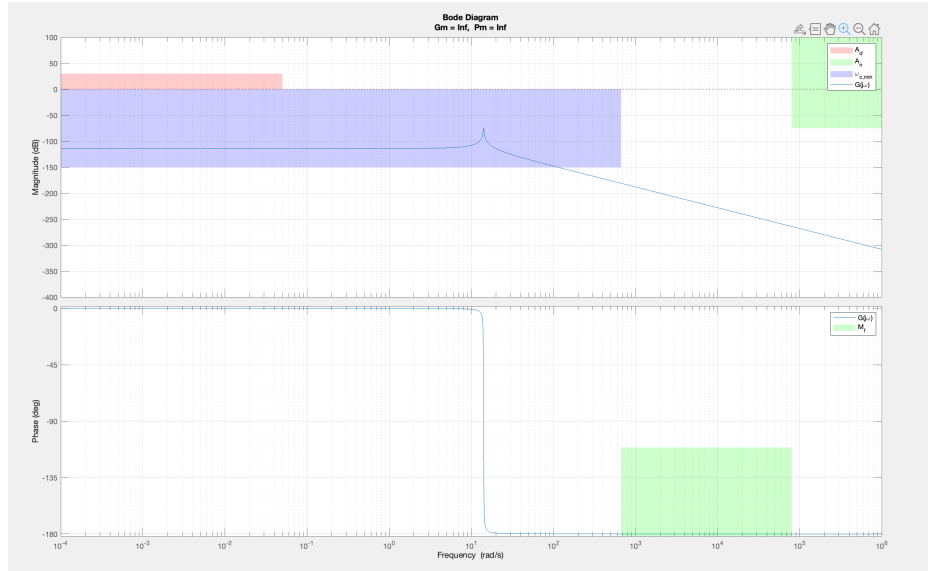


Figura 2: Digramma di Bode della $G(s)$ con le specifiche

Dove, nel diagramma delle ampiezze:

- La patch rossa corrisponde alle specifiche sul disturbo d'uscita, con un range nelle pulsazioni di $[0, 0.05]$ e un range verticale $[0, 30]dB$

- La patch verde corrisponde alle specifiche sul disturbo di misura, con un range nelle pulsazioni di $[8 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^6]$ e un range verticale $[-75, Y]dB$, dove Y è un valore arbitrario (nel nostro caso $X = 100dB$)
- La patch blu corrisponde alle specifiche sul tempo di assestamento, con un range nelle pulsazioni di $[X, 6.66 \cdot 10^2]$, dove X è un valore arbitrario (nel nostro caso $X = 10^{-4}$) e un range verticale $[0, -Y]dB$, dove Y è un valore arbitrario (nel nostro caso $Y = 150dB$)

Mentre nel diagramma delle fasi:

- La patch verde corrisponde alle specifiche sulla sovraelongazione e quindi sul margine di fase, con un range nelle pulsazioni di $[6.66 \cdot 10^2, 8 \cdot 10^4]$ e un range verticale $[M_f - 180, Y]$, dove Y è un valore arbitrario (nel nostro caso $Y = -270^\circ$)

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3. Il regolatore statico ha il compito di soddisfare le specifiche relative alla precisione statica. Volendo avere un'errore a regime inferiore a 0.02 in risposta ad un gradino $w(t) = 1(t)$ e $d(t) = 1(t)$ abbiamo che:

$$W^* = 1 \quad e \quad D^* = 1 \quad (20)$$

Perciò essendo μ_s definito come il massimo tra $\mu_{s,1}$ e $\mu_{s,2}$ che sono:

$$\mu_{s,1} = \frac{D^* + W^*}{e^*} \cdot \frac{1}{G(0)} \approx 5 \cdot 10^7 \quad (21)$$

$$\mu_{s,2} = 10^{\frac{A_d}{20}} \cdot \frac{1}{G(j \cdot 0.05)} \approx 1.58 \cdot 10^7 \quad (22)$$

Dove $\mu_{s,2}$ viene definita per soddisfare i vincoli relativi al disturbo d'uscita. Pertanto $R_s(s) = \mu_s$. Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura (3), mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

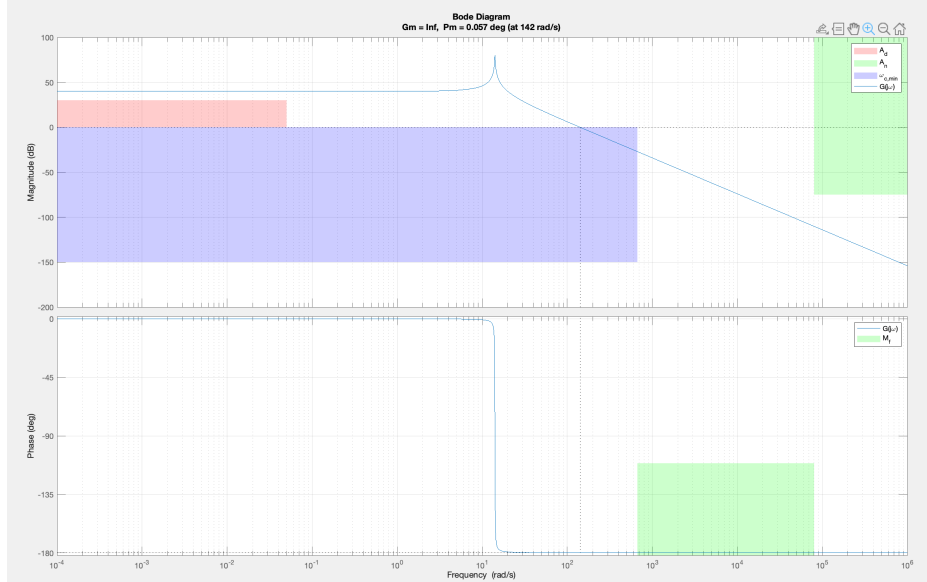


Figura 3: Diagramma di Bode di $G_e(s)$

Da Figura (3), emerge che la funzione non rispetta le specifiche sul tempo di assestamento e che non rispetta per nessuna pulsazione per la quale possiamo attraversare i 0 decibel la fase si trova sempre sotto il margine di fase definito per rispettare la specifica dinamica, ponendoci in uno scenario di tipo B.

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo ad una particolare tecnica di sintesi che prende il nome di "loop shaping" (conosciuta anche come "sintesi a tentativi"). Il nostro obiettivo è quello progettare una rete anticipatrice:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad (23)$$

che ci permetta di anticipare la fase per rispettare il vincolo relativo. Dove:

$$\tau = \frac{M^* - \cos(\varphi^*)}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)} \quad (24)$$

$$\alpha \tau = \frac{\cos(\varphi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)} \quad (25)$$

$$(26)$$

Dove M^* e φ^* valgono:

$$M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \approx 31.99$$

$$\varphi^* = (M_{f,S^*} + 5^\circ) - 180^\circ - \arg(G_e(j\omega_c^*)) \approx 74^\circ$$

Perciò i valori della rete anticipatrice risultano:

$$\tau \approx 0.0412 \quad e \quad \alpha \tau \approx 3.18 \cdot 10^{-4} \quad (27)$$

Per soddisfare il vincolo sul disturbo d'uscita e sul margine di fase aggiungiamo un polo ad alta frequenza al nostro regolatore dinamico, che ci permette di aumentare l'ampiezza e avere la fase desiderata alla pulsazione di taglio:

$$R_{hf} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 10^{-4} \cdot s} \quad (28)$$

Il regolatore dinamico risulta essere:

$$R_{dhf}(s) = R_d(s) \cdot R_{hf}(s) \quad (29)$$

In Figura (4), mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

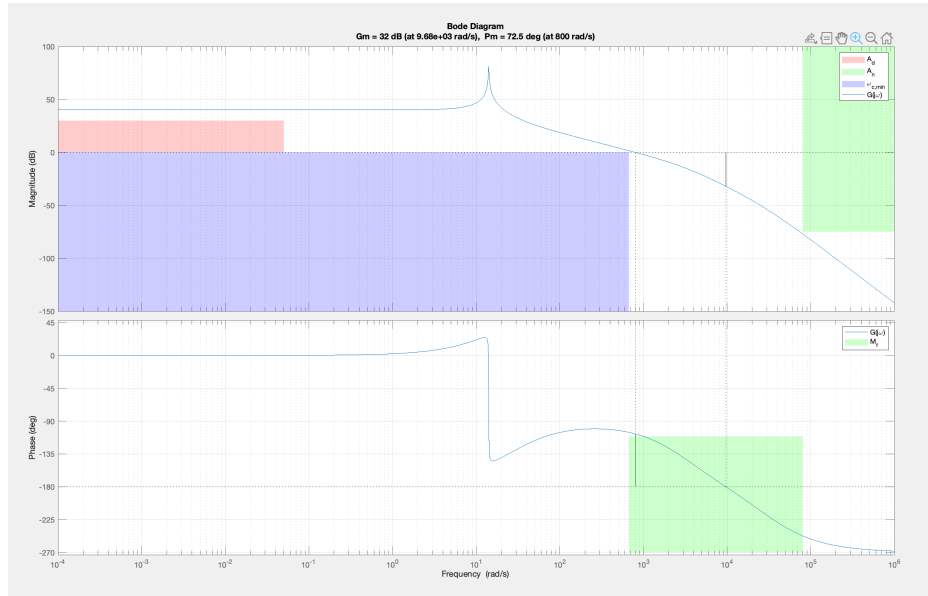


Figura 4: Diagramma di Bode di $L(s)$

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con la risposta ad un segnale a gradito con ampiezza unitaria. Per fare ciò abbiamo definito la funzione di sensitività complementare:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (30)$$

Dalla Figura (5) è possibile vedere che il sistema rispetta i vincoli sulla sovraelongazione (non superiore al 5%) e sul tempo di assestamento (inferiore ai 0.01 s):

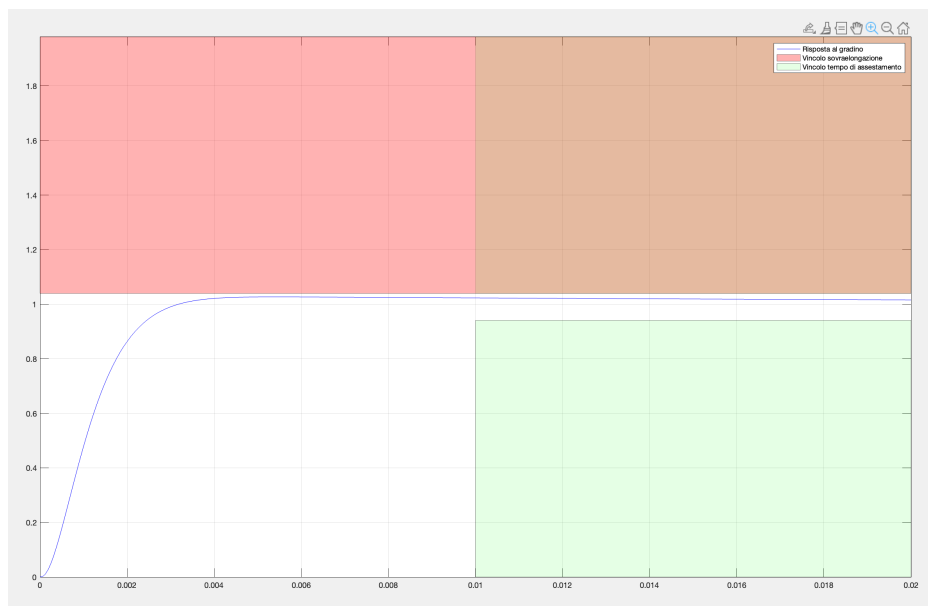


Figura 5: Risposta al gradino

Vediamo in Figura (6) il comportamento della funzione di sensitività complementare ($F(s)$) ad'un disturbo di misure $n(t)$ definito come segue:

$$n(t) = \sum_{k=1}^4 0.2 \sin(8 \cdot 10^4 kt) \quad (31)$$

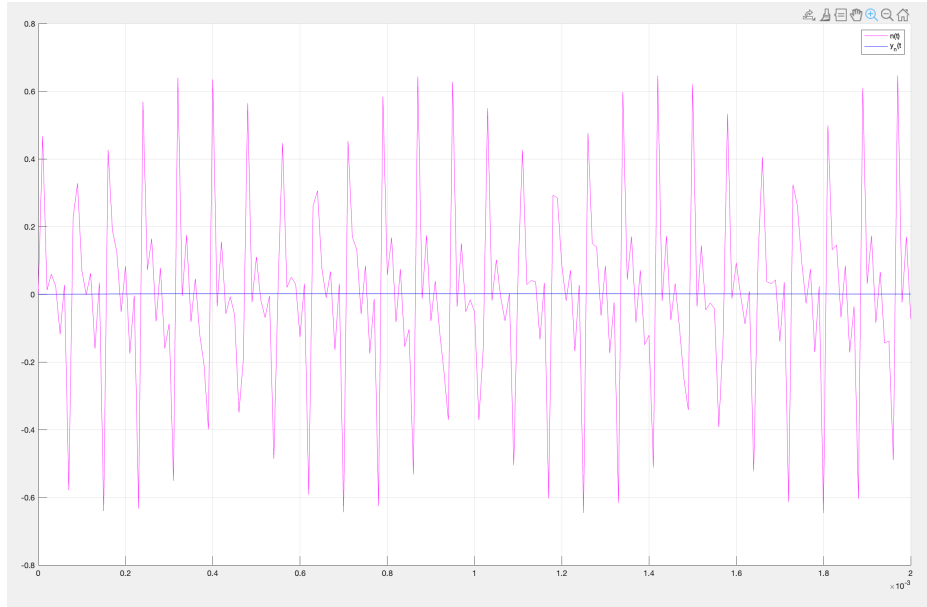


Figura 6: Comportamento $y_n(t)$ con disturbo di misura $n(t)$

Infine, introducendo un disturbo di misura $d(t)$ vediamo in Figura (7) come si comporta la funzione di sensitività $S(s)$ entrambe definite nel seguente modo:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad , \quad d(t) = \sum_{k=1}^4 \sin(0.01kt) \quad (32)$$

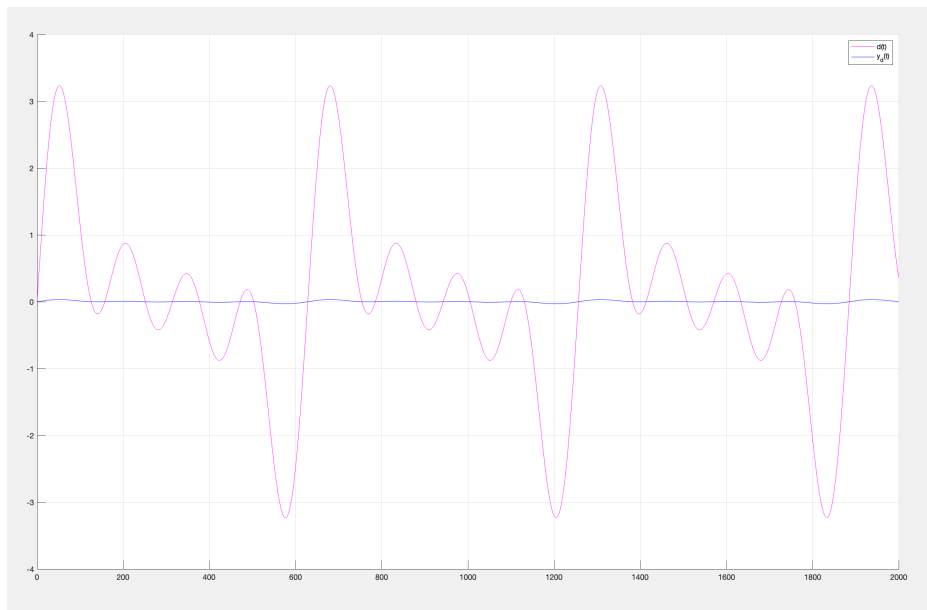


Figura 7: Comportamento $y_d(t)$ con disturbo d'uscita $d(t)$

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con l'utilizzo dei segnali $d(t)$ e $n(t)$ definiti nella sezione precedente. Per fare ciò abbiamo implementato, attraverso l'uso di Simulink, due diagrammi a blocchi. In Figura (8) è riportato il diagramma rappresentante il sistema non linearizzando in assenza di disturbi.

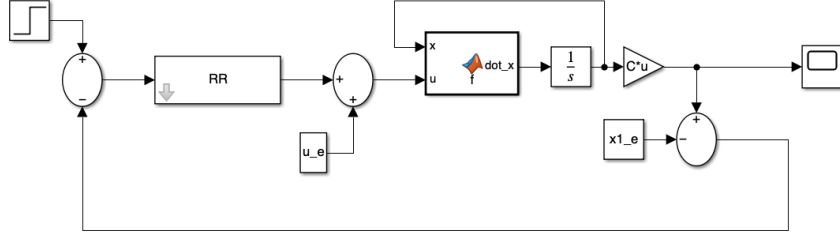


Figura 8: Sistema Non linearizzato

Il componente dot_x presenta al suo interno i dati del sistema non linearizzato. E' presente il regolatore (nel blocco RR) definito da noi precedentemente e il gradino come segnale d'ingresso. Nella Figura (9) vediamo la risposta del nostro sistema non linearizzato al gradino di ampiezza unitaria.

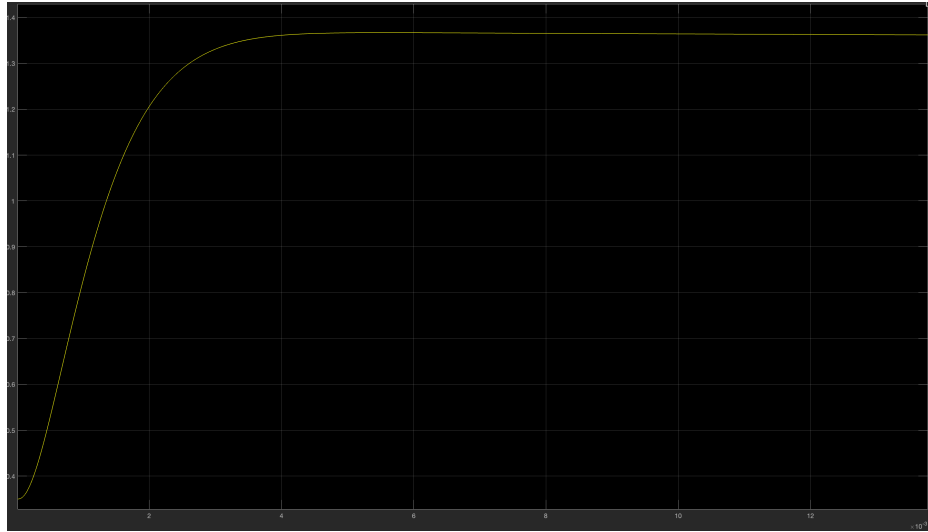


Figura 9: Risposta del sistema non linearizzato

Il secondo diagramma, visibile in Figura (10) invece vede i disturbi d'uscita e di misura (rispettivamente $d(t)$ e $n(t)$) introdotti al sistema precedentemente mostrato.

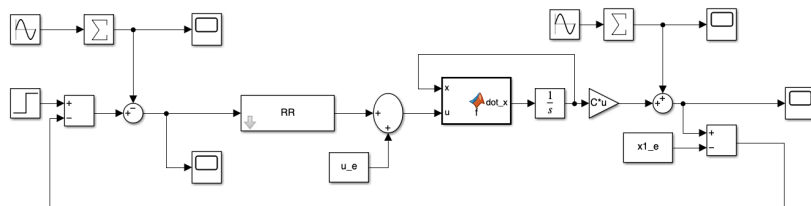


Figura 10: Sistema non linearizzato con disturbi

La risposta di tale sistema è la seguente:

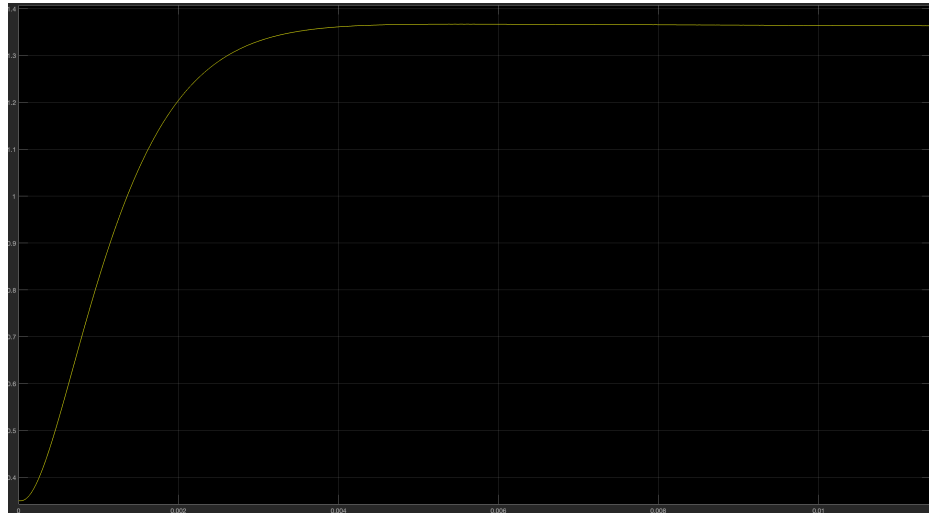


Figura 11: Risposta del sistema non linearizzato con disturbi

Facendo uno zoom è possibile vedere come reagisce il sistema ai disturbi:

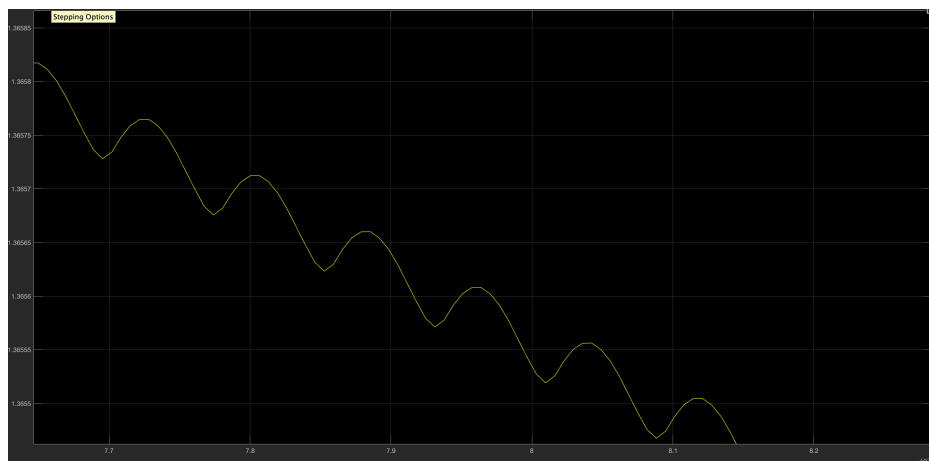


Figura 12: Risposta del sistema non linearizzato con disturbi

Vediamo ora in Figura (13) un confronto tra le due risposte. La risposta gialla corrisponde a quella del sistema non linearizzato mentre quella blu è quella del sistema non linearizzato con l'aggiunta dei disturbi.

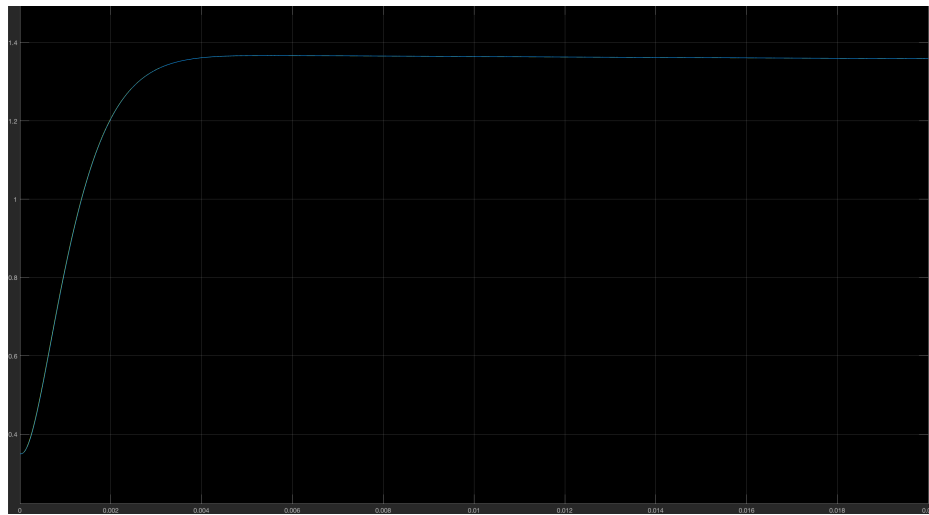


Figura 13: Confronto risposte

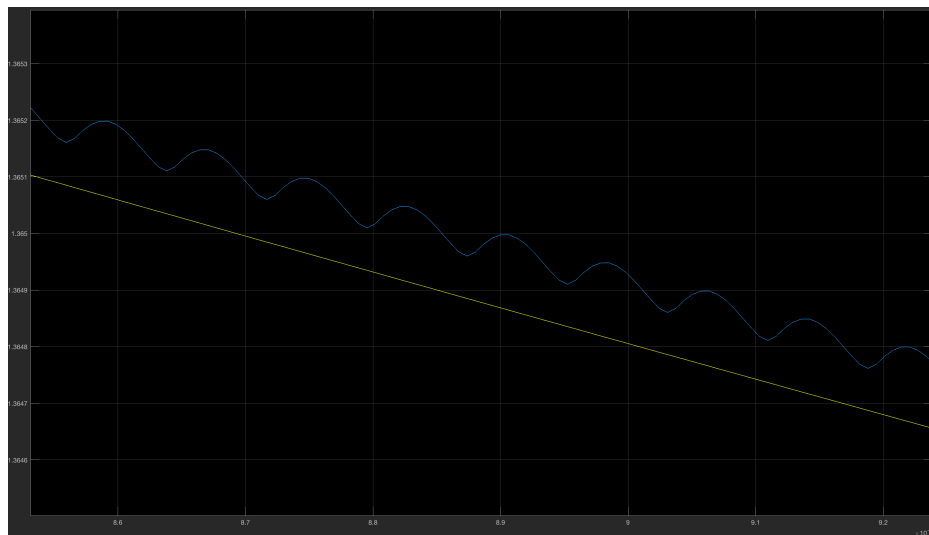


Figura 14: Confronto risposte

8 Punti opzionali

8.1 Primo punto

...

8.2 Secondo punto

L'obiettivo è quello di esplorare un range di condizioni iniziali del sistema non lineare tali che, avendo un'ingresso $w(t) = 0$ l'uscita del sistema in anello chiuso converga al punto di equilibrio $h(x_e, u_e)$. Variando x_1 nel seguente range $[-4, 4]$ e mantenendo x_2 invariato (nel nostro caso $x_2 = x_{e,2}$) si può vedere da Figura (15) che l'uscita converge al punto di equilibrio rispettando le specifiche del sistema.

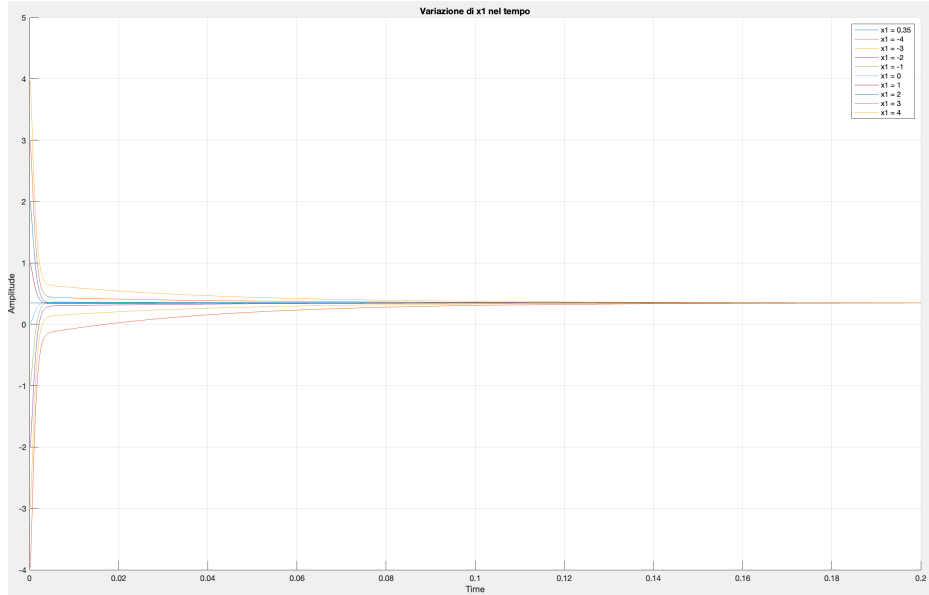


Figura 15: Variazione di $x_1 \in [-4, 4]$

Mantenendo $x_1 = x_{e,1}$ e variando x_2 nel range $[-15, 15]$ vediamo da Figura (16) che l'uscita converge all'equilibrio rispettando le specifiche del sistema. Quando $x_2 = \pm 20$ non vengono rispettate le specifiche.

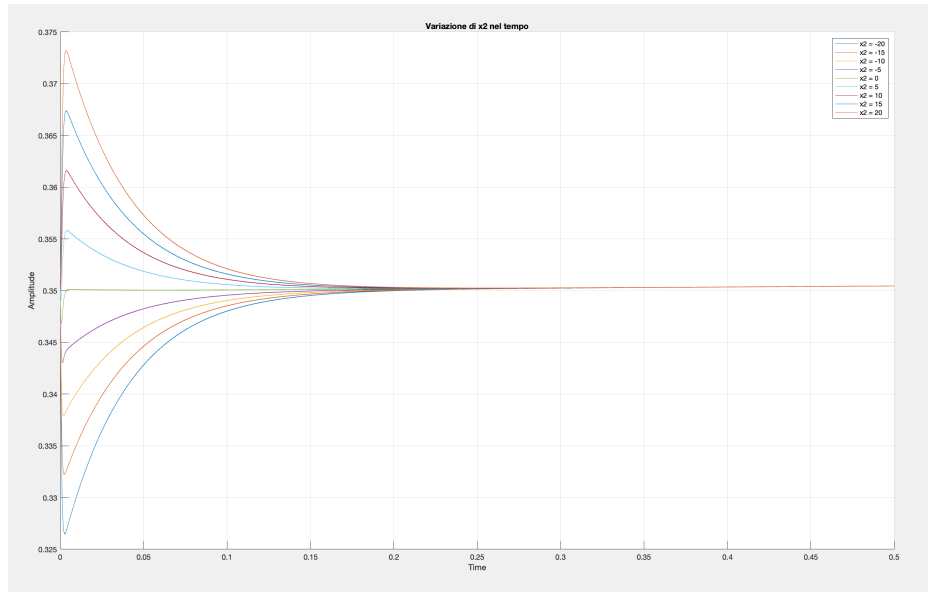


Figura 16: Variazione di $x_2 \in [-20, 20]$

Possiamo pertanto concludere che il sistema, in un'intorno ragionevole dei punti di equilibrio rimane stabile.

8.3 Terzo punto

L'obiettivo è quello di esplorare un range di ampiezza di riferimenti del gradino per cui il controllore rimane efficace sul sistema rimanendo sul punto di equilibrio. Vediamo in Figura (17) che variando l'ampiezza di $w(t)$ in un range $[0, 3]$ il controllore rimane efficace. Uscendo da questo range i vincoli del sistema non sono più soddisfatti poichè andando a controllare a $T_{a,\epsilon}$ il tempo di assestamento è maggiore/minore del 5%

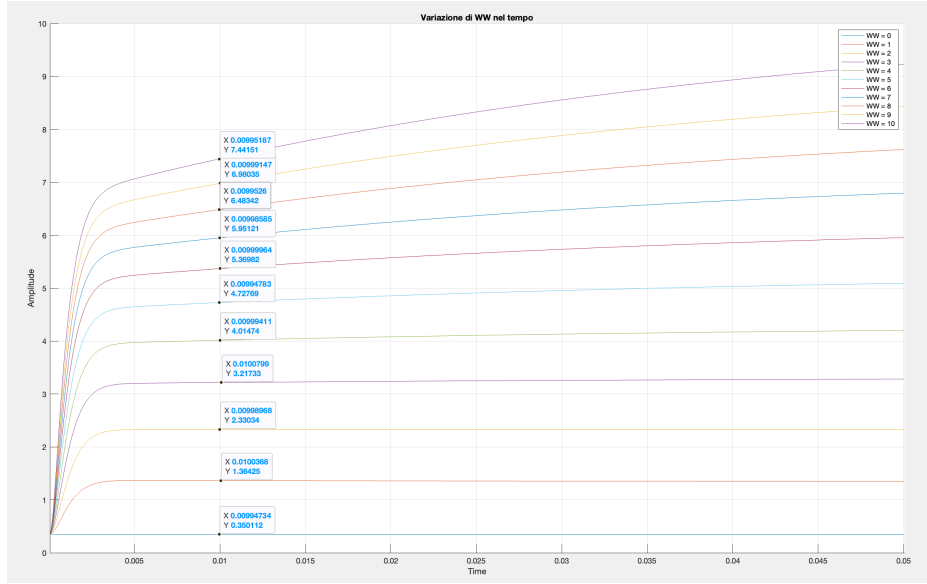


Figura 17: Variazione dell'ampiezza di $w(t)$ in $[0, 10]$

9 Conclusioni

In questo progetto, abbiamo sviluppato una sospensione attiva di un veicolo. Partendo dalla dinamica fornita abbiamo espresso il sistema in forma di stato. Successivamente partendo da $z_e = 0.35$ abbiamo ottenuto la coppia di equilibrio(6) intorno la quale abbiamo linearizzato il sistema. Calcolando la funzione di trasferimento (10) abbiamo individuato una coppia di poli complessi coniugati (11). Rappresentando su un diagramma di bode la $G(s)$ abbiamo notato che i vincoli del sistema non venivano rispettati. Per far si che venissero rispettati abbiamo progettato un regolatore (regolatore statico e dinamico per le rispettive specifiche). Per il regolatore statico abbiamo deciso di modificare il guadagno statico (21) non aggiungendo poli nell'origine ottenendo così la $G_e(s)$. Essendo in uno scenario di tipo B per il regolatore dinamico abbiamo deciso di progettare una rete anticipatrice calcolandone i valori tramite le formule di inversione ottenendo (27). Per rispettare il vincolo sul disturbo d'uscita e sul margine di fase abbiamo aggiunto anche un polo ad alta frequenza (28), definendo il regolatore dinamico come il prodotto tra la rete anticipatrice e il polo ad alta frequenza. Successivamente siamo passati alla fase di testing prima sul sistema linearizzato e poi sul sistema non linearizzato in anello chiuso concludendo che in determinati range in cui facciamo variare le condizioni iniziali il sistema rimane stabile.