KOMPLEKSNA EKSPONENTNA PRESLIKAVA IN KAOS OSNUTEK DELA

LENART MIKLAVIČ, MENTOR: DOC. DR. UROŠ KUZMAN

1. Uvod

V diplomski nalogi se ukvarjamo s kaotičnimi lastnostmi preslikave $f(z) = e^z$. Obstaja več neekvivalentnih definicij kaotične preslikave. Najpogosteje uporabljeno je definiral ameriški matematik R. L. Devaney [1]. Večina mojega dela se tako ukvarja z dokazom, da kompleksna eksponentna preslikava zadošča pogojem v tej definiciji. Ker je dokaz dolg, je v tem osnutku naveden zgolj kot skica. Po dokazu sem končni razdelek namenil še kratkemu uvodu v splošno transcendentno dinamiko. Večina definicij in izrekov je vzetih iz osnovnega članka [2].

2. Začetne definicije

Pojem kaosa je splošno definiran na poljubnem metričnem prostoru. Ker pa se ukvarjamo le s preslikavo na kompleksnih številih, lahko predpostavimo naslednje. Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ množica, $z \in X$ in $f\colon X \to X$ preslikava. Z f^n označimo n-to iteracijo preslikave f, definirano z rekurzivno zvezo $f^0 = \mathrm{Id}$ in $f^n = f \circ f^{n-1}$. Zaporedje $a_n \coloneqq f^n(z)$ je *orbita začetne točke* z pod preslikavo f. Začetna točka z je *periodična*, če obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $f^n(z) = z$. Točka z je *negibna*, če velja $f(z) = z$. Vrednost odvoda $\lambda = f'(z)$ v negibni točki z imenujemo *večkratnost funkcije f v točki z*. Glede na večkratnost funkcije λ, je negibna točka:

- *superprivlačna*, če je $\lambda = 0$,
- *privlačna*, če je $|\lambda| < 1$,
- *odbojna*, če je $|\lambda| > 1$,
- *racionalno nevtralna*, če je $|\lambda| = 1$ in $\lambda^n = 1$ za kak $n \in \mathbb{N}$,
- *iracionalno nevtralna*, če je $|\lambda| = 1$ in $\lambda^n \neq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Preslikava f je *topološko tranzitivna*, če za vsaki odprti množici $U, V \subseteq \mathbb{C}$, ki sekata X obstaja tak $z \in U \cap X$ in $n \geq 0$, da je $f^n(z) \in V$. Sedaj lahko definiramo pojem kaosa.

Definicija 2.1 (Devaneyev kaos)**.** Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ neskončna množica in $f\colon X \to X$ zvezna. Pravimo, da je f *kaotična* če velja naslednje.

(1) Množica periodičnih točk f je gosta v X.
(2) Preslikava f je topološko tranzitivna.

V svoji prvotni definiciji je Devaney zahteval tudi *občutljivost na začetne pogoje*[1], vendar se izkaže, da za zvezne preslikave na neskončnih metričnih prostorih, ki izpolnjujejo prva dva pogoja, to vedno velja [3].

Če se omejili zgolj na realno eksponentno funkcijo ($X = \mathbb{R}$), velja, da so vse točke ubežne. Enako ne velja za $X = \mathbb{C}$. Glavni rezultat mojega dela je torej naslednji izrek.

Izrek 2.2. *Kompleksna eksponentna preslikava je kaotična.*

[1]Zvezna preslikava $f\colon X \to X$ na metričnem prostoru (X, d) je občutljiva na začetne pogoje, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako odprto množico $U \subset X$ obstajata $x, y \in U$, da velja $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Pri dokazovanju bomo uporabili tudi kompleksno logaritemsko preslikavo. Ker kompleksna eksponentna preslikava ni injektivna, je za kompleksni števili z in w rešitev enačbe $e^w = z$ neskončno mnogo:

$$w = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,$$

pri čemer je $k \in \mathbb{Z}$ in za $\theta \in \mathbb{R}$: $\arg z \in [\theta - \pi, \theta + \pi)$. Vsaki taki funkciji rečemo *veja logaritma.*

Dokaz izreka je razdeljen na tri dele. V prvem delu dokažemo, da je množica *ubežnih točk* (točk, katerih orbita divergira), gosta v kompleksni ravnini. Kot zanimivost bo iz tega takoj sledila občutljivost na začetne pogoje. V drugem delu bomo gostost ubežnih točk uporabili pri dokazu topološke tranzitivnosti. V tretjem delu pa dokažemo še gostost periodičnih točk.

3. Hiperbolična geometrija

Pri dokazovanju bomo uporabili nekaj osnovnih in lahko prevevrljivih dejstev iz *hiperbolične geometrije.* Z $\mathbb{D}$ označimo enotski disk, torej $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Iz Analize 2b poznamo naslednjo lemo.

Lema 3.1 (Schwarz)**.** *Naj bo $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna preslikava, za katero velja $f(0) = 0$. Potem velja ena od naslednjih možnosti.*

(1) $|f(z)| < |z|$ za vsak neničelni $z \in \mathbb{D}$ in $|f'(0)| < 1$.
(2) Obstaja $\theta \in \mathbb{R}$ da za vsak z velja $f(z) = e^{i\theta}z$ in $|f'(0)| = |e^{i\theta}| = 1$.

Lemo bi radi uporabili, vendar za eksponentno funkcijo predpostavke niso izpolnjene. Zato našo preslikavo transformiramo Möbiusovo transformacijo in njenim inverzom, uporabimo verižno pravilo za odvajanje kompozituma, da se lema prevede na

$$|f'(z)| \cdot \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq 1 \qquad \text{za vsak } z \in \mathbb{D}.$$

Rezultat nam pove, da je odvod preslikave f največ 1, če ga izračunamo "glede na drugačno metriko".

Definicija 3.2. Naj bo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{D}$ odsekoma C^1 krivulja. Njena *hiperbolična dolžina* je

$$l_{\mathbb{D}}(\gamma) := \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\,\mathrm{d}t.$$

Hiperbolična razdalja med točkama $z, w \in \mathbb{D}$ je

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) := \inf_{\gamma} l_{\mathbb{D}}(\gamma),$$

kjer γ teče po vseh odsekoma C^1 krivuljah v $\mathbb{D}$, ki povezujejo točki z in w.

Izkaže se, da je metrika dobro definirana. Za nas bo pomembena *gostota* hiperbolične metrike

$$\rho_{\mathbb{D}}(z) := \frac{2}{1 - |z|^2},$$

ki je faktor, s katerim pomnožimo infinitezimalno spremembo v evklidski metriki, da dobimo hiperbolično. Z indeksom $\mathbb{D}$ poudarimo, da izraz velja le na disku. Z naslednjim izrekom metriko definiramo še na poljubnem območju.

Izrek 3.3 (Pick)**.** *Za vsako območje $U \subsetneq \mathbb{C}$ obstaja enolična konformna*[2] *metrika $\rho_U(z)|\mathrm{d}z|$ na U, ki ji rečemo* hiperbolična metrika *in izpolnjuje naslednje:*

(1) $\rho_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ za vsak $z \in \mathbb{D}$;

[2]Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $f : U \to \mathbb{C}$. Pravimo, da je f *konformna*, če je holomorfna in je njen odvod na U različen od nič.

(2) če je $f\colon U \to V$ holomorfna, potem f ne veča hiperbolične razdalje; to je

$$\|\mathrm{D}f(z)\|_U^V := |f'(z)| \cdot \frac{\rho_V(f(z))}{\rho_U(z)} \leq 1;$$

(3) za vsak $z \in U$ in vsako f kot zgoraj velja $\|\mathrm{D}f(z)\|_U^V = 1$ natanko tedaj, ko je f konformni izomorfizem med U in V;

(4) če je $U \subsetneq V$, potem je $\rho_U(z) > \rho_V(z)$ za vsak $z \in U$.

4. Gostost ubežnih točk

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ majhen disk. Ker je $\mathbb{R} \subset I(f)$ in je vsaka praslika ubežne točke tudi ubežna, trditev velja, če D vsebuje točko, katere orbita vsebuje realno število. Drugače pa so $D, f(D), \ldots, f^n(D)$ vsebovane v

$$U := \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

Opazimo, da za U velja $f^{-1}(U) \subseteq U$. Od tod sledi, da je vsaka veja L logaritma na U holomorfna preslikava $L\colon U \to U$ in zato lokalno krči hiperbolično metriko na U.

Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo $D \cap I(f) = \emptyset$. Potem ima zaporedje domen $f^n(D)$ vsaj eno končno stekališče. Izkaže se, da to zadosten pogoj, da f širi hiperbolično metriko za določen faktor neskončno krat. Po drugi strani pa je po Pickovem izreku hiperbolični odvod po U omejen, ko gre $n \to \infty$. Prišli smo do protislovja.

5. Topološka tranzitivnost

Uporabimo gostost ubežnih točk. Vemo, da f po orbiti vsake ubežne točke z_0 strogo narašča. Za dovolj velike n iteracija f^n poljubno majhen disk s središčem v z_0 preslika v množico, ki vsebuje disk z radijem 2π in središčem v $f^n(z_0)$. Če takšen disk še dvakrat preslikamo z f, se ta razširi čez velik del kompleksne ravnine. Kot posledico tega izpeljemo nekoliko močnejšo trditev, da za vsak kompakt $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in vsako odprto množico $U \subset \mathbb{C}$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da je $K \subset f^n(U)$ za vsak $n \geq N$.

6. Gostost periodičnih točk

Izkaže se, da je vsaka periodična točka odbojna. Tako dokazujemo, da je množica odbojnih periodičnih točk gosta. Naj bo $U \subset \mathbb{C}$ odprta in neprazna. Ker je množica ubežnih točk gosta, obstaja ubežna točka $z_0 \in U \setminus \{0\}$. Naj bo Δ disk s središčem v z_0. Poščemo vejo logaritma iteracije f, ki preslika disk Δ nazaj samega vase in ga pri tem skrči. Obstoj periodične točke nato sledi po Banachovem skrčitvenem načelu.

7. Uvod v transcendentno dinamiko

Dokazali smo, da je eksponentna preslikava kaotična na celotni kompleksni ravnini in zato tam tudi občutljiva na začetne pogoje, kar sledi iz rezultata omenjenega v drugem razdelku. Za splošno holomorfno preslikavo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pa to ne drži. Množico točk $J(f)$, kjer je f občutljiva na začetne pogoje imenujemo *Juliajeva množice*. Njen komplement $F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)$, kjer je f stabilna, pa imenujemo *Fatoujeva množica*. Bolj natančno definiramo Fatoujevo množico z *normalnimi družinami.*

Definicija 7.1 (Normalne družine)**.** Naj bo $\mathcal{C}(X, Y)$ množica zveznih preslikav med topološkima prostoroma X, Y, ki jo opremimo s kompaktno-odprto topologijo. Relativno kompaktni podmnožici tega prostora rečemo *normalna družina.*

V kompleksni ravnini je družina $\mathcal{F}$ meromorfnih funkcij na območju $\Omega \subset \mathbb{C}$ normalna natanko tedaj, ko vsako zaporedje $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ konvergentno podzaporedje v topologiji enakomerne konvergence na kompaktih. Velja tudi naslednji izrek.

Izrek 7.2 (Montelov izrek)**.** *Družina $\mathcal{F}$ holomorfnih funkcij na $\Omega \subset \mathbb{C}$, ki je na vsakem kompaktu omejena z neko fiksno konstanto, je normalna.*

Sedaj lahko navedemo natančno definicijo.

Definicija 7.3 (Fatoujeva in Juliajeva množica)**.** Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cela funkcija in $\{f^n\}$ družina njenih iteracij. *Fatoujeva množica* je

$$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n\} \text{ je normalna družina na neki okolici } z\},$$

njenemu komplementu $J(f) = \mathbb{C} \setminus F(f)$ pa je *Juliajeva* množica.

Izrek 7.4 (Kaos na Juliajevi množici)**.** *Juliajeva množica $J(f)$ je vedno neštevno neskončna in $f^{-1}(J(f)) = J(f)$. Funkcija $f\colon J(f) \to J(f)$ je kaotična.*

Komponente za povezanost Fatoujeve množice imenujemo *Komponente Fatoujeve množice*. Naj bo U komponenta $F(f)$. Če obstaja n, tako da $f^n(U) = U$, potem je U *periodična komponenta s periodo p*.

Izrek 7.5 (Klasifikacija Fatoujevih komponent [4])**.** *Naj bo U periodična komponenta s periodo p. Potem velja eno od naslednjih možnosti.*

(1) U vsebuje privlačno točko z_0 periode p. Potem $f^{np}(z) \to z_0$ za $z \in U$ ko gre $n \to \infty$.

(2) Rob U vsebuje periodično točko z_0 periode p in $f^{np}(z) \to z_0$ za $z \in U$ ko gre $n \to \infty$. Potem $(f^p)'(z_0) = 1$ če $z_0 \in \mathbb{C}$. (Za $z_0 = \infty$ velja $(g^p)'(0) = 1$ kjer je $g(z)1/f(1/z)$.) V tem primeru U imenujemo Leaujeva domena.

(3) Obstaja analitičen homeomorfizem $\phi\colon U \to \mathbb{D}$, tako da velja $\phi(f^p(\phi^{-1}(z))) = e^{2\pi i\alpha} z$ za nek $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. V tem primru U imenujemo Siegelov disk.

(4) Obstaja analitičen homeomorfizem $\phi\colon U \to A$ kjer je $A = \{z : 1 < |z| < r\}$ $(r > 0)$ krožni kolobar, tako da velja $\phi(f^p(\phi^{-1}(z)))e^{2\pi i\alpha} z$ za nek $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. V tem primeru U imenujemo Hermanov kolobar.

(5) Obstaja $z_0 \in \partial U$ tako da $f^{np}(z) \to z_0$ za $z \in U$ ko gre $n \to \infty$, vendar $f^p(z_0)$ ni definirana. V tem primeru U imenujemo Bakerjeva domena.

Literatura

[1] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Second Edition. Addison-Wesley, Redwood City, 1989, str. 50.

[2] Z. Shen in L. Rempe-Gillen. »The Exponential Map Is Chaotic: An Invitation to Transcendental Dynamics«. V: *The American Mathematical Monthly* 122.10 (2015), str. 919–940. DOI: 10.4169/amer.math.monthly.122.10.919.

[3] J. Banks in sod. »On Devaney's Definition of Chaos«. V: *The American Mathematical Monthly* 99.4 (1992), str. 332–334. DOI: 10.1080/00029890.1992.11995856.

[4] W. Bergweiler. »Iteration of meromorphic functions«. V: *Bulletin of the American Mathematical Society* 29.2 (1993), str. 151–188. DOI: 10.1090/s0273-0979-1993-00432-4. URL: http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-1993-00432-4.

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani