Kompleksna eksponentna preslikava in kaos

Lenart Miklavič

Fakulteta za matematiko in fiziko

25. november 2024

Motivacija

Iteriranje funkcije

Izberemo poljuben $x \in \mathbb{R}$

Iteriranje funkcije

Izberemo poljuben $x \in \mathbb{R}$

- Kaj se zgodi, če iteriramo funkcijo $\sin$?

Iteriranje funkcije

Izberemo poljuben $x \in \mathbb{R}$

- Kaj se zgodi, če iteriramo funkcijo $\sin$?
- Kaj, če iteriramo funkcijo $\cos$?

Iteriranje funkcije

Izberemo poljuben $x \in \mathbb{R}$

- Kaj se zgodi, če iteriramo funkcijo $\sin$?
- Kaj, če iteriramo funkcijo $\cos$?
- Kaj se zgodi, če iteriramo eksponentno funkcijo e^x?

Iteriranje funkcije

Izberemo poljuben $x \in \mathbb{R}$

- Kaj se zgodi, če iteriramo funkcijo $\sin$?
- Kaj, če iteriramo funkcijo $\cos$?
- Kaj se zgodi, če iteriramo eksponentno funkcijo e^x?
    - za $x \in \mathbb{R}$?

Iteriranje funkcije

Izberemo poljuben $x \in \mathbb{R}$

- Kaj se zgodi, če iteriramo funkcijo $\sin$?
- Kaj, če iteriramo funkcijo $\cos$?
- Kaj se zgodi, če iteriramo eksponentno funkcijo e^x?
  - za $x \in \mathbb{R}$?
  - za $x \in \mathbb{C}$?

Nekaj definicij...

Definicije i

Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon X \to X$ preslikava in $z \in \mathbb{C}$.

Definicija

Preslikava, definirani z rekurzivno zvezo $f^0 := \mathrm{Id}$ in $f^{n+1} := f \circ f^n$, pravimo n-ta *iteracija* preslikave f.

Definicija (Orbita točke)

Zaporedju $a_n := f^n(z)$ pravimo *orbita* točke z pod preslikavo f.

Definicija (Periodična točka)

Začetna točka z je *periodična*, če obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $f^n(z) = z$.

Izrek

Za kompleksno eksponentno preslikavo $f(z) = e^z$ so naslednje množice goste podmnožice kompleksne ravnine.

1. *Množica točk, katerih orbita divergira v neskončnost.*
2. *Množica točk, katerih orbita gosto pokrije kompleksno ravnino.*
3. *Množica periodičnih točk.*

Definicija (Topološka tranzitivnost)

Zvezna preslikava f je *topološko tranzitivna*, če za vsaki odprti množici $U, V \subseteq \mathbb{C}$, ki sekata X obstaja tak $z \in U \cap X$ in $n \geq 0$, da je $f^n(z) \in V$.

Definicija (Kaos po Devaneyu)

Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ neskončna množica in $f\colon X \to X$ zvezna.
Pravimo, da je f *kaotična* (po Devaneyu), če velja:

1. množica periodičnih točk je gosta v X;
2. funkcija f je topološko tranzitivna.

Kaos

Definicija (Kaos po Devaneyu)

Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ neskončna množica in $f\colon X \to X$ zvezna. Pravimo, da je f *kaotična* (po Devaneyu), če velja:

1. množica periodičnih točk je gosta v X;
2. funkcija f je topološko tranzitivna.

Izrek

Kompleksna eksponentna preslikava $f(z) = e^z$ *je kaotična.*

Definicija

Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ in d metrika na X. Zvezna preslikava $f\colon X \to X$ je *občutljiva na začetne pogoje*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako odprto množico $U \subseteq X$ obstajata $x, y \in U$, da velja $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Občutljivost na začetne pogoje

Definicija

Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ in d metrika na X. Zvezna preslikava $f\colon X \to X$ je *občutljiva na začetne pogoje*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako odprto množico $U \subseteq X$ obstajata $x, y \in U$, da velja $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Izrek

Naj bo X neskončen metrični prostor in $f\colon X \to X$ zvezna. Če ima f goste periodične točke in je topološko tranzitivna, potem je občutljiva na začetne pogoje.

Definition

Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nekonstantna in nelinearna holomorfna preslikava. Zaprta množica $J(f)$ na kateri je f občutljiva na začetne pogoje, je *Juliajeva množica* preslikave f. Njen komplement $F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)$ imenujemo *Fatoujeva množica*.

Transcendentna dinamika

Definition

Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nekonstantna in nelinearna holomorfna preslikava. Zaprta množica $J(f)$ na kateri je f občutljiva na začetne pogoje, je *Juliajeva množica* preslikave f. Njen komplement $F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)$ imenujemo *Fatoujeva množica*.

Izrek

Juliajeva množica je vedno neštevno neskončna in $f^{-1}(J(f)) = J(f)$. *Preslikava* $f\colon J(f) \to J(f)$ *je kaotična.*