Numerične metode - preizkusi iz teorije

Ladisk

6. februar 2023

Kazalo

1 Datum: 11.1.2019

1. vprašanje
Podano tabelo podatkov: x = (0, 1, 2), y = (1, 4, 2) je potrebno interpolirati. Najprej predstavite interpolacijo podane tabele kot problem reševanja sistema linearnih enačb, nato predstavite Lagrangevo interpolacijsko metodo in jo uporabite na tabeli podatkov. Pojasnite razlike med obema pristopoma. Ali je rezultat enak? *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Polinomska interpolacija: podane imamo 3 točke, zato uporabimo interpolacijo s polinomom 2. stopnje:

$$y = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2. \tag{1}$$

Nastavimo sistem enačb oblike $A \cdot x = b$: Točk: 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Določimo neznanke (tukaj samo nakažemo rešitev, numerično pravilen postopek je z uporabo Gaussove eliminacije):

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Točk: 5

Lagrangeva metoda: enačbi Lagrangeve interpolacijske metode:

$$l_i(x) = \Pi_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{4}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot l_i(x). \tag{5}$$

Točk: 5

Najprej definiramo Lagrangeve polinome:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \\ l_1(x) &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \\ l_2(x) &= \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Definiramo Lagrangev interpolacijski polinom: Točk: 5

$$P(x) = 1 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x). \tag{7}$$

Točk: 5

Glavna razlika med metodama je, da pri Lagrangevi interpolaciji ni potrebno reševati sistema enačb, zato je takšen pristop numerično manj zahteven. Točk: 5

Metodi vrneta enako interpolacijsko krivuljo. Točk: 5

2. vprašanje
Za drugi odvod izpeljite: centralno diferenčno shemo 2. reda natančnost in diferenčno shemo naprej 1. reda natančnosti. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Centralna diferenčna shema za 2. odvod: razvijemo Taylorjevo vrsto naprej in nazaj do 3. odvoda:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + \frac{h^3}{6}\,f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{1}$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) - \frac{h^3}{6}\,f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{2}$$

Točk: 5

Enačbi seštejemo:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\,f(x) + h^2\,f''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{3}$$

in izrazimo drugi odvod:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2\,f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

Točk: 5

Pomembno je, da Taylorjevo vrsto razvijemo do vključno 3. odvoda, saj tako dobimo končno napako 2. reda (po deljenju s h^2). Tretji odvod se nato ob seštevanju enačb izniči. V primeru, da bi vrsto razvili le do 2. odvoda, bi dobili končno napako 1. reda.

Točk: 5

Diferenčna shema naprej: za diferenčno shemo naprej moramo razviti dve Taylorjevi vrsti:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{5}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\,f'(x) + \frac{4h^2}{2}\,f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{6}$$

Točk: 5

Enačbo (5) pomnožimo z 2 in ji odštejemo enačbo (6):

$$\begin{aligned} 2\,f(x+h) - f(x+2h) = \quad & [2\,f(x) - f(x)] + \\ & [2\,h\,f'(x) - 2\,h\,f'(x)] + \\ & \left[\tfrac{2\,h^2}{2}\,f''(x) - \tfrac{4\,h^2}{2}\,f''(x)\right] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \tag{7}$$

Izraz poenostavimo:

$$2\,f(x+h) - f(x+2h) = f(x) - h^2\,f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{8}$$

Točk: 5

Izrazimo drugi odvod. Ker enačbo delimo s h^2 dobimo red napake 1:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2\,f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \tag{9}$$

Točk: 5

Ker smo napako $\mathcal{O}(h^3)$ delili s h^2, dobimo končno napako 1. reda.

Točk: 5

3. vprašanje

Zapišite uteži Simpsonove 1/3 metodo za numerično integriranje. Za tabelo podatkov $(x_0, x_1, ...)$, $(y_0, y_1, ...)$ prikažite uporabo osnovnega in sestavljenega Simpsonovega pravila; komentirajte napako. Pokažite, kako lahko s pomočjo Richardsonove ekstrapolacije rezultata s korakom h in $2h$ izračunamo boljši približek. *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Uteži Simpsonove 1/3 metode: $w = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right] \cdot h$

Točk: 5

Za osnovno pravilo potrebujemo 3 ekvidistančne točke:

$x = [x_0, x_1, ...]$
$y = [y_0, y_1, ...]$

Primer integrala:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{y_2}{3}\right) \cdot h \tag{1}$$

Točk: 5

Sestavljeno pravilo.
$x = [x_0, x_1, ...]$
$y = [y_0, y_1, ...]$

Primer integrala:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{4 \cdot y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot h \tag{2}$$

oziroma:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{2 \cdot y_2}{3} + \frac{4 \cdot y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot h \tag{3}$$

Točk: 5

Pri sestavljenem 1/3 Simpsonovem pravilu je pomembno, da je število intervalov sodo. (Tukaj je priporočljiva **skica**)

Točk: 5

Napaka sestavljene Simpsonove metod je 4. reda: $-\frac{b-a}{180}\, h^4\, f^{(4)}(\eta)$.

Točk: 5

Izračunamo integral s korakom $2\,h$ in korakom h:

$$I_{2h} = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4\,y_2}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot 2\,h \tag{4}$$

$$I_h = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4\,y_1}{3} + \frac{2\,y_2}{3} + \frac{4\,y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot h \tag{5}$$

Za izboljšano aproksimacijo integrala uporabimo enačbo:

$$I = \frac{2^n\, I_h - I_{2h}}{2^n - 1} = \frac{16\, I_h - I_{2h}}{15} \tag{6}$$

Točk: 5

2 Datum: 28.1.2019

1. vprašanje
Matriko:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(1.) preoblikujte v Gaussovo eliminirano obliko. (2.) Kakšne oblike je matrika po preoblikovanju? Če $\boldsymbol{A}$ predstavlja razširjeno matriko sistema linearnih enačb in je zadnji stolpec vektor konstant, določite (3.) rang osnovne in razširjene matrike. (4.) Kaj nam preoblikovana matrika lahko pove o sistemu enačb? (5.) Ali ima podani sistem enolično rešitev? (6.) Katero operacijo izvedemo, da po Gaussovi eliminaciji dobimo rešitev sistema?
(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

(1.) Postopek preoblikovanja matrike $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 0.5 \cdot \boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Točk: 10

(2.) Matrika je zgornje trikotna. Točk: 5

(3.) Rang razširjene matrike je enak 3. Rang osnovne matrike je enak 2. Točk: 5

(4.) Preoblikovana matrika nam pove rang osnovne matrike in rang razširjene matrike. Posledično izvemo ali ima sistem rešitev ali ne. Točk: 5
(5.) Tak sistem enačb **nima** enolične rešitve. Točk: 5
(6.) Da dobimo rešitev sistema enačb moramo uporabiti **obratno vstavljanje**. Točk: 5

2. vprašanje
Tabelo podatkov x_i, y_i želimo aproksimirati s funkcijo $f(x) = a\,x^{3/2} + b$. Za podano funkcijo pokažite, kako to izvedemo s pomočjo metode najmanjše kvadratične napake? Nastavite sistem enačb za določitev parametrov a in b! *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Uporabimo enačbo za metodo najmanjših kvadratov:

$$S(a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\,x_i^{3/2} + b))^2 \tag{1}$$

Točk: 5

Vemo, da v stacionarni točki velja:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \tag{2}$$

Točk: 5

Izvedemo odvajanje:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\, x_i^{3/2} + b)) \cdot x_i^{3/2}, \tag{3}$$

sledi:

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} (a\, x_i^3 + b\, x_i^{3/2} - x_i^{3/2}\, y_i) \tag{4}$$

Točk: 5

Iz:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\, x_i^{3/2} + b)) \cdot (-1), \tag{5}$$

sledi:

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} (a\, x_i^{3/2} + b - y_i). \tag{6}$$

Točk: 5

Nastavimo lahko sistem enačb:

$$a \sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n-1} x^{3/2} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{3/2}\, y_i \tag{7}$$

in

Točk: 5

$$a \sum_{i=1}^{n-1} x^{3/2} + b \sum_{i=1}^{n-1} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \tag{8}$$

Točk: 5

3. vprašanje

Kakšna je razlika med reševanjem diferencialnih enačb glede na začetne pogoje in reševanjem glede na robne pogoje? Zapišite centralno diferenčno shemo za odvoda $\dot{x}$ in $\ddot{x}$. Pokažite, kako za robna pogoja: $x(t = 0\,\mathrm{s}) = 1$ in $x(t = 2\mathrm{s}) = 0$ rešite diferencialno enačbo: $\ddot{x} + c\,\dot{x} + kx = 0$. Rešite s pomočjo centralne diferenčne sheme drugega reda. Uporabite fizikalne točke pri $t = [0{,}1{,}2]$ s. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Pri začetnem problemu pri sistemu d.e. poznamo vrednosti vseh dodatnih enačb pri isti vrednosti neodvisne spremenljivke in tako lahko začnemo numerično integracijo. Pri robnem problemu dodatne enačbe, potrebne za rešitev d.e., poznamo pri različnih vrednosti neodvisne spremenljivke.

Točk: 5

Centralna diferenčna shema za $\dot{x}$:

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,h} \tag{1}$$

Točk: 5

Centralna diferenčna shema za $\ddot{x}$:

$$\ddot{x}_i = \frac{x_{i-1} - 2\,x_i + x_{i+1}}{h^2} \tag{2}$$

Točk: 5

Enačbo zapišemo s pomočjo centralne diferenčne sheme:

$$\ddot{x} = -c\,\dot{x} - k\,x \tag{3}$$

$$\frac{x_{i-1} - 2\,x_i + x_{i+1}}{h^2} = -c\,\frac{-x_{i-1} + x_{i+1}}{2\,h} - k\,x_i \tag{4}$$

Točk: 5

Ker vemo, da uporabljamo samo točke pri $t = (0, 1, 2)$ sekund, **lahko zapišemo $x_i = x_1$ samo pri 1 sekundi**. To pomeni, da dobimo:

$$x_0 = x(0\ \mathrm{s}) \tag{5}$$
$$x_1 = x(1\ \mathrm{s}) \tag{6}$$
$$x_2 = x(2\ \mathrm{s}) \tag{7}$$

Točk: 5

Če te vrednosti vstavimo poznane vrednosti $x(0) = 1$ in $x(2) = 0$ v enačbo (4) dobimo:

$$\frac{1 - 2\,x_1 + 0}{h^2} = -c\,\frac{-1 + 0}{2\,h} - k\,x_1 \tag{8}$$

oziroma

$$\frac{-2x_1 + 1}{h^2} = \frac{c}{2h} - kx_1 \tag{9}$$

Točk: 5

upoštevamo še, da je korak h enak 1 (točke (0, 1, 2) si sledijo s korakom 1):

$$-2x_1 + 1 = \frac{c}{2} - kx_1 \tag{10}$$

in izrazimo x_1:

$$x_1 = \frac{c - 2}{2\,(k - 2)} \tag{11}$$

Točk: 5

3 Datum: 11.2.2019

1. vprašanje
Matriki $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

z uporabo principov sistema linearnih enačb, izračunajte inverzno matriko. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Vemo, da mora veljati:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{2}$$

kar lahko drugače zapišemo kot:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Točk: 5

Sedaj rešujemo 3 različne sisteme enačb. Vsak sistem enačb nam poda en stolpec inverza matrike $\boldsymbol{A}$.
Prvi sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$a_1 + 2\,a_2 + 3\,a_3 = 1 \tag{5}$$
$$a_1 + a_3 = 0 \tag{6}$$
$$-a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{7}$$

Točk: 5

Iz enačbe (6) izrazimo a_1 in vstavimo v enačbo (7):

$$a_1 = -a_3 \tag{8}$$
$$-(-a_3) + a_2 + a_3 = 0 \tag{9}$$
$$a_2 = -2\,a_3 \tag{10}$$

a_1 in a_2 vstavimo v enačbo (5):

$$(-a_3) + 2\,(-2\,a_3) + 3\,a_3 = 1 \tag{11}$$
$$-a_3 - 4\,a_3 + 3\,a_3 = 1 \tag{12}$$
$$-2\,a_3 = 1 \tag{13}$$

Sedaj lahko izračunammo vrednosti:

$$a_3 = -\frac{1}{2} \tag{14}$$
$$a_1 = \frac{1}{2} \tag{15}$$
$$a_2 = 1 \tag{16}$$

Točk: 5

Drugi sistem
Enak postopek ponovimo tudi za drugi sistem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3 &= 0 \quad (18)\\ b_1 + b_3 &= 1 \rightarrow b_1 = 1 - b_3 \quad (19)\\ -b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \rightarrow -(1 - b_3) + b_2 + b_3 = 0 \rightarrow b_2 = 1 - 2\,b_3 \quad (20) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vstavimo v enačbo (18) in izračunamo vrednosti:

$$\begin{aligned} (1 - b_3) + 2\,(1 - 2\,b_3) + 2\,b_3 &= 0 \rightarrow b_3 = \frac{3}{2} \quad (21)\\ b_1 &= -\frac{1}{2} \quad (22)\\ b_2 &= -2 \quad (23) \end{aligned}$$

Točk: 5

Tretji sistem
Enak postopek ponovimo tudi za tretji sistem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} c_1 + 2\,c_2 + 3\,c_3 &= 0 \quad (25)\\ c_1 + c_3 &= 0 \rightarrow c_1 = -c_3 \quad (26)\\ -c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \rightarrow -(-c_3) + c_2 + c_3 = 1 \rightarrow c_2 = 1 - 2\,c_3 \quad (27) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vstavimo v enačbo (25) in izračunamo vrednosti:

$$\begin{aligned} (-c_3) + 2\,(1 - 2\,c_3) + 2\,c_3 &= 0 \rightarrow c_3 = 1 \quad (28)\\ c_1 &= -1 \quad (29)\\ c_2 &= -1 \quad (30) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vse dobljene vrednosti a_i, b_i in c_i vstavimo v enačbo (3). Vidimo, da smo izračunali inverzno matriko:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -0{,}5 & 1{,}5 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

2. vprašanje
Predstavite bisekcijsko metodo za numerično reševanje enačb; prikažite postopek tudi na primeru funkcije $f(x) = x^2 - 3\,x - 3$ in izvedite dva koraka iskanja ničle (začnite z $x_0 = -3$, $x_1 = 0$) *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Povzetek metode je:

- najprej preverimo če imata vrednosti $f(x_0)$ in $f(x_1)$ različna predznaka,

- interval $[x_0{,}x_1]$ razdelimo na pol in dobimo $x_2 = (x_0 + x_1)/2$,
- če imata $f(x_0)$ in $f(x_2)$ različne predznake, je nov interval $[x_0, x_2]$, sicer je $[x_2, x_1]$,
- v naslednjem koraku definiramo nov korak $[x_0, x_1]$ glede na prej določen interval.
- postopek ponavljamo dokler ne dosežemo želene natančnosti: $|x_1 - x_0| < \varepsilon$.

Bisekcijska metoda sicer ne zahteva, vendar opombo, da preverjamo končnost vsote $|f(x_0)| + |f(x_1)|$ za preprečitev identifikacije pola ali večkratne, štejemo pozitivno. Točk: 5

Tukaj je na mestu **SKICA** Točk: 5

Izvedemo iskanje ničle za podano funkcijo. Preverimo če na intervalu $[x_0, x_1]$ obstaja ničla:

$$\begin{aligned} f(x_0 = -3) &= 15 && (1)\\ f(x_1 = 0) &= -3 && (2)\\ \mathrm{sign}(f(x_0)) &\neq \mathrm{sign}(f(x_1)) && (3) \end{aligned}$$

Točk: 5

Prvi korak

Najprej izračunamo vrednost x_2:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = -1{,}5 \tag{4}$$

izračunamo vrednosti pri $x_0 = -3$, $x_1 = 0$ in $x_2 = -1{,}5$:

$$\begin{aligned} f_0 &= f(-3) = (-3)^2 - 3\,(-3) - 3 = 15 && (5)\\ f_1 &= f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 3 = -3 && (6)\\ f_2 &= f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 - 3\,(-1.5) - 3 = 3{,}75 && (7) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vrednosti f_0 in f_2 imata enaka predznaka, zato definiramo nov interval: $[-1{,}5;\ 0]$. To postane naš novi začetni interval: $x_0 = -1{,}5$, $x_1 = 0$. Točk: 5

Drugi korak

$$x_2 = \frac{-1{,}5 + 0}{2} = -0{,}75 \tag{8}$$

Izračunamo vrednosti funkcije:

$$\begin{aligned} f_0 &= f(-1{,}5) = 3{,}75 && (9)\\ f_1 &= f(0) = -3 && (10)\\ f_2 &= f(-0{,}75) = -0{,}1875 && (11) \end{aligned}$$

Vrednosti f_0 in f_2 imata različna predznaka, zato definiramo nov interval: $[-1{,}5;\ -0{,}75]$. To postane naš novi začetni interval: $x_0 = -1{,}5$, $x_1 = -0{,}75$. Točk: 5

3. vprašanje

Predstavite Eulerjevo metodo za reševanje diferencialnih enačb.
Na primeru diferencialne enačbe: $\ddot{x} + k\,x = 0$, pokažite kako diferencialno enačbo 2. reda preoblikujemo na sistem dveh diferencialnih enačb 1. reda. Če so začetni pogoji: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, potem pokažite izračun prvih dveh časovnih korakov z Eulerjevo metodo ($k = 1$ in korak: $h = 1$). *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Eulerjeva metoda temelji na razvoju Taylorjeve vrste do drugega člena:

$$y(t + h) = y(t) + y'(t{,}y(t))\,h + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Izrazimo prvi odvod:

$$y'(t) = f(t, y) \tag{2}$$

Točk: 5

Koraki Eulerjeve metode so naslednji:

1. $i = 0$, poznamo $y(t_0)$ in $y'(t_0, y(t_0))$
2. Izračunamo vrednost funkcije pri $t_{i+1} = t_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\, h \tag{3}$$

3. $i = i + 1$ in ponovimo korak 2

Koraka 2 in 3 ponavaljamo do t_n.

Točk: 5

Diferencialno enačbo $\ddot{x} + k\,x = 0$ zapišemo kot sistem diferencialnih enačb prvega reda. Preoblikujemo enačbo:

$$\ddot{x} = -k\,x \tag{4}$$

Zapišemo nove oznake:

$$y_0 = x \tag{5}$$
$$y_1 = \dot{x} \tag{6}$$

Točk: 5

in jih odvajamo:

$$y_0' = x' = y_1 \tag{7}$$
$$y_1' = x'' = -k\,y_0 \tag{8}$$

Dobili smo sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.

Točk: 5

Poznamo začetne pogoje:

$$x(0) = 0 \tag{9}$$
$$\dot{x}(0) = 1 \tag{10}$$

in tudi vrednost:

$$\ddot{x}(0) = -k\,x(0) = 0 \tag{11}$$

Točk: 5

Prvi korak
Sistem enačb v prvi točki:

$$y_0(t_1) = y_0(0) + y_1(0)\,h = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \tag{12}$$
$$y_1(t_1) = y_1(0) - k\,y_0(0)\,h = 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \tag{13}$$

Točk: 5

Drugi korak
Sistem enačb v drugi točki:

$$y_0(t_2) = y_0(t_1) + y_1(t_1)\,h = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \tag{14}$$
$$y_1(t_2) = y_1(t_1) - k\,y_0(t_1)\,h = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \tag{15}$$

Točk: 5

4 Datum: 10.1.2020

1. vprašanje
Kako matriko preoblikujemo v t.i. vrstično kanonično obliko? Zakaj se uporablja vrstična kanonična oblika matrike?
Matriko:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

preoblikujte v vrstično kanonično obliko.
Če $\boldsymbol{A}$ predstavlja razširjeno matriko sistema linearnih enačb in je zadnji stolpec vektor konstant, določite rang osnovne in razširjene matrike. Ali ima takšen sistem enolično rešitev? *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

S pomočjo množenja in seštevanja vrstic lahko matriko preoblikujemo tako, da:

- so ničelne vrstice na dnu matrike
- je prvi neničelni element vrstice desno od prvih neničelnih elementov prejšnjih vrstic
- je pivot enak 1 (pivot je prvi neničelni element v vrstici)
- pivot je edini neničelni element v stoplcu

Dobimo vrstično kanonično obliko. Točk: 5

Vrstično kanonično obliko uporabljamo za določitev ranga matrike. Rang matrike je enak številu neničelnih vrstic kanonične oblike. Točk: 5

Postopek preoblikovanja matrike $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 0.5 \cdot \boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Točk: 5

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1/2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = -2\,\boldsymbol{A}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2/2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0 - 3\,\boldsymbol{A}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Točk: 5

Rang razširjene matrike je enak 3. Rang osnovne matrike je enak 2. Točk: 5

Tak sistem enačb **nima** enolične rešitve. Točk: 5

2. vprašanje

Gaussov integracijski pristop je definiran z izrazom:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i\, f(x_i). \tag{1}$$

Naloga:

1. Pojasnite zgornji izraz ter definirajte in pojasnite uporabljene simbole.
2. Pojasnite princip Gaussovega integracijskega pristopa glede na pristop Newton-Cotes.
3. Določite parametre Gaussove integracije za linearno funkcijo: $f(x) = P_1(x) = A_0 + A_1\,x$.
4. Določite parametre Gaussove integracije za polinom 3. stopnje:
   $f(x) = P_3(x) = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3$ (namig: potrebni sta dve vozlišči, ustavite se pri sistemu enačb).

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Naloga:

1. Levi del predstavlja integral, katerega želimo določiti, desni del pa njegovo numerično oceno. Pri tem je $f(x)$ podintegralska funkcija, ki jo integriramo po neodvisni spremenljivki x od spodnje meje a do zgornje meje b. w_i so neznane uteži, x_i lega neznanega vozlišča. i je indeks vozlišča, katerih je n. Točk: 7.5

2. Newton-Cotes išče površino interpolirane polinomske funkcije. Cilj Gaussovega integracijskega pristopa je integral funkcije $f(x)$ nadomestiti z uteženo (neznano) vsoto vrednosti funkcije pri (neznani) diskretnih vrednostih $f(x_i)$. Točk: 7.5

3. Integral linearne funkcije je (leva stran):

   $$\int_a^b P_1(x)\,\mathrm{d}x = \left(A_0\,x + A_1\,\frac{x^2}{2}\right)_a^b = -A_0\,a + A_0\,b - \frac{A_1\,a^2}{2} + \frac{A_1\,b^2}{2}. \tag{2}$$

   Desna vsota (ob predpostavki, da je $n = 1$):

   $$w_0\,P_1(x_0) = w_0\,A_0 + w_0\,A_1\,x_0. \tag{3}$$

Točk: 5

Na podlagi izrazov (2) in (3) ob predpostavki poljubnega polinoma (npr. $A_0 = 1$ in $A_1 = 0$) izpeljemo rešitev:

$$w_0 = b - a, \qquad x_0 = \frac{b+a}{2}. \tag{4}$$

Točk: 5

4. Postopamo podobno kakor pri linearni funkciji, integral funkcije je (leva stran):

$$\int_a^b P_3(x)\,\mathrm{d}x = -A_0\,a + A_0\,b - \frac{A_1\,a^2}{2} + \frac{A_1\,b^2}{2} - \frac{A_2\,a^3}{3} + \frac{A_2\,b^3}{3} - \frac{A_3\,a^4}{4} + \frac{A_3\,b^4}{4}. \tag{5}$$

Desna vsota (ob predpostavki, da je $n = 2$):

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i\,P_3(x_i) = A_0\,w_0 + A_0\,w_1 + A_1\,w_0\,x_0 + A_1\,w_1\,x_1 + A_2\,w_0\,x_0^2 + A_2\,w_1\,x_1^2 + A_3\,w_0\,x_0^3 + A_3\,w_1\,x_1^3. \tag{6}$$

Točk: 5

Na podlagi izrazov (5) in (6) izpeljemo rešitev (štiri enačbe za štiri neznanke: x_0, x_1, w_0, w_1):

$$-a + b = w_0 + w_1, \tag{7}$$

$$-\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = w_0\,x_0 + w_1\,x_1, \tag{8}$$

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} = w_0\,x_0^2 + w_1\,x_1^2, \tag{9}$$

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} = w_0\,x_0^3 + w_1\,x_1^3. \tag{10}$$

Točk: 5

3. vprašanje

1. Predstavite Eulerjevo metodo za reševanje diferencialnih enačb.
2. Kako določimo napako pri Eulerjevi metodi?
3. V čem se eksplicitna Eulerjeva metoda razlikuje od implicitne Eulerjeve metode? Pojasnite prednosti in slabosti enega ali drugega pristopa!

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Eulerjeva metoda temelji na razvoju Taylorjeve vrste do drugega člena:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t,y(t))\,h + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Izrazimo prvi odvod:

$$y'(t) = f(t,y) \tag{2}$$

Točk: 5

Koraki Eulerjeve metode so naslednji:

(a) $i = 0$, poznamo $y(t_0)$ in $y'(t_0, y(t_0))$

(b) Izračunamo vrednost funkcije pri $t_{i+1} = t_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\, h \tag{3}$$

(c) $i = i + 1$ in ponovimo korak 2

Koraka 2 in 3 ponavaljamo do t_n.

Točk: 5

2. Lokalna napaka Eulerjeve metode je drugega reda $\mathcal{O}(h^2)$, globalna je prvega reda $\mathcal{O}(h^1)$.

   Točna rešitev $y(t_n)$ pri velikosti koraka h je:$y(t_n) = y_{n,h} + E_h$, kjer je $y_{n,h}$ numerični približek in E_h napaka metode. Ker je globalna napaka prvega reda, lahko napako zapišemo kot: $E_h = k\, h.$.

   Podobno lahko za velikost koraka $2h$ zapišemo: $y(t_n) = y_{n,2h} + E_{2h}$, kjer je $y_{n,2h}$ numerični približek in E_{2h} napaka metode: $E_{2h} = k\, 2\, h$.

   Točk: 5

   Ob predpostavki, da je konstanta k pri koraku h in koraku $2h$ enaka, lahko določimo oceno napake:

$$E_h = k\, h = y_{n,h} - y_{n,2h}. \tag{4}$$

   Točk: 5

3. Implicitna Eulerjeva metoda temelji temelji na izrazu:

$$y(t + h) = y(t) + y'(t + h, y(t + h))\, h + \mathcal{O}(h^2). \tag{5}$$

   Ko zanemarimo napako, dobimo izraz

$$y(t + h) = y(t) + y'(t + h, y(t + h))\, h, \tag{6}$$

   kateri predstavlja nelinearno enačbo z neznanko $y(t + h)$.

   Točk: 10

   Prednost implicitne Eulerjeve metode je, da je bolj stabilna in omogoča večje korake integracije kakor eksplicitna oblika. Slabost metode je, da je numerično bolj zahtevna, saj na vsakem časovnem koraku zahteva iskanje rešitve nelinearne enačb.

   Točk: 5

5 Datum: 25.1.2021

1. vprašanje
Podana je tabela vrednosti: $x = [1,2,3,4,5]$, $y = [2,4,2,3,5]$. Spodnje naloge se navezujejo na Simpsonovo 1/3 metodo za integriranje.

1. Definirajte uteži metode. (5)
2. Kako je definirana napaka podane metode(5)
3. V katerem primeru metoda poda točen rezultat? (5)
4. Izračunajte vrednost integrala v primeru koraka $h = 1$ in $h = 2$. (5)
5. Izpeljite Richardsonovo ekstrapolacijo za podano metodo. (10)
6. S pomočjo Richardsonove ekstrapolacije izračunajte boljši približek. (5)

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Uteži Simpsonove 1/3 metode so:
$$h \cdot [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}]$$
kjer je h korak delitve osi neodvisne spremenljivke.

Točk: 5

2. Ocena napake Simpsonove 1/3 metode je definirana kot:
$$E = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$
Napaka je torej lokalno 5. reda, definirana z neznano vrednostjo 4. odvoda $f^{(4)}(\xi)$.

Globalno je napaka 4. reda, saj pri $n = (b-a)/h$ intervalih napako naredimo n krat:
$$E = -\frac{(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$
Opomba: kot pravilno štejemo pravilno definiran red lokalne ali red globalne napake.

Točk: 5

3. Simpsonova 1/3 metoda poda točen rezultat pri integriranju polinomov reda 3 ali manj.

Točk: 5

4. Vrednost integrala podane funkcij pri koraku $h = 1$:
$$\begin{aligned}
x &= [1,2,3,4,5] \\
y &= [2,4,2,3,5] \\
A &= 1 \cdot [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}] \quad \text{(sestavljena Simpsonova 1/3 metoda)} \\
I &= \sum_i A_i\, f(x_i) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} + \frac{12}{3} + \frac{5}{3} \\
&= \frac{39}{3} \\
I_h &= 13
\end{aligned}$$

Vrednost integrala podane funkcij pri koraku $h = 2$:

$$\begin{aligned}
x &= [1, 3, 5] \\
y &= [2, 2, 5] \\
A &= 2 \cdot [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}] \quad \text{(osnovna Simpsonova 1/3 metoda)} \\
I &= \sum_i A_i\, f(x_i) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{10}{3} \\
&= \frac{30}{3} \\
I_{2h} &= 10
\end{aligned}$$

Točk: 5

5. Izpeljava Richardsonove ekstrapolacije za sestavljeno Simpsonovo 1/3 metodo: Napako pri integriranju ocneimo pri dveh korakih, h in $2h$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_h + E_h = I_{2h} + E_{2h},$$

kjer sta I_h in E_h približek integrala in ocena napake po sestavljeni Simpsonovi 1/3 metodi pri koraku h, I_{2h} in E_{2h} pa analogno pri koraku $2h$.
Velja torej:

$$I_{2h} - I_h = E_h - E_{2h}$$

Ocena napake sestavljene Simpsonove 1/3 metode:

$$E = -\frac{b-a}{180} h^4\, f^{(4)}(\eta)$$

Če predpostavimo, da je $f^{(4)}(\eta)$ pri obeh korakih enak, lahko zapišemo (točno definiranje napake ni bistveno, pomembno je, da napišete, da je napaka 4. reda pomnožena s konstanto K):

$$\begin{aligned}
E_h &= -\frac{b-a}{180} h^4\, f^{(4)}(\eta) = h^4\, K \\
E_{2h} &= -\frac{b-a}{180} (2h)^4\, f^{(4)}(\eta) = 16h^4\, K
\end{aligned}$$

in torej velja:

$$I_{2h} - I_h = -15h^4\, K.$$

Izrazimo lahko K:

$$K = \frac{I_h - I_{2h}}{15h^4}$$

in napako pri koraku h:

$$E_h = h^4 K = \frac{I_h - I_{2h}}{15}.$$

Izboljšan približek integrala I_h torej je:

$$I_h^* = I_h + E_h = I_h + \frac{I_h - I_{2h}}{15} = \frac{16}{15} I_h - \frac{1}{15} I_{2h}$$

Točk: 10

6. Izboljšan približek zgornjega integrala z Richardsonovo ekstrapolacijo:

$$\begin{aligned} I_h^* &= \frac{16}{15} I_h - \frac{1}{15} I_{2h} \\ &= \frac{16}{15} \cdot 13 - \frac{1}{15} \cdot 10 \\ &= \frac{208 - 10}{15} \\ &= 13.2 \end{aligned}$$

Točk: 5

2. vprašanje
Izpeljite aproksimacijo drugega odvoda po metodi končnih razlik:

1. Z uporabo centralne diferenčne sheme za red natančnosti 2. (20)
2. Z uporabo centralne diferenčne sheme za red natančnosti 4. (15)

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Drugi odvod po metodi končnih razlik s centralno diferenčno shemo za red natančnosti 2:
   Funkcijo $f(x)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto v okolici točke x s korakom h, do člena 3. reda:

   $$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''\,\frac{h^2}{2} + f'''\,\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

   S korakom $-h$:

   $$f(x-h) = f(x) - f'(x)\,h + f''\,\frac{h^2}{2} - f'''\,\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

   Zgornji enačbi seštejemo, odštejejo se členi z lihimi odvodi:

   $$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + f''h^2 + O(h^4)$$

   Izrazimo drugi odvod, $f''(x)$ (delimo zgornjo enačbo s h^2):

   $$f''(x) = \frac{1}{h^2}\big(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\big) + O(h^2)$$

   Uteži centralne diferenčne sheme za 2. odvod in red natančnosti 2:

   $$\frac{1}{h^2}\big[1, -2, 1\big]$$

   Točk: 20

2. Drugi odvod po metodi končnih razlik s centralno diferenčno shemo za red natančnosti 4.
   Funkcijo $f(x)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto v okolici točke x s korakom h, do člena 5. reda:

   $$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''\,\frac{h^2}{2} + f'''\,\frac{h^3}{6} + f^{\mathrm{iv}}\,\frac{h^4}{24} + f^{\mathrm{v}}\,\frac{h^5}{120} + O(h^6)$$

   S korakom $-h$:

   $$f(x+h) = f(x) - f'(x)\,h + f''\,\frac{h^2}{2} - f'''\,\frac{h^3}{6} + f^{\mathrm{iv}}\,\frac{h^4}{24} - f^{\mathrm{v}}\,\frac{h^5}{120} + O(h^6)$$

Zgornji enačbi seštejemo, odštejejo se členi z lihimi odvodi:

$$f(x-h)+f(x+h)=2f(x)+f''h^2+f^{\mathrm{iv}}\,\frac{h^4}{12}+O(h^6) \tag{1}$$

Enak postopek izvedemo še za koraka $2h$ in $-2h$:

$$f(x-2h)+f(x+2h)=2f(x)+4f''h^2+f^{\mathrm{iv}}\,\frac{16h^4}{12}+O(h^6) \tag{2}$$

Znebiti se želimo člena s 4. odvodom v zgornjih enačbah. Enačbo 1 pomnožimo z (-16) in jo prištejmo enačbi 2:

$$f(x-2h)-16f(x-h)+30f(x)-16f(x+h)+f(x+2h)=-12f''h^2+O(h^6)$$

Izrazimo drugi odvod, $f''(x)$ (množimo zgornjo enačbo z $1/(-12h^2)$):

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{-12h^2}\Big(f(x-2h)-16f(x-h)+30f(x)-16f(x+h)+f(x+2h)\Big)+O(h^4) \\ &= \frac{1}{h^2}\Big(-\frac{1}{12}f(x-2h)+\frac{4}{3}f(x-h)-\frac{5}{2}f(x)+\frac{4}{3}f(x+h)-\frac{1}{12}f(x+2h)\Big)+O(h^4) \end{aligned}$$

Uteži centralne diferenčne sheme za 2. odvod in red natančnosti 4:

$$\frac{1}{h^2}\Big[-\frac{1}{12},\frac{4}{3},-\frac{5}{2},\frac{4}{3},-\frac{1}{12}\Big]$$

Točk: 15

3. vprašanje

Podana je diferencialna enačba $y''(t)-6\,y'(t)+3\,y(t)=e^{5\,t}\,\cos(5t)$, katero je treba rešiti za $0\le t\le 2$ in so podane dodatne omejitve $y(0)=1$ in $y'(2)=5$.

Odgovorite na vprašanja:

1. Katerega reda je diferencialna enačba in kateri problem reševanja diferencialnih enačb predstavlja? (5)
2. Katere metode za podobne probleme diferencialnih enačb smo spoznali? Na kratko jih opišite. (10)
3. Kako sta s centralno diferenčno shemo definirana prvi in drugi odvod (reda natančnosti 2)? (5)
4. Dano diferencialno enačbo s pomočjo centralne diferenčne sheme preoblikujte v linearno enačbo. (10)

(30 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Diferencialna enačba je reda 2, predstavlja robni problem.

Točk: 5

2. Numerične metode reševanja diferencialnih enačb z robnim problemom:

Strelska metoda : Z *rešitvijo problema nelinearnih enačb* določamo *vrednosti manjkajočih začetnih pogojev* (nepoznane začetne vrednost na robu A), s katerimi *zadostimo podanim robnim pogojem* (na robu B), ki jih pri reševanju začetnega problema še nismo upoštevali .
Ko smo ustrezne neznane začetne vrednosti določili, lahko *robni problem rešujemo kot začetni problem.*

Metoda končnih razlik : V diferencialni enačbi *odvode neznane funkcije $y(x)$ zapišemo z uporabo diferenčnih shem* po metodi končnih razlik.
Območje reševanja problema $x \in [A, B]$ *diskretiziramo* (razdelimo na ekvidistantne podintervale).
Zapišemo *sistem linearnih enačb*: v notranjih točkah velja diferencialna enačba, z odvodi, zapisanimi z uporabo diferenčnih shem, na robovih pa veljajo robni pogoji.
Rešitev - vrednosti $y(x)$ določimo z *rešitvijo sistema linearnih enačb*.

Točk: 10

3. Definicija prvega odvoda s centralno diferenčno shemo (red natančnosti 2):

$$y'(x) = \frac{1}{h}\big(- 0.5y(x-h) + 0.5y(x+h)\big)$$

Definicija drugega odvoda s centralno diferenčno shemo (red natančnosti 2):

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\big(y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)\big)$$

Točk: 5

4. Pretvorba diferencialne enačbe v linearno enačbo s pomočjo centralne diferenčne sheme:

$$y''(t) - 6\,y'(t) + 3\,y(t) = e^{5\,t}\,\cos(5t)$$

Prvi in drugi odvod y, zapisana s centralno diferenčno shemo:

$$y'_i = -\frac{1}{2h}y_{i-1} + \frac{1}{2h}y_{i+1}$$
$$y''_i = \frac{1}{h^2}y_{i-1} - \frac{2}{h^2}y_i + \frac{1}{h^2}y_{i+1}$$

Izraza vstavimo v diferencialno enačbo:

$$\frac{1}{h^2}y_{i-1} - \frac{2}{h^2}y_i + \frac{1}{h^2}y_{i+1} - 6\Big(- \frac{1}{2h}y_{i-1} + \frac{1}{2h}y_{i+1}\Big) + 3y_i = e^{5\,t}\,\cos(5t)$$

Poenostavimo:

$$y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{3}{h}\right) + y_i\left(- \frac{2}{h^2} + 3\right) + y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{3}{h}\right) = e^{5\,t}\,\cos(5t)$$

Lahko še pomnožimo s h^2:

$$y_{i-1}\left(1 + 3h\right) + y_i\left(3h^2 - 2\right) + y_{i+1}\left(1 - 3h\right) = e^{5\,t}\,\cos(5t)\,h^2$$

Točk: 10

6 Datum: 9.2.2021

1. vprašanje

Tabelo podatkov x_i, y_i želimo aproksimirati s funkcijo $f(x) = a\,x^{-5} + b$. Za podano funkcijo pokažite, kako to izvedemo s pomočjo metode najmanjše kvadratične napake? Nastavite sistem enačb za določitev parametrov a in b! *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Aproksimiramo s funkcijo $f(x) = a\,x^{-5} + b$. Kvadratična napaka aproksimacije je defiirana kot vsota kvadratov razlik med točkami za aproksimacijo (x_i, y_i) in rezultatom aproksimacije $y = f(x_i)$:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\,x_i^{-5} + b))^2$$

Točk: 5

Iščemo vrednosti parametrov a, b, pri katerih je kvadratična napaka S minimalna. S odvajamo po parametrih a, b, minimum najdemo, ko sta oba odvoda enaka 0:

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,a} = 2\sum_{i=0}^{n-1} (y_i - a\,x_i^{-5} - b)\,(-x^{-5}) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,b} = 2\sum_{i=0}^{n-1} (y_i - a\,x_i^{-5} - b)\,(-1) = 0$$

Točk: 10

Enačbi lahko na obeh straneh enačaja delimo z 2 in preoblikujemo (a in b sta konstanti):

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,a} = a\sum_{i=0}^{n-1} x_i^{-10} + b\sum_{i=0}^{n-1} x_i^{-5} - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{-5}\,y_i = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,b} = a\sum_{i=0}^{n-1} x_i^{-5} + b\sum_{i=0}^{n-1} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0$$

Točk: 10

Zapišemo sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^{-10} & \sum x_i^{-5} \\ \sum x_i^{-5} & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum x_i^{-5}\,y_i \\ \sum y_i \end{Bmatrix}$$

Točk: 5

2. vprašanje

Diferencialna enačba $y'' = p(x)\,y' + q(x)\,y + r(x)$ ima dodatni enačbi $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ in zato predstavlja robni problem.

1. Kako sta s centralno diferenčno shemo definirana prvi in drugi odvod (reda natančnosti 2)? (5)
2. Dano diferencialno enačbo s pomočjo centralne diferenčne sheme preoblikujte v linearno enačbo. (10)
3. Definirajte sistem enačb za 5 točk (y_0,y_1,y_2, y_3, y_4), kjer velja $x_0 = a$ in $x_4 = b$. (10)
4. Ali lahko Richardsonovo ekspraPolacijo v tem primeru uporabimo za izboljšanje rezultata? Če da, kako? (10)

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Prvi in drugi odvod y, zapisana s centralno diferenčno shemo:

$$y_i' = -\frac{1}{2h}y_{i-1} + \frac{1}{2h}y_{i+1}$$
$$y_i'' = \frac{1}{h^2}y_{i-1} - \frac{2}{h^2}y_i + \frac{1}{h^2}y_{i+1}$$

Točk: 5

2. Izraza za prvi in drugi odvod vstavimo v diferencialno enačbo (zdaj zapisano za diskretne vrednosti x_i, y_i):

$$\frac{1}{h^2}y_{i-1} - \frac{2}{h^2}y_i + \frac{1}{h^2}y_{i+1} - p(x_i)\Big(-\frac{1}{2h}y_{i-1} + \frac{1}{2h}y_{i+1}\Big) - q(x_i)\,y_i = r(x_i)$$

Poenostavimo:

$$y_{i-1}\Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\Big) + y_i\Big(-\frac{2}{h^2} - q(x_i)\Big) + y_{i+1}\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\Big) = r(x_i)$$

Lahko še pomnožimo z $2\,h^2$:

$$y_{i-1}\big(2 + h\,p(x_i)\big) + y_i\big(-4 - 2h^2\,q(x_i)\big) + y_{i+1}\big(2 - h\,p(x_i)\big) = 2h^2\,r(x_i)$$

Točk: 10

3. Sistem enačb za točke $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 + h\,p(x_1) & -4 - 2h^2\,q(x_1) & 2 - h\,p(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2 + h\,p(x_2) & -4 - 2h^2\,q(x_2) & 2 - h\,p(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 + h\,p(x_3) & -4 - 2h^2\,q(x_3) & 2 - h\,p(x_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 2h^2\,r(x_1) \\ 2h^2\,r(x_2) \\ 2h^2\,r(x_3) \\ \beta \end{Bmatrix}$$

Točk: 10

4. Ker je napaka numerične metode proporcionalna potenci koraka h pri diskretizaciji, lahko uporabimo Richardsonovo ekstrapolacijo za izboljšanje rezultata. Postopek je naslednji:

   - Uporabljena numerična metoda ima napako reda 2. Enačba izboljšanega približka z Richardsonovo ekstrapolacijo pri redu napake 2:

     $$\bar{f}(x_i) = \frac{4f(x_i, \frac{h}{2}) - f(x_i, h)}{3}$$

     kjer je $f(x_i, h)$ rezultat numerične metode (rešitev d. e.) pri diskretizaciji s korakom h.

   - Z rešitvijo zgoraj nastavljenega sistema enačb poiščemo vektor rešitev diferencialne enačbe pri koraku h, $\boldsymbol{y}(h)$.
   - Postopek ponovimo za diskretizacijo z dvakrat manjšim korakom $h/2$ (diskretizacija območja $x \in [a, b]$ z 9 točkami), dobimo rešitev $\boldsymbol{y}(\frac{h}{2})$.
   - Uporabimo enačbo za izboljšan približek z Richardsonovo ekstrapolacijo v diskretnih točkah pri koraku h (vsaka druga točka pri delitvi s $h/2$), in dobimo izboljšano rešitev:

     $$\bar{\boldsymbol{y}} = \frac{4\boldsymbol{y}(\frac{h}{2}) - \boldsymbol{y}(h)}{3}$$

Točk: 10

3. vprašanje
Predoločeni sistem enačb je definiran z matriko koeficientov $\boldsymbol{A}$, vektorjem neznank $\boldsymbol{x}$ in vektorjem konstant $\boldsymbol{b}$.

1. Podajte primer poljubnega predoločenega sistema. (5)
2. Pojasnite dimenzije matrike/vektorjev predoločenega sistema in povežite s številom neznank/enačb. (5)
3. Po korakih izpeljite izraz za izračun psevdo inverzne matrike $\boldsymbol{A}^+$ (25)

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Primer predoločenega sistema enačb:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 3x + 3y &= 7 \\ 4x + 5y &= 8 \end{aligned}$$

Točk: 5

2. Zgornji sistem enačb v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{2\times 1} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}_{3\times 1}$$

Matrika koeficientov ni kvadratna, je oblike 3×2, torej imamo 3 enačbe z dvema neznankama (vektorj neznank oblike 2×1).
(Povedano drugače: Matrika koeficientov je oblike $m \times n$, velja $m > n$, torej imamo več enačb kot neznank. Rang matrike koeficientov je enak številu neznank n, rang razširjene matrike koeficientov je enak $n + 1$.)

Točk: 5

3. Izpeljava izraza za izračun psevdoinverza:
Želimo rešitev sistema enačb, pri kateri bo vsota kvadratov preostankov (razlik med vektorjema $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{b}$) minimalna. Nastavek za vsoto kvadratov preostankov v vektorski obliki:

$$||\boldsymbol{r}||^2 = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})^T\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

Točk: 5

Nato izpeljemo naprej:

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{r}||^2 &= (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{b}^T)\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Točk: 5

Ker je $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ skalar, velja $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$, in lahko še poenostavimo:

$$||\boldsymbol{r}||^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} \tag{1}$$

Točk: 5

Vsota preostankov bo dosegla minumum, ko bo gradient $||\boldsymbol{r}||^2$ po $\boldsymbol{x}$ enak 0. Ker velja pravilo $\mathrm{d}\,(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x})/\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A})$, vrednost gradienta zapišemo:

$$\begin{aligned}\nabla_x\,||\boldsymbol{r}||^2 &= \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T) - 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) - 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}\\ &= 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

Točk: 5

Vrednost gradienta enačimo z $\mathbf{0}$:

$$2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$$

Ker velja $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$, lahko celotno enačbo transponiramo, in dobimo:

$$2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$

Ker želimo določiti vektor neznank $\boldsymbol{x}$ delimo dobljeno enačbo z 2 in preuredimo:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

Dobimo:

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T}_{\boldsymbol{A}^+}\,\boldsymbol{b}$$

Opazimo podobnost s splošno rešitvijo določenega sistema enačb, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$. Enačba psevdo inverzne matrike torej je:

$$\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$$

Točk: 5

7 Datum: 24.1.2022

1. vprašanje
Predstavite sekantno metodo za numerično reševanje enačb; prikažite postopek tudi na primeru funkcije $f(x) = x^2 - 3\,x - 3$ in izvedite dva koraka iskanja ničle (začnite z $x_0 = -3$, $x_1 = 0$, drugi korak lahko samo nastavite). *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Skica

  Točk: 5

- Sekantna metoda je metoda odprtega tipa - ni potrebno, da ničla leži med začetnima približkoma.
- Na začetku potrebujemo dva začetna približka; x_0 in x_1.
- Ocena napake metode je absolutna razlika med dvema zaporednima približkoma:

$$\varepsilon = |x_{n-1} - x_n|$$

  Sekantna metoda ima superlinearen red konvergence ($\varepsilon_{n+1} = C\, e_n^{1.618}$).

- Sekantna metoda izračuna linearno interpolacijo funkcijskih vrednosti pri začetnih prbližkih. Ničla interpolacijske premice je nov približek.

  Točk: 5

- Nov približek izračunamo:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

- Ko izračunamo nov približek naredimo zamenjavo:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Točk: 5

Prikaz postopka:
1. korak

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 3 = 15 \\ f(x_1) &= 0^2 - 3 \cdot 0 - 3 = -3 \end{aligned}$$

Točk: 5

Izračunamo nov približek:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \\ x_2 &= 0 - (-3) \cdot \frac{0 - (-3)}{-3 - 15} \\ x_2 &= 3 \cdot \frac{3}{-18} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Naredimo zamenjavo približkov:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 = 0 \\ x_1 &= x_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Točk: 5

2. korak

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0^2 - 3 \cdot 0 - 3 = 15 \\ f(x_1) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Točk: 5

Izračunamo nov približek:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \frac{-\frac{1}{2} - 0}{-\frac{5}{4} - (-3)} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{4} + \frac{12}{4}} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{-4}{14} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{5}{14} \\ x_2 &= \frac{-7 - 5}{14} \\ x_2 &= -\frac{12}{14} \end{aligned}$$

Naredimo zamenjavo približkov:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_1 &= x_2 = -\frac{12}{14} \end{aligned}$$

Točk: 5

2. vprašanje

Pojasnite Richardsonovo ekstrapolacijo na primeru splošne numerične metode, ki ima red natančnosti n, rezultat pa lahko izračunamo s korakom h oz $2h$. *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Predpostavimo, da je točen rezultat $f(x)$ v točki x_i je podan kot:

$$f(x_i) = f_0(x_i) + e,$$

kjer je $f_0(x_i)$ numerično izračunan rezultat in e je ocena napake (red napake n).

Točk: 5

Oceno napake e lahko zapišemo kot:

$$e = K\, h^n$$

kjer je n red točnosti napake, h korak uporabljen pri izračunu, za K pa bomo predpostavili, da je konstanta.

Točk: 5

Za korak h lahko zapišemo:

$$f(x_i) = f_0(x_i, h) + K\, h^2$$

Točk: 5

Če predpostavimo, da je K konstanta, potem za korak $2h$ velja:

$$f(x_i) = f_0(x_i, 2h) + K\,(2h)^n,$$

Točk: 5

Iz obeh enačb izločimo konstanto K in določimo izboljšan približek:

$$\overline{f}(x_i) = \frac{2^n \cdot f_0(x_i, h) - f_0(x_i, 2h)}{2^n - 1}$$

Točk: 10

3. vprašanje

Merite dinamiko ljubezenskega odnosa med fantom in punco; predpostavimo, da je ljubezen mogoče v vsakem trenutku meriti: pozitivne vrednosti pomenijo naklonjenost, negativne odbijanje; večja, ko je vrednost, bolj je izraženo čustvo. Ljubezenski status fanta (v času) je označen z $x(t)$, punce pa z $y(t)$. Fant ima do punce takšen odnos, da bolj, ko ga ima punca rada, bolj ima on rad njo ($x'(t) = 0{,}5\, y(t)$). Punca ima do fanta takšen odnos, da bolj, ko jo zavrača, raje ga ima ($y'(t) = -1\, x(t)$). Ko se prvič srečata, je status fanta do punce definiran z vrednostjo -1 (odbijanje), status punce do fanta pa z vrednostjo 1 (sprejemanje).

1. Zapišite obravnavani problem v obliki diferencialne enačbe. Opišite tip DE in za kakšen problem gre. (10)
2. Uporabite Eulerjevo metodo in izračunajte stanje po preteku enega časovnega koraka $\Delta t = 2$ s. (5)
3. Diferencialno enačbo zapišite v obliki, primerni za reševanje z metodo končnih razlik, za i-to časovno točko. Uporabite shemo 1. reda naprej. (10)
4. Uporabite zapis iz predhodne točke in nastavite sistem enačb za dve časovni točki, $t = [0, 2]$ s. Določite potrebno začetno stanje fanta in punce ($x_0 = x(0)$ in $y_0 = y(0)$), če je končni cilj, da sta si ob času 2s enako pozitivno naklonjena ($x_1 = x(2) = 1$ in $y_1 = y(2) = 1$). (10)

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Zapis problema v obliki diferencialnih enačb:
   Vektor stanj:

   $$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$$

   Funkcija desnih strani (prvih odvodov):

   $$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}' = \begin{Bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5\, y(t) \\ -x(t) \end{Bmatrix}$$

Točk: 5

Začetna pogoja:

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{Bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Točk: 2.5

Gre za sistem dveh navadnih, linearnih diferencialnih enačb 1. reda. Točk: 2.5

2. Eulerjeva metoda, $\Delta t = 2$ s:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{y}_i' \cdot \Delta t$$

Za naš primer:

$$\boldsymbol{y}(2) = \boldsymbol{y}(0) + \boldsymbol{y}'(0) \cdot 2$$

Točk: 2.5

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(2) = \begin{Bmatrix} x(2) \\ y(2) \end{Bmatrix} \quad &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5 \cdot 1 \\ -(-1) \end{Bmatrix} \cdot 2 \\ &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Točk: 2.5

3. Zapis problema za reševanje z metodo končnih razlik:
Diferenčna shema naprej 1. reda:

$$y_i' = \frac{1}{\Delta t}(y_{i+1} - y_i)$$

Točk: 2.5

Imamo sistem dveh diferencialnih enačb 1. reda, zato potrebujemo dva robna pogoja:

$$\begin{aligned} y_m &= \alpha \\ x_n &= \beta \end{aligned}$$

Točk: 2.5

V preostalih točkah zapišemo funkcijo desnih strani z metodo končnih razlik (dif. shemo naprej):

$$\begin{aligned} x_i' = 0.5 y_i \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta t}(x_{i+1} - x_i) - 0.5\, y_i = 0 \\ y_i' = -x_i \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta t}(y_{i+1} - y_i) + x_i = 0 \end{aligned}$$

Točk: 5

4. Zapis in rešitev problema z metodo končnih razlik za $t = [0, 2]$ s, $x(2) = y(2) = 1$:

4 neznanke: $x_0 = x(0), x_1 = x(2), y_0 = y(0), y_1 = y(2)$
4 enačbe:

$$\begin{aligned} x_0' &= \frac{1}{2}(-x_0 + x_1) - 0.5\, y_0 = 0 \\ y_0' &= x_0 + \frac{1}{2}(-y_0 + y_1) = 0 \\ x(2) &= x_1 = 1 \\ y(2) &= y_1 = 1 \end{aligned}$$

Točk: 5

Matrična oblika:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Točk: 2.5

Rešitev:

$$\begin{array}{l} \\ (E_1 - 2E_0) \\ (E_2 - E_1) \\ \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

torej $x(0) = 0$ in $y(0) = 1$.

Točk: 2.5

8 Datum: 7.2.2022

1. vprašanje
Pojasnite zaokrožitveno napako in napako metode. Kakšna je napaka pri številu z dvojno natančnostjo (t.i. 'float64')? Bolj podrobno pojasnite napako metode za numerični izračun prvega odvoda (na primeru metod 1. in 2. reda). *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- *Zaokrožitvena napaka* je posledica načina zapisa števil v računalniškem pomnilniku. Ker so ta zapisana s končno natančnostjo (z določenim številom bitov, odvisno od tipa števila), pri vsakem zapisu števila v pomnilnik naredimo določeno zaokrožitev ter posledično napako. Točk: 5

- *Napako metode* dobimo, kadar matematični problem namesto s točnim, analitičnim postopkom, rešujemo s približnim, numeričnim algoritmom, pri katerem v prid numerične izvedljivosti/hitrosti zavestno zanemarimo določeno komponento točne rešitve problema. Točk: 5

- Števila z dvojno natančnostjo (`'float64'`) so v pomnilniku zapisana z 64 biti. Zapis je sestavljen iz: 53 bitov za mantiso (od tega 1 bit za predznak, 52 signifikantnih bitov), 11 bitov za eksponent. Največja relativna napaka pri zapisu takega števila je $2^{-52} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$. Točk: 5

- Napaka metode pri izračunu 1. odvoda:

  Metoda 1. reda (na primeru diferenčne sheme 1. reda naprej): Taylorjevo vrsto razvijemo do člena reda 1, zanemarimo člene višjega reda $\mathcal{O}(h^2)$:

  $$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

  Iz enačbe izrazimo $f'(x)$:

  $$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h^1)$$

  Napaka je zaradi deljenja s h postala 1. reda.

  (Celotna izpeljava ni potrebna, nujen pa je prikaz korakov, v katerih se pojavi oz. spremeni red napake $\mathcal{O}(h^n)$.) Točk: 7.5

  Metoda 2. reda (na primeru centralne diferenčne sheme 2. reda): Za koraka h in $-h$ Taylorjevo vrsto razvijemo do člena reda 2, zanemarimo člene, proporcionalne h^3 in višje:

  $$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot \frac{f''(x)}{2} + \mathcal{O}(h^3) \\ f(x-h) &= f(x) - h \cdot f'(x) + h^2 \cdot \frac{f''(x)}{2} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

  Enačbi med sabo odštejemo:

  $$f(x+h) - f(x-h) = 2h \cdot f'(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

  Iz dobljenega izrazimo $f'(x)$:

  $$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Zanemarili smo člene, proporcionalne h^2 (in višje), zato je napaka 2. reda.

(Celotna izpeljava ni potrebna, nujen pa je prikaz korakov, v katerih se pojavi oz. spremeni red napake $\mathcal{O}(h^n)$.) Točk: 7.5

2. vprašanje

Pojasnite kaj so kubični zlepki. Zakaj jih uporabljamo, kako so definirani? Kako dosežemo, da so naravni kubični zlepki enolično določeni? Pri pojasnilih si pomagajte s skico. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Skica Točk: 10

- Je interpolacijska metoda, ki jo uporabimo za določitev interpolacijske funkcije višjega reda, kot pa bi sledila iz neposredne uporabe dane tabele vrednosti. Npr.: med dvema točkama imamo enolično definirano linearno funkcijo, želimo pa kubično. Točk: 5
- Za interpolacijo $n+1$ točk namesto polinoma n-tega reda, uporabimo n polinomov tretjega reda.
- Polinom med točko x_i in x_{i+1} je:

$$f_{i,i+1}(x) = a_{i,3}\,x^2 + a_{i,2}\,x^2 + a_{i,1}\,x + a_{i,0}$$

Točk: 5

- Vsak polinom definirajo 4 konstante, zlepek ima torej $4\,n$ konstant in potrebujemo $4\,n$ enačb:
  - n enačb iz tabele vrednosti za notranje točke,
  - eno enačbo dobimo iz tabele vrednosti za zadnjo točko,
  - $3(n-1)$ enačb dobimo iz pogojev zveznosti vrednosti ter zveznosti prvih in drugih odvodov,
  - manjkajoči dve pa enačbi razlikujeta različne tipe zlepkov.

Točk: 10

- Naravni kubični temeljijo na ideji Eulerjevega nosilca za katerega velja diferencialna enačba:

$$E\,I\,\frac{\mathrm{d}^4\,y}{\mathrm{d}\,x^4} = q(x)$$

Če je $q(x) = 0$ lahko nosilec v vsaki točki popišemo s polinomom tretjega reda.

- Dodatni dve enačbi za naravne kubične zlepke dobimo tako, da pred+postavimo členkasto vpetje nosilca na začetku in koncu; moment je torej enak 0:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= 0 \\ f''(x_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Točk: 10

3. vprašanje

Pojasnite trapezno pravilo integriranja. Kaj je sestavljeno trapezno pravilo? Definirajte lokalno (osnovno pravilo) in globalno (sestavljeno pravilo) napako trapeznega pravila. Kakšnega reda je napaka sestavljenega trapeznega pravila in kaj to pomeni za natančnost rezultata? *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Skica (*2.5 za osnovno in 2.5 za sestavljeno trapezno pravilo.*) Točk: 5

- Trapezno pravilo je metoda za numerično integriranje.
- Funkcijo $f(x)$ na intervalu $[x_0, x_1]$ interpoliramo z linearno funkcijo in izračunamo površino pod interpolacijsko krivuljo, ki je približek določenega integrala $f(x)$ na intervalu $[x_0, x_1]$.

$$I_{\text{trapz}} = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) = \frac{h}{2}\,(f(x_0) - f(x_1))$$

Točk: 5

Uteži A_i so torej:

$$A_0 = A_1 = \frac{h}{2}$$

Točk: 2.5

- Pri sestavljenem trapeznem pravilu razdelimo interval $[x_0, x_1]$ na večje število podintervalov in na vsakem podintervalu ponovimo osnovno trapezno pravilo. Seštevek vseh površin je približek integrala $f(x)$ na intervalu $[x_0, x_1]$.
- Približek določenega integrala izračunamo:

$$I_{\text{trapz sest}} = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) = (\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2})\, h$$

Točk: 5

Ker so notranje točke podvojene, so uteži:

$$\begin{aligned} A_0 = A_n &= \frac{h}{2} \\ A_i &= h \end{aligned}$$

Točk: 5

Širina podintervala h je definirana:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

Točk: 2.5

- Lokalna napaka (napaka osnovnega trapeznega pravila) je definirana:

$$E_{\text{lokalna}} = -\frac{h^3}{12}\, f''(\xi)$$

Globalna napaka (napaka sestavljenega trapeznega pravila) je definirana:

$$E_{\text{globalna}} = -\frac{h^2\,(b-a)}{12}\, f''(\eta)$$

Točk: 5

- Napaka sestavljenega trapeznega pravila je drugega reda, kar pomeni, da je napaka proporcionalna h^2. Ko manjšamo korak h, se natančnost rezultata veča kvadratično. Točk: 5

9 Datum: 23.1.2023

1. vprašanje
Pojasnite pojem pogojenost sistemov enačb ter kdaj je sistem dobro ali slabo pogojen? Kako je definirano število pogojenosti? Kaj nam število pogojenosti pove? Definirajte tudi Evklidsko normo in normo vsote vrstic. *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Pri slabi pogojenosti sistema linearnih enačb majhna sprememba v linearnem sistemu (npr. matrike koeficientov) povzroči veliko spremembo rezultatov. Sistem je dobro pogojen, kadar majhna sprememba v linearnem sistemu povzroči majhno spremembo rezultatov.
  In/ali: običajno so pri dobro pogojenih sistemih enačb absolutne vrednosti diagonalnih elementov matrike koeficientov velike v primerjavi z absolutnimi vrednostmi izven diagonalnih elementov.
  Točk: 10

- Pogojenost sistema linearnih enačb $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je formalno določena s **številom pogojenosti**:

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{A}^{-1}||,$$

  kjer je z $||\mathbf{A}||$ označena norma matrike.
  Kadar je vrednost števila pogojenosti visoka ($\mathrm{cond}(\mathbf{A}) >> 1$) je to znak, da je matrika slabo pogojena.
  Točk: 10

- Evklidska norma matrike **A** je določena z:

$$||\mathbf{A}||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

  Točk: 5

- Norma vsote vrstic matrike **A** je določena z:

$$||\mathbf{A}||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

  Točk: 5

2. vprašanje
Kako je Simpsonovo integracijsko pravilo povezano z Lagrangevim interpolacijskih polinom? Izpeljite izračun uteži pri Simpsonovi integraciji v splošnem. Na podlagi Lagrangevih polinomov za linearno interpolacijo izračunajte uteži trapezne integracijske metode. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Pri numeričnem integriranju računamo približek vrednosti določenega integrala funkcije $f(x)$ v integracijskih mejah $[a, b]$ z uteženo vsoto:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m} A_i\, f(x_i),$$

kjer so A_i uteži, x_i pa vozlišča na intervalu $[a, b]$.
Vrednosti uteži A_i so pri Simpsonovem pravilu določene z integriranjem Lagrangevega interpolacijskega polinoma podatkov iz tabele vrednosti $(x_i, f(x_i))$.

Točk: 5

- Izpeljava izračuna uteži pri Simpsonovi integraciji:
Podintegralsko funkcijo $f(x)$ tabeliramo in interpoliramo z Lagrangevim interpolacijskim polinomom $P_n(x)$ stopnje n:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x),$$

kjer so $y_i = f(x_i)$ tabelirane funkcijske vrednosti v vozliščih x_i in je Lagrangev polinom l_i definiran kot:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Točk: 5

Namesto funkcije $f(x)$ sedaj integriramo interpolacijski polinom $P_n(x)$, pri integracijskih mejah $a = x_0$, $b = x_n$:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\, dx.$$

Točk: 5

Vrstni red vsote in integriranja lahko zamenjamo, ker gre za linearni operaciji:

$$I = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{x_0}^{x_n} l_i(x)\, dx,$$

nato lahko vrednosti uteži A_i dobimo z integracijo Lagrangevih polinomv:

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} l_i(x)\, dx$$

Točk: 5

- Izračun uteži trapezne integracijske metode:
Pri trapeznem pravilu tabeliramo funkcijo $f(x)$ z dvema vozliščema:
$x_0 = a$, $x_1 = b$, ter korak $h = x_1 - x_0$.

Točk: 5

Dvema pripravljenima vozliščema ustrezata dva Lagrangeva polinoma:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Točk: 5

Vrednosti uteži A_0, A_1 dobimo z integriranjem vsakega od Lagrangevih polinomov čez celotni interval:

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_1} l_0(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_1^2}{2x_0 - 2x_1} - \frac{x_1^2}{x_0 - x_1} - \frac{x_0^2}{2x_0 - 2x_1} + \frac{x_0\,x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{(x_0 - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{2}$$
$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} l_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2}{2x_0 - 2x_1} - \frac{x_0^2}{x_0 - x_1} - \frac{x_1^2}{2x_0 - 2x_1} + \frac{x_0\,x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{(x_0 - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{2},$$

oziroma:

$$A_0 = h/2$$
$$A_1 = h/2.$$

Točk: 5

3. vprašanje

Diferencialno enačbo $y''''(t) + c\,y''(t) + b\,y(t) = 0$. Preoblikujte v sistem enačb prvega reda.
Definirajte teoretično napako metode Runge-Kutta četrtega reda. Kako ocenimo napako pri konkretnem izračunu rešitve diferencialne enačbe? *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Preoblikovanje diferencialne enačbe v sistem d. e. prvega reda:
  Podana je d. e. četrtega reda, ki jo lahko zapišemo:

  $$y''''(t) = -c\,y''(t) - b\,y(t) = f(t, y, y'')$$

  Za preoblikovanje le-te v sistem štirih d. e. prvega reda najprej uvedemo štiri nove spremenljivke namesto odvodov funkcije $y(t)$:

  $$y_0 = y(t)$$
  $$y_1 = y'(t)$$
  $$y_2 = y''(t)$$
  $$y_3 = y'''(t).$$

  Točk: 10

  Nove neznanke nato odvajamo po neodvisni spremenljivki t in dobimo sistem štirih d. e. prvega reda:

  $$y_0'(t) = y_1$$
  $$y_1'(t) = y_2$$
  $$y_2'(t) = y_3$$
  $$y_3'(t) = y''''(t) = -c\,y_2 - b\,y_0,$$

  kjer je zadnja d. e. ($y_3'(t)$) podana z začetno diferencialno enačbo. V dobljenem sistemu enačb prvega reda nastopajo le vpeljane nove neznanke:

  $$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, y_0, y_1, y_2, y_3).$$

  Točk: 10

- Napaka metode Runge-Kutta četrtega reda (teoretično):
  Lokalna napaka metode Runge-Kutta četrtek reda je reda 5 (razvoj v vrsto do člena $\mathcal{O}(h^5)$), a to napako naredimo n-krat, zato je globalna napaka četrtega reda $\mathcal{O}(h^4)$.

  Točk: 5

- Ocena napake pri konkretnem izračunu rešitve diferencialne enačbe: Pri numeričnem reševanju d. e. funkcijo $y(t)$ tabeliramo pri n vozliščih s korakom h. Točna rešitev pri koraku t_n je:

  $$y(t_n) = y_{n,h} + E_h.$$

  $y_{n,h}$ je numerični približek rešitve, E_h pa napaka metode pri koraku h, ki je četrtega reda:

  $$E_h = k\,h^4.$$

  Za dvojni korak, $2h$ dobimo podobno:

  $$\begin{aligned} y(t_n) &= y_{n,2h} + E_{2h}, \\ E_{2h} &= k\,(2\,h)^4 = 16\,k\,h^4. \end{aligned}$$

  Točk: 5

  Predpostavimo, da je konstanta k enaka pri h in $2h$ in zapišemo:

  $$\begin{aligned} y_{n,h} + k\,h^4 &= y_{n,2h} + 16\,k\,h^4, \quad \text{torej} \\ 15\,k\,h^4 &= y_{n,h} - y_{n,2h}. \end{aligned}$$

  Sledi ocena napake natančnejše rešitve E_h:

  $$E_h = k\,h^4 = \frac{y_{n,h} - y_{n,2h}}{15}.$$

  Točk: 5

10 Datum: 6.2.2023

1. vprašanje
Pojasnite pojem rang matrike in kako ga izračunamo. Kako nam rang matrike pomaga pri reševanju sistemov enačb? Rang matrike izračunajte za primer razširjene matrike $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ (katera predstavlja sistem enačb); pri tem se navežite na predhodna pojasnila.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(30 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Rang matrike predstavlja število linearno neodvisnih vrstic matrike. Če gre za razširjeno matriko koeficientov sistema linearnih enačb, nam rang matrike določa število linearno neodvisnih enačb, ki jih zapisana matrika predstavlja.

  Točk: 5

- Rang matrike izračunamo tako, da matriko preoblikujemo v vrstično kanonično obliko (ali v Gaussovo elimnirano obliko). Rang je število neničelnih vrstic v tako preoblikovani matriki.

  Točk: 5

- Na podlagi ranga matrike lahko ugotavljamo rešljivost ter enoličnost rešitve sistema enačb.
  Če je rang razširjene matrike $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ različen od range matrike koeficientov $\mathbf{A}$, je sistem enačb nerešljiv.

  Točk: 5

  Če sta ranga $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ in $\mathbf{A}$ enaka ter nižja od števila neznank sistema, je rešitev sistema neskončno.
  Če sta ranga $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ in $\mathbf{A}$ enaka ter enaka tudi številu neznank, je sistem enolično rešljiv. Točk: 5

- Določitev ranga matrike $\mathbf{A}$:
  Matriko Gaussovo eliminiramo:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - 3\,\boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{A}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 + 3\,\boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

  Točk: 5

- Rang matrike $\mathbf{A}$ je 3, saj preoblikovana matrika nima nobene ničelne vrstice. Taka razširjena matrika predstavlja enolično rešljiv sistema linearnih enačb.

Točk: 5

2. vprašanje

Za prvi numerični odvod izpeljite diferenčno shemo naprej: a) reda natančnosti 1 in b) reda natančnosti 2. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

(a) Diferenčna shema naprej za prvi odvod reda natančnosti 1:
Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke x s korakom h, do čelna 2. reda:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + O(h^2)$$

Točk: 5

Izrazimo prvi odvod $f'(x)$ in dobimo numerično shemo z redom napake 1:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^1)$$

Točk: 5

(b) Diferenčna shema naprej za prvi odvod reda natančnosti 2:
Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke x s korakom h, do čelna 3. reda:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''\,\frac{h^2}{2} + O(h^3) \tag{1}$$

Točk: 5

Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke x še s korakom $2h$, do člena 3. reda:

$$f(x+2h) = f(x) + 2\,f'(x)\,h + f''\,\frac{4h^2}{2} + O(h^3) \tag{2}$$

Točk: 5

Da se znebimo 2. odvodov od enačbe (2) odštejemo enačbo (1), pomnoženo s 4:

$$f(x+2h) - 4\,f(x+h) = -3\,f(x) - 2\,f'(x)\,h + O(h^3) \tag{3}$$

Točk: 5

Iz enačbe (3) izrazimo $f'(x)$.

$$2\,f'(x)\,h = -3\,f(x) + 4\,f(x+h) - f(x+2h)$$
$$f'(x) = \frac{-3/2\,f(x) + 2\,f(x+h) - 1/2\,f(x+2h)}{h} + O(h^2)$$

Točk: 5

Ker smo napako $O(h^3)$ pri tem delili s h, dobimo shemo z napako 2. reda.

Točk: 5

3. vprašanje

Na primeru diferencialne enačbe $y'(t) + t^3 - 1 = 0$ prikažite uporabo Eulerjeve eksplicitne metode. Uporabite začetni pogoj $y(0) = 0$ korak $h = 1$ in izvedite dva koraka. Ocenite kakšna je napaka izračunanega rezultata. Kakšen bi bil prvi korak, če bi uporabili Eulerjevo implicitno shemo? *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

- Eksplicitna Eulerjeva metoda:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t, y(t))\,h.$$

Na podlagi trenutne vrednosti funkcije $y(t)$ in vrednosti njenega odvoda $y'(t, y(t))$ izračunamo naslednjo vrednost funkcije $y(t+h)$ pri koraku h.
(Lokalna napaka metode je reda 2, globalna pa reda 1 (napako naredimo n krat: $n\,\mathcal{O}(h^2) = \frac{t_n - t_0}{h}\,\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h)$)).

Točk: 5

- Diferencialna enačba, začetni pogoj in delitev neodvisne spremenljivke:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -t^3 + 1 \\ y(0) &= 0 \\ h &= 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t} = \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Eksplicitna Eulerjeva metoda, 1. korak:

$$\begin{aligned} y(0+1) &= y(0) + y'(0)\,h \\ y(1) &= 0 + (-0^3 + 1) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Točk: 5

Eksplicitna Eulerjeva metoda, 2. korak:

$$\begin{aligned} y(1+1) &= y(1) + y'(1)\,h \\ y(2) &= 1 + (-1^3 + 1) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Točk: 5

- Za točen rezultat pri koraku h in $2h$ velja:

$$\begin{aligned} y_{n,h} + E_h &= y_{n,2h} + E_{2h}, \\ y_{n,h} + \mathcal{O}(h) &= y_{n,2h} + \mathcal{O}(2h), \\ y_{n,h} + k\,h &= y_{n,2h} + k\,2h \end{aligned}$$

kjer je E_h napaka, ki jo iščemo, $y_{n,h}$ numerični približek rešitve D. E. pri koraku h, $y_{n,2h}$ pa numerični približek iste rešitve pri koraku $2h$, k je konstanta za katero predpostavimo, da ni odvisna od koraka h.
Iz zgornje enačbe izpeljemo:

$$E_h = y_{n,h} - y_{n,2h} \tag{1}$$

Točk: 5

Z eksplicitno Eulerjevo metodo moramo tako izračunati še $y(2)_{2h}$ (rešitev D. E. v enaki točki pri dvojnem koraku, $2h = 2$):

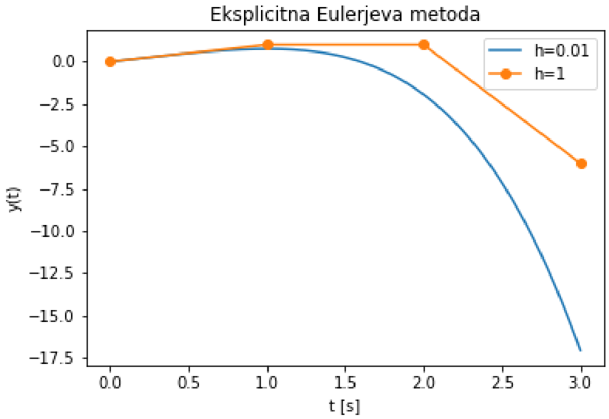
$$\begin{aligned} y(0+2) &= y(0) + y'(0)\,2h \\ y(2) &= 0 + (-0^3 + 1) \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Točk: 2.5

Ocena napake izračunane rešitve pri natančnejšem koraku $h = 1$:

$$E_h = y(2)_h - y(2)_{2h} = 1 - 2 = -1.$$

Točk: 2.5



Slika 1: Rešitev diferencialne enačbe z eksplicitno Eulerjevo metodo pri različni vrednosti koraka h.

- Implicitna Eulerjeva metoda:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t+h, y(t+h))\, h + \mathcal{O}(h^2).$$

Na podlagi trenutne vrednosti funkcije $y(t)$ in vrednosti **naslednje vrednosti njenega odvoda** $y'(t+h, y(t+h))$ izračunamo naslednjo vrednost funkcije $y(t+h)$ pri koraku h.

Točk: 5

V konkretnem primeru $y'(t,y)$ ni odvisna od vrednosti y, zato se 1. korak implicitne Eulerjeve metode poenostavi ($h = 1$, $y(0) = 0$):

$$y(0+1) = y(0) + y'(1)\, h$$
$$y(1) = 0 + (-1^3 + 1) \cdot 1 = 0$$

Točk: 5

(Opomba: zaradi velikega koraka h in nizkega reda natančnosti Eulerjeve metode je napaka dobljenih rešitev relativno visoka. Pri nižjem koraku lahko tudi z Eulerjevo metodo dobimo boljšo numerično rešitev diferencialne enačbe, kar prikazuje slika 1.)