Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 25 ottobre 2018

Quesito 1. Si consideri la funzione $f(x) = |x| - |x+3|$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Determinare $f^{-1}(3)$.

$\mathrm{dom} f \ = \ \mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \geq 0 \\ -3x - 3, & -3 \leq x < 0 \\ 3, & x < -3 \end{cases}$$

da cui $\mathrm{im} f \ = \ [-3, 3]$ Risposta 1

$f^{-1}(3) = (-\infty, -3]$ Risposta 2

Quesito 2. Si consideri la funzione $f(x) = \log(x+4)$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Per quali valori si annulla la funzione $f(-x)$?

Esprimere il risultato come frazione di interi, ed eventualmente multipli di e.

$\mathrm{dom} f \ = \ (-4, \ +\infty)$ $\quad$ $\mathrm{im} f \ = \ \mathbb{R}$ Risposta 1

$x \ = \ 3$ Risposta 2

Quesito 3. Le v.a. discrete X e Y sono indipendenti. La loro distribuzione di probabilità è data da

$$\Pr(X = 5) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(Y = 1) = \frac{2}{5}$$
$$\Pr(X = 4) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(Y = 0) = \frac{3}{5}$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di $X \cdot Y$
2. Calcolare $\mathrm{E}(X \cdot Y)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

$\Pr(X \cdot Y = 5) \ = \ \frac{1}{5}$ $\quad$ $\Pr(X \cdot Y = 4) \ = \ \frac{1}{5}$ $\quad$ $\Pr(X \cdot Y = 0) \ = \ \frac{3}{5}$ Risposta 1

$\mathrm{E}(X \cdot Y) \ = \ 5 \cdot \Pr(X \cdot Y = 5) + 4 \cdot \Pr(X \cdot Y = 4) = \frac{9}{5}$ Risposta 2

Quesito 4. Una fabbrica produce confezioni di biglie rosse e blu. Una confezione corretta contiene $4 \cdot 10^6$ biglie con circa il 60% di biglie rosse.

Vogliamo essere ragionevolmente sicuri che la percentuale non scenda mai sotto 50%. Stabiliamo quindi due livelli di controllo. Al primo controllo preleviamo 100 biglie a caso da ogni confezione e se ≤ 59 biglie sono rosse la confezione viene sottoposta a ulteriori controlli. Altrimenti viena dichiarata soddisfacente.

1. Si calcoli la probabilità che una confezione con 60% di biglie rosse venga sottoposta al secondo controllo.
2. Si calcoli la probabilità che una confezione con 50% di biglie rosse venga dichiarata soddisfacente.

Il secondo controllo comporta l'estrazione di altre biglie, 1000 in totale. Se meno di $x\%$ è rosso la confezione viene scartata definitivamente, altrimenti viene dichiarata soddisfacente.

3. A quanto dovremmo fissare x per non scartare al secondo controllo più del 4% di confezioni con 60% di biglie rosse?

4. A quanto dovremmo fissare x per non dichiare soddisfacente al secondo controllo più del 5% di confezioni con 50% di bigie rosse?

Si trattino tutte le estrazioni come estrazioni con *reimbussolamento*.

`binom.cdf( 59, 100, 0.6 ) = 0.4567` Risposta 1

`1 - binom.cdf( 58, 100, 0.5 ) = 0.0284` Risposta 2

`binom.ppf( 0.04, 1000, 0.6 ) = 573` Risposta 3

`binom.ppf( 0.95, 1000, 0.5 ) = 526` Risposta 4

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k,n,p)` $= \Pr\left(X = \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.cdf(k)` $= \Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`bimom.ppf(`α`, n, p)` $= \mathtt{x}_\alpha$ dove $\mathtt{x}_\alpha$ è tale che $\Pr\left(X \leq \mathtt{x}_\alpha\right) = \alpha$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$