Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 28 novembre 2018

Quesito 1. Si consideri la funzione $f(x) = (4x+6)^3$.

1. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)dx$.

2. Determinare l'area (con segno) sottesa alla funzione f nell'intervallo $[0, 1]$.

Risposta

$$\int f(x)dx = \frac{(4x+6)^4}{16} + C.$$ Risposta 1

Il valore dell'area è -544. Risposta 2

Quesito 2. Un campione di pazienti assume un certo farmaco. Ad ognuno di questo viene misurata

1. Glicemia

2. Colesterolo totale

3. Emoglobina

...

...ecc. ecc. (100 parametri fisiologici in totale)

I valori vengono confrontati con quelli di un campione di controllo (o con quelli in letteratura).

Per ognuna di queste misure consideriamo un test di ipotesi:

$H_{0,i}$: il valore del parametro i è uguale a quello del campione di controllo

$H_{A,i}$: il valore del parametro i è diverso a quello del campione di controllo

Assumiamo che tutte le ipotesi nulle siano vere e che questi 100 parametri si comportino come v.a. stocasticamente indipendenti. Quant'è la probabilità di rigettare (erroneamente) almeno 1 ipotesi nulla con una significatività del 5%?

Quant'è la probabilità di rigettare almeno 5 ipotesi nulla con una significatività del 5%?

Quesito 3. La variabile aleatoria X ha distribuzione normale con media $\mu = 7$ e deviazione standard $\sigma = 5$

1. Calcolare la probabilità dell'evento $X \in [1, 9]$

2. Calcolare la probabilità che da un campione di rango $n = 16$ si ottenga una media in $[1, 9]$.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$$\Pr(1 \le X \le 9) = \Pr\left(\frac{1-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{9-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(Z \le \frac{2}{5}\right) - \Pr\left(Z \le -\frac{6}{5}\right)$$

= `norm.cdf( 2/5 ) - norm.cdf( -6/5 )` Risposta 1

= `norm.cdf( 0.4 ) - norm.cdf( -1.2 ) = 0.540`

$\bar{X}$ v.a. media campionaria

$$\Pr(1 \le \bar{X} \le 9) = \Pr\left(\frac{1-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z \le \frac{9-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(Z \le \frac{8}{5}\right) - \Pr\left(Z \le -\frac{24}{5}\right)$$

= `norm.cdf( -24/5 ) - norm.cdf( -24/5 )` Risposta 2

= `norm.cdf( 1.6 ) - norm.cdf( -4.8 ) = 0.945`

Quesito 4. Da una popolazione con distribuzione normale con media μ ignota e deviazione standard 45 estraiamo un campione di 16 individui. Qual è la probabilità che la media campionaria risulti $> \mu + 15$?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$n = 16$ dimensione del campione

$\varepsilon = 15$

$\sigma = 45$ deviazione standard della popolazione

$\sigma/\sqrt{n}$ errore standard (deviazione standard della media)

$P\left(Z > \dfrac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \dfrac{4}{3}\right) =$ `1 - norm.cdf(4/3) = 0.091` Risposta

---

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`
`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`bimom.ppf(q, n, p)` $=$ `k` dove `k` è tale che $\Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`nbinom.xxx(k, n, p)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.

`norm.xxx(z)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.