Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 15 novembre 2018

**Quesito 1.** Sia $a_i$ una successione di cui sappiamo che $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $\sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 = 14$.

Calcolare $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$.

**Risposta**

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 = \sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 + 2^2 + 1^2 = 14 + 4 + 1 = 19.$$

**Quesito 2.** Sia $a_i$ una successione di cui sappiamo che $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $\sum_{i=2}^{\infty}(a_i + a_{i+1}) = 14$.

Calcolare $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

**Risposta**

$$\sum_{i=2}^{\infty}(a_i + a_{i+1}) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i + \sum_{i=3}^{\infty} a_i = 2\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) - 2a_0 - 2a_1 - a_2$$

Quindi

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \frac{14 + 4 + 2 + 4}{2} = 12.$$

**Quesito 3.** Si consideri la funzione $f(x) = (4x + 5)^2$.

1. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)dx$.
2. Determinare l'area (con segno) sottesa alla funzione $f$ nell'intervallo $[0, 1]$.

**Risposta**

$$\int f(x)dx = \frac{(4x + 5)^3}{12} + C.$$ Risposta 1

Il valore dell'area è $-\frac{151}{3}$. Risposta 2

**Quesito 4.** Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 1$

1. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)dx$.
2. Determinare l'area della parte di piano compresa tra la funzione $f$ e le due rette di equazioni $x = -1$ e $x = 3$.

**Quesito 5.** Abbiamo 30 monete di cui 24 sono equilibrate, le altre sono difettose e hanno probabilità 0.6 di dare come risultato `Testa`. Scegliamo a caso una di queste 30 monete. Per decidere se è equilibrata o difettosa, la lanciamo 25 volte. Se otteniamo $\geq 15$ volte `Testa` diremo che è difettosa. Dei seguenti dati si usino quelli pertinenti

1. Qual è la probabilità di dichiarare difettosa una moneta che non lo è?
2. Qual è la probabilità che una moneta dichiarata difettosa lo sia veramente?

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 15) &= 0.212 \quad \text{se } X \sim B(25, 0.5) & &= 0.572 \quad \text{se } X \sim B(30, 0.5) \\ &= 0.586 \quad \text{se } X \sim B(25, 0.6) & &= 0.903 \quad \text{se } X \sim B(30, 0.6) \end{aligned}$$

**Risposta**

$D$ insieme degli esperimenti fatti con monete sbilanciate

$T_{\geq 15}$ insieme degli esperimenti con risultato $\geq 15$

$\Pr(D) = 0.2$ prevalenza del difetto

$\Pr(\neg D) = 1 - \Pr(D) = 0.8$

$\Pr(T_{\geq 15}|\neg D) = 0.212$ Risposta 1

$\Pr(T_{\geq 15}|D) = 0.586$

$\Pr(T_{\geq 15}) = \Pr(T_{\geq 15}|D)\Pr(D) + \Pr(T_{\geq 15}|\neg D)\Pr(\neg D) = 0.287$

$$\Pr(D \mid T_{\geq 15}) = \frac{\Pr(T_{\geq 15}|D)\Pr(D)}{\Pr(T_{\geq 15})} = 0.408$$ Risposta 2

**Quesito 6.** The CEO of a large electric utility claims that 80% of his 1 000 000 customers are very satisfied with the service they receive. To test this claim, the local newspaper surveyed 100 customers, using simple random sampling. Among the sampled customers, 73 say they are very satisified.

1. Based on these findings, compute the p-value of the following hypothesis test.
   $H_0: \quad p = 0.80, \qquad H_1: \quad p \neq 0.80$ where $p$ is the proportion of very satisfied customers
2. A second survey is planned on 200 customers. Assuming $H_0$, what is the probability the new p-value will be $\leq$ of the p-value obtained before?

**Risposta**

---

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`
`nbinom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\left(X = \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`nbinom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`nbimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.pmf(k, n, p)`, `binom.cdf(k, n, p)`, `bimom.ppf(q, n, p)` sono l'analogo per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.