Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 15 gennaio 2018

Quesito 1. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^3y^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy.
2. Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Quesito 2. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -xe^{-y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy.
2. Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Quesito 3. Preleviamo un campione di rango $n = 25$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi valori dei nell'intervallo $[2,\ 8]$.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 2$ contro $H_A : \mu \in (2, 8]$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.05$ otteniamo che per uno z-test a coda superiore la zona di rifiuto è $[2.987,\ +\infty)$.

1. Nel caso $H_A : \mu \in [3.5,\ 8]$ qual'è la massima probabilità β di non rigettare H_0 (errore II tipo)?
2. Calcolare la potenza del test con l'effect-size suggerito nel punto precedente.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \cdot \sqrt{1/n_x + 1/n_y}} \quad \text{dove } S^2 = \frac{n_x - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_x^2 + \frac{n_y - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_y^2 \quad \text{ha distribuzione } t(n_x + n_y - 2)$$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`
`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\left(X = \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\left(X \le \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`bimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\left(X \le \mathtt{k}\right) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.
`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.
`t.xxx(...,` ν`)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.