

Domande per verificare la comprensione del significato di distribuzione continua (solo caso distribuzione normale). Richiede anche le nozioni di standardizzazione e di media campionaria.

N.B. Alcune domande potrebbero contenere informazioni irrilevanti.

**Quesito 1.** La variabile aleatoria  $X$  ha distribuzione normale con media  $\mu = 8$  e deviazione standard  $\sigma = 5$

1. Calcolare la probabilità dell'evento  $X \in [2, 9]$
2. Calcolare la probabilità che da un campione di rango  $n = 16$  si ottenga una media in  $[2, 9]$ .

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

**Risposta**

$$\begin{aligned}\Pr(2 \leq X \leq 9) &= \Pr\left(\frac{2-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{9-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{1}{5}\right) - \Pr\left(Z \leq -\frac{6}{5}\right) \\ &= \text{norm.cdf}(1/5) - \text{norm.cdf}(-6/5) \\ &= \text{norm.cdf}(0.2) - \text{norm.cdf}(-1.2) = 0.464\end{aligned}$$

Risposta 1

$\bar{X}$  v.a. media campionaria

$$\begin{aligned}\Pr(2 \leq \bar{X} \leq 9) &= \Pr\left(\frac{2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{9-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{4}{5}\right) - \Pr\left(Z \leq -\frac{24}{5}\right) \\ &= \text{norm.cdf}(-24/5) - \text{norm.cdf}(-24/5) \\ &= \text{norm.cdf}(0.8) - \text{norm.cdf}(-4.8) = 0.788\end{aligned}$$

Risposta 2

**Quesito 2.** La variabile aleatoria  $X$  ha distribuzione normale con media  $\mu = 9$  e deviazione standard  $\sigma = 3$ . Qual'è il minimo  $\varepsilon$  tale che  $\Pr(5 \leq X \leq 5 + \varepsilon) \geq 0.5$ .

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

**Risposta**

$\Pr(5 \leq X \leq 5 + \varepsilon)$  cresce al variare di  $\varepsilon$ , quindi il minimo è quando  $\Pr(5 \leq X \leq 5 + \varepsilon) = 0.5$

$$\Pr(5 \leq X \leq 5 + \varepsilon) = \Pr\left(\frac{5-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{5-\mu+\varepsilon}{\sigma}\right) = \Pr\left(-\frac{4}{3} \leq Z \leq \frac{-4+\varepsilon}{3}\right) = 0.5$$

$$\Pr\left(Z \leq \frac{-4+\varepsilon}{3}\right) = 0.5 + \Pr\left(Z \leq -\frac{4}{3}\right)$$

$$(-4 + \varepsilon) / 3 = \text{norm.ppf}(0.5 + \text{norm.cdf}(-4/3))$$

$$\varepsilon = 3 * \text{norm.ppf}(0.5 + \text{norm.cdf}(-4/3)) + 4 = 4.692$$

Risposta

**Quesito 3.** Abbiamo prelevato vari campioni di una data cultura. Ci interessa selezionare quei campioni che hanno una concentrazione  $\leq 6$  di una data sostanza. La misura produce risultati che differiscono dal valore corretto per un errore distribuito normalmente con media 0 e deviazione standard 5. Consideriamo la seguente procedura: se la media di 4 misure è  $\leq 4$  concludiamo che il campione è come desiderato altrimenti lo scartiamo.

Calcolare (nel caso più sfavorevole) la probabilità di scartare erroneamente un campione.

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

### Risposta

Il caso più sfavorevole occorre quando la concentrazione vera nel campione è  $\mu = 6$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{media di 4 misure}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{X} \geq 4) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{4}} \geq \frac{4 - \mu}{\sigma/\sqrt{4}}\right) = \Pr(Z \geq -4/5) \\ &= 1 - \text{norm.cdf}(-4/5) = 0.788 \end{aligned} \quad \text{Risposta}$$

**Quesito 4.** Abbiamo prelevato 5 campioni di una data cultura. Ci interessa selezionare quei campioni che hanno una concentrazione  $\leq 6$  di una data sostanza. La misura produce risultati che differiscono dal valore corretto per un errore distribuito normalmente con media 0 e deviazione standard 5. Consideriamo la seguente procedura: se la media di 4 misure è  $\leq 4$  concludiamo che il campione è come desiderato altrimenti lo scartiamo.

Calcolare (nel caso più sfavorevole) la probabilità che nessun campione venga scartato erroneamente.

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

### Risposta

Il caso più sfavorevole occorre quando tutti 5 campioni hanno concentrazione  $\mu = 6$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{media di 4 misure}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{X} \geq 4) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{4}} \geq \frac{4 - \mu}{\sigma/\sqrt{4}}\right) = \Pr(Z \geq -4/5) \\ &= 1 - \text{norm.cdf}(-4/5) \quad \text{probabilità (per un singolo campione) di essere scartato erroneamente} \\ &= (\text{norm.cdf}(-4/5))^{**5} = 0.00043 \end{aligned} \quad \text{Risposta}$$

**Quesito 5.** Da una popolazione con distribuzione normale con media  $\mu$  ignota e deviazione standard 35 estraiamo un campione di 9 individui. Qual è la probabilità che la media campionaria risulti  $> \mu + 15$  ?

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

**Risposta**

$n = 9$  dimensione del campione

$\varepsilon = 15$

$\sigma = 35$  deviazione standard della popolazione

$\sigma/\sqrt{n}$  errore standard (deviazione standard della media)

$P\left(Z > \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{9}{7}\right) = 1 - \text{norm.cdf}(9/7) = 0.099$  Risposta

---

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats`

`norm.cdf(z)` =  $\Pr(Z < z)$  per  $Z \sim N(0, 1)$

`norm.ppf( $\alpha$ )` =  $z_\alpha$  dove  $z_\alpha$  è tale che  $\Pr(Z < z_\alpha) = \alpha$  per  $Z \sim N(0, 1)$