Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 10 gennaio 2018

Quesito 1. Consideriamo sequenze di **??** caratteri dell'alfabeto $\{a, g, c, \mathbf{??}\}$. Assumiamo che tutti i caratteri occorrano con la stessa probabilità indipendentemente dalla posizione. Fissata una sequenza s_0, qual è la probabilità che un'altra sequenza s_1 scelta in modo indipendente coincida con s_0 in $\geq$ **??** posizioni?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$X \sim NB(\mathbf{??}, 1/4)$

$\Pr(X \geq \mathbf{??}) \;=\; 1 - \Pr(X \leq \mathbf{??})$ $=$ `1 - nbinom.cdf( ??, ??, 1/4 )` `= ??` Risposta

Quesito 2. Della v.a. discreta X conosciamo la distribizione di probabilità

$\Pr(X = \mathbf{??}) = \mathbf{??}$ $\qquad$ $\Pr(X = \mathbf{??}) = \mathbf{??}$

Della v.a. discreta Y conosciamo la distribuzione condizionata a X

$\Pr(Y = \mathbf{??} \mid X = \mathbf{??}) = \mathbf{??}$ $\qquad$ $\Pr(Y = \mathbf{??} \mid X = \mathbf{??}) = \mathbf{??}$

$\Pr(Y = \mathbf{??} \mid X = \mathbf{??}) = \mathbf{??}$ $\qquad$ $\Pr(Y = \mathbf{??} \mid X = \mathbf{??}) = \mathbf{??}$

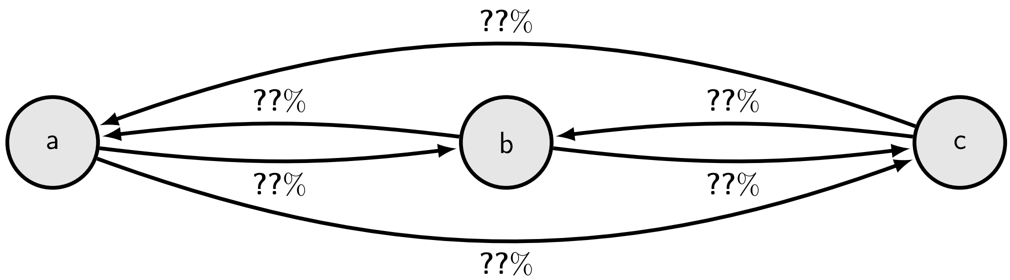
Calcolare la distribuzione di probablità di Y

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$$\left.\begin{array}{l}\Pr(Y = \mathbf{??}) = \Pr(Y = \mathbf{??} \mid X = \mathbf{??}) \cdot \Pr(X = \mathbf{??}) + \Pr(Y = \mathbf{??} \mid X = \mathbf{??}) \cdot \Pr(X = \mathbf{??}) = \mathbf{??} \\ \Pr(Y = \mathbf{??}) = 1 - \Pr(Y = \mathbf{??}) = \mathbf{??}\end{array}\right\} \text{Risposta}$$

Quesito 3. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate saltando tra tre foglie di ninfea che indichiamo con a, b, e c. Ogni ora salta da foglia una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Osservando il rospo in un momento qualsiasi, lo troveremo in a, b, o c con probabilità rispettivamente **??**, **??**, e **??**. Supponiamo che il rospo sia in a al tempo $t = 1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t = 2$ il rospo passi a b ?
2. Qual è la probabilità che al tempo $t = 0$ il rospo fosse in c ?
3. Qual è la probabilità che al tempo $t = 3$ il rospo si trovi in c ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t.

Dal testo inferiamo che $\Pr(R_t = \mathsf{a}) = \mathbf{??}$, $\Pr(R_t = \mathsf{b}) = \mathbf{??}$, e $\Pr(R_t = \mathsf{c}) = \mathbf{??}$

Dal diagramma inferiamo

$\Pr(R_2 = \mathsf{b} \mid R_1 = \mathsf{a}) \;=\; ??$ Risposta 1

$\Pr(R_1 = \mathsf{a} \mid R_0 = \mathsf{c}) \;=\; ??$

Quindi

$$\Pr(R_0 = \mathsf{c} \mid R_1 = \mathsf{a}) \;=\; \frac{\Pr(R_1 = \mathsf{a} \,|\, R_0 = \mathsf{c}) \cdot \Pr(R_0 = \mathsf{c})}{\Pr(R_1 = \mathsf{a})} \;=\; \frac{(??)\cdot(??)}{??}$$

$$=\; ??$$ Risposta 2

Ci sono tre casi mutualmente escusivi per il percorso del rospo ai tempo $1, 2, 3$ che elenchiamo con le rispettive probabilità.

a, b, c $\quad ??\cdot ?? = ??$

a, a, c $\quad ??\cdot ?? = ??$

a, c, c $\quad ??\cdot ?? = ??$

$?? + ?? + ?? \;=\; ??$ Risposta 3

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \cdot \sqrt{1/n_x + 1/n_y}} \quad \text{dove } S^2 \;=\; \frac{n_x - 1}{n_x + n_y - 2}\cdot S_x^2 + \frac{n_y - 1}{n_x + n_y - 2}\cdot S_y^2 \quad \text{ha distribuzione } t(n_x + n_y - 2)$$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\big(X \le \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`bimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\big(X \le \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.

`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.

`t.xxx(...,` ν`)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.