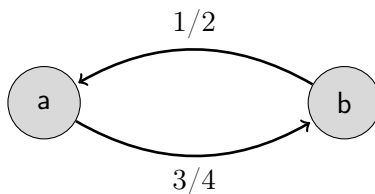


**Quesito 1.** Consideriamo il percorso aleatorio descritto in figura. Nello stato **a** viene lanciata una moneta a valori **T** o **C**. La probabilità che esca **T** è  $4/5$ . Nello stato **b** viene lanciata una moneta con probabilità  $2/5$  che esca **T**.



Le transizioni **aa** e **bb** sono implicite.

Il percorso comincia (al tempo  $t=0$ ) dallo stato **a**. Al tempo  $t=2$  il risultato del lancio della moneta è **T**. Qual è la probabilità che il processo al tempo  $t=2$  si trovi nello stato **a**?

Indichiamo con  $S_t \in \{a, b\}$  le variabili aleatorie che danno lo stato al tempo  $t$ . Indichiamo con  $X_t \in \{T, C\}$  le variabili aleatorie che danno il risultato del lancio al tempo  $t$ . Si esprima usando queste v.a. la probabilità condizionata che si intende calcolare.

Esprimere i risultati numerici come frazioni di interi.

### Risposta

Dalla figura inferiamo la matrice di transizione  $P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

Il testo riporta le seguenti probabilità:

$$\Pr(S_0 = a) = 1 \quad \text{e per ogni } t: \quad \Pr(X_t = T \mid S_t = a) = \frac{4}{5}, \quad \Pr(X_t = T \mid S_t = b) = \frac{2}{5}$$

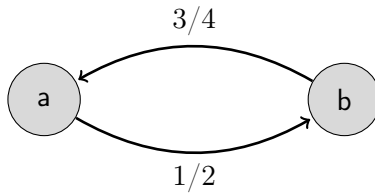
$$\begin{bmatrix} \Pr(S_1 = a) \\ \Pr(S_1 = b) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \Pr(S_0 = a) \\ \Pr(S_0 = b) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Pr(S_2 = a) \\ \Pr(S_2 = b) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \Pr(S_1 = a) \\ \Pr(S_1 = b) \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X_2 = T) &= \Pr(X_2 = T \mid S_2 = a) \cdot \Pr(S_2 = a) + \Pr(X_2 = T \mid S_2 = b) \cdot \Pr(S_2 = b) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{16} + \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{16} = \frac{23}{40} \end{aligned}$$

$$\Pr(S_2 = a \mid X_2 = T) = \frac{\Pr(X_2 = T \mid S_2 = a) \cdot \Pr(S_2 = a)}{\Pr(X_2 = T)} = \frac{14}{23}$$

Risposta

**Quesito 2.** Consideriamo il percorso aleatorio descritto in figura. Quando il processo si trova nello stato **a** viene lanciata una moneta a valori T o C. La probabilità che esca T è  $3/5$ . Nello stato **b** viene lanciata una moneta con probabilità  $2/5$  che esca T.



Le transizioni **aa** e **bb** sono implicite.

Il percorso comincia (al tempo  $t=0$ ) dallo stato **b**. Al tempo 1 e 2 il risultato del lancio della moneta è TT. Qual è la probabilità che gli stati corrispondenti siano **ab**?

Esprimere i risultati numerici come frazioni di interi.

Per sveltire la soluzione calcoliamo le seguenti probabilità. Indichiamo con  $S_t \in \{a, b\}$  le variabili aleatorie che danno lo stato al tempo  $t$ . Indichiamo con  $X_t \in \{T, C\}$  le variabili aleatorie che danno il risultato del lancio al tempo  $t$ . Per leggibilità nelle seguenti abbiamo ommesso di scrivere  $X_1X_2 = e$  e  $S_1S_2 =$ .

$$\begin{array}{llll} \Pr(TT | aa) = \frac{9}{25} & \Pr(TT | ab) = ? & \Pr(aa) = \frac{3}{8} & \Pr(ab) = ? \\ \Pr(TT | ba) = \frac{6}{25} & \Pr(TT | bb) = \frac{4}{25} & \Pr(ba) = \frac{3}{16} & \Pr(bb) = \frac{1}{16} \end{array}$$

**Risposta**

Il testo riporta le seguenti probabilità:

$$\Pr(S_0 = b) = 1 \quad \text{e per ogni } t \quad \Pr(X_t = T | S_t = a) = \frac{3}{5}, \quad \Pr(X_t = T | S_t = b) = \frac{2}{5}$$

$$\Pr(X_1X_2 = TT | S_1S_2 = ab) = \Pr(X_1 = T | S_1 = a) \cdot \Pr(X_2 = T | S_2 = b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$\text{Dalla figura inferiamo la matrice di transizione } P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ quindi } \begin{bmatrix} \Pr(S_1 = a) \\ \Pr(S_1 = b) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Pr(S_1S_2 = ab) = \Pr(S_1 = a) \cdot \Pr(S_2 = b | S_1 = a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Nelle seguenti omettiamo di scrivere  $X_1X_2 = e$  e  $S_1S_2 =$

$$\begin{aligned} \Pr(TT) &= \sum_{i,j \in \{a,b\}} \Pr(ij) \cdot \Pr(TT | ij) \\ &= \Pr(aa) \cdot \Pr(TT | aa) + \Pr(ab) \cdot \Pr(TT | ab) + \Pr(bb) \cdot \Pr(TT | bb) + \Pr(ba) \cdot \Pr(TT | ba) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{25} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{25} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{25} + \frac{3}{16} \cdot \frac{6}{25} = \frac{27}{200} \end{aligned}$$

$$\Pr(ab | TT) = \frac{\Pr(TT | ab) \cdot \Pr(ab)}{\Pr(TT)} = \frac{(6/25) \cdot (3/8)}{27/200} = \frac{2}{3}$$

**Risposta**