Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 8 novembre 2018

Quesito 1. La concentrazione di un farmaco nel sangue dopo 12 ore è il 70% della concentrazione iniziale. Vogliamo che la concentrazione massima a regime sia 4. Somministriamo il farmaco giornalmente (ogni 24 ore). Di quanto deve aumentare la concentrazione ad ogni somministrazione? Ricordiamo che l'equazione $x_{n+1} = ax_n + b$ ha come soluzione generale $Ca^n + b/(1 - a)$.

Risposta

Conviene ragionare in unità di tempo giornaliere. Ogni giorno la concentrazione si riduce del $(70\%)^2 = 49\%$. Quindi $a = 0.49$. Posto $4 = b/(1 - a)$ otteniamo $b = 2.04$.

Quesito 2. Al momento un paziente prende giornalmente 2 unità al giorno di una medicina. La concentrazione massima nel sangue con questa dose è di 3.4. Si rende necessario farla salire a 4.2. Quanto dovrà essere la nuova dose? Ricordiamo che l'equazione $x_{n+1} = ax_n + b$ ha come soluzione generale $Ca^n + b/(1 - a)$.

Risposta

La concentrazione massima a regime è $b/(1 - a) = 2/(1 - a) = 3.4$. Quindi $a = 0.41$. La nuova dose b' deve soddisfare $b'/(1 - a) = 4.2$. Quindi $b' = 2.48$

Quesito 3. Per i valori $-1 < r < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

converge a $1/(1 - r)$. Per quali valori di q la serie

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1 + q)^{i-1}$$

converge? A cosa converge?

Risposta

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1 + q)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (1 + q)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (1 + q)^i - 1 = (1 - q)/q - 1 \text{ per } 2 < q < 0$$

Quesito 4. Due monetine, una con probabilità di dare testa 0.8, l'altra 0.9 vengono laciate simultaneamente. Qual è la probabilità che il primo lancio a cui differiscono sia ≥ 4?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta Chiamiamo successo la divergenza tra le due monete. Questa si ottiene con probabilità $p = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1$. Sia $Y \sim NB(1, p)$. La risposta è $\Pr(Y \geq 4) = 1 - \Pr(Y \leq 5)$.

Quesito 5. Per i valori $-1 < r < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

converge a $1/(1 - r)$. Per quali valori di q la serie

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1 + q)^{i-1}$$

converge? A cosa converge?

Risposta

$$\sum_{i=2}^{\infty}(1+q)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}(1+q)^{i} = \sum_{i=0}^{\infty}(1+q)^{i} - 1 = (1-q)/q - 1 \text{ per } 2 < q < 0$$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`nbinom.pmf(k, 1, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim NB(\mathtt{1}, \mathtt{p})$

`nbinom.cdf(k, 1, p)` $= \Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim NB(\mathtt{1}, \mathtt{p})$

`nbimom.ppf(q, 1, p)` $=$ `k` dove `k` è tale che $\Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim NB(\mathtt{1}, \mathtt{p})$