Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 10 gennaio 2018

Quesito 1. Della v.a. discreta X conosciamo la distribizione di probabilità

$$\Pr(X=4)=\frac{1}{2} \qquad \Pr(X=5)=\frac{1}{2}$$

Della v.a. discreta Y conosciamo la distribuzione condizionata a X

$$\Pr(Y=3 \mid X=4)=\frac{1}{2} \qquad \Pr(Y=3 \mid X=5)=\frac{1}{3}$$

$$\Pr(Y=2 \mid X=4)=\frac{1}{2} \qquad \Pr(Y=2 \mid X=5)=\frac{2}{3}$$

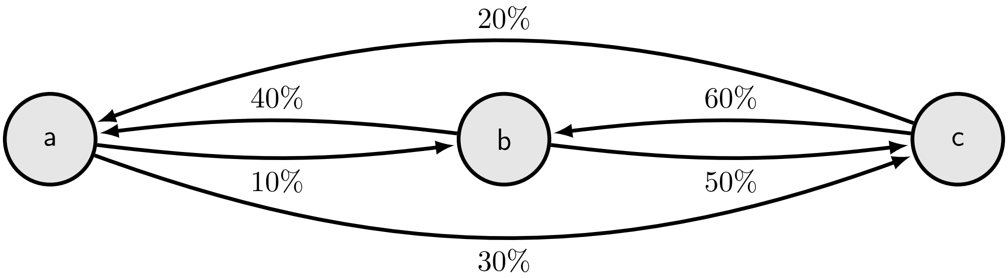
Calcolare la distribuzione di probablità di Y

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$$\left.\begin{aligned}\Pr(Y=3) &= \Pr(Y=3 \mid X=4)\cdot\Pr(X=4) + \Pr(Y=3 \mid X=5)\cdot\Pr(X=5) = \frac{5}{12}\\ \Pr(Y=2) &= 1-\Pr(Y=3) = \frac{7}{12}\end{aligned}\right\}\ \text{Risposta}$$

Quesito 2. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate saltando tra tre foglie di ninfea che indichiamo con a, b, e c. Ogni ora salta da foglia una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Osservando il rospo in un momento qualsiasi, lo troveremo in a, b, o c con probabilità rispettivamente 21/50, 13/50, e 8/25. Supponiamo che il rospo sia in a al tempo $t=1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t=2$ il rospo passi a b ?
2. Qual è la probabilità che al tempo $t=0$ il rospo fosse in c ?
3. Qual è la probabilità che al tempo $t=3$ il rospo si trovi in c ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t.

Dal testo inferiamo che $\Pr(R_t=\mathsf{a})=21/50$, $\Pr(R_t=\mathsf{b})=13/50$, e $\Pr(R_t=\mathsf{c})=8/25$

Dal diagramma inferiamo

$\Pr(R_2=\mathsf{b} \mid R_1=\mathsf{a}) = 1/10$ Risposta 1

$\Pr(R_1=\mathsf{a} \mid R_0=\mathsf{c}) = 1/5$

Quindi

$$\Pr(R_0=\mathsf{c} \mid R_1=\mathsf{a}) = \frac{\Pr(R_1=\mathsf{a} \mid R_0=\mathsf{c})\cdot\Pr(R_0=\mathsf{c})}{\Pr(R_1=\mathsf{a})} = \frac{(1/5)\cdot(8/25)}{21/50}$$

$= 16/105$ Risposta 2

Ci sono tre casi mutualmente escusivi per il percorso del rospo ai tempo $1, 2, 3$ che elenchiamo con le rispettive probabilità.

a, b, c $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

a, a, c $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

a, c, c $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$

$\frac{1}{20} + \frac{9}{50} + \frac{3}{50} = \frac{29}{100}$ Risposta 3

Quesito 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -xe^{-y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy.
2. Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Risposta

La soluzione del problema di Cauchy è data dalla funzione $y(x) = ln(-\frac{x^2}{2} + e^3)$. Risposta 1

L'intervallo massimale è $(-\sqrt{2e^3}, \sqrt{2e^3})$. Risposta 2

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \cdot \sqrt{1/n_x + 1/n_y}} \quad \text{dove } S^2 = \frac{n_x - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_x^2 + \frac{n_y - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_y^2 \quad \text{ha distribuzione } t(n_x + n_y - 2)$$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`bimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.

`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.

`t.xxx(...,` ν`)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.