Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 6 dicembre 2018

Quesito 1. Una macchina è calibrata in modo da fare un taglio in un punto di altezza $\mu_0 = 20$. Se calibrata bene, l'altezza del taglio è distribuita normalmente con media μ_0 deviazione standard $\sigma = 2$.

Ogni tanto (per effetto delle vibrazioni) la macchina si sposta, va quindi fermata e ricalibrata. Idealmente vorremmo fermare la macchina quando la nuova media μ differisce più di 3 da μ_0.

1. Misuriamo quindi la posizione del taglio. Chiamiamo $\bar{x}$ la media fatta su un campione di $n = 25$. Calibreremo la macchina se $|\mu_0 - \bar{x}|$ è maggiore di un valore critico c. Quale dev'essere questo valore per non fermare inutilmente ma macchina più del 10% delle volte?
2. Dato il valore critico al punto 1, qual'è (nel peggiore dei casi) la probabilità di non ricalibrare la macchina quando invece necessita di essere ricalibrata?
3. Dopo 500 tagli la probabilità che $|\mu - \mu_0| > 3$ è del 5%. Su un campione di dimensione 5 misuriamo una distanza media $\bar{x} = 15$. Qual'è la probabilità che $|\mu - \mu_0|$ sia davvero > 3?

4 alcune delle quantita calcolate nelle domande precedenti vengono generalmente denominate α, β, δ, e p-valore. Specificare quali.

Risposta 1. Sia $x_{10\%}$ il valore critico. Dev'essere che

$\Pr\left(|\bar{X} - \mu_0| \geq c_{10\%}\right) = 0.1 = \alpha$ dove $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/\sqrt{n})$. Risposta 4

Standardizzando

$$\Pr\left(|Z| \geq \left|\frac{c_{10\%}}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right) = 2 \cdot \Pr\left(Z \leq -\left|\frac{c_{10\%}}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right).$$

$$= 2 \cdot \Pr\left(Z \leq -c_{10\%}/0.4\right) = 0.1$$

Quindi $c_{10\%}$ = `- 0.4 * norm.ppf(0.05)` $\cong$ `0.66` Risposta 1

2. I casi più sfavorevoli sono quando $\mu = \mu_0 \pm 1.3$. Per simmetria possiamo considerare solo $\mu = \mu_0 + 1.3$. Dobbiamo calcolare

$\Pr\left(|\bar{X} - \mu_0| \leq c_{10\%}\right) = \beta$ dove $\bar{X} \sim N(\mu_0 + 1.3, \sigma^2/\sqrt{n})$. Risposta 4

Standardizzando

$$\Pr\left(|Z| \leq \left|\frac{c_{10\%} - 1.3}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right) = 2 \cdot \left(1 - \Pr\left(Z \leq -\left|\frac{c_{10\%} - 1.3}{0.4}\right|\right)\right).$$

= `2 * (1 - norm.cdf( abs(` $c_{10\%}$ `- 1.3 ) / 0.4 ) )` $\cong$ `0.036` Risposta 2

Risposta

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\left(X = \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`bimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`nbinom.xxx(k, n, p)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.

`norm.xxx(z)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.