Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 15 gennaio 2018

Quesito 1. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^3 y^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy.
2. Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Risposta

La soluzione del problema di Cauchy è data dalla funzione $y(x) = \dfrac{4}{1 - x^4}$. Risposta 1

L'intervallo massimale è $(-1, 1)$. Risposta 2

Quesito 2. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -xe^{-y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy.
2. Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Risposta

La soluzione del problema di Cauchy è data dalla funzione $y(x) = ln(-\dfrac{x^2}{2} + e^3)$. Risposta 1

L'intervallo massimale è $(-\sqrt{2e^3}, \sqrt{2e^3})$. Risposta 2

Quesito 3. Preleviamo un campione di rango $n = 25$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi valori dei nell'intervallo $[2,\ 8]$.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 2$ contro $H_A : \mu \in (2, 8]$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.05$ otteniamo che per uno z-test a coda superiore la zona di rifiuto è $[2.987,\ +\infty)$.

1. Nel caso $H_A : \mu \in [3.5,\ 8]$ qual'è la massima probabilità β di non rigettare H_0 (errore II tipo)?
2. Calcolare la potenza del test con l'effect-size suggerito nel punto precedente.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Il caso più sfavorevole si ottiene quando $\mu = 3.5$. Sia $\bar{X} \sim N(3.5,\ \sigma^2/n)$

$$\beta \ = \ \Pr\left(\bar{X} < 2.987\right) \ = \ \Pr\left(\frac{\bar{X} - 3.5}{\sigma/\sqrt{n}} \ < \ \frac{-0.513}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ = \ \Pr\left(Z < -0.855\right)$$

β = `norm.cdf(-0.855)` = `0.1963` Risposta 1

Con un effect size $\delta = 1.5$ la potenza del test è $1 - \beta =$ `1 - norm.cdf(-0.855)` = `0.8037` Risposta 2

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \cdot \sqrt{1/n_x + 1/n_y}} \quad \text{dove } S^2 = \frac{n_x - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_x^2 + \frac{n_y - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_y^2 \quad \text{ha distribuzione } t(n_x + n_y - 2)$$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`
`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`bimom.ppf(q, n, p)` $=$ `k` dove `k` è tale che $\Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$
`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.
`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.
`t.xxx(...,` ν`)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.