Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 8 novembre 2018

Quesito 1. Si consideri una funzione $f(x)$ la cui derivata prima è data dalla funzione $f'(x) = 1\, e^{-3x}$.

1. Indicare gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ cresce e quelli in cui la funzione decresce.
2. Trovare massimi e minimi locali di $f(x)$.

Risposta

$f(x)$ cresce in $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, infatti $1\, e^{-3x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ — Risposta 1

$f(x)$ non ha massimi e minimi locali — Risposta 2

Quesito 2. Si consideri un corpo lasciato cadere da una torre alta 500 metri. Sia $f(t) = 5t^2$ la funzione che ne descrive la distanza dalla cima della torre ad ogni secondo (quando $t = 0$, $f(t) = 0$ ovvero il corpo si trova in cima alla torre).

1. Qual è la velocità istantanea del corpo dopo 1 secondi?
2. Qual è la velocità istantanea del corpo quando tocca terra?

Risposta

La funzione $f'(t) = 10t$ descrive l'andamento della velocità istantanea, quindi

$f'(1) = 10$ — Risposta 1

Il corpo tocca terra quando $f(t) = 500$, ovvero quando $5t^2 = 500$, ovvero a $t = 10$, quindi

$f'(10) = 100$ — Risposta 2

Quesito 3. La concentrazione di un farmaco nel sangue dopo 12 ore è il 70% della concentrazione iniziale. Vogliamo che la concentrazione massima a regime sia 4. Somministriamo il farmaco giornalmente (ogni 24 ore). Di quanto deve aumentare la concentrazione ad ogni somministrazione? Ricordiamo che l'equazione $x_{n+1} = ax_n + b$ ha come soluzione generale $Ca^n + b/(1 - a)$.

Risposta

Conviene ragionare in unità di tempo giornaliere. Ogni giorno la concentrazione si riduce del $(70\%)^2 = 49\%$. Quindi $a = 0.49$. Posto $4 = b/(1 - a)$ otteniamo $b = 2.04$.

Quesito 4. Per quali valori di q la seguente serie converge?

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1 + q)^{i-1}$$

A cosa converge? Ricordiamo che, per i valori $-1 < r < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

converge a $1/(1 - r)$.

Risposta

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1 + q)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (1 + q)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (1 + q)^i - 1 = (1 - q)/q - 1 \text{ per } 2 < q < 0$$

Quesito 5. Due monetine, con probabilità di dare testa rispettivamente 0.8 e 0.9, vengono lanciate simultaneamente. Qual è la probabilità che il primo lancio in cui differiscono sia ≥ 4?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta Chiamiamo successo la divergenza tra le due monete. Questa si ottiene con probabilità $p = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1$. Sia $Y \sim NB(1, p)$. La risposta è $\Pr(Y \geq 4) = 1 - \Pr(Y \leq 5)$.

Quesito 6. Per i valori $-1 < r < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

converge a $1/(1-r)$. Per quali valori di q la serie

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1+q)^{i-1}$$

converge? A cosa converge?

Risposta

$\sum_{i=2}^{\infty} (1+q)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (1+q)^{i} = \sum_{i=0}^{\infty} (1+q)^{i} - 1 = (1-q)/q - 1$ per $2 < q < 0$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`nbinom.pmf(k, 1, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim NB(\mathtt{1}, \mathtt{p})$

`nbinom.cdf(k, 1, p)` $= \Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim NB(\mathtt{1}, \mathtt{p})$

`nbimom.ppf(q, 1, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim NB(\mathtt{1}, \mathtt{p})$