

**Quesito 1.** Si consideri una funzione  $f(x)$  la cui derivata prima è data dalla funzione  $f'(x) = 1 e^{-3x}$ .

1. Indicare gli intervalli in cui la funzione  $f(x)$  cresce e quelli in cui la funzione decresce.
2. Trovare massimi e minimi locali di  $f(x)$ .

**Risposta**

$f(x)$  cresce in  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ , infatti  $1 e^{-3x} > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$

Risposta 1

$f(x)$  non ha massimi e minimi locali

Risposta 2

**Quesito 2.** Si consideri un corpo lasciato cadere da una torre alta 500 metri. Sia  $f(t) = 5t^2$  la funzione che ne descrive la distanza dalla cima della torre ad ogni secondo (quando  $t = 0$ ,  $f(t) = 0$  ovvero il corpo si trova in cima alla torre).

1. Qual è la velocità istantanea del corpo dopo 1 secondi?
2. Qual è la velocità istantanea del corpo quando tocca terra?

**Risposta**

La funzione  $f'(t) = 10t$  descrive l'andamento della velocità istantanea, quindi

$f'(1) = 10$

Risposta 1

Il corpo tocca terra quando  $f(t) = 500$ , ovvero quando  $5t^2 = 500$ , ovvero a  $t = 10$ , quindi

$f'(10) = 100$

Risposta 2

**Quesito 3.** La concentrazione di un farmaco nel sangue dopo 12 ore è il 70% della concentrazione iniziale. Vogliamo che la concentrazione massima a regime sia 4. Somministriamo il farmaco giornalmente (ogni 24 ore). Di quanto deve aumentare la concentrazione ad ogni somministrazione? Ricordiamo che l'equazione  $x_{n+1} = ax_n + b$  ha come soluzione generale  $Ca^n + b/(1-a)$ .

**Risposta**

Conviene ragionare in unità di tempo giornaliera. Ogni giorno la concentrazione si riduce del  $(70\%)^2 = 49\%$ . Quindi  $a = 0.49$ . Posto  $4 = b/(1-a)$  otteniamo  $b = 2.04$ .

**Quesito 4.** Per quali valori di  $q$  la seguente serie converge?

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1+q)^{i-1}$$

A cosa converge? Ricordiamo che, per i valori  $-1 < r < 1$ , la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

converge a  $1/(1-r)$ .

**Risposta**

$$\sum_{i=2}^{\infty} (1+q)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (1+q)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (1+q)^i - 1 = (1-q)/q - 1 \text{ per } -2 < q < 0$$

**Quesito 5.** Due monetine, con probabilità di dare testa rispettivamente 0.8 e 0.9, vengono lanciate simultaneamente. Qual è la probabilità che il primo lancio in cui differiscono sia  $\geq 4$ ?

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

**Risposta** Chiamiamo successo la divergenza tra le due monete. Questa si ottiene con probabilità  $p = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1$ . Sia  $Y \sim NB(1, p)$ . La risposta è  $\Pr(Y \geq 4) = 1 - \Pr(Y \leq 5)$ .

---

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di Python

`nbinom.pmf(k, 1, p)` =  $\Pr(X = k)$  dove  $X \sim NB(1, p)$

`nbinom.cdf(k, 1, p)` =  $\Pr(X \leq k)$  dove  $X \sim NB(1, p)$

`nbinom.ppf(q, 1, p)` =  $k$  dove  $k$  è tale che  $\Pr(X \leq k) \cong q$  per  $X \sim NB(1, p)$