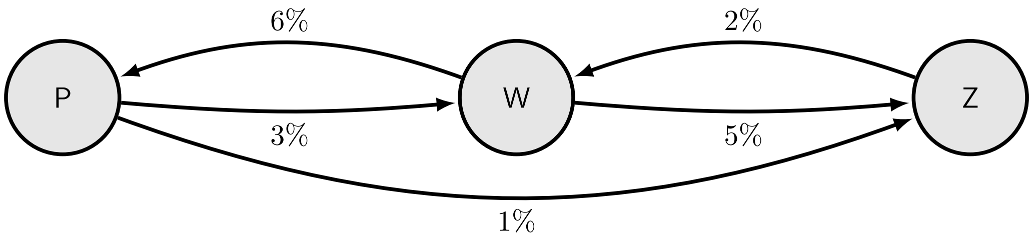
Esperimento con catene di Markov (senza definirle)

Quesito 1. Vogliamo modellare il trasferimento di nutrienti nella catena alimentare di un acquario. La catena alimentare consite di tre compartimenti: phytoplankton (P), water (W), zooplankton (Z).

Dissolviamo 10 unità del radioisotopo ^{14}C. Qui sotto riassumiamo le percentuali di ^{14}C che ogni ora passano tra i compartimenti. Possiamo assumere che la concentrazione di radioisotopo nel sistema rimanga constante quindi gli isotopi che non vengono trasferiti rimangono nello stesso compartimento (nel grafico sono sottointese)



1. Scrivere la matrice M che descrive l'evoluzione del processo $\vec{x}_{n+1} = M\vec{x}_n$ dove $\vec{x}_n = [p_n, w_n, z_n]^{\mathrm{T}}$ dove p_n, w_n, e z_n sono le quantità radioisotopo dopo n ore nei rispettivi compartimenti.
2. Descrivere $\vec{x}_0$ lo stato iniziale del sistema descritto nel testo.
3. Calcolare $\vec{x}_1$
4. La matrice M ha questo insieme di autovalori
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{105}}{200} + \frac{183}{200}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{105}}{200} + \frac{183}{200}.$$
Dire se partendo da $\vec{x}_0$ si raggiunge uno stato di equilibrio e nel caso calcolarlo.

Risposta

La matrice di transizione è $M = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 96 & 6 & 0 \\ 3 & 89 & 2 \\ 1 & 5 & 98 \end{bmatrix}$ Lo stato iniziale è $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ Risposte 1 e 2

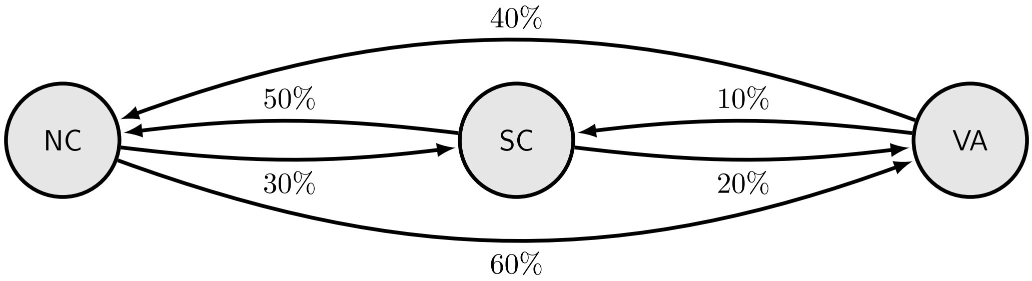
$$\vec{x}_1 = M\,\vec{x}_0 = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 96 & 6 & 0 \\ 3 & 89 & 2 \\ 1 & 5 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 89/10 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$ Risposta 3

Notiamo che $|\lambda_2|, |\lambda_3| < |\lambda_1| = 1$. Quindi la concentrazione tende all'autovettore corrispondente a $\lambda_1 = 1$. Possiamo calcolarlo risolvendo il sistema:

$$M\,[p,\ w,\ z]^T = [p,\ w,\ z]^T \qquad \text{e} \qquad p + w + z = 10$$

$p_\infty = \frac{60}{23}, \quad w_\infty = \frac{40}{23}, \quad z_\infty = \frac{130}{23}$ Risposta 4

Quesito 2. John's Truck Rental does business in North Carolina (NC), South Carolina (SC) and Virginia (VA). As with most rental agencies, customers may return the vehicle that they have rented at any of the company's franchises throughout the three state area. In order to keep track of the movement of its vehicles, the company has accumulated data on the percentage of tracks rented one location that are returned in a different location. The data are represented with the following diagram:



1. If a truck is presently in North Carolina, what is the probability that it will again be in North Carolina after it has been rented twice? (Si usi un vettore $\vec{x}_t = [n_t, s_t, v_t]^{\mathrm{T}}$ per indicare la probabilità che dopo t noleggi l'automezzo si trovi in ciascuno dei 3 stati indicati. Si scriva una matrice M che che descrive l'evoluzione delle probabilità $\vec{x}_{t+1} = M\vec{x}_t$)

2. What fraction of the life of a truck is spent in each of the three states? (La vita di un automezzo è sufficientemente lunga da poter assumere che trascorre tutto ilsuo tempo in condizioni di 'steady-state'.)

Risposta

La matrice di transizione è $M = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Lo stato iniziale è $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ quindi

$$\vec{x}_1 = M\,\vec{x}_0 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{x}_2 = M\,\vec{x}_1 = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 9/50 \\ 21/50 \end{bmatrix}$$

$n_2 = 2/5$ Risposta 1

La probabilità all'equilibrio la calcoliamo risolvendo il sistema:

$$M\,\big[n,\ s,\ v\big]^T = \big[n,\ s,\ v\big]^T \qquad \text{e} \qquad n + s + v = 1$$

$n_\infty = \frac{11}{34}, \quad s_\infty = \frac{7}{34}, \quad v_\infty = \frac{8}{17}$ Risposta 2