Domande (qualcuna capziosa e artificiale) per verificare la comprensione del significato di p-valore (ed implicitamente anche del FWER).

N.B. Spesso le domande contengono informazioni irrilevanti.

Quesito 1. Abbiamo fatto un T-test a due code con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.05. Assumendo vera H_0, qual è la probabilità che, ripetendo il test una seconda volta con un campione di dimensione doppia, il p-valore risulti ≥ 0.1 ?

Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 1. La probabilità è $= 1 - 0.1 = 0.9$.

Quesito 2. Ripetiamo 3 volte lo stesso T-test a due code con campioni di dimensione $n = 25$. Assumendo vera H_0, qual è la probabilità che in almeno uno di questi test il p-valore risulti ≤ 0.05 ?

Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 1. La probabilità è $= 1 - (0.95)^3 = 0.142625$.

Quesito 3. Abbiamo fatto un T-test coda inferiore con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.05. Assumendo vera H_A con effect size 0.1, qual è la probabilità che ripetendo il test una seconda volta con un campione della stessa dimensione il p-valore risulti di nuovo ≤ 0.05 ?

Nel caso non sia possibile determinare il valore esatto ma solo un limite superiore/inferiore. Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 3. La probabilita e > 0.05.

Quesito 4. Abbiamo fatto un T-test a due code con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.05. Assumendo vera H_A con effect size 0.1, qual è la probabilità che ripetendo il test una seconda volta con un campione della stessa dimensione il p-valore risulti di nuovo ≤ 0.05 ?

Nel caso non sia possibile determinare il valore esatto ma solo un limite superiore/inferiore. Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 3. La probabilita e > 0.05. Qui l'argomento è meno semplice del caso di un test ad una coda quindi anche la risposta 4 è valutata come buona.

Quesito 5. [da rivedere]

Il disturbo D è causato dalla presenza di almeno uno dei fattori $F_1, \ldots, F_4$. Ovvero possiamo assumere che $D = F_1 \cup \cdots \cup F_4$.

Un gruppo di ricercatori, non sospettando nemmeno l'esistenza dei fattori F_i, ipotizza invece ci sia un associazione tra D e un altro fattore A. La prevalinza $\Pr(D)$ nella popolazione generale è nota e i ricercatori vogliono fare il seguente test di ipotesi

$$H_0: \quad \Pr(D) = \Pr(D|A) \qquad\qquad H_A: \quad \Pr(D) < \Pr(D|A)$$

Quindi viene isolato un campione casuale dimensione 50 di individui con fattore A e misurano la proporzione p_0 di individui affetti dal disturbo D. Viene fatto un test binomiale.

Si assuma che A sia indipendente da D. Per semplificare assumiamo che $A, F_1, \ldots, F_4$ siano tra loro mutualmente indipendenti e che $\Pr(F_i) = p$. Si calcoli la probabilità che venga rifiutata l'ipotesi nulla con una significatività $\alpha = 2\%$.

Quesito 6. Preleviamo un campione di rango $n = 9$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei tre valori 2, 6, o 9. Vogliamo testare $H_0 : \mu = 6$ contro $H_A : \mu \in \{2, 9\}$.

1. Che test facciamo?
2. Se la media del campione di cui sopra è $\bar{x} = 5$, quant'è il p-valore?
3. Data questa media campionaria, la probabilità che $\mu \in \{2, 9\}$ è (si scelga tra le seguenti)

   (a) = p-valore; (b) = 1− p-valore; (c) 2/3; (d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Facciamo uno z-test a due code. Risposta 1

$$\Pr\left(|\bar{X}| \geq 5\right) = \Pr\left(\left|\frac{\bar{X} - 6}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \frac{|5 - 6|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(|Z| \geq 1\right)$$

$= 2 * \texttt{norm.cdf(-1)} = 0.317$ Risposta 2

(d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere. Risposta 3

Quesito 7. Preleviamo un campione di rango $n = 25$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 5$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei due valori 3 o 8. Vogliamo testare $H_0 : \mu = 3$ contro $H_A : \mu = 8$.

1. Che test facciamo?
2. Se la media del campione di cui sopra è $\bar{x} = 4$, quant'è il p-valore?
3. Data questa media campionaria, la probabilità che $\mu = 8$ è (si scelga tra le seguenti)

   (a) = p-valore; (b) = 1− p-valore; (c) 2/3; (d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Facciamo uno z-test coda superiore. Risposta 1

$$\Pr\left(\bar{X} \geq 4\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 3}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{4 - 3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(Z \geq 1\right)$$

$=$ `1 - norm.cdf(1)` = `0.3173` Risposta 2

(d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere. Risposta 3

Quesito 8. Assume the null hypothesis is true and denote by P the random variable that gives the p-value you would get if you run a test.

1. What is the probability that $\Pr(P < 0.05)$?
2. If we run the tests 4 times (independently), what is the probability of incorrectly rejecting at least once the null hypotheses with a significance $\alpha = 5\%$?
3. If we run the tests 4 times (independently), how small do we have to make the cutoff (α above) to lower to 5% the probability of incorrectly rejecting at least once the null hypotheses?

Risposta

$\Pr(P < 0.05) = 0.05$ Risposta 1

$1 - \left(1 - \frac{1}{20}\right)^4 = 0.1855$ Risposta 2

$1 - \left(1 - \frac{x}{100}\right)^4 = \frac{1}{20}$, risolvendo

$$x = 100\left(1 - \sqrt[4]{\frac{19}{20}}\right)$$

$= 1.2741\%$ Risposta 3

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`norm.cdf(z)` $= \Pr\left(Z < z\right)$ per $Z \sim N(0,1)$

`norm.ppf(`α`)` $= z_\alpha$ dove z_α è tale che $\Pr\left(Z < z_\alpha\right) = \alpha$ per $Z \sim N(0,1)$