Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 25 ottobre 2018

Quesito 1. Si consideri la funzione $f(x) = |x| - |x+3|$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Determinare $f^{-1}(3)$.

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \geq 0 \\ -2x - 3, & -3 \leq x < 0 \\ 3, & x < -3 \end{cases}$$

da cui $\mathrm{im} f = [-3, 3]$ Risposta 1

$f^{-1}(3) = (-\infty, -3]$ Risposta 2

Quesito 2. Si consideri la funzione $f(x) = \log(x+4)$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Per quali valori si annulla la funzione $f(-x)$?

Esprimere il risultato come frazione di interi, ed eventualmente multipli di e.

$\mathrm{dom} f = (-4, +\infty)$ $\quad$ $\mathrm{im} f = \mathbb{R}$ Risposta 1

$x = 3$ Risposta 2

Quesito 3. Le v.a. discrete X e Y sono indipendenti. La loro distribuzione di probabilità è data da

$$\Pr(X = 4) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(Y = 1) = \frac{4}{5}$$

$$\Pr(X = 5) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(Y = 0) = \frac{1}{5}$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di $X \cdot Y$
2. Calcolare $\mathrm{E}(X \cdot Y)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

$\Pr(X \cdot Y = 4) = \frac{2}{5}$ $\quad$ $\Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{2}{5}$ $\quad$ $\Pr(X \cdot Y = 0) = \frac{1}{5}$ Risposta 1

$\mathrm{E}(X \cdot Y) = 4 \cdot \Pr(X \cdot Y = 4) + 5 \cdot \Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{18}{5}$ Risposta 2

Quesito 4. Una fabbrica produce confezioni di biglie rosse e blu. Una confezione corretta contiene $5 \cdot 10^4$ biglie con circa il 40% di biglie rosse.

Vogliamo essere ragionevolmente sicuri che la percentuale non scenda mai sotto 30%. Stabiliamo quindi due livelli di controllo. Al primo controllo preleviamo 80 biglie a caso da ogni confezione e se ≤ 31 biglie sono rosse la confezione viene sottoposta a ulteriori controlli. Altrimenti viena dichiarata soddisfacente.

1. Si calcoli la probabilità che una confezione con 40% di biglie rosse venga sottoposta al secondo controllo.

2. Si calcoli la probabilità che una confezione con 30% di biglie rosse venga dichiarata soddisfacente.

Il secondo controllo comporta l'estrazione di altre biglie, 800 in totale. Se meno di x% è rosso la confezione viene scartata definitivamente, altrimenti viene dichiarata soddisfacente.

3. A quanto dovremmo fissare x per non scartare al secondo controllo più del 5% di confezioni con 40% di biglie rosse?

4. A quanto dovremmo fissare x per non dichiare soddisfacente al secondo controllo più del 3% di confezioni con 30% di bigie rosse?

Si trattino tutte le estrazioni come estrazioni con *reimbussolamento*.

`binom.cdf( 31, 80, 0.4 ) = 0.4576` Risposta 1

`1 - binom.cdf( 31, 80, 0.3 ) = 0.036` Risposta 2

`binom.ppf( 0.05, 800, 0.4 ) = 297` Risposta 3

`binom.ppf( 0.97, 800, 0.3 ) = 265` Risposta 4

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k,n,p)` $= \Pr\left(X = \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.cdf(k)` $= \Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`bimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove $\mathtt{k}$ è tale che $\Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$