

Domande (qualcuna capziosa e artificiale) per verificare la comprensione del significato di p-valore (ed implicitamente anche del FWER).

N.B. Spesso le domande contengono informazioni irrilevanti.

Quesito 1. Abbiamo fatto un T-test a due code con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.05. Assumendo vera H_0 , qual è la probabilità che, ripetendo il test una seconda volta con un campione di dimensione doppia, il p-valore risulti ≥ 0.1 ?

Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \dots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \dots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \dots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 1. La probabilità è $= 1 - 0.1 = 0.9$.

Quesito 2. Ripetiamo 3 volte lo stesso T-test a due code con campioni di dimensione $n = 25$. Assumendo vera H_0 , qual è la probabilità che in almeno uno di questi test il p-valore risulti ≤ 0.05 ?

Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \dots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \dots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \dots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 1. La probabilità è $= 1 - (0.95)^3 = 0.142625$.

Quesito 3. Abbiamo fatto un T-test coda inferiore con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.05. Assumendo vera H_A con effect size 0.1, qual è la probabilità che ripetendo il test una seconda volta con un campione della stessa dimensione il p-valore risulti di nuovo ≤ 0.05 ?

Nel caso non sia possibile determinare il valore esatto ma solo un limite superiore/inferiore. Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \dots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \dots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \dots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 3. La probabilità è > 0.05 .

Quesito 4. Abbiamo fatto un T-test a due code con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.05. Assumendo vera H_A con effect size 0.1, qual è la probabilità che ripetendo il test una seconda volta con un campione della stessa dimensione il p-valore risulti di nuovo ≤ 0.05 ?

Nel caso non sia possibile determinare il valore esatto ma solo un limite superiore/inferiore. Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \dots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \dots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \dots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 3. La probabilita e > 0.05 . Qui l'argomento è meno semplice del caso di un test ad una coda quindi anche la risposta 4 è valutata come buona.

Quesito 5. Il disturbo D è causato dalla presenza di almeno uno dei fattori F_1, \dots, F_{25} . Un gruppo di ricercatori, non sospettando nemmeno l'esistenza dei fattori F_i , ipotizza invece ci sia un'associazione tra D e un altro fattore A . La prevalenza $\Pr(D)$ nella popolazione generale è nota e i ricercatori vogliono fare il seguente test di ipotesi

$$H_0 : \Pr(D) = \Pr(D|A) \qquad H_A : \Pr(D) < \Pr(D|A)$$

Quindi viene isolato un campione casuale dimensione 3 di individui con fattore A e misurano la proporzione p_0 di individui affetti dal disturbo D . Viene fatto un test binomiale.

Si assuma vera l'ipotesi nulla e che A, F_1, \dots, F_{25} siano tra loro mutualmente indipendenti. Si calcoli la probabilità che venga rifiutata l'ipotesi nulla con una significatività $\alpha = 6\%$.

Quesito 6. Preleviamo un campione di rango $n = 6$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 2$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei tre valori 9, 8, o 2. Vogliamo testare $H_0 : \mu = 9$ contro $H_A : \mu \in \{8, 6\}$.

1. Che test facciamo?
2. Se la media del campione di cui sopra è $\bar{x} = 8$, quant'è il p-valore?
3. Data questa media campionaria, la probabilità che $\mu \in \{6, 10/3\}$ è (si scelga tra le seguenti)
 - (a) = p-valore; (b) = $1 - \text{p-valore}$; (c) $2/3$; (d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere.

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Facciamo uno z-test a due code.

Risposta 1

$$\Pr(|\bar{X}| \geq 8) = \Pr\left(\left|\frac{\bar{X} - 8}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \frac{|8 - 8|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr(|Z| \geq 10/3)$$

$$= 2 * \text{norm.cdf}(-1) = 4$$

Risposta 2

(d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere.

Risposta 3

Quesito 7. Preleviamo un campione di rango $n = 4$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei due valori 4 o 3. Vogliamo testare $H_0 : \mu = 1$ contro $H_A : \mu = 3$.

1. Che test facciamo?
2. Se la media del campione di cui sopra è $\bar{x} = 1$, quant'è il p-valore?
3. Data questa media campionaria, la probabilità che $\mu = 4$ è (si scelga tra le seguenti)
 - (a) = p-valore;
 - (b) = $1 - \text{p-valore}$;
 - (c) $2/3$;
 - (d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere.

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Facciamo uno z-test coda superiore.

Risposta 1

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{X} \geq 3) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - 3}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{3 - 3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr(Z \geq 4) \\ &= 1 - \text{norm.cdf}(2) = 8 \end{aligned}$$

Risposta 2

(d) Non ci sono sufficienti informazioni per rispondere.

Risposta 3

Quesito 8. Assume the null hypothesis is true and denote by P the random variable that gives the p-value you would get if you run a test.

1. What is the probability that $\Pr(P < [0.05, 0.05])$?
2. If we run the tests 0.02 times (independently), what is the probability of incorrectly rejecting at least once the null hypotheses with a significance $\alpha = \frac{1}{50}\%$?
3. If we run the tests 8 times (independently), how small do we have to make the cutoff (α above) to lower to 0.1492% the probability of incorrectly rejecting at least once the null hypotheses?

Risposta

$$\Pr(P < 8) = \frac{1}{50}$$

Risposta 1

$$1 - \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{49} = \frac{49}{50}$$

Risposta 2

$$1 - \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{49} = \frac{49}{50}, \quad \text{risolvendo}$$

$$x = 100 \left(1 - \sqrt[0.2522]{\frac{49}{50}}\right)$$

$$= 0.1492\%$$

Risposta 3

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di Python

`norm.cdf(z)` = $\Pr(Z < z)$ per $Z \sim N(0, 1)$

`norm.ppf(alpha)` = z_α dove z_α è tale che $\Pr(Z < z_\alpha) = \alpha$ per $Z \sim N(0, 1)$