

Domande (qualcuna artificiale) per verificare la comprensione della definizione di distribuzione di probabilità, valore atteso, e varianza per le v.a. discrete. Anche un esercizio sul teorema delle probabilità totali.

Quesito 1. La v.a. discreta X ha distribuzione di probabilità

$$\Pr(X = -2) = \frac{1}{2}, \quad \Pr(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(X = 2) = \frac{1}{6}.$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di X^2
2. Calcolare $\text{Var}(X)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$$\Pr(X^2 = 4) = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \Pr(X^2 = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{Risposta 1}$$

$$E(X) = -2 \cdot \Pr(X = -2) + 1 \cdot \Pr(X = 1) + 2 \cdot \Pr(X = 2) = -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = 4 \cdot \Pr(X^2 = 4) + 1 \cdot \Pr(X^2 = 1) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \frac{1}{9} = \frac{26}{9} \quad \text{Risposta 2}$$

Quesito 2. La v.a. discreta X ha valore atteso $E(X) = 3$ e varianza $\text{Var}(X) = 4$. Qual è il valore atteso di $X(X - 3)$?

Risposta

$$E(X(X - 3)) = E(X^2) - 3 \cdot E(X) = \text{Var}(X) + E(X)^2 - 3 \cdot E(X) = 4 \quad \text{Risposta}$$

Quesito 3. Le v.a. discrete X e Y sono indipendenti. La loro distribuzione di probabilità è data da

$$\Pr(X = 3) = \frac{1}{4} \qquad \Pr(Y = 1) = \frac{3}{5}$$

$$\Pr(X = 5) = \frac{3}{4} \qquad \Pr(Y = 0) = \frac{2}{5}$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di $X \cdot Y$
2. Calcolare $E(X \cdot Y)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$$\Pr(X \cdot Y = 3) = \frac{3}{20} \qquad \Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{9}{20} \qquad \Pr(X \cdot Y = 0) = \frac{2}{5} \qquad \text{Risposta 1}$$

$$E(X \cdot Y) = 3 \cdot \Pr(X \cdot Y = 3) + 5 \cdot \Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{27}{10} \qquad \text{Risposta 2}$$

Quesito 4. Le v.a. discrete X e Y sono indipendenti. La loro distribuzione di probabilità è data da

$$\Pr(X = 2) = \frac{2}{3} \qquad \Pr(Y = 2) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(X = -2) = \frac{1}{3} \qquad \Pr(Y = -2) = \frac{1}{2}$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di $X + Y$
2. Calcolare $E(X + Y)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$$\Pr(X + Y = 4) = \frac{1}{3} \qquad \Pr(X + Y = -4) = \frac{1}{6} \qquad \Pr(X + Y = 0) = \frac{1}{2} \qquad \text{Risposta 1}$$

$$E(X + Y) = 4 \cdot \Pr(X + Y = 4) - 4 \cdot \Pr(X + Y = -4) = \frac{2}{3} \qquad \text{Risposta 2}$$

Quesito 5. Della v.a. discreta X conosciamo la distribuzione di probabilità

$$\Pr(X = 3) = \frac{2}{5}$$

$$\Pr(X = 2) = \frac{3}{5}$$

Della v.a. discreta Y conosciamo la distribuzione condizionata a X

$$\Pr(Y = 5 \mid X = 3) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(Y = 5 \mid X = 2) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(Y = 4 \mid X = 3) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(Y = 4 \mid X = 2) = \frac{3}{4}$$

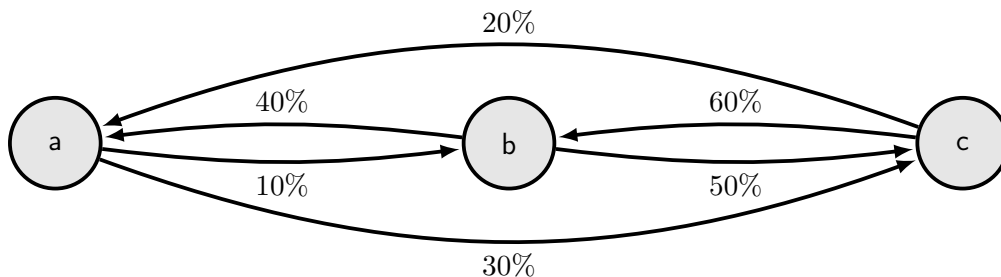
Calcolare la distribuzione di probabilità di Y

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$$\begin{aligned} \Pr(Y = 5) &= \Pr(Y = 5 \mid X = 3) \cdot \Pr(X = 3) + \Pr(Y = 5 \mid X = 2) \cdot \Pr(X = 2) = \frac{7}{20} \\ \Pr(Y = 4) &= 1 - \Pr(Y = 5) = \frac{13}{20} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Pr(Y = 5) &= \Pr(Y = 5 \mid X = 3) \cdot \Pr(X = 3) + \Pr(Y = 5 \mid X = 2) \cdot \Pr(X = 2) = \frac{7}{20} \\ \Pr(Y = 4) &= 1 - \Pr(Y = 5) = \frac{13}{20} \end{aligned}} \right\} \text{ Risposta}$$

Quesito 6. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate saltando tra tre foglie di ninfea che indichiamo con **a**, **b**, e **c**. Ogni ora salta da foglia una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Supponiamo che il rospo sia in **a** al tempo $t = 1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t = 2$ il rospo passi a **c** ?
3. Qual è la probabilità che al tempo $t = 3$ il rospo si trovi in **c** ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t .

Dal diagramma inferiamo

$$\Pr(R_2 = c \mid R_1 = a) = \frac{3}{10}$$

Risposta 1

Ci sono tre casi mutualmente esclusivi per il percorso del rospo ai tempi 1, 2, 3 che elenchiamo con le rispettive probabilità.

a, b, c

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

a, a, c

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

a, c, c

$$\frac{1}{20} + \frac{9}{50} + \frac{3}{50} = \frac{29}{100}$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

Risposta 2