Quesito 1. Si consideri una funzione $f(x)$ la cui derivata prima è data dalla funzione $f'(x) = e^{-5x}$.

1. Indicare gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ cresce e quelli in cui la funzione decresce.
2. Trovare massimi e minimi locali di $f(x)$.

Risposta

$f(x)$ cresce in $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, infatti $e^{-5x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ Risposta 1

$f(x)$ non ha massimi e minimi locali Risposta 2

Quesito 2. Si consideri una funzione $f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ la cui derivata prima è data dalla funzione $f'(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x}$.

1. Indicare gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ cresce e quelli in cui la funzione decresce.
2. Trovare massimi e minimi locali di $f(x)$.

Risposta

$f(x)$ cresce in $(-\sqrt{5}, 0)$ e $(\sqrt{5}, +\infty)$; $f(x)$ decresce in $(-\infty, -\sqrt{5})$ e $(0, \sqrt{5})$ Risposta 1

$f(x)$ ha minimi locali in $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$ Risposta 2

Quesito 3. Si consideri una funzione $f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ la cui derivata prima è data dalla funzione $f'(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x}$.

1. Indicare gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ cresce e quelli in cui la funzione decresce.
2. Trovare massimi e minimi locali di $f(x)$.

Risposta

$f(x)$ cresce in $(0, +\infty)$; $f(x)$ decresce in $(-\infty, 0)$ Risposta 1

$f(x)$ non ha minimi e massimi locali. Risposta 2

Quesito 4. Si consideri una funzione $f(x)$ definita sull'intervallo $(0, +\infty)$ la cui derivata prima è data dalla funzione $f'(x) = 6\log(x)$.

1. Indicare gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ cresce e quelli in cui la funzione decresce.
2. Trovare massimi e minimi locali di $f(x)$.

Risposta

$f(x)$ cresce in $(1, +\infty)$; $f(x)$ decresce in $(0, 1)$ Risposta 1

$f(x)$ ha minimo locale in 1 Risposta 2

Quesito 5. Si consideri un corpo lasciato cadere da una torre alta 500 metri. Sia $f(t) = 5t^2$ la funzione che ne descrive la distanza dalla cima della torre ad ogni secondo (quando $t = 0$, $f(t) = 0$ ovvero il corpo si trova in cima alla torre).

1. Qual è la velocità istantanea del corpo dopo 2 secondi?
2. Qual è la velocità istantanea del corpo quando tocca terra?

Risposta

La funzione $f'(t) = 10t$ descrive l'andamento della velocità istantanea, quindi $f'(2) = 20$ Risposta 1

Il corpo tocca terra quando $f(t) = 500$, ovvero quando $5t^2 = 500$, ovvero a $t = 10$.

Quindi $f'(10) = 100$ Risposta 2

Quesito 6. Sia data la funzione $f(x) = x^2 + 3x$

1. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto (-5, 10).
2. In quali intervalli la funzione è decrescente?

Risposta

$y = -7x - 25$ Risposta 1

$f(x)$ decresce in $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ Risposta 2

Quesito 7. Sia data la funzione $f(x) = x^3 + 1$

1. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $(1, 2)$.
2. In quali intervalli la funzione è crescente?

Risposta

$y = 3x - 1$ Risposta 1

$f(x)$ cresce in $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ Risposta 2

Quesito 8. Si consideri una particella che si muove lungo una retta. Sia $f(t) = 4t^3 + 6t$ la funzione che ne descrive la distanza in metri dal punto di partenza ogni secondo.

1. Qual è la velocità istantanea del corpo dopo 4 secondi?
2. Quando la velocità del corpo è superiore a 100 metri al secondo?

Risposta

La velocità istantanea è descritta dalla funzione $f'(t) = 12t^2 + 6$ quindi $f'(4) = 198$ Risposta 1

La velocità supera 100 quando $f'(t) = 12t^2 + 6 > 100$ quindi $t > \sqrt{\frac{47}{6}}$ Risposta 2

Quesito 9. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 7x + 1$.

1. Determinare la derivata prima $f'(x)$.
2. Trovare massimi e minimi locali di $f(x)$.

Risposta

$f'(x) = 3x^2 + 7$ Risposta 1

La derivata è sempre positiva quindi $f(x)$ non ha massimi e minimi locali Risposta 2

Quesito 10. Si consideri la funzione $f(x) = x\cos(x)$.

1. Determinare la derivata $f'(x)$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente a $f(x)$ nel punto $(\pi, -\pi)$.

Risposta

$f'(x) = x\sin x + \cos x$ Risposta 1

$y = -x - 2\pi$ Risposta 2

Quesito 11. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Scrivere l'approssimazione lineare di $f(x)$ in 4.
2. Usare il risultato precedente per approssimare i valori di $\sqrt{4.1}$ e $\sqrt{3.9}$.

Risposta

L'approssimazione lineare di $f(x)$ in 4 è data da $f'(4)(x-4) + f(4)$,

essendo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si ha $\frac{1}{4}x + 1$ Risposta 1

$\sqrt{4.1} \cong 2.025$ e $\sqrt{3.9} \cong 1.975$ Risposta 2

Quesito 12. Si consideri la funzione $f(x) = e^x$.

1. Scrivere l'approssimazione lineare di $f(x)$ in 1.
2. Usare il risultato precedente per approssimare i valori di $e^{0.9}$ e $e^{1.1}$ (si approssimi e con 2.7).

Risposta

L'approssimazione lineare di $f(x)$ in 1 è data da $f'(1)(x-1)+f(1)$,
essendo $f'(x)=e^x$ si ha $e\cdot x$ Risposta 1

$e^{0.9}\cong 2.43$ e $e^{1.1}\cong 2.97$ Risposta 2

Quesito 13. Si consideri la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

1. Scrivere l'approssimazione lineare di $f(x)$ in 1.
2. Usare il risultato precedente per approssimare i valori di $\sqrt[3]{1.1}$ e $\sqrt[3]{1.2}$.

Risposta

L'approssimazione lineare di $f(x)$ in 1 è data da $f'(1)(x-1)+f(1)$,
essendo $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ si ha $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ Risposta 1

$\sqrt[3]{1.1}\cong 1.03$ e $\sqrt[3]{1.2}\cong 1.06$ Risposta 2