

Quesito 1. Si consideri la funzione $f(x) = |x| - |x + 3|$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Determinare $f^{-1}(3)$.

$\text{dom} f = \mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \geq 0 \\ -3x - 3, & -3 \leq x < 0 \\ 3, & x < -3 \end{cases}$$

da cui $\text{im} f = [-3, 3]$

[Risposta 1](#)

$f^{-1}(3) = (-\infty, -3]$

[Risposta 2](#)

Quesito 2. Si consideri la funzione $f(x) = \log(x + 4)$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Per quali valori si annulla la funzione $f(-x)$?

Esprimere il risultato come frazione di interi, ed eventualmente multipli di e .

$\text{dom} f = (-4, +\infty)$ $\text{im} f = \mathbb{R}$

[Risposta 1](#)

$x = 3$

[Risposta 2](#)

Quesito 3. Le v.a. discrete X e Y sono indipendenti. La loro distribuzione di probabilità è data da

$$\begin{aligned} \Pr(X = 5) &= \frac{1}{2} & \Pr(Y = 1) &= \frac{2}{5} \\ \Pr(X = 4) &= \frac{1}{2} & \Pr(Y = 0) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di $X \cdot Y$
2. Calcolare $E(X \cdot Y)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

$$\Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{1}{5} \quad \Pr(X \cdot Y = 4) = \frac{1}{5} \quad \Pr(X \cdot Y = 0) = \frac{3}{5} \quad \text{Risposta 1}$$

$$E(X \cdot Y) = 5 \cdot \Pr(X \cdot Y = 5) + 4 \cdot \Pr(X \cdot Y = 4) = \frac{9}{5} \quad \text{Risposta 2}$$

Quesito 4. Una fabbrica produce confezioni di biglie rosse e blu. Una confezione corretta contiene $4 \cdot 10^6$ biglie con circa il 60% di biglie rosse.

Vogliamo essere ragionevolmente sicuri che la percentuale non scenda mai sotto 50%. Stabiliamo quindi due livelli di controllo. Al primo controllo preleviamo 100 biglie a caso da ogni confezione e se ≤ 59 biglie sono rosse la confezione viene sottoposta a ulteriori controlli. Altrimenti viene dichiarata soddisfacente.

1. Si calcoli la probabilità che una confezione con 60% di biglie rosse venga sottoposta al secondo controllo.
2. Si calcoli la probabilità che una confezione con 50% di biglie rosse venga dichiarata soddisfacente.

Il secondo controllo comporta l'estrazione di altre biglie, 1000 in totale. Se meno di $x\%$ è rosso la confezione viene scartata definitivamente, altrimenti viene dichiarata soddisfacente.

3. A quanto dovremmo fissare x per non scartare al secondo controllo più del 4% di confezioni con 60% di biglie rosse?

4. A quanto dovremmo fissare x per non dichiarare soddisfacente al secondo controllo più del 5% di confezioni con 50% di bigie rosse?

Si trattino tutte le estrazioni come estrazioni con *reimbussolamento*.

`binom.cdf(59, 100, 0.6) = 0.4567`

Risposta 1

`1 - binom.cdf(58, 100, 0.5) = 0.0284`

Risposta 2

`binom.ppf(0.04, 1000, 0.6) = 573`

Risposta 3

`binom.ppf(0.95, 1000, 0.5) = 526`

Risposta 4

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di Python

`binom.pmf(k,n,p)` = $\Pr(X = k)$ dove $X \sim B(n, p)$

`binom.cdf(k)` = $\Pr(X \leq k)$ dove $X \sim B(n, p)$

`bimom.ppf(q, n, p)` = k dove k è tale che $\Pr(X \leq k) \cong q$ per $X \sim B(n, p)$