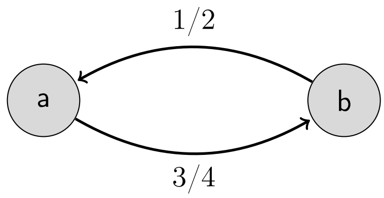
Esperimento con HMM (senza definirli)

Quesito 1. Consideriamo il percorso aleatorio descritto in figura. Nello stato a viene lanciata una moneta a valori T o C. La probabilità che esca T è 4/5. Nello stato b viene lanciata una moneta con probabilità 2/5 che esca T.



Le transizioni aa e bb sono implicite.

Il percorso comincia (al tempo t=0) dallo stato a. Al tempo $t = 2$ il risultato del lancio della moneta è T. Qual è la probabilità che il processo al tempo t=2 si trovi nello stato a ?

Indichiamo con $S_t \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ le variabili aleatorie che danno lo stato al tempo t. Indichiamo con $X_t \in \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}$ le variabili aleatorie che danno il risultato del lancio al tempo t. Si esprima usando queste v.a. la probabilità condizionata che si intende calcolare.

Esprimere i risultati numerici come frazioni di interi.

Risposta

Dalla figura inferiamo la matrice di transizione $P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Il testo riporta le seguenti probabilità:

$\Pr\big(S_0 = \mathsf{a}\big) = 1$ e per ogni t: $\Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{a}\big) = \frac{4}{5}$, $\Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{b}\big) = \frac{2}{5}$

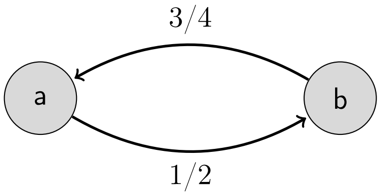
$$\begin{bmatrix} \Pr(S_1 = \mathsf{a}) \\ \Pr(S_1 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \Pr(S_0 = \mathsf{a}) \\ \Pr(S_0 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Pr(S_2 = \mathsf{a}) \\ \Pr(S_2 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \Pr(S_1 = \mathsf{a}) \\ \Pr(S_1 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Pr\big(X_2 = \mathsf{T}\big) &= \Pr\big(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{a}\big) \cdot \Pr\big(S_2 = \mathsf{a}\big) + \Pr\big(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{b}\big) \cdot \Pr\big(S_2 = \mathsf{b}\big) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{16} + \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{16} = \frac{23}{40} \end{aligned}$$

$$\Pr(S_2 = \mathsf{a} \mid X_2 = \mathsf{T}) = \frac{\Pr(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{a}) \cdot \Pr(S_2 = \mathsf{a})}{\Pr(X_2 = \mathsf{T})} = \frac{14}{23}$$

Risposta

Quesito 2. Consideriamo il percorso aleatorio descritto in figura. Quando il processo si trova nello stato a viene lanciata una moneta a valori T o C. La probabilità che esca T è $3/5$. Nello stato b viene lanciata una moneta con probabilità $2/5$ che esca T.



Le transizioni aa e bb sono implicite.

Il percorso comincia (al tempo $t{=}0$) dallo stato b. Al tempo 1 e 2 il risultato del lancio della moneta è TT. Qual è la probabilità che gli stati corrispondenti siano ab ?

Esprimere i risultati numerici come frazioni di interi.

Per sveltire la soluzione calcoliamo le seguenti probabilità. Indichiamo con $S_t \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ le variabili aleatorie che danno lo stato al tempo t. Indichiamo con $X_t \in \{\mathsf{T},\mathsf{C}\}$ le variabili aleatorie che danno il risultato del lancio al tempo t. Per leggibilità nelle segienti abbiamo omesso di scrivere $X_1X_2 =$ e $S_1S_2 =$.

$$\Pr(\mathsf{TT} \mid \mathsf{aa}) = \frac{9}{25} \qquad \Pr(\mathsf{TT} \mid \mathsf{ab}) = ? \qquad \Pr(\mathsf{aa}) = \frac{3}{8} \qquad \Pr(\mathsf{ab}) = ?$$

$$\Pr(\mathsf{TT} \mid \mathsf{ba}) = \frac{6}{25} \qquad \Pr(\mathsf{TT} \mid \mathsf{bb}) = \frac{4}{25} \qquad \Pr(\mathsf{ba}) = \frac{3}{16} \qquad \Pr(\mathsf{bb}) = \frac{1}{16}$$

Risposta

Il testo riporta le seguenti probabilità:

$$\Pr\big(S_0 = \mathsf{b}\big) = 1 \qquad \text{e per ogni } t \qquad \Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{a}\big) = \frac{3}{5}, \qquad \Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{b}\big) = \frac{2}{5}$$

$$\Pr(X_1X_2 = \mathsf{TT} \mid S_1S_2 = \mathsf{ab}) = \Pr(X_1 = \mathsf{T} \,|\, S_1 = \mathsf{a}) \cdot \Pr(X_2 = \mathsf{T} \,|\, S_2 = \mathsf{b}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Dalla figura inferiamo la matrice di transizione $P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, quindi $\begin{bmatrix} \Pr(S_1 = \mathsf{a}) \\ \Pr(S_1 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Pr(S_1S_2 = \mathsf{ab}) = \Pr(S_1 = \mathsf{a}) \cdot \Pr(S_2 = \mathsf{b} \mid S_1 = \mathsf{a}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Nelle seguenti omettiamo di scrivere $X_1X_2 =$ e $S_1S_2 =$

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathsf{TT}) &= \sum_{i,j \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}} \Pr(ij) \cdot \Pr(\mathsf{TT} \,|\, ij) \\
&= \Pr(\mathsf{aa}) \cdot \Pr(\mathsf{TT} \,|\, \mathsf{aa}) + \Pr(\mathsf{ab}) \cdot \Pr(\mathsf{TT} \,|\, \mathsf{ab}) + \Pr(\mathsf{bb}) \cdot \Pr(\mathsf{TT} \,|\, \mathsf{bb}) + \Pr(\mathsf{ba}) \cdot \Pr(\mathsf{TT} \,|\, \mathsf{ba}) \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{25} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{25} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{25} + \frac{3}{16} \cdot \frac{6}{25} = \frac{27}{200}
\end{aligned}$$

$$\Pr(\mathsf{ab} \,|\, \mathsf{TT}) = \frac{\Pr(\mathsf{TT} \,|\, \mathsf{ab}) \cdot \Pr(\mathsf{ab})}{\Pr(\mathsf{TT})} = \frac{(6/25) \cdot (3/8)}{27/200} = \frac{2}{3} \qquad \text{Risposta}$$