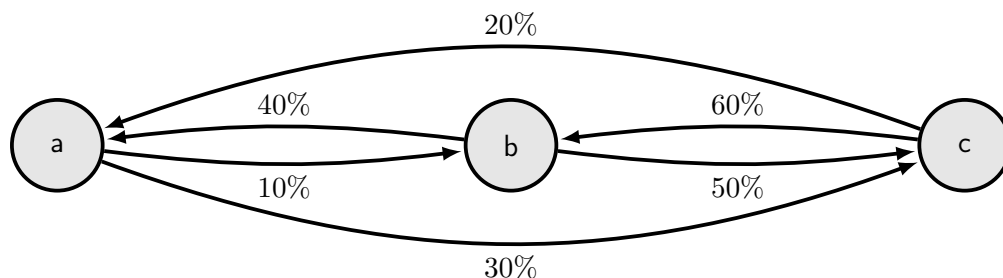


Quesito 1. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate saltando tra tre foglie di ninfea che indichiamo con a , b , e c . Ogni ora salta da foglia una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Osservando il rospo in un momento qualsiasi, lo troveremo in a , b , o c con probabilità rispettivamente $21/50$, $13/50$, e $8/25$. Supponiamo che il rospo sia in a al tempo $t = 1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t = 2$ il rospo passi a b ?
2. Qual è la probabilità che al tempo $t = 0$ il rospo fosse in c ?
3. Qual è la probabilità che al tempo $t = 3$ il rospo si trovi in c ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t .

Dal testo inferiamo che $\Pr(R_t = a) = 21/50$, $\Pr(R_t = b) = 13/50$, e $\Pr(R_t = c) = 8/25$

Dal diagramma inferiamo

$$\Pr(R_2 = b \mid R_1 = a) = 1/10$$

Risposta 1

$$\Pr(R_1 = a \mid R_0 = c) = 1/5$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Pr(R_0 = c \mid R_1 = a) &= \frac{\Pr(R_1 = a \mid R_0 = c) \cdot \Pr(R_0 = c)}{\Pr(R_1 = a)} = \frac{(1/5) \cdot (8/25)}{21/50} \\ &= 16/105 \end{aligned}$$

Risposta 2

Ci sono tre casi mutualmente esclusivi per il percorso del rospo ai tempo 1, 2, 3 che elenchiamo con le rispettive probabilità.

a, b, c

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

a, a, c

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

a, c, c

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

$$\frac{1}{20} + \frac{9}{50} + \frac{3}{50} = \frac{29}{100}$$

Risposta 3

Quesito 2. Consideriamo sequenze di 28 caratteri dell'alfabeto $\{a, g, c, u\}$. Assumiamo che tutti i caratteri occorranza con la stessa probabilità indipendentemente dalla posizione. Fissata una sequenza s_0 , qual è la probabilità che un'altra sequenza s_1 scelta in modo indipendente coincida con s_0 in ≥ 13 posizioni?

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$$X \sim B(28, 1/4)$$

$$\Pr(X \geq 13) = 1 - \Pr(X \leq 12) = 1 - \text{binom.cdf}(12, 28, 1/4) = 0.0112$$

Risposta

Quesito 3. Vogliamo testare $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_A : \mu > \mu_0$ per una popolazione distribuita normalmente con deviazione standard nota σ . Fissiamo una significatività α e una potenza $1 - \beta$. L'effect-size che ci interessa è δ . Esprimere, in funzione dei parametri che assumiamo noti, le condizioni cui deve soddisfare il rango n del campione.

Risposta

$$\text{Il rango necessario è il minimo } n \text{ tale che } \Pr\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu_0 - \delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq \beta$$

$$\text{dove } x_\alpha \text{ tale che } \Pr\left(Z \geq \frac{x_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Risposta

Il seguente quesito NON è stato assegnato in classe. Lo includo perché agli studenti che chiedevano suggerimento per la soluzione dell Quesito 2 ho erroneamente suggerito la soluzione di questo.

Quesito 4. Consideriamo sequenze di caratteri dell'alfabeto $\{a, g, c, u\}$. Assumiamo che tutti i caratteri occorranza con la stessa probabilità indipendentemente dalla posizione. Leggiamo due sequenze s_0 ed s_1 da sinistra a destra, qual è la probabilità che la prima differenza occorra non prima di 13 caratteri (ovvero occorre al carattere 13 o ai seguenti)?

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$$X \sim NB(28, 1/4)$$

$$\Pr(X \geq 13) = 1 - \Pr(X \leq 12) = 1 - \text{nbinom.cdf}(12, 28, 1/4) = 1.0$$

Risposta

Formulario: se $X \sim B(n, p)$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(n, p)$ allora $E(X) = n(1 - p)/p$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di Python

`binom.pmf(k, n, p)` = $\Pr(X = k)$ dove $X \sim B(n, p)$

`binom.cdf(k, n, p)` = $\Pr(X \leq k)$ dove $X \sim B(n, p)$

`bimom.ppf(q, n, p)` = k dove k è tale che $\Pr(X \leq k) \cong q$ per $X \sim B(n, p)$

`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(n, p)$.

`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.

`t.xxx(..., ν)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.