

Domande per verificare la comprensione del significato di errori del II tipo e di potenza.

N.B. Le domande potrebbero contenere informazioni irrilevanti.

Quesito 1. Consideriamo una popolazione normale con $\sigma = 6$ e media $\mu \in \{2, 5, 9\}$ ignota.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 5$ contro $H_A : \mu \in \{2, 9\}$. Preleviamo un campione di rango $n = 16$ e decidiamo di rifiutare H_0 se la media campionaria \bar{x} non appartiene all'intervallo $[4, 6]$.

1. Qual è la significatività del test?
2. Qual è la potenza del test?

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \Pr(4 \leq \bar{X} \leq 6) \text{ dove } \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ con } \mu = 5 \text{ e } \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{4} \\ &= 1 - \Pr\left(-\frac{2}{3} \leq Z \leq \frac{2}{3}\right) = 2 * \text{norm.cdf}(-2/3) = 0.505\end{aligned}$$

Risposta 1

Per calcolare la potenza assumo H_A valga nel caso più sfavorevole $\mu = 2$

$$\begin{aligned}1 - \beta &= 1 - \Pr(4 \leq \bar{X} \leq 6) \text{ dove } \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ con } \mu = 2 \text{ e } \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{4} \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{4}{3} \leq Z \leq \frac{8}{3}\right) = \text{norm.cdf}(4/3) + \text{norm.cdf}(-8/3) \\ &= 0.9126\end{aligned}$$

Risposta 2

Quesito 2. Preleviamo un campione di rango $n = 9$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi valori dell'intervallo $[1, 4]$.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 1$ contro $H_A : \mu \in (1, 4]$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.1$ otteniamo che per uno z-test a coda superiore la zona di rifiuto per la media campionaria è $[2.282, +\infty)$.

1. Nel caso $H_A : \mu \in [3, 4]$ qual'è la massima probabilità β di non rigettare H_0 (errore II tipo)?
2. Calcolare la potenza del test con l'effect-size suggerito nel punto precedente.

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Il caso più sfavorevole si ottiene quando $\mu = 3$. Sia $\bar{X} \sim N(3, \sigma^2/n)$

$$\beta = \Pr(\bar{X} < 2.282) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 3}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{-0.718}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr(Z < -0.718)$$

$$\beta = \text{norm.cdf}(-0.718) = 0.2364$$

Risposta 1

$$\text{Con un effect size } \delta = 2 \text{ la potenza del test è } 1 - \beta = 1 - \text{norm.cdf}(-0.718) = 0.7636$$

Risposta 2

Quesito 3. Vogliamo testare $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_A : \mu > \mu_0$ per una popolazione distribuita normalmente con deviazione standard nota σ . Fissiamo una significatività α e una potenza $1 - \beta$. L'effect-size che ci interessa è δ . Esprimere, in funzione dei parametri che assumiamo noti, le condizioni cui deve soddisfare il rango n del campione.

Risposta

Il rango necessario è il minimo n tale che $\Pr\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu_0 - \delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq \beta$

dove x_α tale che $\Pr\left(Z \geq \frac{x_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$

Risposta

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats`

`norm.cdf(z)` = $\Pr(Z < z)$ per $Z \sim N(0, 1)$

`norm.ppf(alpha)` = z_α dove z_α è tale che $\Pr(Z < z_\alpha) = \alpha$ per $Z \sim N(0, 1)$