

Quesito 1. Consideriamo sequenze di 28 caratteri dell'alfabeto $\{a, g, c, t\}$. Assumiamo che tutti i caratteri occorranza con la stessa probabilità indipendentemente dalla posizione. Fissata una sequenza s_0 , qual è la probabilità che un'altra sequenza s_1 scelta in modo indipendente coincida con s_0 in ≥ 15 posizioni?

Esprimere il risultato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$$X \sim NB(28, 1/4)$$

$$\Pr(X \geq 15) = 1 - \Pr(X \leq 14) = 1 - \text{nbinom.cdf}(14, 28, 1/4) = 1.0$$

Risposta

Quesito 2. Della v.a. discreta X conosciamo la distribuzione di probabilità

$$\Pr(X = 4) = \frac{3}{4}$$

$$\Pr(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Della v.a. discreta Y conosciamo la distribuzione condizionata a X

$$\Pr(Y = 3 \mid X = 4) = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(Y = 3 \mid X = 2) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(Y = 5 \mid X = 4) = \frac{2}{3}$$

$$\Pr(Y = 5 \mid X = 2) = \frac{1}{2}$$

Calcolare la distribuzione di probabilità di Y

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

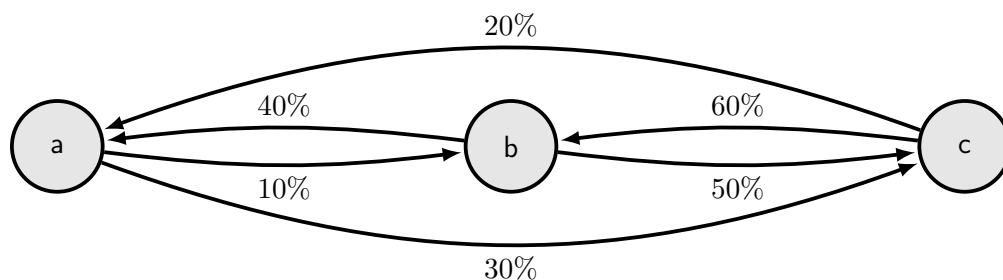
Risposta

$$\Pr(Y = 3) = \Pr(Y = 3 \mid X = 4) \cdot \Pr(X = 4) + \Pr(Y = 3 \mid X = 2) \cdot \Pr(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$\Pr(Y = 5) = 1 - \Pr(Y = 3) = \frac{5}{8}$$

} Risposta

Quesito 3. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate saltando tra tre foglie di ninfea che indichiamo con **a**, **b**, e **c**. Ogni ora salta da foglia una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Osservando il rospo in un momento qualsiasi, lo troveremo in **a**, **b**, o **c** con probabilità rispettivamente $21/50$, $13/50$, e $8/25$. Supponiamo che il rospo sia in **a** al tempo $t = 1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t = 2$ il rospo passi a **b** ?
2. Qual è la probabilità che al tempo $t = 0$ il rospo fosse in **c** ?
3. Qual è la probabilità che al tempo $t = 3$ il rospo si trovi in **c** ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t .

Dal testo inferiamo che $\Pr(R_t = a) = 21/50$, $\Pr(R_t = b) = 13/50$, e $\Pr(R_t = c) = 8/25$

Dal diagramma inferiamo

$$\Pr(R_2 = b \mid R_1 = a) = 1/10$$

Risposta 1

$$\Pr(R_1 = a \mid R_0 = c) = 1/5$$

Quindi

$$\begin{aligned}\Pr(R_0 = c \mid R_1 = a) &= \frac{\Pr(R_1 = a \mid R_0 = c) \cdot \Pr(R_0 = c)}{\Pr(R_1 = a)} = \frac{(1/5) \cdot (8/25)}{21/50} \\ &= 16/105\end{aligned}$$

Risposta 2

Ci sono tre casi mutualmente esclusivi per il percorso del rospo ai tempo 1, 2, 3 che elenchiamo con le rispettive probabilità.

$$\begin{array}{l} a, b, c \qquad \qquad \qquad \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a, a, c \qquad \qquad \qquad \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a, c, c \qquad \qquad \qquad \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50} \end{array}$$

$$\frac{1}{20} + \frac{9}{50} + \frac{3}{50} = \frac{29}{100}$$

Risposta 3

Formulario: se $X \sim B(n, p)$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(n, p)$ allora $E(X) = n(1 - p)/p$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \cdot \sqrt{1/n_x + 1/n_y}} \quad \text{dove } S^2 = \frac{n_x - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_x^2 + \frac{n_y - 1}{n_x + n_y - 2} \cdot S_y^2 \quad \text{ha distribuzione } t(n_x + n_y - 2)$$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di Python

`binom.pmf(k, n, p)` = $\Pr(X = k)$ dove $X \sim B(n, p)$

`binom.cdf(k, n, p)` = $\Pr(X \leq k)$ dove $X \sim B(n, p)$

`bimom.ppf(q, n, p)` = k dove k è tale che $\Pr(X \leq k) \cong q$ per $X \sim B(n, p)$

`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(n, p)$.

`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.

`t.xxx(..., ν)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.