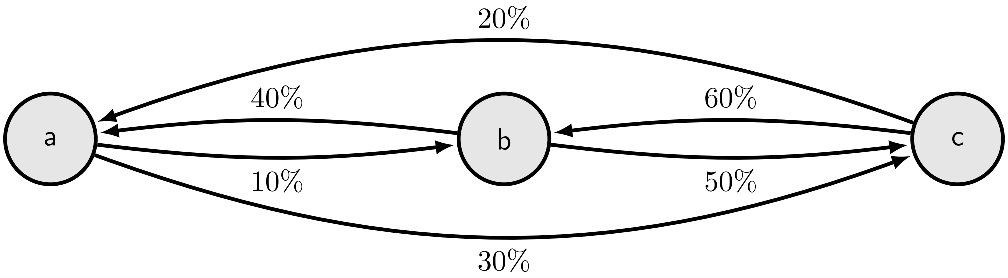
Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 10 gennaio 2018

Quesito 1. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate saltando tra tre foglie di ninfea che indichiamo con a, b, e c. Ogni ora salta da foglia una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Osservando il rospo in un momento qualsiasi, lo troveremo in a, b, o c con probabilità rispettivamente $21/50$, $13/50$, e $8/25$. Supponiamo che il rospo sia in a al tempo $t = 1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t = 2$ il rospo passi a b ?
2. Qual è la probabilità che al tempo $t = 0$ il rospo fosse in c ?
3. Qual è la probabilità che al tempo $t = 3$ il rospo si trovi in c ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t.

Dal testo inferiamo che $\Pr(R_t = \mathsf{a}) = 21/50$, $\Pr(R_t = \mathsf{b}) = 13/50$, e $\Pr(R_t = \mathsf{c}) = 8/25$

Dal diagramma inferiamo

$$\Pr(R_2 = \mathsf{b} \mid R_1 = \mathsf{a}) = 1/10 \qquad \text{Risposta 1}$$

$$\Pr(R_1 = \mathsf{a} \mid R_0 = \mathsf{c}) = 1/5$$

Quindi

$$\Pr(R_0 = \mathsf{c} \mid R_1 = \mathsf{a}) = \frac{\Pr(R_1 = \mathsf{a} \mid R_0 = \mathsf{c}) \cdot \Pr(R_0 = \mathsf{c})}{\Pr(R_1 = \mathsf{a})} = \frac{(1/5) \cdot (8/25)}{21/50}$$

$$= 16/105 \qquad \text{Risposta 2}$$

Ci sono tre casi mutualmente escusivi per il percorso del rospo ai tempo $1, 2, 3$ che elenchiamo con le rispettive probabilità.

$\mathsf{a, b, c}$ $\qquad \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

$\mathsf{a, a, c}$ $\qquad \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

$\mathsf{a, c, c}$ $\qquad \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$

$$\frac{1}{20} + \frac{9}{50} + \frac{3}{50} = \frac{29}{100} \qquad \text{Risposta 3}$$

Quesito 2. Consideriamo sequenze di 28 caratteri dell'alfabeto $\{a, g, c, u\}$. Assumiamo che tutti i caratteri occorrano con la stessa probabilità indipendentemente dalla posizione. Fissata una sequenza s_0, qual è la probabilità che un'altra sequenza s_1 scelta in modo indipendente coincida con s_0 in ≥ 13 posizioni?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$X \sim B(28, 1/4)$

$\Pr(X \geq 13) \;=\; 1 - \Pr(X \leq 12)$ $\quad = $ `1 - binom.cdf( 12, 28, 1/4 )` `= 0.0112` Risposta

Quesito 3. Vogliamo testare $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_A : \mu > \mu_0$ per una popolazione distribuita normalmente con deviazione standard nota σ. Fissiamo una significatività α e una potenza $1 - \beta$. L'effect-size che ci interessa è δ. Esprimere, in funzione dei parametri che assumiamo noti, le condizioni cui deve soddisfare il rango n del campione.

Risposta

Il rango necessario è il minimo n tale che $\Pr\left(Z < \dfrac{x_\alpha - \mu_0 - \delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq \beta$

dove x_α tale che $\Pr\left(Z \geq \dfrac{x_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$ Risposta

Il seguente quesito NON è stato assegnato in classe. Lo includo perché agli studenti che chiedevano suggerimento per la soluzione dell Quesito 3 ho erroneamente suggerito la soluzione di questo.

Quesito 4. Consideriamo sequenze di caratteri dell'alfabeto $\{a, g, c, u\}$. Assumiamo che tutti i caratteri occorrano con la stessa probabilità indipendentemente dalla posizione. Leggiamo due sequenze s_0 ed s_1 da sinistra a destra, qual è la probabilità che la prima differenza occorra non prima di 13 caratteri (ovvero occorre al carattere 13 o ai seguenti)?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

$X \sim NB(28, 1/4)$

$\Pr(X \geq 13) \;=\; 1 - \Pr(X \leq 12)$ $\quad = $ `1 - nbinom.cdf( 12, 28, 1/4 )` `= 1.0` Risposta

---

Formulario: se $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = np$
se $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$ allora $E(X) = n(1-p)/p$

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k, n, p)` $= \Pr\big(X = \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.cdf(k, n, p)` $= \Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`bimom.ppf(q, n, p)` $=$ `k` dove `k` è tale che $\Pr\big(X \leq \mathtt{k}\big) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`nbinom.xxx(...)`, è l'analogo per $X \sim NB(\mathtt{n}, \mathtt{p})$.

`norm.xxx(...)`, è l'analogo per $Z \sim N(0, 1)$.

`t.xxx(..., ` ν`)`, è l'analogo per $T \sim t(\nu)$.