Matematica e BioStatistica con Applicazioni Informatiche
Esercitazione in aula del 25 ottobre 2018

Quesito 1. Si consideri la funzione $f(x) = |x| - |x+3|$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Determinare $f^{-1}(3)$.

Risposta

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \geq 0 \\ -2x - 3, & -3 \leq x < 0 \\ 3, & x < -3 \end{cases}$$

da cui $\mathrm{im} f = [-3, 3]$ Risposta 1

$f^{-1}(3) = (-\infty, -3]$ Risposta 2

Quesito 2. Si consideri la funzione $f(x) = \log(x+4)$.

1. Determinare dominio e immagine della funzione.
2. Per quali valori si annulla la funzione $f(-x)$?

Esprimere il risultato come frazione di interi, ed eventualmente multipli di e.

Risposta $\mathrm{dom} f = (-4, +\infty)$ $\mathrm{im} f = \mathbb{R}$ Risposta 1

$x = 3$ Risposta 2

Quesito 3. Le v.a. discrete X e Y sono indipendenti. La loro distribuzione di probabilità è data da

$$\Pr(X=4) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(Y=1) = \frac{4}{5}$$

$$\Pr(X=5) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(Y=0) = \frac{1}{5}$$

1. Calcolare la distribuzione di probabilità di $X \cdot Y$
2. Calcolare $\mathrm{E}(X \cdot Y)$.

Esprimere i numeri razionali come frazioni.

Risposta

$\Pr(X \cdot Y = 4) = \frac{2}{5}$ $\Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{2}{5}$ $\Pr(X \cdot Y = 0) = \frac{1}{5}$ Risposta 1

$\mathrm{E}(X \cdot Y) = 4 \cdot \Pr(X \cdot Y = 4) + 5 \cdot \Pr(X \cdot Y = 5) = \frac{18}{5}$ Risposta 2

Quesito 4. Una fabbrica produce confezioni di biglie rosse e blu. Una confezione corretta contiene $5 \cdot 10^4$ biglie con circa il 40% di biglie rosse.

Non è un problema se le biglie rosse eccedono il 40% ma vogliamo essere ragionevolmente sicuri che la percentuale non scenda mai sotto 30%. Stabiliamo quindi due livelli di controllo. Al primo controllo preleviamo 80 biglie a caso da ogni confezione e se ≤ 31 biglie sono rosse la confezione viene sottoposta a ulteriori controlli. Altrimenti viena dichiarata soddisfacente.

1. Si calcoli la probabilità che una confezione con 40% di biglie rosse venga sottoposta al secondo controllo.

2. Si calcoli la probabilità che una confezione con 30% di biglie rosse venga dichiarata soddisfacente.

Il secondo controllo comporta l'estrazione di altre biglie, 800 in totale. Se meno di $x\%$ è rosso la confezione viene scartata definitivamente, altrimenti viene dichiarata soddisfacente.

3. A quanto dovremmo fissare x per non scartare al secondo controllo più del 5% di confezioni con 40% di biglie rosse?

4. A quanto dovremmo fissare x per non dichiare soddisfacente al secondo controllo più del 3% di confezioni con 30% di bigie rosse?

Si trattino tutte le estrazioni come estrazioni con *reimbussolamento*.

Risposta

Sebbene non sia son sia necessario, aiuta immaginare il seguente test d'ipotesi:

▷ H_0 : confezione corretta → 40% delle palline nella confezione sono rosse;

▷ H_A : confezione non corretta → < 40% delle palline nella confezione sono rosse.

Nel primo punto si richiede che data una confezione il cui 40% delle palline sono palline rosse venga sottoposta al secondo controllo. Quindi sotto l'ipotesi nulla vera, cioè che la confezione sia corretta, questa venga lo stesso considerate inadeguata, la probabilità richiesta da calcolare è un **errore di primo tipo**

$$\alpha \;=\; P(\{\text{confezione spedita a secondo controllo}\} \mid \text{confezione corretta})$$

Come calcolare α?

▷ una confezione viene mandata al secondo controllo se su un totale di 80 estrazioni con reimbussolamento, vengano conteggiate un numero di palline rosse minore o uguale a 31.

▷ è necessaria una variabile aleatoria che sia in grado di conteggiare quanti successi (palline rosse) siano avvenuti in 80 estrazioni.

▷ Sia $X \sim Bin(n, p)$, con $n = 31$ e $p = 00.4$. Quello che vogliamo calcolare è la seguente probabilità:
$P(X \leq 31) \;=\; P(\{\text{confezione spedita a secondo controllo}\})$.

▷ per definizione una variabile aleatoria distribuita seconda una Binomiale è definita su due parametri: $n =$ il numero di estrazioni massimo che viene fatto e $p =$ probabilità di successo, nel nostro caso quindi l'estrazione di una pallina rossa dalla confezione intera.

Per cui nel nostro caso avremo che $n = 80$ e $p = 0.4$ in quanto la confezione è formata dal 40% di palline rosse. Quindi possiamo affermare che:

$$P(X \leq 31) \;=\; \sum_{i=0}^{31} \binom{80}{i} p^i (1-p)^{80-i}$$

Da notare: non è richiesto di sapere la formula ma di sapere quale e in che modo usare la funzione Python necessaria.

$=$ `binom.cdf( 31, 80, 0.4 ) = 0.4576` Risposta 1

Il punto 2 è molto simile al punto 1.
Ma in questo caso però è un errore di che tipo? Che effect-size δ stiamo prendendo in considerazione?

$P(X \leq 31)$ $=$ `1 - binom.cdf( 31, 80, 0.3 ) = 0.036` Risposta 2

Per il punto 3 dobbiamo calcolare la soglia di palline rosse su 800 estrazioni, in maniera tale da non scartare più del 5% delle confezioni corrette, e quindi con il 40% di palline rosse.

Il ragionamento è molto simile a sopra solo che ora conosciamo α e dobbiamo calcolare ilvalore di soglia (che prima era 31) necessario per decidere se la confezione può essere accettata. Quindi quello che dobbiamo trovare è:

$$\begin{aligned} P(X > x) &\cong 1 - \alpha \quad \cong \quad 1 - 0.05 \\ 1 - P(X \leq x) &\cong 1 - 0.05 \\ P(X \leq x) &\cong 0.05 \end{aligned}$$

ma allora

x = `binom.ppf( 0.05, 800, 0.4 )` = 297 Risposta 3

Il punto 4 è simile al punto 3.

x = `binom.ppf( 0.97, 800, 0.3 )` = 265 Risposta 4

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats` di `Python`

`binom.pmf(k,n,p)` $= \Pr\left(X = \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`binom.cdf(k)` $= \Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right)$ dove $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$

`bimom.ppf(q, n, p)` $= \mathtt{k}$ dove `k` è tale che $\Pr\left(X \leq \mathtt{k}\right) \cong \mathtt{q}$ per $X \sim B(\mathtt{n}, \mathtt{p})$