

Chapter 1

Teoria (il minimo sindacale)

Per esempi e esercizi seguire i [link](#) ➡

1 Variabili aleatorie

Fissiamo un insieme non vuoto Ω che chiameremo **spazio campionario** (**sample space**) o **popolazione**. Immaginiamo gli elementi $\omega \in \Omega$ come i possibili **risultati** di un rilevamento, un esperimento, un sorteggio, ecc. I sottoinsiemi $E \subseteq \Omega$ verranno chiamati **eventi** e rappresentano proprietà osservabili.

Una **misura di probabilità** è una funzione $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- ▷ $P(\Omega) = 1$
- ▷ $P(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
- ▷ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ per ogni coppia $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ di insiemi **disgiunti**, ovvero $A \cap B = \emptyset$. Si dice anche che A e B sono **mutualmente esclusivi**.

Sia R un insieme qualsiasi. Una **variabile aleatoria** è una funzione $X : \Omega \rightarrow R$. Se R è un insieme numerico (un sottoinsieme di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$, ecc.) diremo che X è una **variabile aleatoria numerica**. Una variabile aleatoria non numerica è detta **qualitativa** o **categorica**.

2 Distribuzione di probabilità discreta

Come sopra $X : \Omega \rightarrow R$ è una variabile aleatoria. Dato $x \in R$ e $A \subseteq R$ scriveremo

$$\begin{aligned}p_x &= P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \\P(X \in A) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) \\P(X \leq x) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \quad \text{se } X \text{ è numerica.}\end{aligned}$$

La funzione $P(X = x)$ si chiama **distribuzione di probabilità discreta (probability mass function)**. La funzione $P(X \leq x)$ si chiama **funzione di ripartizione (cumulative distribution function)**.

Le variabili numeriche possono dirsi **discrete** o **continue**. Una v.a. X è discreta se per ogni sottoinsieme $A \subseteq R$

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

Ovvero la probabilità è concentrata nei punti di R . Invece una variabile continua se $P(X = x) = 0$ per ogni $x \in R$. Per le variabili continue tutta l'informazione è contenuta nella funzione di ripartizione possiamo solo scrivere

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Si noti che la seconda uguaglianza non sarebbe corretta se $P(X = a) \neq 0$.

N.B. Esistono variabili aleatorie (anche in esempi concreti) che sono intermedie tra il continuo e il discreto ma per il momento non le considereremo.

3 Variabili aleatorie di Bernoulli

Una variabile aleatoria X si dice di bernulli se **Bernoulli** se $\text{img } X = \{0, 1\}$.

Possiamo identificare in modo canonico eventi e variabili aleatorie di Bernoulli. L'evento associato ad X è l'insieme $\{\omega : X(\omega) = 1\}$ che chiameremo **successo**. Chiameremo $p = P(X = 1)$ la **propbabilità di successo**.

Viceversa, la v.a. di Bernoulli associata ad un evento E è spesso denotata con 1_E

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Per dire che X è una variabile aleatoria di Bernoulli con probabilità di successo p scriveremo $X \sim B(1, p)$.

4 Probabilità condizionata

Esempi: Popolazione maschile e femminile (probabilità totali) ➡

Fumatori (regola di Bayes) ➡

Rain forecasts (Bayes rule) ➡

Dato $A, \Phi \subseteq \Omega$ tali che $P(\Phi) \neq 0$ definiamo

$$P(A | \Phi) = \frac{P(A \cap \Phi)}{P(\Phi)}$$

Questo si legge **probabilità di A dato Φ** . Si verifica facilmente che $P(\cdot | \Phi)$ soddisfa a tutte le proprietà di $P(\cdot)$ se rimpiazziamo Ω con Φ .

Il fatto seguente si chiama **Teorema delle Probabilità Totali**. Siano A_1, \dots, A_n eventi **mutuamente esclusivi** ed **esaustivi** di probabilità $\neq 0$. Sia C è un qualsiasi altro evento, allora

$$P(C) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(C|A_i).$$

Il seguente si chiama **Teorema (o regola) di Bayes**. Per ogni coppia di eventi A e B di probabilità $\neq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

In molte applicazioni $P(B)$ viene calcolato usando il teorema delle probabilità totali.

$$= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)}$$

5 Indipendenza stocastica

Due eventi A e B si dicono **(stocasticamente) indipendenti** se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Il seguente fatto è facile da verificare: se A e B sono eventi probabilità non nulla allora sono indipendenti se e solo se $P(A|B) = P(A)$ se e solo se $P(B|A) = P(B)$.

Due variabili aleatorie discrete X ed Y si dicono **(stocasticamente) indipendenti** se per ogni $x \in \text{img } X$ e $y \in \text{img } Y$

$$P(X, Y = x, y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Nel caso di variabili aleatorie continue la condizione diventa

$$P(X \leq x \text{ and } Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y).$$

6 Esperimenti ripetuti: prodotto di spazi di probabilità

Sia $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ una variabile aleatoria di Bernoulli (per avere un esempio semplice). Immaginiamo che X modelli il lancio di una moneta. Per brevità scriviamo A per $X^{-1}[1]$.

Il lancio ripetuto di una moneta è modellato con lo spazio campionario Ω^2 . L'insieme $A \times \Omega$ è l'evento dello spazio Ω^2 che corrisponde ad ottenere 1 nel primo lancio. L'insieme $\Omega \times \neg A$ corrisponde ad ottenere 0 nel secondo lancio.

L'intersezione di questi eventi è $A \times \neg A$. Questo corrisponde ad ottenere nei due lanci la sequenza 1 0.

La probabilità di un evento $A \times B \subseteq \Omega^2$ è per definizione $P(A) \cdot P(B)$. Gli eventi $A \times \Omega$ e $\Omega \times B$ sono quindi indipendenti.

7 Variabili aleatorie binomiali

8 Valore atteso e varianza

Il **valore atteso** o **media di popolazione** (**expected value, population mean**) di una variabile aleatoria numerica discreta X a valori in R è

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R} x \cdot P(X = x)$$

La **varianza** di una variabile aleatoria numerica discreta X a valori in R è

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \text{Var}(X) &= \sum_{x \in R} (x - E(X))^2 \cdot P(X = x) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \quad (\text{facile da verificare}).\end{aligned}$$

La **deviazione standard** è la radice della varianza

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Le lettere μ e σ vengono usate quando è chiaro a quale variabile ci si riferisce. per evitare ambiguità a volte si scrive μ_X e σ_X .

9 Diagnostic tests

Esempi: HIV test (regola di Bayes) ➡

Let T_+ and T_- be the events that the result of a diagnostic test is positive or negative respectively. Let D be the event that the subject of the test has the disease.

Introduciamo un po di terminologia.

- ▷ We call $P(D)$ the **prevalence** of the disease. Often it is very difficult to estimate: it strongly depends on the risk category the subject belongs to.
- ▷ The **sensitivity** is the probability that the test is positive given that the subject actually has the disease, $P(T_+|D)$
- ▷ The **specificity** is the probability that the test is negative given that the subject does not have the disease, $P(T_-|\neg D)$
- ▷ The **positive predictive value** is the probability that the subject has the disease given that the test is positive, $P(D|T_+)$
- ▷ The **negative predictive value** is the probability that the subject does not have the disease given that the test is negative, $P(\neg D|T_-)$
- ▷ The **prevalence of the disease** is the marginal probability of disease, $P(D)$

Tipicamente la specificità e la sensibilità del test sono note. I poteri predittivi positivi e negativi vengono calcolati usando la prevalenza e regola di Bayes e quindi dipendono fortemente dalla categoria di rischio del cui appartiene il soggetto.

10 Campioni e statistiche

Un campione $\{X_1, \dots, X_n\}$ è un insieme di v.a. indipendenti e identicamente distribuite. Il numero n si chiama **rango** (o **dimensione**) del campione.

Una **statistica** è una variabile aleatoria a valori in \mathbb{R} ottenuta come funzione delle variabili aleatorie di un campione. Gli esempi più noti sono \bar{X} , la **media campionaria** ed S , lo **stimatore della deviazione standard**

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

11 Test d'ipotesi

Esempi: **Binomial test** (il più elementare test di ipotesi) ➡

Nei test di ipotesi la scelta tra risultato positivo/negativo viene fatta in base al valore di una statistica. Si sceglie un intervallo detto **regione di rifiuto**. Se il valore è in questo intervallo l'esito si considera positivo (N.B. rifiuto \sim positivo).

Introduciamo la terminologia dei test d'ipotesi basandoci sulla notazione usata per i test diagnostici.

- ▷ L'**ipotesi nulla** denotata con H_0 definisce l'insieme dei *sani* (qui H_0 è anche l'evento corrispondente, quello denotavamo $\neg D$).
- ▷ L'**ipotesi alternativa** denotata con H_A descrive la *patologia*, ovvero definisce l'insieme dei *malati* (qui H_A è anche l'evento corrispondente, era D).
- ▷ H_A non è semplicemente la negazione di H_0 . Alcune risultati, se ritenuti impossibili, non occorrono né in H_0 né in H_A .
- ▷ L'espressione: **H_0 può essere rifiutata** è sinonima di *l'esito del test è positivo*. Noi denotiamo l'evento con T_+ .
- ▷ L'espressione: **H_0 NON può essere rifiutata** è sinonima di *l'esito del test è negativo*. Noi denotiamo l'evento con T_- .
- ▷ Nel progettare il test si decide come definire T_+ e T_- a seconda di quanti falsi positivi/negativi si vuole o può tollerare (in base ai costi/rischi che questi due errori comportano). Ci si calcola quindi $P(T_+|H_0)$ e $P(T_-|H_A)$.

12 Test d'ipotesi (tavola riassuntiva)

In questa tavola contrapponiamo la terminologia usata nei **test statistici** a quella dei *test diagnostici*. Molto comuni sono anche i simboli α e β .

$T_+ \cap H_0$ <i>falso positivo</i> errore I tipo $P(T_+ H_0) = \alpha$ significatività	$T_+ \cap H_A$ <i>corretto positivo</i> $P(T_+ H_A) = 1 - \beta$ <i>sensibilità</i> potenza
$T_- \cap H_0$ <i>corretto negativo</i> $P(T_- H_0) = 1 - \alpha$ <i>sepecificità</i>	$T_- \cap H_A$ <i>falso negativo</i> errore II tipo $P(T_- H_A) = \beta$

N.B. È vacile progettare un test che minimizza una tra $P(T_+|H_0)$ o $P(T_-|H_A)$. In un caso estremo: se a prescindere dai dati rifiuta sempre H_0 avrà banalmente $P(T_-|H_0) = 0$; invece un test che non rifiuta mai H_0 avrà $P(T_+|H_0) = 0$. La difficoltà nel progettare il test è trovare il giusto equilibrio tra i due errori.

13 Il p-valore??

Sia W una statistica e sia w il valore osservato. Diamo due definizioni equivalenti di **p-valore**

- ▷ Il p-value di w è il minimo α che permette di rigettare H_0 .
- ▷ Il p-value di w è la probabilità di osservare un risultato tanto estremo quanto w , nel caso H_0 sia vera.

La seconda definizione suona più semplice ma richiede alcune precisazioni.

Chapter 2

Esempi ed esercizi

1 Probabilità totali: maschi e femmine

2 Regola di Bayes: fumatori e non fumatori

3 Bayes rule: Rain forecasts

Marie is getting married tomorrow at an outdoor ceremony in the desert. In recent years it has rained only 5 days each year. But the weatherman has predicted rain for tomorrow. When it actually rains, the weatherman correctly forecasts rain 90% of the time. When it doesn't rain, he incorrectly forecasts rain 10% of the times. What is the probability that it will rain on the day of Marie's wedding?

R event: it rains on Marie's wedding

T_+ event: the weatherman predicts rain

$P(R) = 5/365$ it rains 5 days out of the year

$P(\neg R) = 1 - P(R) = 360/365$

$P(T_+|R) = 0.9$ when it rains, 90% of the times rain is predicted

$P(T_+|\neg R) = 0.1$ when it does not rain, 10% of the times rain is predicted

We want to know

$$\begin{aligned} P(R|T_+) &= \frac{P(R) \cdot P(T_+|R)}{P(T_+)} \\ &= \frac{P(R) \cdot P(T_+|R)}{P(T_+|R) \cdot P(R) + P(T_+|\neg R) \cdot P(\neg R)} \end{aligned}$$

4 Indipendenza

Lanciamo una moneta $2n$ volte. Modelliamo l'esperimento con una sequenza X_0, \dots, X_{2n-1} di variabili di Bernoulli. N.B. cominciamo ad enumerare da 0. Dire quali delle seguenti coppie di variabili aleatorie X, Y sono indipendenti.

$$1. \quad X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \quad Y = \sum_{i=n}^{2n-1} X_i.$$

$$2. \quad X = \sum_{i=0}^n X_{2i} \quad Y = \sum_{i=0}^i X_{2i-1}.$$

$$3. \quad X = \#\{i < n \mid X_{2i} \neq X_{2i+1}\}; \\ Y = \#\{i < n \mid X_{2i+1} \neq X_{2i}\}.$$

$$4. \quad X = 0 \text{ se } X_0 \neq X_1 \text{ altrimenti } = 1. \\ Y = 0 \text{ se } X_1 \neq X_2, \text{ altrimenti } = 1.$$

5 Diagnostic test: HIV

A study comparing the efficacy of HIV tests, reports on an experiment which concluded that HIV antibody tests have a **sensitivity of 99.7%** and a **specificity of 98.5%**

Suppose that a subject, from a population with a **0.1% prevalence** of HIV, receives a positive test result. What is the probability that this subject has HIV?

Mathematically, we want $P(D|T_+)$ given the sensitivity, $P(T_+|D) = .997$, the specificity, $P(T_-|\neg D) = .985$, and the prevalence $P(D) = .001$

$$\begin{aligned}P(D | +) &= \frac{P(T_+|D)P(D)}{P(T_+)} \\&= \frac{P(T_+|D)P(D)}{P(T_+|D)P(D) + P(T_+|\neg D)P(\neg D)} \\&= \frac{P(T_+|D)P(D)}{P(T_+|D)P(D) + [1 - P(T_-|\neg D)][1 - P(D)]} \\&= 0.062\end{aligned}$$

The **positive predictive value is 6%** for this test. In this population a positive test result only suggests a 6% probability that the subject has the disease.

The low positive predictive value is due to low prevalence of disease and the somewhat modest specificity

Suppose it was known that the subject was an intravenous drug user and routinely had intercourse with an HIV infected partner that the test was taken in South Africa where the prevalence is estimated to be around 20%

$$P(D | +) = 0.943$$

6 Test Binomiale

Una coda

Un'urna contiene monete equilibrate e monete difettose. Le monete equilibrate hanno probabilità di successo $p = 1/2$ le monete difettose hanno probabilità di successo ignota $p > 1/2$. Non conosciamo la frazione di monete difettose. Questi dati vengono riassunti scrivendo

$$H_0 : \quad p = 1/2$$

$$H_A : \quad p > 1/2$$

Estraiamo una moneta dall'urna e, per decidere tra equilibrata o difettosa, facciamo il seguente test: la lanciamo n volte e se il numero dei successi è $\geq k$ la dichiariamo difettosa. Stoamo descivendo una famiglia di test, uno per ogni scelta dei parametri n e k . Vogliamo vedere come variano gli errori del I e del II tipo al variare di questi parametri.

Il test è una variabile aleatoria X a valori in $\{0, \dots, n\}$. Lo spazio campionario Ω è diviso in due parti: H_A e H_0 . L'insieme H_A contiene quegli ω che corrispondono a n lanci fatti con una moneta difettosa mentre H_0 contiene quegli ω che corrispondono a lanci con una moneta equilibrata.

Condizionando a H_0 otteniamo $X \sim B(n, 1/2)$. Invece condizionando a H_A otteniamo $X \sim B(n, p)$ con $p > 1/2$ ignota.

Una coda. Errore I tipo.

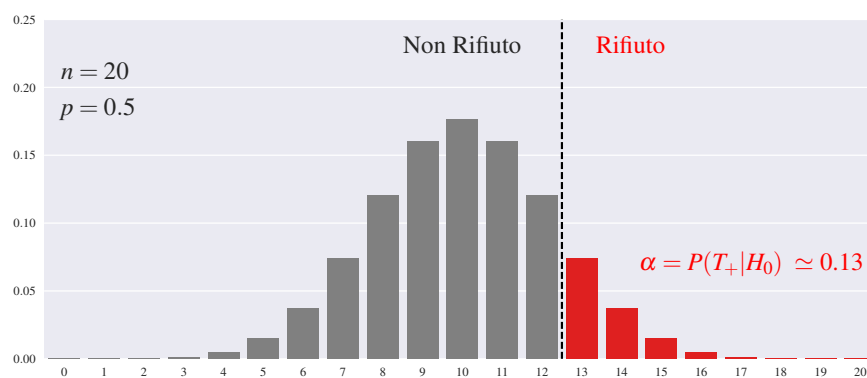
Test Binomiale

Indichiamo con T_+ l'evento $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq k\}$, ovvero il risultato del test positivo. N.B. dipende da n e da k .

Per quanto osservato sulla distribuzione di X , possiamo calcolare la specificità del test (probabilità di falsi positivi)

$$P(T_+ | \neg D) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i}$$

Per concretezza, fissiamo $n = 20$, $k = 13$ quindi $T_+ = \{13, \dots, 20\}$ è la regione di rifiuto. Otteniamo



Una coda. Errore II tipo.

Test Binomiale

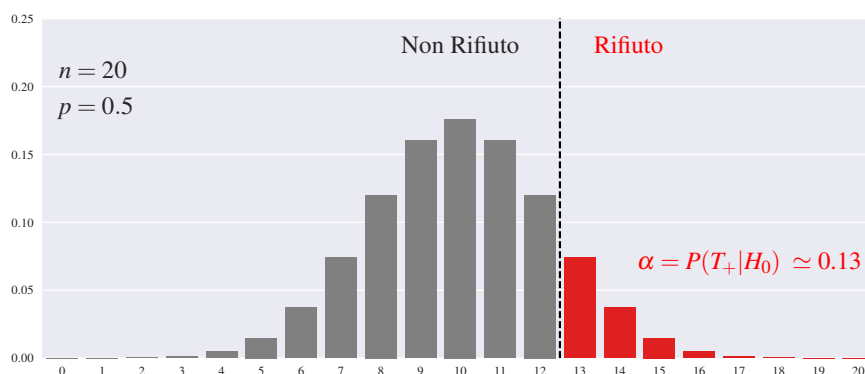
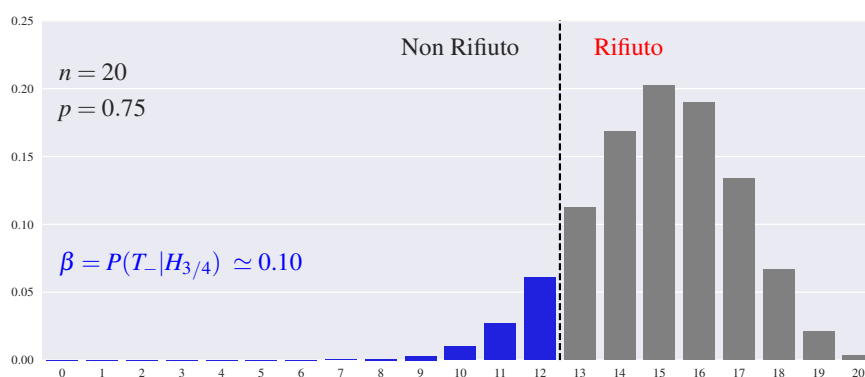
La probabilità dei falsi negativi può essere espressa in funzione di p (abbiamo solo assunto che $p > 1/2$)

$$P(T_-|D) = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Se scegliamo come prima $n = 20$, $k = 13$ abbiamo $T_- = \{0, \dots, 12\}$ è la **zona di NON rifiuto**. Ora, per semplificare la discussione supponiamo di conoscere non solo il tipo ma anche la gravità del difetto. Quindi l'ipotesi alternativa diventa

$$H_A : p = 3/4$$

Rappresentiamo la distribuzione di X nel caso in cui l'ipotesi alternativa è vera. Per confronto lo accostiamo al grafico del paragrafo precedente.



Cosa possiamo dire sul caso generale $H_A : p > 1/2$?

Al crescere di p la distribuzione si sposta verso destra quindi gli errori del II tipo diminuiscono. Di converso, se p si avvicina a $1/2$ l'errore aumenta al limite quando $p \approx 1/2$ avremo $\alpha + \beta \approx 1$. Dobbiamo quindi fissare la minima differenza che riteniamo significativa e calcolare β a partire da quello.

Due code.

Test Binomiale

Nell'esempio precedente avevamo un'informazione certa sul tipo di difetto delle monete: sapevamo che $p > 1/2$. proviamo a fare senza, avremo quindi

$$H_0 : p = 1/2$$

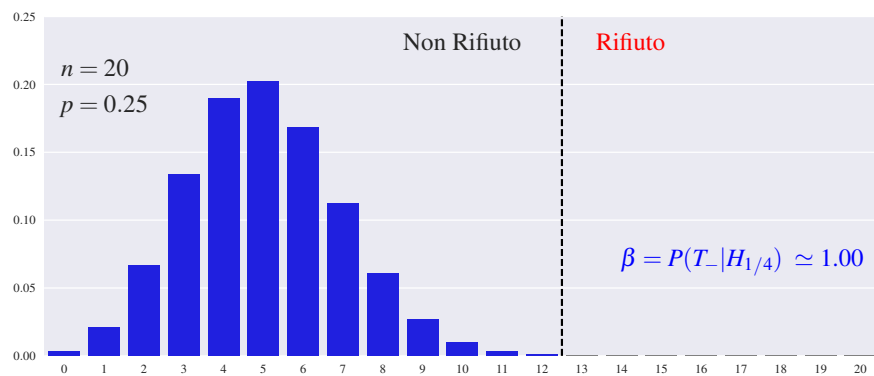
$$H_A : p \neq 1/2$$

Verifichiamo prima che il test discusso nei paragrafi precedenti **NON è adatto** alla nuova situazione. L'analisi di $P(T_+|H_0)$ rimane invariata (infatti l'insieme H_0 non è cambiato).

Per semplificare la discussione dell'errore dell'secondo supponiamo per il momento che

$$H_A : p = 3/4 \text{ o } p = 1/4$$

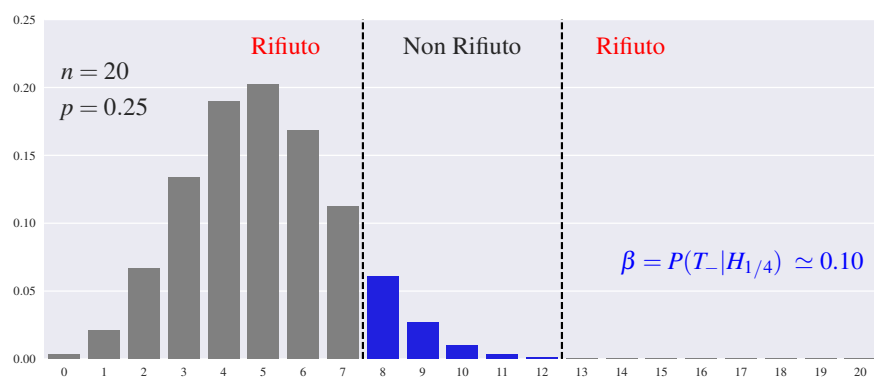
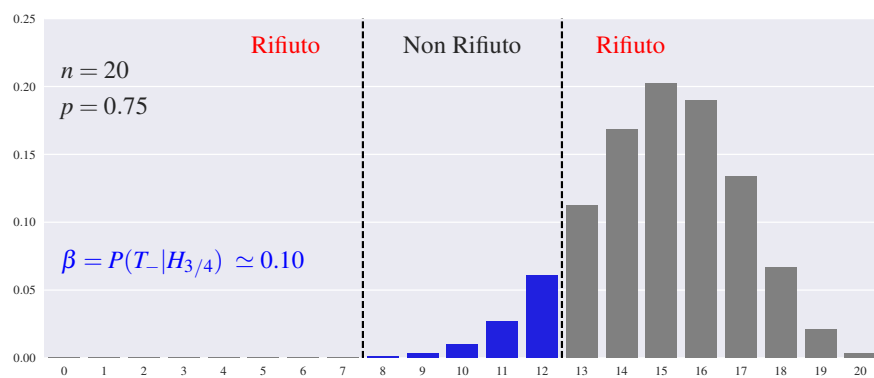
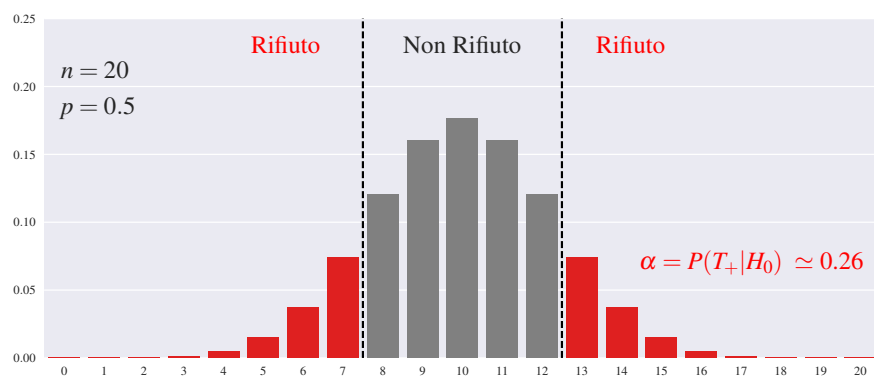
Possiamo immaginare $H_A = H_{1/4} \cup H_{3/4}$. Il grafico del paragrafo precedente è valido ora se sostituiamo H_A con $H_{3/4}$. Ora però dobbiamo considerare il caso il cui la moneta appartenga all'insieme $H_{1/4}$



Due code. Errori I e II tipo.

Test Binomiale

Supponiamo di scegliere come zona di rifiuto $T_+ = \{0, \dots, 7\} \cup \{13, \dots, 20\}$

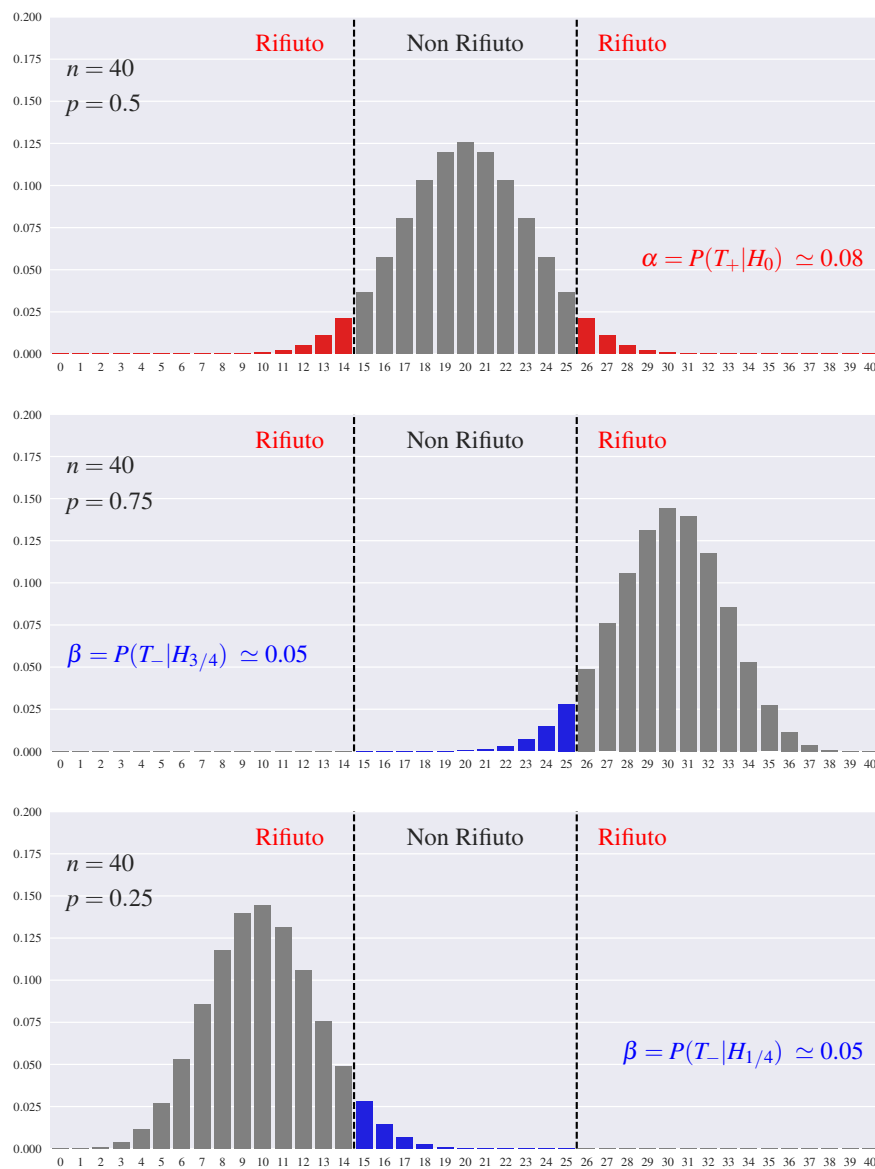


Due code, con campione più ampio.

Test Binomiale

Supponiamo di raddoppiare la dimensione del campione ($n = 40$). Aggiustiamo la zona di rifiuto allo stesso modo ($k = 26$): $T_+ = \{0, \dots, 14\} \cup \{26, \dots, 40\}$

Entrambi gli errori diminuiscono.



7 Z-test

Una coda.

Si sospetta che una certa terapia faccia aumentare la pressione diastolica. Nella popolazione generale la pressione diastolica ha distribuzione $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ con $\mu_0 = 75$ e $\sigma_0 = 9.5$.

Assumiamo che tra i pazienti in terapia la pressione diastolica sia distribuita normalmente con media ignota μ e con la stessa deviazione standard della popolazione generale. Vogliamo testare le seguenti ipotesi:

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0$$

$$H_A : \quad \mu > \mu_0$$

Il test consiste nel misurare la pressione ad un campione di n pazienti e di questi dati calcolare la media. Abbiamo quindi la seguente statistica

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dove X_i è la v.a. che dà la pressione dell' i -esimo paziente del campione. Rigetteremo H_0 se il valore ottenuto è superiore ad un certo x_α che vogliamo fissare in modo che l'errore I tipo risulti uguale ad α . Quindi x_α dev'essere tale che x_α tale che $P(\bar{X} > x_\alpha) = \alpha$.

Se H_0 è vera, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$.

8 Z-test (una coda).

9 Z-test (una coda).