8.11 Prevalenza mancinismo 2 (domanda in formato esame)

Il 10% è delle persone sono mancine. Ci chiediamo se la caratteristica sia ereditaria. Eseguiamo il seguente esperimento. Selezioniamo un campione di 1000 persone con almeno un genitore mancino e misuriamo la frequenza di mancini. Otteniamo 112 mancini.

Domande

1. Qual è l'potesi nulla?
2. Qual è l'potesi alternativa?
3. Che test possiamo fare?
4. Qual'è il p-valore ottenuto dai dati?
5. Possiamo rigettare l'ipotesi nulla con una significatività del $\alpha = 5\%$?

Risposte

1. $p = 10\%$ dove p è la prevalenza di mancini tra i figli di genitori mancini
2. $p > 10\%$
3. Test binomiale a una coda
4. il p-valore è `1 - pbinom(112,1000,0.1)` (`0.095`)
5. no, perché $\alpha <$ p-valore.

N.B per 3-5, altre risposte corrette sono possibili (se coerenti).

Si assumano noti i valori delle seguenti funzioni

`pbinom(x,n,p)`$=P(X \leq x)$, per $X \sim B(n,p)$ `qbinom(`α`,n,p)=x`, dove $P(X \leq x) = \alpha$ per $X \sim B(n,p)$

`pnorm(z)`$=P(Z \leq z)$, per $Z \sim N(0,1)$ `qnorm(`α`)=z`, dove $P(Z \leq z) = \alpha$ per $Z \sim N(0,1)$

`pt(t,n)` $= P(T \leq t)$ per $Z \sim t(n)$ `qt(`α`,n)=t`, dove $P(T \leq t) = \alpha$ per $T \sim t(n)$

`pchisq(q,k)` $= P(Q \leq q)$, per $Q \sim \chi^2_k$ `qchisq(`α`,k)=q`, dove $P(Q \leq q) = \alpha$ per $Q \sim \chi^2_k$

.

9 Z-test

La distribuzione normale

9.1 Test a una coda

Si sospetta che una certa terapia faccia aumentare la pressione diastolica. Nella popolazione generale la pressione diastolica ha distribuzione $N(\mu_0, \sigma^2)$ con $\mu_0 = 75$ e $\sigma = 9.5$.

Assumiamo che tra i pazienti in terapia la pressione diastolica sia distribuita normalmente con media ignota μ e con la stessa deviazione standard della popolazione generale. Vogliamo testare le seguenti ipotesi:

$H_0 : \quad \mu = \mu_0$

$H_A : \quad \mu > \mu_0$

Il test consiste nel misurare la pressione ad un campione di n pazienti e di questi dati calcolare la media. Abbiamo quindi la seguente statistica

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

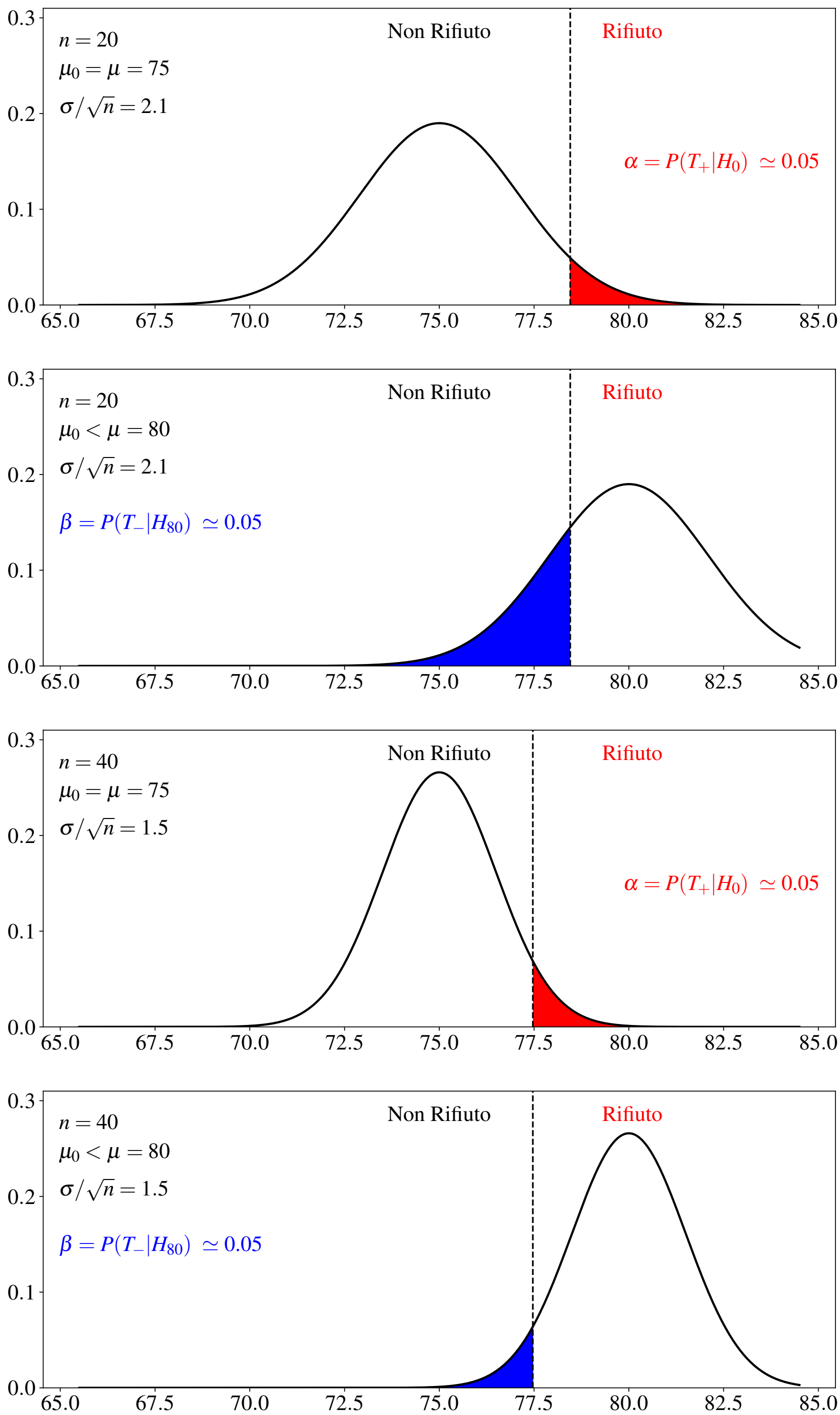
Dove X_i è la v.a. che dà la pressione dell'i-esimo paziente del campione. Rigetteremo H_0 se il valore ottenuto è suporiore ad un certo x_α che vogliamo fissare in modo che l'errore I tipo risulti uguale ad α. Quindi x_α dev'essere tale che x_α tale che $\Pr(\bar{X} > x_\alpha) = \alpha$.

Se H_0 è vera, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Se H_A è vera, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ per qualche $\mu > \mu_0$.

9.2 Una coda, errore I e II tipo Z-test

Qui rappresentiamo gli errori del I e II tipo per campioni di dimensione $n = 20$ e $n = 40$ e con un x_α scelto in moto tale da avere $\alpha = 5\%$. Per gli errori del II tipo prendiamo $\delta = 5$.



9.3 Crescita media

In condizioni ottimali l'incremento proporzionale di una certa cultura in una fissata unità di tempo ha media $\mu_0 = 3.1$ e deviazione standard $\sigma = 1.2$. Vogliamo progettare un test per decidere se la crecita di una data cultura sia sub-ottimale. Assumiamo che la distribuzione sia normale e che in condizioni sub-ottimali la deviazione standard sia la stessa. (Queste assunzioni sono abbastanza irragionevoli, ma portiamo pazienza.)

Domande:

1 Preleviamo $n = 9$ campioni, e misuriamo la crescita in un'unità di tempo. E calcoliamo la media campionaria $\bar{x}$. Quanto dev'essere x_α per poter affermare che con significatività $\alpha = 1\%$ che siamo in condizioni sub-ottimali quando $\bar{x} < x_\alpha$?

2 Dato x_α comer sopra. Qual'è la probabilità di un errore del II tipo se l'effect size è $\delta = 0.5$?

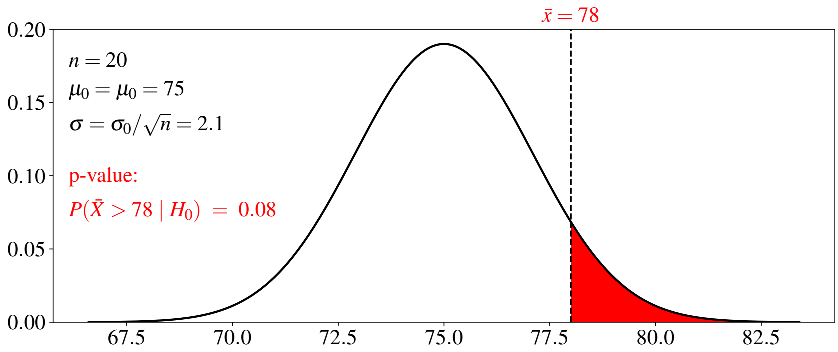
Risposte:

1 Vogliamo $1\% = \Pr(\bar{X} \leq x_\alpha)$ con $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma/\sqrt{n})$.
Quindi $x_\alpha =$ `qnorm(0.01,3.1,0.4)=2.17`

2 $\beta = \Pr(\bar{X} \leq x_\alpha)$ con $\bar{X} \sim N(\mu_0 - \delta, \sigma/\sqrt{n})$.
Quindi $\beta =$ `pnorm(2.17,2.6,0.4)=0.14`.

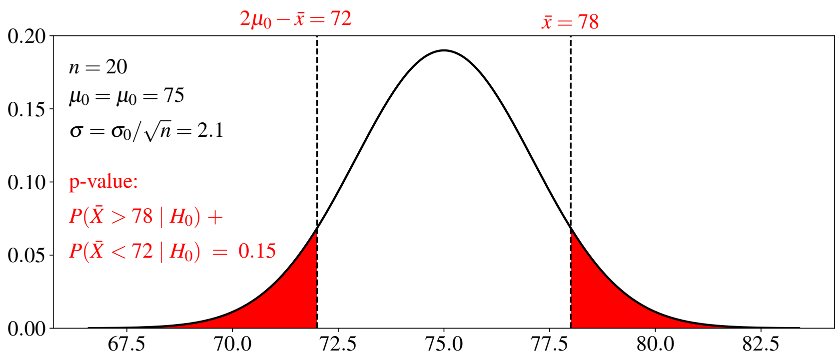
9.4 Una coda, p-valore. **Z-test**

Supponiamo di ottenere $\bar{x} = 78.0$ da un campione di dimensione $n = 20$. Il p-valore di questa misura è $\Pr(\bar{X} \geq 78) = 1 - \Pr(\bar{X} \leq 78)$.



Numericamente $\Pr(\bar{X} \leq \bar{x})$ si può calcolare usando la funzione `pnorm(x,m,s)`. Nel nostro caso i valori sono `x`$= \bar{x}$, `m`$= \mu_0$, e `s`$= \sigma/\sqrt{n}$.

Nel caso di un test a due code, se H_A fosse stata $\mu_0 \neq \mu$, il p-valore diventa esattamente il doppio che per il test ad una coda (qui sotto differisce numericamente a causa degli arrotondamenti).



.

9.5 Mean weight (domanda in formato esame)

Boys of a certain age are known to have a mean weight of 85 pounds and standard deviation 10.6 pounds. A complaint is made that the boys living in a municipal children's home are overfed. As one bit of evidence, 25 boys (of the same age) are weighed and found to have a mean weight of 88.94 pounds. Assume the same standard deviation as in the general the population (the unrealistic part of this example).

Domande

1. Qual è l'potesi nulla?
2. Qual è l'potesi alternativa?
3. Che test possiamo fare?
4. Qual'è il p-valore ottenuto dai dati?
5. Possiamo rigettare l'ipotesi nulla con una significatività del $\alpha = 5\%$?

Risposte Definiamo:
$\mu_0 = 85$
$\sigma = 10.6$
$n = 25$
$\bar{x} = 88.94$

1. $\mu = \mu_0$.
2. $\mu > \mu_0$
3. z-test
4. il p-valore è `1-pnorm(z)` dove $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}. \quad (0.03)$$
   Lo stesso risultato si ottienre con `1-pnorm(`$\bar{x}, \mu_0, \sigma/\sqrt{n}$`)`, ma non è tra le possibilità elencate in calce.
5. si, perché p-valore $< \alpha$.

Si assumano noti i valori delle seguenti funzioni

`pbinom(x,n,p)`$=P(X \le x)$, per $X \sim B(n,p)$ — `qbinom(`α`,n,p)=x`, dove $P(X \le x) = \alpha$ per $X \sim B(n,p)$

`pnorm(z)`$=P(Z \le z)$, per $Z \sim N(0,1)$ — `qnorm(`α`)=z`, dove $P(Z \le z) = \alpha$ per $Z \sim N(0,1)$

`pt(t,n)` $= P(T \le t)$ per $Z \sim t(n)$ — `qt(`α`,n)=t`, dove $P(T \le t) = \alpha$ per $T \sim t(n)$

`pchisq(q,k)` $= P(Q \le q)$, per $Q \sim \chi^2_k$ — `qchisq(`α`,k)=q`, dove $P(Q \le q) = \alpha$ per $Q \sim \chi^2_k$