Domande per verificare la comprensione del significato di errori del II tipo e di potenza.

N.B. Spesso le domande contengono informazioni irrilevanti.

Quesito 1. Preleviamo un campione di rango $n = 4$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 5$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei tre valori 2, 5, o 9.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 5$ contro $H_A : \mu \in \{2, 9\}$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.02$ otteniamo che l'intervallo critico è per uno z-test a due code è $[2.43,\ 7.57]$.

Qual è la potenza del test? Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Notazione: $\bar{X} \sim N(2,\ \sigma^2/n)$

Il caso in cui H_A meno distante da H_0 si verifica quando $\mu = 2$. Calcoliamo la probabilità di un errore del II tipo (falso negativo) in questo caso

$$\beta \ = \ \Pr\left(2.43 \le \bar{X} \le 7.57\right) \ = \ \Pr\left(\frac{0.43}{\sigma/\sqrt{n}} \ \le \ \frac{\bar{X}-2}{\sigma/\sqrt{n}} \ \le \ \frac{5.57}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ = \ \Pr\left(0.172 \le Z \le 2.228\right)$$

$\beta \ \le$ `norm.cdf(2.228) - norm.cdf(0.172)` `= 0.4188` Risposta

Quesito 2. Preleviamo un campione di rango $n = 9$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi valori dei nell'intervallo $[1,\ 4]$.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 1$ contro $H_A : \mu \in (1, 4]$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.1$ otteniamo che per uno z-test a coda superiore l'intervallo critico è $[2.282,\ +\infty)$.

1. Nel caso $H_A : \mu \in (3,\ 4]$ qual'è la massima probabilità β di non rigettare H_0 (errore II tipo)?
2. Calcolare la potenza del test con l'effect-size suggerito nel punto precedente.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Il caso più sfavorevole si ottiene quando $\mu = 3$. Sia $\bar{X} \sim N(3,\ \sigma^2/n)$

$$\beta \ = \ \Pr\left(\bar{X} < 2.282\right) \ = \ \Pr\left(\frac{\bar{X}-3}{\sigma/\sqrt{n}} \ < \ \frac{-0.718}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ = \ \Pr\left(Z < -0.718\right)$$

$\beta \ =$ `norm.cdf(-0.718)` `= 0.2364` Risposta 1

Con un effect size $\delta = 2$ la potenza del test è $1 - \beta =$ `1 - norm.cdf(-0.718)` `= 0.7636` Risposta 2

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats`

`norm.cdf(z)` $= \Pr\left(Z < z\right)$ per $Z \sim N(0,1)$

`norm.ppf(`α`)` $= z_\alpha$ dove z_α è tale che $\Pr\left(Z < z_\alpha\right) = \alpha$ per $Z \sim N(0,1)$