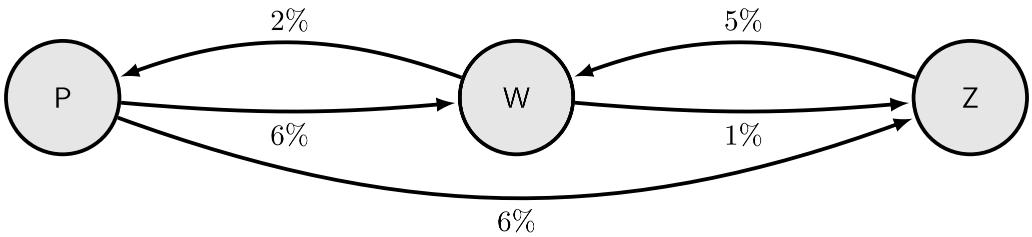
Esperimento con catene di Markov (senza definirle)

Quesito 1. Vogliamo modellare il trasferimento di nutrienti nella catena alimentare di un acquario. La catena alimentare consite di tre compartimenti: phytoplankton (P), acqua (W), zooplankton (Z).

Dissolviamo 5 unità del radioisotopo ^{14}C. Qui sotto riassumiamo le percentuali di ^{14}C che ogni ora passano tra i compartimenti. Possiamo assumere che la concentrazione di radioisotopo nel sistema rimanga constante quindi gli isotopi che non vengono trasferiti rimangono nello stesso compartimento (nel grafico sono sottointese)



1. Scrivere la matrice M che descrive l'evoluzione del processo $\vec{x}_{n+1} = M\vec{x}_n$ dove $\vec{x}_n = [p_n, w_n, z_n]^{\mathrm{T}}$ dove p_n, w_n, e z_n sono le quantità radioisotopo dopo n ore nei rispettivi compartimenti.
2. Descrivere $\vec{x}_0$ lo stato iniziale del sistema descritto nel testo.
3. Calcolare $\vec{x}_1$
4. La matrice M ha questo insieme di autovalori
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{6}}{100} + \frac{9}{10}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{6}}{100} + \frac{9}{10}.$$
Dire se partendo da $\vec{x}_0$ si raggiunge uno stato di equilibrio e nel caso calcolarlo.

Risposta

$$M = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 88 & 2 & 0 \\ 6 & 97 & 5 \\ 6 & 1 & 95 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Risposte 1 e 2

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{97}{20} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$ Risposta 3

$$p_\infty = \frac{25}{47}, \quad w_\infty = \frac{150}{47}, \quad z_\infty = \frac{60}{47}$$ Risposta 4