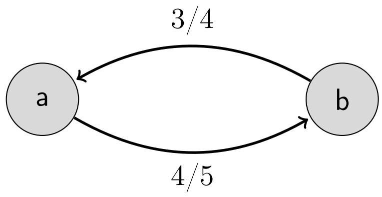
Esperimento con HMM (senza definirli)

Quesito 1. Consideriamo il percorso aleatorio descritto in figura. Nello stato a viene lanciata una moneta a valori T o C. La probabilità che esca T è $1/2$. Nello stato b viene lanciata una moneta con probabilità $1/3$ che esca T.



Le transizioni aa e bb sono implicite.

Il percorso comincia (al tempo t=0) dallo stato a. Al tempo $t = 2$ il risultato del lancio della moneta è T. Qual è la probabilità che il processo al tempo t=2 si trovi nello stato a ?

Indichiamo con $S_t \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ le variabili aleatorie che danno lo stato al tempo t. Indichiamo con $X_t \in \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}$ le variabili aleatorie che danno il risultato del lancio al tempo t. Si esprima usando queste v.a. la probabilità condizionata che si intende calcolare.

Esprimere i risultati numerici come frazioni di interi.

Risposta

Dalla figura inferiamo la matrice di transizione $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Il testo riporta le seguenti probabilità:

$\Pr\big(S_0 = \mathsf{a}\big) = 1$ e per ogni t $\Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{a}\big) = \frac{1}{2}$, $\Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{b}\big) = \frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} \Pr(S_1 = \mathsf{a}) \\ \\ \Pr(S_1 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Pr(S_2 = \mathsf{a}) \\ \\ \Pr(S_2 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} \\ \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Pr\big(X_2 = \mathsf{T}\big) &= \Pr\big(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{a}\big) \cdot \Pr\big(S_2 = \mathsf{a}\big) + \Pr\big(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{b}\big) \cdot \Pr\big(S_2 = \mathsf{b}\big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{11}{25} \end{aligned}$$

$$\Pr(S_2 = \mathsf{a} \mid X_2 = \mathsf{T}) = \frac{\Pr(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{a}) \cdot \Pr(S_2 = \mathsf{a})}{\Pr(X_2 = \mathsf{T})} = \frac{8}{11} \qquad \text{Risposta}$$