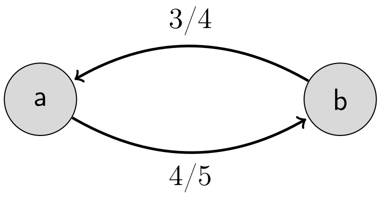
## Esperimento con HMM (senza definirli)

**Quesito 1.** Consideriamo il percorso aleatorio descritto in figura. Nello stato $\mathsf{a}$ viene lanciata una moneta a valori $\mathsf{T}$ o $\mathsf{C}$. La probabilità che esca $\mathsf{T}$ è $1/2$. Nello stato $\mathsf{b}$ viene lanciata una moneta con probabilità $1/3$ che esca $\mathsf{T}$.




Le transizioni $\mathsf{aa}$ e $\mathsf{bb}$ sono implicite.

Il percorso comincia (al tempo $t$=0) dallo stato $\mathsf{a}$. Al tempo $t = 2$ il risultato del lancio della moneta è $\mathsf{T}$. Non abbiamo informazioni sul pescorso, qual è la probabilità che il processo al tempo $t$=2 si trovi nello stato $\mathsf{a}$ ?

Indichiamo con $S_t \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ le variabili aleatorie che danno lo stato al tempo $t$. Indichiamo con $X_t \in \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}$ le variabili aleatorie che danno il risultato del lancio al tempo $t$. Si esprima usando queste v.a. la probabilità condizionata che si intende calcolare.

Esprimere i risultati numerici come frazioni di interi.

**Risposta**

Dalla figura inferiamo la matrice di transizione $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Il testo riporta le seguenti probabilità:

$\Pr\big(S_0 = \mathsf{a}\big) = 1$ e per ogni $t$ $\Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{a}\big) = \dfrac{1}{2}$, $\Pr\big(X_t = \mathsf{T} \mid S_t = \mathsf{b}\big) = \dfrac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} \Pr(S_1 = \mathsf{a}) \\ \\ \Pr(S_1 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Pr(S_2 = \mathsf{a}) \\ \\ \Pr(S_2 = \mathsf{b}) \end{bmatrix} = P^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} \\ \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Pr\big(X_2 = \mathsf{T}\big) &= \Pr\big(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{a}\big) \cdot \Pr\big(S_2 = \mathsf{a}\big) + \Pr\big(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{b}\big) \cdot \Pr\big(S_2 = \mathsf{b}\big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{11}{25} \end{aligned}$$

$$\Pr(S_2 = \mathsf{a} \mid X_2 = \mathsf{T}) = \frac{\Pr(X_2 = \mathsf{T} \mid S_2 = \mathsf{a}) \cdot \Pr(S_2 = \mathsf{a})}{\Pr(X_2 = \mathsf{T})} = \frac{8}{11}$$

Risposta