Esercizio 1. Sia G un grafo bipartito di densità α con insiemi di vertici A e B. Dimostrare che il numero di quadruple (x_1, y_1, x_2, y_2) che formano un percorso circolare, è almeno $\alpha^4|A|^2|B|^2$.

Per un suggerimento rimando a quanto ha scritto Tim Gowers. Esercizio 3 in `https://drive.google.com/file/d/18GLulBmZdPpwnesry2uUHfoCbZ4EIxpC/view`

Il suggerimento viene esplicitato in questo post `https://gowers.wordpress.com/2015/11/18/entropy-and-sidorenkos-conjecture-after-szegedy/`. Anche se qui usa la formula esplicita dell'entropia, al risultato si arriva anche direttamente dagli assiomi.

Nella soluzione si usa ripetutamente il seguente fatto:

Se X è una v.a. discreta e $A \subseteq \Omega$ è un evento, scriveremo $X|A$ per una qualsiasi v.a. con distribuzione $\Pr(X = x \mid A)$. Si osservi che se $X = (X_1, X_2)$ con X_1 e X_2 indipendenti allora possiamo assumere che $X|A$ abbia la stessa distribuzione di $(X_1|A, X_2|A)$ e che $X_1|A$ e $X_2|A$ siano indipendenti.