Domande per verificare la comprensione del significato di errori del II tipo e di potenza.

N.B. Spesso le domande contengono informazioni irrilevanti.

Quesito 1. Preleviamo un campione di rango $n = 4$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 5$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei tre valori 2, 5, o 9.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 5$ contro $H_A : \mu \in \{2, 9\}$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.02$ otteniamo che l'intervallo critico è per uno z-test a due code è $[2.43,\ 7.57]$.

Qual è la potenza del test? Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Notazione: $\bar{X} \sim N(2,\ \sigma^2/n)$

Il caso in cui H_A meno distante da H_0 si verifica quando $\mu = 2$. Calcoliamo la probabilità di un errore del II tipo (falso negativo) in questo caso

$$\beta \;=\; \Pr\big(2.43 \leq \bar{X} \leq 7.57\big) \;=\; \Pr\left(\frac{0.43}{\sigma/\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{\bar{X}-2}{\sigma/\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{5.57}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \;=\; \Pr\big(0.172 \leq Z \leq 2.228\big)$$

$\beta \leq$ `norm.cdf(2.228) - norm.cdf(0.172)` = 0.4188 Risposta

Quesito 2. Preleviamo un campione di rango $n = 9$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 3$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi valori dei nell'intervallo $[1,\ 4]$.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 1$ contro $H_A : \mu \in (1, 4]$. Fissiamo come significatività $\alpha = 0.1$ otteniamo che per uno z-test a coda superiore l'intervallo critico è $[2.282,\ +\infty)$.

1. Nel caso $H_A : \mu \in (3,\ 4]$ qual'è la massima probabilità β di non rigettare H_0 (errore II tipo)?
2. Calcolare la potenza del test con l'effect-size suggerito nel punto precedente.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Il caso più sfavorevole si ottiene quando $\mu = 3$. Sia $\bar{X} \sim N(3,\ \sigma^2/n)$

$$\beta \;=\; \Pr\big(\bar{X} < 2.282\big) \;=\; \Pr\left(\frac{\bar{X}-3}{\sigma/\sqrt{n}} \;<\; \frac{-0.718}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \;=\; \Pr\big(Z < -0.718\big)$$

$\beta =$ `norm.cdf(-0.718)` = 0.2364 Risposta 1

Con un effect size $\delta = 2$ la potenza del test è $1 - \beta =$ `1 - norm.cdf(-0.718)` = 0.7636 Risposta 2

Quesito 3. Vogliamo testare $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_A : \mu > \mu_0$ per una popolazione distribuita normalmente con deviazione standard nota σ. Fissiamo una significatività α e una potenza $1 - \beta$. L'effect-size che ci interessa è δ. Esprimere, in funzione dei parametri che assumiamo noti, le condizioni cui deve soddisfare il rango n del campione.

Risposta

Il rango necessario è il minimo n tale che $\Pr\left(Z < \dfrac{x_\alpha - \mu_0 - \delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq \beta$

dove x_α tale che $\Pr\left(Z \geq \dfrac{x_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$ Risposta

---

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats`

`norm.cdf(z)` $= \Pr\big(Z < \mathtt{z}\big)$ per $Z \sim N(0,1)$

`norm.ppf(`α`)` $= z_\alpha$ dove z_α è tale che $\Pr\big(Z < z_\alpha\big) = \alpha$ per $Z \sim N(0,1)$