Domande per verificare la comprensione del significato di probabilità condizionata; dei termini che descrivono l'attendibilità dei test diagnostici; della regola di Bayes.

Quesito 1. Tra le persone di cui A è causa del decesso il 40% è fumatore. La percentuale dei fumatori in tutta la popolazione è del 20% e quella dei decessi dovuti ad A è del 5%. Calcolare la probabilità che un fumatore ha di morire per A.

Risposta

F	insieme dei fumatori
A	insieme persone decedute per A
$\Pr(A) = 5\%$	prevalenza di A nella popolazione
$\Pr(F) = 20\%$	frazione di fumatori nella popolazione
$\Pr(F\|A) = 40\%$	prevalenza di A tra i fumatori

$$\Pr(A|F) = \frac{\Pr(F|A) \cdot \Pr(A)}{\Pr(F)} = 10.0\% \qquad \text{Risposta}$$

Quesito 2. Tra le persone di cui A è causa del decesso il 60% è fumatore. La percentuale dei fumatori in tutta la popolazione è del 15% e quella dei decessi dovuti ad A è del 10%. Calcolare la probabilità che un *non* fumatore ha di morire per A.

Risposta

F	insieme dei fumatori
A	insieme persone decedute per A
$\Pr(A) = 10\%$	prevalenza di A nella popolazione
$\Pr(\neg F) = 100\% - \Pr(F) = 85\%$	frazione di fumatori nella popolazione
$\Pr(\neg F\|A) = 100\% - \Pr(F\|A) = 40\%$	prevalenza di A tra i fumatori

$$\Pr(A|\neg F) = \frac{\Pr(\neg F|A) \cdot \Pr(A)}{\Pr(\neg F)} = 0.05\% \qquad \text{Risposta}$$

Quesito 3. A common blood test indicates the presence of a disease 96% of the time when the disease is actually present in an individual and 1% of the time when the disease is not present. The prevalence of the disease is 6%.

1. What is the sensitivity of the test?
2. What is the specificity of the test?
3. What is the positive predictive value of the test?

Risposta

A insieme delle persone affette

T_+ insieme delle persone positive al test

T_- insieme delle persone negative al test

$\Pr(A) = 6\%$ prevalenza

$\Pr(\neg A) = 1 - \Pr(A) = 94\%$

$\Pr(T_+|\ A) = 96\%$ sensitività Risposta 1

$\Pr(T_+|\neg A) = 1\%$ probabilità falsi positivi

$\Pr(T_-|\neg A) = 1 - P(T_+|\neg A) = 99\%$ specificità Risposta 2

$\Pr(T_+) = \Pr(T_+|\ A)\ \Pr(A) + \Pr(T_+|\neg A)\ \Pr(\neg A) = 6.7\%$

$\Pr(A \mid T_+) = \dfrac{\Pr(T_+|\ A)\Pr(A)}{\Pr(T_+)} = 86.0\%$ valore predittivo positivo Risposta 3

Quesito 4. A common blood test indicates the presence of a disease 96% of the time when the disease is actually present in an individual and 1% of the time when the disease is not present. The prevalence of the disease is 5%.

1. What is the probability that a person that is chosen at random from the general population is positive to the test?
2. What is the positive predictive value of the test?

Risposta

A insieme delle persone affette

T_+ insieme delle persone positive al test

$\Pr(A) = 5\%$ prevalenza

$\Pr(\neg A) = 1 - \Pr(A) = 95\%$

$\Pr(T_+|\ A) = 96\%$ sensitività

$\Pr(T_+|\neg A) = 1\%$

$\Pr(T_+) = \Pr(T_+|\ A)\ \Pr(A) + \Pr(T_+|\neg A)\ \Pr(\neg A) = 5.8\%$ Risposta 1

$\Pr(A \mid T_+) = \dfrac{\Pr(T_+|\ A)\Pr(A)}{\Pr(T_+)} = 83.5\%$ Risposta 2

Quesito 5. Marie is getting married tomorrow at an outdoor ceremony in the desert. In recent years it has rained only 8 days each year. But the weatherman has predicted rain for tomorrow. When it actually rains, the weatherman correctly forecasts rain 85% of the time. When it doesn't rain, he incorrectly forecasts rain 5% of the times. What is the probability that it will rain on the day of Marie's wedding?

Risposta

R event: it rains on Marie's wedding

T_+ event: the weatherman predicts rain

$\Pr(R) = 8/365 = 2.2\%$ it rains 8 days out of 365

$\Pr(T_+|R) = 85\%$ when it rains, rain is predicted

$\Pr(T_+|\neg R) = 5\%$ when it does not rain, rain is predicted

$\Pr(T_+) = \Pr(T_+|R) \cdot \Pr(R) + \Pr(T_+|\neg R) \cdot \Pr(\neg R) = 6.8\%$

$$\Pr(R\,|T_+) = \frac{\Pr(R) \cdot \Pr(T_+|R)}{\Pr(T_+)} = 27.6\%$$ Risposta

Quesito 6. Abbiamo 35 monete di cui 28 sono equilibrate, le altre sono difettose e hanno probabilità 0.6 di dare come risultato `Testa`. Scegliamo a caso una di queste 35 monete. Per decidere se è equilibrata o no, la lanciamo 30 volte. Se otteniamo ≥ 18 volte `Testa` diremo che è èquilibrata. Qual è la probabilità di dichiarare equilibrata una moneta che non lo è? Dei seguenti dati si usino quelli pertinenti

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 18) &= 0.181 \quad \text{se } X \sim B(30, 0.5) \\ &= 0.578 \quad \text{se } X \sim B(30, 0.6) \\ &= 0.5 \quad \text{se } X \sim B(35, 0.5) \\ &= 0.886 \quad \text{se } X \sim B(35, 0.6) \end{aligned}$$

Risposta

D insieme degli esperimenti fatti con monete sbilanciate

$T_{\geq 18}$ insieme degli esperimenti con risultato ≥ 18

$\Pr(D) = 0.2$ prevalenza

$\Pr(\neg D) = 1 - \Pr(D) = 0.8$

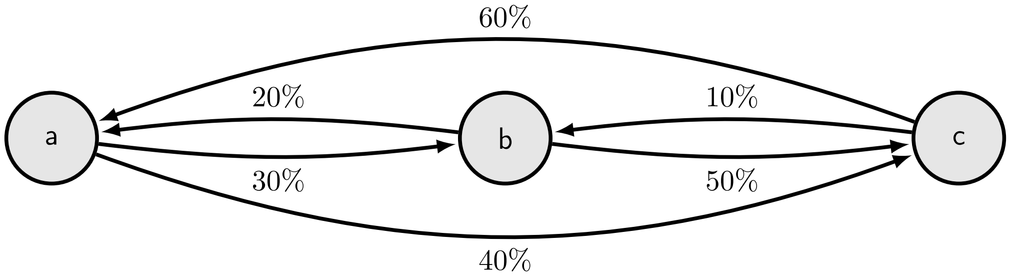
$\Pr(T_{\geq 18}|\neg D) = 0.181$

$\Pr(T_{\geq 18}|D) = 0.578$

$\Pr(T_{\geq 18}) = \Pr(T_{\geq 18}|D)\,\Pr(D) + \Pr(T_{\geq 18}|\neg D)\,\Pr(\neg D) \;=\; = 0.26$

$$\Pr(\neg D \mid T_{\geq 18}) = \frac{\Pr(T_{\geq 18}|\neg D)\,\Pr(\neg D)}{\Pr(T_{\geq 18})} = 0.444$$ Risposta

Quesito 7. Un rospo vive in uno stagno e passa le sue giornate su tre foglie di ninfea che indichiamo con a, b, e c. Ogni ora salta da una all'altra con probabilità riassunte nel diagramma sottostante (la probabilità di restare nello stesso punto è lasciata implicita).



Se guardiamo in un momento qualsiasi troveremo il rospo in a, b, o c con probabilità rispettivamente 11/28, 25/112, e 43/112. Supponiamo che il rospo sia in a al tempo $t = 1$

1. Qual è la probabilità che al tempo $t = 2$ il rospo passi a b ?
2. Qual è la probabilità che al tempo $t = 0$ il rospo fosse in c ?

Esprimere il risultato come rapporto di numeri interi.

Risposta

Siano R_t le variabili aleatorie che danno la posizione del rospo al tempo t.

Dal testo leggiamo $\Pr(R_t = \mathsf{a}) = 11/28$, $\Pr(R_t = \mathsf{b}) = 25/112$, e $\Pr(R_t = \mathsf{c}) = 43/112$

Dal diagramma leggiamo

$$\Pr(R_{t+1} = \mathsf{a} \mid R_t = \mathsf{b}) = 1/5 \qquad \text{Risposta 1}$$

$$\Pr(R_{t+1} = \mathsf{c} \mid R_t = \mathsf{a}) = 2/5$$

Quindi

$$\begin{aligned}\Pr(R_0 = \mathsf{c} \mid R_1 = \mathsf{a}) &= \frac{\Pr(R_1 = \mathsf{a} \mid R_0 = \mathsf{c}) \cdot \Pr(R_0 = \mathsf{c})}{\Pr(R_1 = \mathsf{a})} = \frac{(2/5) \cdot (43/112)}{11/28} \\ &= 43/110 \qquad \text{Risposta 2}\end{aligned}$$