Domande (capziose e artificiali) per verificare la comprensione del significato di p-valore.

N.B. Spesso le domande contengono informazioni irrilevanti.

Quesito 1. Ripetiamo 2 volte lo stesso T-test a due code con campioni di dimensione $n = 25$. Assumendo vera H_0, qual è la probabilità che in almeno uno di questi test il p-valore risulti ≤ 0.05 ?

Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 1. La probabilità è $= 1 - (0.95)^2 = 0.0975$.

Quesito 2. Abbiamo fatto un T-test a due code con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.04. Assumendo vera H_0, qual è la probabilità che, ripetendo il test una seconda volta con un campione di dimensione doppia, il p-valore risulti ≤ 0.08 ?

Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 1. La probabilità è $= 1 - 0.08 = 0.92$.

Quesito 3. Abbiamo fatto un T-test coda superiore con un campione di dimensione $n = 25$ e abbiamo ottenuto come p-valore 0.02. Assumendo vera H_A, qual è la probabilità che ripetendo il test una seconda volta con un campione della stessa dimensione il p-valore risulti di nuovo ≤ 0.02 ?

Nel caso non sia possibile determinare il valore esatto ma solo un limite superiore/inferiore. Si scelga tra le seguenti opzioni la più opportuna.

1. La probabilità è $= \ldots$ (specificare)
2. La probabilità è $< \ldots$ (specificare)
3. La probabilità è $> \ldots$ (specificare)
4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Risposta 4. Non ci sono sufficienti informazioni per stimare questa probabilità.

Quesito 4. Preleviamo un campione di rango $n = 25$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 5$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei tre valori 1, 2, o 4.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 2$ contro $H_A : \mu \in \{1, 4\}$.

1. Che test facciamo?
2. Se la media del campione di cui sopra è $\bar{x} = 3$, quant'è il p-valore?
3. Dato questo risultato, la probabilità di $\mu \in \{1, 4\}$ è ... (si scelga la risposta corretta ta le seguenti)

   (a) = p-valore; (b) = 1− p-valore; (c) 2/3; (d) Non ci sono sufficienti informazioni per ripondere.

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Facciamo uno z-test a due code. Risposta 1

$$\Pr\left(|\bar{X}| \geq 3\right) = \Pr\left(\left|\frac{\bar{X}-2}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \frac{|3-2|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(|Z| \geq 1\right)$$

= `2 * norm.cdf(-1)` = `0.317` Risposta 2

(d) Non ci sono sufficienti informazioni per ripondere. Risposta 3

Quesito 5. Preleviamo un campione di rango $n = 9$ da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che la deviazione standard è $\sigma = 2$. La media μ invece potrebbe avere uno qualsiasi dei tre valori 2, 6, o 7.

Vogliamo testare $H_0 : \mu = 2$ contro $H_A : \mu \in \{6, 7\}$.

1. Che test facciamo?
2. Se la media del campione di cui sopra è $\bar{x} = 3$, quant'è il p-valore?

Esprimere il risutato numerico tramite (solo) le funzioni elencate in calce.

Risposta

Facciamo uno z-test coda superiore. Risposta 1

$$\Pr\left(\bar{X} \geq 3\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-2}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{3-2}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(Z \geq 3/2\right)$$

= `1 - norm.cdf(3/2)` = `0.134` Risposta 2

Quesito 6. Abbiamo un dado con 8 facce numerate da 1 a 8. Sospettiamo che il dado non sia perfettamente equilibrato. Quindi per $i = 1, \ldots, 8$ testiamo le seguenti ipotesi: $H_0^{(i)} : p_i = 1/8$ contro $H_A^{(i)} : p_i > 1/8$.

Fissiamo una significatività α e, per $X \sim B(200, 1/8)$, sia k_α tale che $\alpha \approx \Pr(X > k_\alpha)$.

Lanciamo il dado 200 volte e registriamo la frequenza assoluta k_i dell i-esima faccia. Se $k_i > k_\alpha$ scartiamo $H_0^{(i)}$ e dichiariamo il dado difettato. Qual è (in funzione di α) la probabilità che un dado equilibrato venga dichiarato difettato? Si risponda per i seguenti 2 scenari

1. I test di ipotesi vengono fatti ciascuno con una serie diversa di 200 lanci
2. La stessa serie di 200 lanci viene usata per tutti test (trascuriamo la possibilità che due test possano essere contemporaneamente positivi).

Risposta

$1 - (1 - \alpha)^8$ Risposta 1

$8\,\alpha$ Risposta 2

Si assuma noto il valore delle seguenti funzioni della libreria `scipy.stats`

`norm.cdf(z)` $= \Pr\big(Z < \mathtt{z}\big)$ per $Z \sim N(0,1)$

`norm.ppf(`α`)` $= z_\alpha$ dove z_α è tale che $\Pr\big(Z < z_\alpha\big) = \alpha$ per $Z \sim N(0,1)$