La teoria del grafo random ha l'eliminazione debole degli immaginari.

Dimostrazione. Per ogni a tupla finita di elementi di $\mathcal{U}$, per ω-categoricità $S_{|a|} \subset L$ è finito ed ha la topologia discreta, quindi $\{\text{tp}(a)\}$ e la sua controimmagine tramite la proiezione canonica sono clopen. Da ciò segue che esiste una formula $\psi_a(x) \in L$ tale che per ogni tupla b, si ha $a \equiv b$ se e solo se $\psi_a(b)$.

Siano $\varphi(x, y) \in L$ e a tupla di elementi di $\mathcal{U}$ con $|a| = |y|$, voglio eliminare debolmente $\varphi(x, a)$.
Scelgo a' tupla di lunghezza minimale per cui esista una formula $\varphi'(x, z)$ tale che $\forall x(\varphi'(x, a') \leftrightarrow \varphi(x, a))$. Se a' è la tupla vuota ho finito, quindi supponiamo $|a'| \geq 1$.
Per non appesantire la notazione assumo, senza perdita di generalità, che $\varphi = \varphi'$ e $a = a'$.
Data una tupla b denoto con I_b l'insieme delle sue componenti.

Claim: se c è una tupla della stessa lunghezza di a, con $I_c \neq I_a$, allora $\exists x \neg(\varphi(x, a) \leftrightarrow \varphi(x, c))$.
Dal claim segue che se c è tale che $\forall x(\varphi(x, a) \leftrightarrow \varphi(x, c))$ allora $I_c = I_a$, cioè c deve essere una permutazione delle componenti di a, ma queste sono in numero finito e quindi φ è eliminata debolmente.

Denoto $I = I_a \cap I_c$. Dimostro il claim in quattro passi.
1) Esistono b e b' tali che $\varphi(b, a)$, $\neg\varphi(b', a)$, $b \equiv_I b'$.
Supponiamo per assurdo infatti che tali b e b' non esistano: allora $\varphi(b, a)$ sse $\varphi(b', a)$ per ogni $b' \equiv_I b$, cioè esiste una sottotupla propria $\bar{a}$ di a tale che $\varphi(x, a) \leftrightarrow \bigvee_{b \text{ t.c. } \varphi(b,a)} \psi_{b,\bar{a}}(x, \bar{a})$, e quest'ultima è una formula per ω-categoricità. Questo contraddice l'assunzione sulla minimalità della lunghezza di a.
2) Costruisco $b'' \equiv_I b$ avente la seguente proprietà: $I_{b''} \cap (I_a \cup I_c) \subseteq I$.
Per $i = 0, \ldots, |b| - 1$ pongo $b''_i = b_i$ sse $b_i \in I$. Invece se $b_i \notin I$, prendo b''_i in $\mathcal{U} \setminus (I_a \cup I_c) \cap \{u \mid \text{per ogni } v \in I \;\; r(u, v) \leftrightarrow r(b_i, v)\} \cap \{u \mid \text{ per ogni } j < i \;\; r(u, b''_j) \leftrightarrow r(b_i, b_j)\}$; tale insieme è non vuoto perché $\mathcal{U}$ è un grafo random.
A meno di sostituire b oppure b' con b'' a seconda che valga $\varphi(b'', a)$ oppure $\neg\varphi(b'', a)$ rispettivamente, possiamo supporre che almeno uno tra b e b' abbia la proprietà appena descritta.
3) Costruisco una tupla d tale che $d \equiv_{I_a} b$ e $d \equiv_{I_c} b'$.
Per $i = 0, \ldots, |b| - 1$ pongo $d_i = b_i$ sse $b_i \in I_a$ e $d_i = b'_i$ sse $b'_i \in I_c$; bisogna controllare che la definizione di d_i sia ben posta nel caso in cui simultaneamente $b_i \in I_a$ e $b'_i \in I_c$: per il punto 2) abbiamo che almeno uno tra b_i e b'_i è in I, per fissare le idee sia $b_i \in I$, ma allora $b'_i = b_i$ perché $b' \equiv_I b$.
Se invece $b_i \notin I_a$ e $b'_i \notin I_c$ definisco:
$V_i = \{d_j \mid j < i \text{ e } r(b_j, b_i)\} \cup \{u \in I_a \mid r(u, b_i)\} \cup \{u \in I_c \mid r(u, b'_i)\}$
$W_i = \{d_j \mid j < i \text{ e } \neg r(b_j, b_i)\} \cup \{u \in I_a \mid \neg r(u, b_i)\} \cup \{u \in I_c \mid \neg r(u, b'_i)\}$
Si ha $V_i \cap W_i = \varnothing$; infatti se $u \in I$ $r(u, b_i) \leftrightarrow r(u, b'_i)$, se $d_j \in I_c$ allora $r(b_j, b_i) \leftrightarrow r(d_j, b'_i)$ perché $d_j = b'_j$ e analogamente se $d_j \in I_a$.

Ora possiamo prendere d_i in $\mathcal{U} \setminus (I_a \cup I_c) \cap \{u \mid \text{ per ogni } v \in V_i \;\; r(u,v)\} \cap$
$\cap \{u \mid \text{per ogni } w \in W_i \;\; \neg r(u,w)\}$; di nuovo, tale insieme è non vuoto perchè $\mathcal{U}$ è un grafo random.

4) Una tra le tuple b' e d testimonia $\exists x \neg(\varphi(x,a) \leftrightarrow \varphi(x,c))$.

Supponiamo che b' non sia un tale testimone, cioè che valga $\neg\varphi(b',c)$, allora per costruzione vale $\varphi(d,a) \wedge \neg\varphi(d,c)$.