3. tétel

<u>Def.:</u> Hermitikus projektor: $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ (projektor)

$\underline{\underline{P}}^H = \underline{\underline{P}}$ (hermitikus)

Inverz: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$ Jobboldali inverz

$\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ Baloldali inverz

Ha $\underline{\underline{A}}$ nemszinguláris, akkor léteznek és a kettő megegyezik.

n-edrangú projektor

Általánosított inverz:

Egy r-edrangú $\underline{\underline{A}}$ mátrix általánosított inverze $\underline{\underline{X}}$, ha $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}$ és $\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}}$ r-edrangú projektor.

① $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$ → ①: Általánosított inverz: $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^g$

② $\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}$ → ①+②: <u>Reflexív</u> általánosított inverz: $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^r$

③ $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}})^H = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}$ → ①+②+③: <u>Normált</u> általánosított inverz: $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^n$

④ $(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}})^H = \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}}$ → ①+②+③+④: Moore-Penrose-féle <u>pszeudoinverz</u>: $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^+$

<u>Tétel</u>: Bármely $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz található $\underline{\underline{A}}^g$ általánosított inverz. (Nem egyértelmű az $\underline{\underline{A}}^g$.)

Bizonyítás:

Hozzuk A-t normálalakra: $\underset{m\times m}{P}\,\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times n}{Q} = \begin{array}{cc|c} r & n-r & \\ \left[\begin{matrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \}r \\ \}m-r \end{matrix} \end{array}$

Legyen $\underset{n\times m}{A^g} = Q\cdot \begin{array}{cc|c} r & m-r & \\ \left[\begin{matrix} E_r & U \\ V & W \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix} \end{array} \cdot P$, ahol U, V, W tetszőleges.

Ekkor:

$$A A^g A = \underbrace{P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cancel{Q^{-1}}}_{A} \cdot \underbrace{\cancel{Q}\begin{bmatrix} E_r & U \\ V & W \end{bmatrix}\cancel{P}}_{A^g} \cdot \underbrace{\cancel{P^{-1}}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}}_{A}$$

$$= P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1} = A \quad \checkmark$$

A^g és A^r rangja:

$AA^gA = A$

$\varrho(AA^gA) = \varrho(A)$

$\varrho(AA^gA) \leq \min(\varrho(A), \varrho(A^g))$

(szorzással rang nem nőhet)

$\varrho(A^g) \geq \varrho(A)$

$AA^rA = A \rightarrow \varrho(A^r) \geq \varrho(A)$

$A^rAA^r = A^r \rightarrow \varrho(A) \geq \varrho(A^r)$

$\Downarrow$

$\varrho(A^r) = \varrho(A)$

Tétel:

Tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ mátrix Moore-Penrose-féle inverze egyértelmű.

Bizonyítás: (Valós elemű kvadratikus mátrixokra.)

① $AXA=A \rightarrow A^TX^TA^T=A^T$ ② $XAX=X \rightarrow X^TA^TX^T=X^T$

④ $(XA)^T=XA=A^TX^T$ ③ $(A^{\#}X)^T=AX=X^TA^T$

$$\boxed{XAA^T=A^T}$$

$$AXX^T=X^T$$

$$\boxed{X=\underbrace{(XX^T)^T}_{\text{Nevezzük el B-nek}}A^T}$$

Indirekt módszer: Tfh. létezik két különböző A_1^+ és A_2^+, ami kielégíti a fentieket.

$$\left.\begin{aligned} A_1^+AA^T&=A^T\\ A_2^+AA^T&=A^T\end{aligned}\right\}\ominus$$

$$(A_1^+-A_2^+)AA^T=0$$

$$A_1^+(A_1^+)^T=B_1$$
$$A_2^+(A_2^+)^T=B_2$$
$$A_1^+=B_1^TA^T$$
$$A_2^+=B_2^TA^T$$
$$A_1^+-A_2^+=(B_1^T-B_2^T)A^T$$

a) Tekintsük a következő szorzatot:

$$\underbrace{(A_1^+-A_2^+)AA^T}_{=0}(A_1^+-A_2^+)^T=0$$

$$\left[(A_1^+-A_2^+)A\right]\left[(A_1^+-A_2^+)A\right]^T=0$$

$$\downarrow$$

$$tr\left\{\left[(A_1^+-A_2^+)A\right]\left[(A_1^+-A_2^+)A\right]^T\right\}=0$$

$$\downarrow$$

Ez az $\left[(A_1^+-A_2^+\cancel{A})\right]$ mátrix elemeinek négyzetösszege, tehát:

$$\boxed{(A_1^+-A_2^+)A=0}$$

b) Legyen C olyan max. rangú mx, amelyre $A^TC=0$, vagyis C oszlopai ortogonálisak A oszlopaira:

$$(A_1^+-A_2^+)C=(B_1^T-B_2^T)A^TC=0$$

Mivel C max. rangú, ezért Sylvester miatt

$$r_A+r_C=n \rightarrow r_C=n-r_A$$

Válasszunk A-ból r_A db lin. ftlen. oszlopot és C-ből $n-r_A$ db lin ftlen oszlopot: $U=\left[\underset{A}{\overset{r_A}{|||}}\;\middle|\;\underset{C}{\overset{n-r_A}{|||}}\right]$

$$(A_1^+-A_2^+)U=0$$

$$\downarrow$$

$$A_1^+-A_2^+=0 \rightarrow A_1^+=A_2^+ \checkmark$$

A Moore–Penrose-féle inverz előállítása (valós elemű mátrix esetén):

$$\underset{m\times n}{\underline{\underline{A}}} = \underset{m\times r}{\underline{\underline{U}}}\,\underset{r\times n}{\underline{\underline{V}}^T} = \sum_{k=1}^{r} \underline{u}_k \underline{v}_k^T$$ Egy minimális diadikus felb.

$$\underset{n\times m}{\underline{\underline{A}}^+} = \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{V}})^{-1}(\underline{\underline{U}}^T\underline{\underline{U}})^{-1}\underline{\underline{U}}^T =$$

$$= \underbrace{\underline{\underline{V}}}_{n\times r}\Big(\underbrace{\underbrace{\underline{\underline{V}}^T}_{r\times n}\underbrace{\underline{\underline{V}}}_{n\times r}}_{r\times r}\Big)^{-1}\Big(\underbrace{\underbrace{\underline{\underline{U}}^T}_{r\times m}\underbrace{\underline{\underline{U}}}_{m\times r}}_{r\times r}\Big)^{-1}\underbrace{\underline{\underline{U}}^T}_{r\times m}$$

Biz.:

① $$AA^+A = U\underbrace{V^T\cdot V(V^TV)^{-1}}_{E}\underbrace{(U^TU)^{-1}U^T\cdot U}_{E}V^T = UV^T = A \quad ✓$$

② $$A^+AA^+ = V(V^TV)^{-1}\underbrace{(U^TU)^{-1}U^T\cdot U}_{E}\underbrace{V^T\cdot V(V^TV)^{-1}}_{E}(U^TU)^{-1}U^T = A^+ \quad ✓$$

③ $$(AA^+)^T = \Big[U\underbrace{V^T\cdot V(V^TV)^{-1}}_{E}(U^TU)^{-1}U^T\Big]^T = \Big[U(U^TU)^{-1}U^T\Big]^T =$$

$$= U\big[(U^TU)^{-1}\big]^TU^T = U(U^TU)^{-1}U^T$$

$$AA^+ = U\underbrace{V^T\cdot V(V^TV)^{-1}}_{E}(U^TU)^{-1}U^T = U(U^TU)^{-1}U^T$$

$=$ ✓

④ $$(A^+A)^T = \Big[V(V^TV)^{-1}\underbrace{(U^TU)^{-1}U^T\cdot U}_{E}V^T\Big]^T = \Big[V(V^TV)^{-1}V^T\Big]^T = V(V^TV)^{-1}V^T$$

$$A^+A = V(V^TV)^{-1}V^T = (A^+A)^T$$ ✓