8. tétel

Mátrixok spektrálfelbontása:

Tegyük fel, hogy az $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix ~~felbontható~~ előállítható biortogonális vektorrendszert alkotó diádok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \underline{u}_k \cdot \underline{v}_k^T, \quad \text{ahol} \quad \underline{v}_k^T \cdot \underline{u}_k = 1$$

$$\underline{v}_i^T \cdot \underline{u}_j = 0, \text{ ha } i \neq j$$

$$\boxed{\underline{v}_i^T \underline{u}_j = \delta_{ij}}$$

Szorozzuk jobbról bármelyik $\underline{u}_p$ oszlopvektorral:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \underline{u}_k \cdot \underbrace{\left(\underline{v}_k^T \cdot \underline{u}_p\right)}_{\substack{=0, \text{ ha } k \neq p \\ =1, \text{ ha } k = p}} = \lambda_p \cdot \underline{u}_p$$

Vagyis az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ vektorok az $\underline{\underline{A}}$ mátrix (jobb oldali) sajátvektorai.

Szorozzuk balról bármelyik $\underline{v}_p^T$ sorvektorral:

$$\underline{v}_p^T \underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\underline{v}_p^T \underline{u}_k}_{\substack{=0, \text{ ha } k \neq p \\ =1, \text{ ha } k = p}} \cdot \underline{v}_k^T = \lambda_p \cdot \underline{v}_p^T$$

Vagyis a $\underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_n^T$ vektorok az $\underline{\underline{A}}$ mátrix (bal oldali) sajátvektorai

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\underline{\underline{U}} = \left[\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_n\right] ; \quad \underline{\underline{V}}^T = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \vdots \\ \underline{v}_n^T \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{u}_k \underline{v}_k^T = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\underline{\underline{V}}^T, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \rangle$$ → A mátrixot hasonlósági transzformációval diagonalizáltuk.

A sajátvektorokból alkotott $\underline{\underline{U}}$ mátrix a modálmátrix.

Ha $\underline{\underline{U}}$ invertálható = nemszinguláris = maximális rangú, akkor $\underline{\underline{A}}$-nak létezik teljes sajátvektorrendszere, tehát $\underline{\underline{A}}$ hasonlósági transzformációval diagonalizálható, azaz $\underline{\underline{A}}$ egyszerű struktúrájú mátrix.

Tétel:

Egy $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Biz: Teljes indukcióval:

Tudjuk, hogy $\underline{\underline{A}}$-nak legalább 1 db sajátvektora van (ld. 7. tételben), ami lineárisan független: $c_1 \underline{u}_1 \neq 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$, hiszen $\underline{u}_1 \neq 0$

Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ különböző sajátértékek, $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k$ pedig hozzájuk tartozó sajátvektorok.

Belátjuk, hogyha ~~a~~ $k-1$ db sajátvektor lin. független, akkor k db is az.

Indirekt módszer:

Tegyük fel, hogy $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_{k-1}$ lin. ftlen, de $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_k$ már lineárisan összefüggő:

①

k-1 db lin. ftlen: $\alpha_1\underline{u}_1+\alpha_2\underline{u}_2+\dots+\alpha_{k-1}\underline{u}_{k-1}=0 \iff \alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}=0$

k db lin. összefüggő:

② $\alpha_1\underline{u}_1+\alpha_2\underline{u}_2+\dots+\alpha_{k-1}\underline{u}_{k-1}+\alpha_k\underline{u}_k=0$

úgy, hogy pl. $\alpha_1\neq 0$

Szorozzuk meg ②-t $\underline{\underline{A}}$-val:

$$\alpha_1\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_1}_{\lambda_1\underline{u}_1}+\alpha_2\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_2}_{\lambda_2\underline{u}_2}+\dots+\alpha_{k-1}\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_{k-1}}_{\lambda_{k-1}\underline{u}_{k-1}}+\alpha_k\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_k}_{\lambda_k\underline{u}_k}=0$$

Szorozzuk meg ①-et λ_k-val és vonjuk ki belőle:

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)\underline{u}_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_k)\underline{u}_2+\dots+\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\underline{u}_{k-1}+\underbrace{\cancel{\alpha_k(\lambda_k-\lambda_k)\underline{u}_k}}_{0}=0$$

Mivel $\alpha_1\neq 0$ és $\lambda_1\neq\lambda_k$ a feltevések miatt, arra jutottunk, hogy létezik $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_{k-1}$-nek olyan lin. kombinációja, amelynek eredménye 0 úgy, hogy nem minden együttható 0, tehát $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_{k-1}$ lineárisan összefüggők.

Ellentmondásra jutottunk, tehát az állítás volt hamis, így a tételt bebizonyítottuk.

Következmény:

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak (n-edrendű kvadratikus) van n db különböző sajátértéke, akkor létezik teljes sajátvektorrendszere, vagyis $\underline{\underline{A}}$ diagonalizálható.

$$D_n(\lambda)=|\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}|=\sum_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)$$

→ Diagonalizálhatóság elégséges feltétele (de nem szükséges)

A karakterisztikus polinom általános alakja:

$$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = D_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$, ahol α_k a λ_k sajátérték multiplicitása

Tétel:

Ha a $D_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ alakban írt karakterisztikus polinom esetén $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n$, akkor a $\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ karakterisztikus mátrix rangja a $\lambda = \lambda_k$ helyen legalább $n - \alpha_k$:

$$\varrho(\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \geq n - \alpha_k$$

Bizonyítás: A determináns deriválási szabálya segítségével.

Jelölés: $D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_l \\ i_1 & i_2 & \dots & i_l \end{pmatrix}(\lambda)$: A karakterisztikus mátrix $i_1, i_2, \dots, i_l$-edik sorának és oszlopának elhagyásával keletkező $n-l$-edrendű aldetermináns (főminor).

Determináns deriválási szabálya alapján:

$$D'(\lambda_k) = \sum_{i=1}^{n} D\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}(\lambda_k) = 0$$

$$D''(\lambda_k) = 2 \cdot \sum_{\binom{n}{2}} D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}(\lambda_k) = 0$$

$$D'''(\lambda_k) = 3! \sum_{\binom{n}{3}} D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}(\lambda_k) = 0$$

$\vdots$

$$D^{(\alpha_k)}(\lambda_k) = (\alpha_k)! \cdot \sum_{\binom{n}{\alpha_k}} D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{\alpha_k} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{\alpha_k} \end{pmatrix}(\lambda_k) \neq 0$$ (mivel a $(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ tényező eltűnik)

Tehát létezik a $\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$-nak legalább egy $D\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\alpha_k} \\ i_1 & \dots & i_{\alpha_k} \end{pmatrix}(\lambda_k)$ alakú, $n - \alpha_k$-adrendű főminora, amely nem zérus. Ezért a $\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ rangja legalább $n - \alpha_k$.

Következmény tétel:

~~Ha~~ ~~...~~ Egy mátrix λ_k sajátértékéhez tartozó lin. független sajátvektorok száma legfeljebb α_k.

Biz:

Ha $\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ rangja legalább $n - \alpha_k$, akkor a $(\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \underline{u} = 0$ egyenletnek legfeljebb ~~...~~ α_k db lin. független megoldása van.

$$(\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{U}} = 0 \longrightarrow \varrho(\underline{\underline{U}}) \leq \alpha_k$$

$\Downarrow$

Következmény: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak csak akkor létezik teljes sajátvektorrendszere (akkor diagonalizálható), ha

$$D_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n \quad \text{esetén}$$

$\varrho(\lambda_k \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = n - \alpha_k$, vagyis minden sajátértékhez annyi lin. független sajátvektor tartozik, amennyi a sajátérték multiplicitása.

Schur tétele:

Minden kvadratikus mátrix alkalmasan választott unitér transzformációval felső (vagy alsó) háromszögmátrixra transzformálható.

Def: Unitér transzformáció: unitér mátrixszal végzett hasonlósági transzformáció

$\underline{\underline{X}}^H \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}} \;\rightarrow\; \underline{\underline{X}}$ unitér mátrix

$\underline{\underline{X}}^H \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}$: unitér transzform.

Bizonyítás:

Adott $\underline{\underline{A}}$ komplex elemű, kvadratikus mátrix, aminek biztosan van legalább egy sajátvektora.

Legyen a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor $\underline{x}_1$, úgy, hogy

$\underline{x}_1^H \underline{x}_1 = 1$ (egységnyi hosszúságú: biztosan létezik ilyen, hiszen ha $\underline{u}$ sajátvektor, akkor $\alpha \cdot \underline{u}$ is az)

Ez az egyetlen vektor nemteljes unitér vektorrendszert alkot. Egészítsük ki teljes unitér vektorrendszerré:

$\underline{x}_1 \underline{x}_1^H$: hermitikus projektor (1 rangú)

$\underline{\underline{E}} - \underline{x}_1 \underline{x}^H$: komplementer projektor (ez is hermitikus) $n-1$ rangú

Felírható hermitikus diádok összegeként:

$$\underline{\underline{E}} - \underline{x}_1 \underline{x}_1^H = \sum_{k=2}^{n} \underline{y}_k \underline{y}_k^H = \underline{\underline{Y}}\,\underline{\underline{Y}}^H$$

Legyen $\underline{\underline{X}} = \left[\underline{x}_1 \;\; \underline{y}_2 \cdots \underline{y}_n \right]$ unitér mátrix, hiszen

$\underline{\underline{X}}^H \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$

Alkalmazzuk az $\underline{\underline{X}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{X}}$ unitér transzformációt:

$$\underline{\underline{X}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^H \\ \underline{y}_2^H \\ \vdots \\ \underline{y}_n^H \end{bmatrix} \left[\underbrace{\underline{\underline{A}}\, \underline{x}_1}_{\lambda_1 \underline{x}_1} \; \underline{\underline{A}}\, \underline{y}_2 \cdots \underline{\underline{A}}\, \underline{y}_n \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & * & * & * \cdots & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & \underline{\underline{A}}^{(2)} & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

Legyen $\underline{x}_2$ az $\underline{\underline{A}}^{(2)}$ mátrixnak egy, a λ_2 sajátértékéhez tartozó normált sajátvektora, azaz $\underline{x}_2^H \underline{x}_2 = 1$

Ezt egészítsük ki a $\underline{z}_3, \dots, \underline{z}_n$ vektorokkal teljes unitér vektorrendszerré, és alkossuk belőlük $\underline{\underline{X}}_2$ mátrixot:

$$\underline{\underline{X}}_2 = \left[\underline{e}_1 \; \underline{x}_2 \; \underline{z}_3 \cdots \underline{z}_n \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & \underline{x}_2 & \underline{z}_3 & \cdots & \underline{z}_n \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

Ekkor:

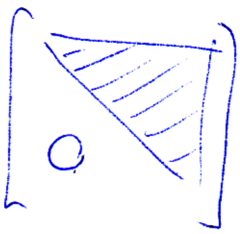
$$\underline{\underline{X}}_2^H \left(\underline{\underline{X}}_1^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{X}}_1 \right) \underline{\underline{X}}_2 = \left[\begin{array}{cc|cccc} \lambda_1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \underline{\underline{A}}^{(3)} & & \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right]$$

Ezt folytatva $n-1$ lépésben $\underline{\underline{A}}$-t felső háromszögmátrixszá transzformáljuk:

$$\underline{\underline{X}}_1 \underline{\underline{X}}_2 \cdots \underline{\underline{X}}_{n-1} = \underline{\underline{U}} \rightarrow$$ $\underline{\underline{U}}$ is unitér mátrix, mivel unitér mátrixok szorzata is unitér.

Tehát

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{B}} =$$



$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Tétel:

A normális és csak a normális mátrixok transzformálhatók unitér transzformációval diagonálmátrixszá. Ennek elemei a mátrix sajátértékei.

Def.: Normális: felcserélhető a transzp. konjugáltjával

$$\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^H$$

Bizonyítás:

1) Ha normális, akkor unitér trafó.-val diagonalizálható.

Schur-tétel alkalmazásával:

Létezik $\underline{\underline{U}}$, hogy

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{B}} = \qquad /^H$$

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{B}}^H =$$

Szorozzuk össze:

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}} \underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^H}_{\underline{\underline{E}},\ \text{mert unitér}} \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^H$$

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}^H \underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^H}_{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{B}}$$

Mivel $AA^H = A^H A$, ezért $BB^H = B^H B$ ($\underline{\underline{B}}$ is normális)

$\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{B}}$ bal felső sarokeleme: $\bar{\lambda}_1 \cdot \lambda_1$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^H$ bal felső sarokeleme: $\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + b_{12} \cdot \bar{b}_{12} + \ldots + b_{1n} \cdot \bar{b}_{1n}$

Mivel $B^H B = BB^H$, ezért $b_{12} \cdot \bar{b}_{12}, \ldots, b_{1n} \cdot \bar{b}_{1n} = 0$, tehát $b_{12}, \ldots b_{1n} = 0$.

Hasonlóan adódik, hogy $\underline{\underline{B}}$ minden főátló feletti eleme 0, tehát $\underline{\underline{B}}$ diagonálmátrix.

2) Ha $\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{D}}$ diagonális, akkor $\underline{\underline{A}}$ normális.

Minden diagonálmátrix felcserélhető a konjugáltjával:

$$\underline{\underline{D}}\,\overline{\underline{\underline{D}}} = \overline{\underline{\underline{D}}}\cdot\underline{\underline{D}} \quad , \quad \overline{\underline{\underline{D}}} = \underline{\underline{D}}^H$$

$$\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^H = \underline{\underline{D}}^H \underline{\underline{D}}$$ (minden diag. mx. normális)

$$\Downarrow$$

$$(\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}\, \underbrace{\underline{\underline{U}})(\underline{\underline{U}}^H}_{E} \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{U}}) = (\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}^H \underbrace{\underline{\underline{U}})(\underline{\underline{U}}^H}_{E} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}})$$

$$\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}}$$ $/\cdot \underline{\underline{U}}$ (balról) $\cdot \underline{\underline{U}}^H$ (jobbról)

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}}$$ Tehát $\underline{\underline{A}}$ normális.

Szinguláris érték:

Legyen $\underline{\underline{A}}$ $m \times n$ típusú komplex elemű mátrix. Az ebből képzett $\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}}$ mátrix pozitív szemidefinit, hiszen

$$\underline{x}^H \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = (\underline{\underline{A}}\, \underline{x})^H \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{y}^H \underline{y} \geq 0$$

Az $\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}}$ mátrixnak ezért minden sajátértéke nemnegatív, jelöljük ezeket σ_i^2-tel:

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$$ (Feltesszük, hogy $n > m$ és a mátrix rangja r.)

A $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ számok az $\underline{\underline{A}}$ mátrix szinguláris értékei.

Tétel: Szinguláris érték szerinti felbontás

Legyen $\underline{\underline{A}}$ $m \times n$ típusú mátrix, és tegyük fel, hogy $m \geq n$.
Ekkor létezik $\underline{\underline{U}}$, $\underline{\underline{V}}$, $\underline{\underline{D}}$, hogy

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{V}}^{H}$$

, ahol $\underline{\underline{U}}$: $m \times m$ unitér mátrix

$\underline{\underline{V}}$: $n \times n$ unitér mátrix

$$\underline{\underline{D}} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ \hline & & \\ & 0 & \\ & & \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-n \end{array}$$

$m \times n$ mátrix

és $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$.

A σ_i valós számok $\underline{\underline{A}}$ szinguláris értékei.

$\underline{\underline{V}}$ az $\underline{\underline{A}}^H\underline{\underline{A}}$ modálmátrixa,

$\underline{\underline{U}}$ az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^H$ modálmátrixa.

Bizonyítás:

Tekintsük az $\underline{\underline{A}}^H\underline{\underline{A}}$ mátrixot (poz. szemidefinit), ennek legyen a modálmátrixa $\underline{\underline{V}}$ (unitér). Ekkor $\underline{\underline{A}}^H\underline{\underline{A}}$ diagonalizálható:

$$\underline{\underline{V}}^H\underline{\underline{A}}^H\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \tilde{\underline{\underline{D}}}^2, \text{ ahol } \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

σ_i: szinguláris értékek ($\underline{\underline{A}}$-hoz tart.)

Legyen $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}$: $\underline{\underline{F}}^H\underline{\underline{F}} = \tilde{\underline{\underline{D}}}^2$

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja $r \leq n$, akkor az $\underline{\underline{F}}$ oszlopvektoraira igaz, hogy:

$$\underline{f}_i^H \cdot \underline{f}_i = \sigma_i^2, \text{ ha } i = 1, \ldots, r$$

$$\underline{f}_i^H \cdot \underline{f}_i = 0, \text{ ha } i = r+1, \ldots, n$$

$$\underline{f}_i^H \cdot \underline{f}_j = 0 \text{ minden } i = 1, \ldots, n \text{ esetén.}$$

Normáljuk az $\underline{f}_i$ vektorokat $(i=1,\dots,r)$:

$$\underline{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\underline{f}_i, \quad \text{ha } i=1,\dots,r, \quad \text{akkor}$$

$$\underline{u}_i^H \underline{u}_j = \delta_{ij}, \quad i=1,\dots,r \text{ esetén, tehát}$$

$\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_r$ nemteljes unitér vektorrendszert alkot.

Egészítsük ki teljes unitér vektorrendszerré (m elemű)

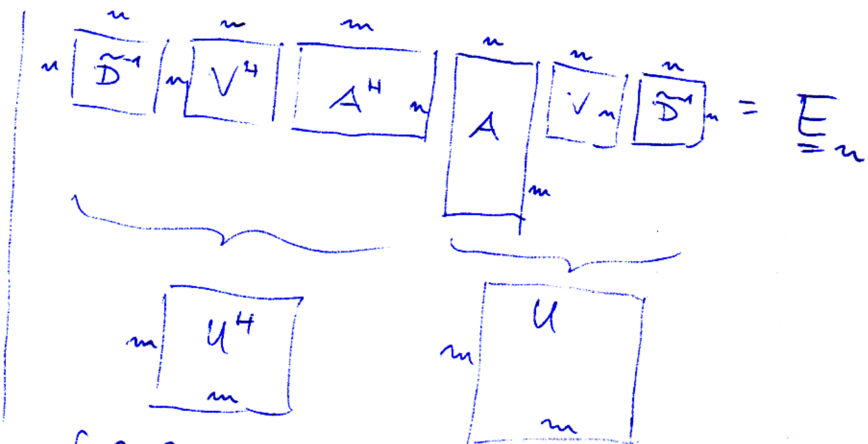
$$\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_r,\underline{u}_{r+1},\dots,\underline{u}_m$$

Alkossunk az oszlopvektorokból unitér mátrixot:

$$\underline{\underline{U}}^H\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{E}}, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{\tilde{D}}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{V}}^H\underline{\underline{A}}^H\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\tilde{D}}}^2$$

$$\underbrace{\underline{\underline{\tilde{D}}}^{-1}\underbrace{\underline{\underline{V}}^H\underline{\underline{A}}^H}_{\underline{\underline{F}}^H}}_{\underline{\underline{U}}^H}\;\underbrace{\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{F}}}\underline{\underline{\tilde{D}}}^{-1}}_{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{E}}$$



$$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{D}}} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}\}\, m-n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{V}}^H} \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{D}}\underbrace{\underline{\underline{V}}^H\underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{E}}}\underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{U}}^H = \underline{\underline{U}}\cdot\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\tilde{D}}}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\underline{\underline{U}}^H$$

$$\underline{\underline{U}}^H(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^H)\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{D}}}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$ tehát $\underline{\underline{U}}$ valóban $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^H$ modálmátrixa.