6. tétel

Nemszinguláris szimmetrikus tridiagonális mátrix inverze egypárú (és fordítva)

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Szegélyezzük egy sorral (fent) és egy oszloppal (jobb oldalt):

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 & \ddots & b_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & a_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccc} u_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_2 & l_{21} & 0 & & & 0 \\ u_3 & l_{31} & l_{32} & & & 0 \\ u_4 & l_{41} & l_{42} & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_n & l_{n1} & l_{n2} & & & 0 \\ \hline -u_0 & u_0 v_1 & u_0 v_2 & \cdots & \cdots & u_0 v_n \end{array}\right]$$

A szegélyezett mátrix egy alsó háromszögmátrix, így az inverze is ilyen alakú. Másrészt a szegélyezett mátrix egy perszimmetrikusan particionált blokkmátrix:

$$\begin{array}{c} 1\{ \\ n\{ \end{array}\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \begin{array}{c} \\ n\{ \end{array}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \underline{e}_1^T & 0 \\ \hline \underline{\underline{K}} & \underline{e}_n \end{array}\right]}_{n \;\; 1}^{-1} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \underline{u} & \underline{\underline{L}} \\ \hline -u_0 & u_0 \underline{v}^T \end{array}\right]}_{1 \;\; n}\begin{array}{c} \}n \\ \}1 \end{array} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline S & T \end{array}\right]}_{1 \;\; n}$$

$\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{T}}$ alapján:

$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}}^{-1} = \underline{\underline{L}} + \underline{u}\,\underline{v}^T$, ahol $l_{ij}=0$, ha $i \le j$

Tehát $\boxed{r_{ij} = u_i \cdot v_j, \text{ ha } i \le j}$ és mivel $\underline{\underline{K}}$ szimmetrikus, ezért $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}}^{-1}$ is az.

Ezért $\boxed{r_{ij} = r_{ji} = u_j v_i, \text{ ha } i \ge j}$ → Tehát $\underline{\underline{K}}^{-1}$ egypárú.

Másik irány: egypárú mátrix inverze szimm. tridiagonális.

$\underline{\underline{R}}$ Egypárú mátrix: $$r_{ij} = \begin{cases} u_i v_j, & \text{ha } i \le j \\ u_j v_i, & \text{ha } i \ge j \end{cases}$$

$$r_{ij} = u_i v_j + \underbrace{\begin{cases} 0, & \text{ha } i \le j \\ u_j v_i - u_i v_j, & \text{ha } i \ge j \end{cases}}_{l_{ij} \text{ alsó háromszögmátrix elemei}}$$

Ekkor:

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{L}} + \underline{u}\,\underline{v}^T$$

Szegélyezzük $\underline{\underline{L}}$-t balról $\underline{u}$-val, alulról $\underline{v}^{*T}$-vel, és legyen a bal alsó sarokban -1:

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 & l_{21} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_3 & l_{31} & l_{32} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & l_{41} & l_{42} & l_{43} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ u_n & l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & l_{n,n-1} & 0 \\ \hline -1 & v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc|c} u_1^{-1} & & & & & 0 \\ \hline * & l_{21}^{-1} & & & & 0 \\ * & & l_{32}^{-1} & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & l_{n-1,n-2}^{-1} & \\ & & & & l_{n,n-1}^{-1} & \\ * & \cdots & & * & * & v_n^{-1} \end{array}\right]$$

$$l_{ij} = v_i u_j - u_i v_j$$

$l_{i+1,i} = v_{i+1} u_i - u_{i+1} v_i \neq 0 \to$ annak feltétele, hogy a szegélyezett mátrix nemszinguláris.

A szegélyezett mátrix alsó háromszögmátrix, így az inverze is az.

Az inverz komplementer módon perszimmetrikusan particionált, és a bal alsó blokkja felső Hessenberg-féle mátrix:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{u} & \underline{\underline{L}} \\ \hline -1 & \underline{v}^T \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} u_1^{-1} \underline{e}_1^T & 0 \\ \hline \underline{\underline{H}} & v_n^{-1} \underline{e}_n \end{array}\right]$$

$h_{ij} \neq 0$, ha $i \ge j-1$

$h_{ij} = 0$, ha $j - i > 1$

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = (\underline{\underline{L}} + \underline{u}\,\underline{v}^T)^{-1} = \underline{\underline{H}}$$

→ Mivel $\underline{\underline{R}}$ szimmetrikus, ezért $\underline{\underline{H}}$ egyszerre felső és alsó Hessenberg-féle, amiből következik, hogy szimmetrikus tridiagonális. ✓

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ S & T \end{bmatrix} \to \begin{array}{l} S^{-1} = B - AC^{-1}D \\ C^{-1} = Q - PS^{-1}T \end{array}$$

$\boxed{-6/2-}$

$\underline{\underline{K}}$ inverzének számítása rekurzióval:

A szegélyezett mátrix (alsó háromszögmátrix) inverzének főátlóbeli elemei alapján:

$$\boxed{u_1 = 1}$$

$$l_{i+1,i} = b_i^{-1}$$

$$(u_0 v_n)^{-1} = 1 \rightarrow v_n = u_0^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{e}_1^T & 0 \\ \hline \underline{\underline{K}} & \underline{e}_n \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underline{u} & \underline{\underline{L}} \\ \hline -u_0 & u_0 \underline{v}^T \end{array}\right] = \underline{\underline{E}} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T & 0 \\ \underline{\underline{K}} & \underline{e}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ -u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soronként:

$$a_1 u_1 + b_1 u_2 = 0 \longrightarrow u_2 = -\frac{a_1}{b_1} u_1$$

$$b_1 u_1 + a_2 u_2 + b_2 u_3 = 0 \longrightarrow u_3 = -\frac{1}{b_2}(b_1 u_1 + a_2 u_2)$$

$$b_2 u_2 + a_3 u_3 + b_3 u_4 = 0$$

$$b_i u_i + a_{i+1} u_{i+1} + b_{i+1} u_{i+2} = 0 \longrightarrow u_{i+2} = -\frac{1}{b_{i+1}}(b_i u_i + a_{i+1} u_{i+1})$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2} u_{n-2} + a_{n-1} u_{n-1} + b_{n-1} u_n = 0 \qquad \boxed{u_{i+1} = -\frac{1}{b_i}(b_{i-1} u_{i-1} + a_i u_i)}$$

$$b_{n-1} u_{n-1} + a_n u_n - u_0 = 0 \longrightarrow \boxed{u_0 = b_{n-1} u_{n-1} + a_n u_n}$$

Fordított sorrendű szorzásból:

$$\left[-u_0 \;\vdots\; u_0 \underline{v}^T\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underline{e}_1^T & 0 \\ \hline \underline{\underline{K}} & \underline{e}_n \end{array}\right] = [0 \;\; 0 \dots 0 \;\; 1] \rightarrow u_0 v_n = 1$$

$$\boxed{v_n = 1/u_0}$$

$$b_{n-1} \cancel{u_0} v_{n-1} + a_n \cancel{u_0} v_n = 0$$

$$b_{n-2} \cancel{u_0} v_{n-2} + a_{n-1} \cancel{u_0} v_{n-1} + b_{n-1} \cancel{u_0} v_{n-2} = 0$$

$$b_{n-i} \cancel{u_0} v_{n-i} + a_{n-i+1} \cancel{u_0} v_{n-i+1} + b_{n-i+1} \cancel{u_0} v_{n-i+2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{v_{n-i} = -\frac{1}{b_{n-i}}\left(a_{n-i+1} v_{n-i+1} + b_{n-i+1} v_{n-i+2}\right)}$$