1. tétel

a) Minimális diadikus felbontás:

Def: Ha egy mátrixot a lehető legkevesebb számú diád összegeként állítunk elő, akkor ezt a mátrix egy minimális diadikus felbontásának nevezzük

Algoritmus:

Jelölések:

$\underline{a}^i = \underline{e}_i^T \underline{\underline{A}}$ Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-edik sora

$\underline{a}_j = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{e}_j$ Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix j-edik oszlopa

a_{ij} Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix (ij) indexű eleme

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $a_{ij} \neq 0$ eleme által generált diád:

$$\frac{\underline{a}_j \underline{a}^i}{a_{ij}} = \frac{\underline{\underline{A}}\,\underline{e}_j\,\underline{e}_i^T \underline{\underline{A}}}{\underline{e}_i^T \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_j} \quad ; \quad a_{ij} := \underline{e}_i^T \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_j \neq 0$$

Rekurziós lépés:

$$\underline{\underline{A}}^{(1)} = \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{(k+1)} = \underline{\underline{A}}^{(k)} - \frac{\underline{\underline{A}}^{(k)} \underline{e}_k \cdot \underline{e}_k^T \underline{\underline{A}}^{(k)}}{\underline{e}_k^T \underline{\underline{A}}^{(k)} \underline{e}_k}$$

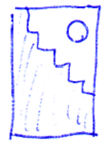
Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $a_{kk}^{(k)} \neq 0$; $k \leq s$

Leállási feltétel: $\underline{\underline{A}}^{(s+1)} = 0$

s: A diádok száma

A $\underline{\underline{A}}$ minimális diadikus előállítása:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\underline{\underline{A}}^{(k)} \underline{e}_k \underline{e}_k^T \underline{\underline{A}}^{(k)}}{\underline{e}_k^T \underline{\underline{A}}^{(k)} \underline{e}_k} = \sum_{k=1}^{s} \underline{u}_k \underline{v}_k^T = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T$$

$\underline{\underline{U}}$:  $\underline{\underline{V}}^T$: 

Következmények:

Tétel: A felbontás minimális.

Bizonyítás:

s-edrendű bal felső sarokminor

Szorzatmátrix minora alapján: $$\left|\underline{\underline{A}}^{1,\dots,s}_{1,\dots,s}\right| = \left|\underline{\underline{U}}^{1,\dots,s}_{1,\dots,s} \cdot \underline{\underline{V}}^{T\,1,\dots,s}_{1,\dots,s}\right| =$$

(U és V^T felépítése miatt) $\rightarrow$ $$= \left|\underline{\underline{U}}^{1,\dots,s}_{1,\dots,s}\right| \cdot \left|\underline{\underline{V}}^{T\,1,\dots,s}_{1,\dots,s}\right| \neq 0$$

Indirekt módszer:

Tfh. $\underline{\underline{A}}$ s-1 db diád összegeként is előállítható:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{s-1} \underline{\tilde{u}}_k \underline{\tilde{v}}_k = \sum_{k=1}^{s-1} \underline{\tilde{u}}_k \underline{\tilde{v}}_k^T + \underline{\tilde{u}}_s \cdot \underline{0}^T$$

Adjunk hozzá egy 0 értékű diádot

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}_1 & \underline{\tilde{u}}_2 & \dots & \underline{\tilde{u}}_s \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\tilde{U}}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\tilde{v}}_1 \\ \underline{\tilde{v}}_2 \\ \vdots \\ \hline \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\tilde{V}}}^T}$$

Számítsuk ki $\underline{\underline{A}}$ bármelyik s-edrendű minorát.

$$\left|\underline{\underline{A}}^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_s}\right| = \left|\underline{\underline{\tilde{U}}}^{i_1,\dots,i_s}_{1,\dots,s}\right| \cdot \underbrace{\left|\underline{\underline{\tilde{V}}}^{T\,1,\dots,s}_{j_1,\dots,j_s}\right|}_{=0,\text{ mert } \tilde{V}^T \text{ utolsó sora csupa } 0} = 0 \rightarrow \text{ellentmondás}$$

tehát a feltételezés hamis, a tétel igaz.

Def: A mátrix rangja: A mátrix elemeiből kiválasztható legmagasabb rendű, zérustól különböző aldeterminánsának rendszáma.

Tétel: Bármely mátrix egy minimális diadikus felbontásában a diádok száma egyenlő a mátrix ~~rangjával~~. rangjával.

Biz.:

Bizonyítás:

Az előző bizonyításban beláttuk, hogy ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix felbontásában a diádok száma s, akkor az $\underline{\underline{A}}$ s-edrendű bal felső sarokminora $\neq 0$.

Lássuk be, hogy bármely $s+1$-edrendű minora viszont $=0$.

Adjunk hozzá egy 0 értékű diádot:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{s} \underline{u}_k \underline{v}_k^T + \hat{\underline{u}}_{s+1} \cdot \underline{0}^T = \hat{\underline{U}} \cdot \hat{\underline{V}}^T$$

$$\underline{\underline{A}} = \left[\underline{u}_1 \,\middle|\, \underline{u}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{u}_s \,\middle|\, \hat{\underline{u}}_{s+1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \vdots \\ \underline{v}_s^T \\ \underline{0}^T \end{bmatrix}$$

Ekkor bármelyik $s+1$-edrendű minor értéke 0, mert $\underline{V}^T$ utolsó sora csupa 0-ból áll. Tehát minden s-nél magasabb rendű minora 0, azaz a mátrix rangja s.

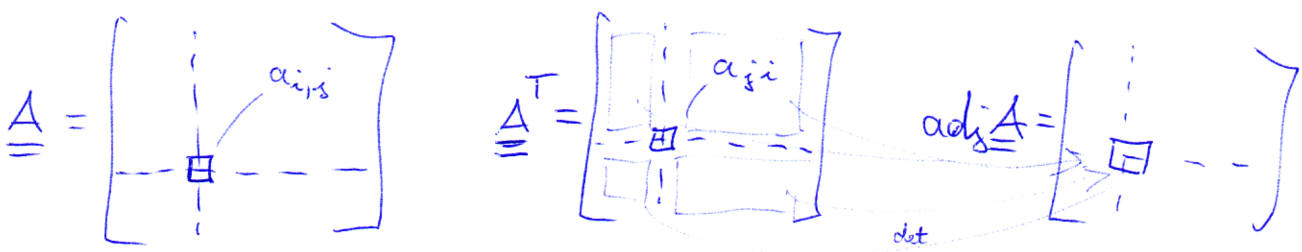
---

b) Adjungált mátrix def: $\quad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = [A_{ji}]$,

ahol A_{ji} az $\underline{\underline{A}}^T$ (i,j) indexű elemének algebrai komplementuma.

$\underline{\underline{A}}$ n-edrendű kvadratikus mátrix.

Egy elem algebrai komplementuma: a hozzá tartozó $n-1$-ed rendű előjeles aldeterminans értéke.



Kifejtési tétel:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} |\underline{\underline{A}}| \longrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}| \cdot \underline{\underline{E}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} |\underline{\underline{A}}| \longrightarrow \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}| \cdot \underline{\underline{E}}$$

Mátrix inverze: Ha $\mathbf{A}$ nemszinguláris ($|\mathbf{A}| \neq 0$), akkor létezik az inverze: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Tétel: Kvadratikus mátrix inverze egyértelmű.

Biz: Indirekt: Tfh. létezik két különböző inverz: $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\mathbf{E} = \mathbf{Y}(\mathbf{A}\mathbf{X}) = (\mathbf{Y}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{X}$$, tehát

$\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ mindenképpen megegyezik.

---

c) **Sherman – Morrison formula:** egyetlen diáddal módosított mátrix inverze

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \qquad \left(\text{tfh. } 1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0\right)$$

Biz:

Szorozzuk mindkét oldalt $(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$-vel:

$$\underbrace{(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}}_{\mathbf{E}} = (\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right) =$$

$$= \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{E}} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{\overbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}^{\mathbf{E}}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}\overbrace{(\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})}^{\text{skalár}}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} =$$

$$= \mathbf{E} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{(1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})\,\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{u}} = \mathbf{E} \quad \checkmark$$