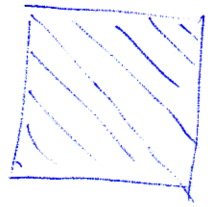
4. tétel

Speciális tulajdonságú mátrixok

Toeplitz-típusú mátrix: $a_{ij} = a_{j-i}$ (Elemei csak az indexek különbségétől függenek.)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$



Speciális Toeplitz-mátrix:

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{H}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{H}}^n = 0$$

Legegyszerűbb <u>n-indexű nilpotens mátrix</u>.

Felső háromszögmátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} = a_0 \underline{\underline{E}} + a_1 \underline{\underline{H}} + a_2 \underline{\underline{H}}^2 + \ldots + a_{n-1} \underline{\underline{H}}^{n-1}$$

Elemi ciklikus (permutáló) mátrix:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\Omega}}^n = \underline{\underline{E}}$$

Ciklikus mátrix:

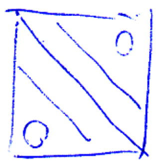
$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} = c_0 \underline{\underline{E}} + c_1 \underline{\underline{\Omega}} + c_2 \underline{\underline{\Omega}}^2 + \dots + c_{n-1} \underline{\underline{\Omega}}^{n-1}$$

Tridiagonális (kontinuáns) mátrix:

$a_{ij} = 0$, ha $|j-i| > 1$

$a_{ij} \neq 0$, ha $|j-i| \leq 1$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$



Szimmetrikus: $b_i = c_i$

Egyenletes: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$

$b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = b$

$c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = c$

Minden szimmetrikus egyenletes tridiagonális mátrix felírható $a\underline{\underline{E}} + b\underline{\underline{K}}$ alakban, ahol

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{E}} - x\underline{\underline{H}}$ alakú Toeplitz-típusú mátrix inverze:

$$\underline{\underline{E}} - x\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{H}}^n = 0 \text{ (nilpotens)}$$

Skalár polinom azonosság:

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = 1-x^n$$

x helyett $x\underline{\underline{H}}$ esetén:

$$(\underline{\underline{E}} - x\underline{\underline{H}})(\underline{\underline{E}} + x\underline{\underline{H}} + x^2\underline{\underline{H}}^2 + \ldots + x^{n-1}\underline{\underline{H}}^{n-1}) = \underline{\underline{E}} - \overbrace{x^n\underline{\underline{H}}^n}^{0}$$

Tehát

$$(\underline{\underline{E}} - x\underline{\underline{H}})^{-1} = \underline{\underline{E}} + x\underline{\underline{H}} + x^2\underline{\underline{H}}^2 + \ldots + x^{n-1}\underline{\underline{H}}^{n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ciklikus mátrix inverze

Speciális ciklikus mátrix:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-3} \\ x^{n-3} & x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-4} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{E}} + x\underline{\underline{\Omega}} + x^2\underline{\underline{\Omega}}^2 + \ldots + x^{n-1}\underline{\underline{\Omega}}^{n-1}$$

Skalár polinom azonosság:

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = 1-x^n$$

x helyett $x\underline{\underline{\Omega}}$:

$$(\underline{\underline{E}} - x\underline{\underline{\Omega}})(\underline{\underline{E}} + x\underline{\underline{\Omega}} + x^2\underline{\underline{\Omega}}^2 + \ldots + x^{n-1}\underline{\underline{\Omega}}^{n-1}) = \overbrace{\underline{\underline{E}} - x^n\underline{\underline{\Omega}}^n}^{(1-x^n)\underline{\underline{E}}}$$

Ha $x^n \neq 1$ $(1-x^n \neq 0)$: $\qquad (\underline{\underline{\Omega}}^n = \underline{\underline{E}})$

$$\frac{1}{1-x^n}(\underline{\underline{E}} - x\underline{\underline{\Omega}}) = (\underline{\underline{E}} + x\underline{\underline{\Omega}} + \ldots + x^{n-1}\underline{\underline{\Omega}}^{n-1})^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$= \frac{1}{1-x^n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & -x \\ -x & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Csebisev-polinomok:

Elsőfajú Csebisev-polinomok:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Másodfajú Csebisev-polinomok:

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_n(x) = 2x\, U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

Tétel: $x = \cos\theta$ esetén $\quad U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

Biz: Teljes indukcióval:

$n=0 \quad : \quad U_0(\cos\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1 \quad \checkmark$

$n=1 \quad : \quad U_1(\cos\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta \quad \checkmark$

Def. alapján:

$$U_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\, U_{n-1}(\cos\theta) - U_{n-2}(\cos\theta) =$$

$$= 2\cos\theta\,\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{2\cos\theta\sin n\theta - \left[\sin n\theta\cos\theta - \cos n\theta\sin\theta\right]}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \quad \checkmark$$

Hasonlóan belátható, hogy

$x = \operatorname{ch}\theta$ esetén $\quad U_n(\operatorname{ch}\theta) = \dfrac{\operatorname{sh}(n+1)\theta}{\operatorname{sh}\theta}$

Szimmetrikus egyenletes tridiagonális mátrix inverze:

$$a\underline{\underline{E}} + b\underline{\underline{K}} = -b\left(-\frac{a}{b}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right) \underset{x = -\frac{a}{b}}{=} -b\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)$$

$$\left(a\underline{\underline{E}} + b\underline{\underline{K}}\right)^{-1} = -\frac{1}{b}\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)^{-1}$$

→ Tehát elég $x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}$ inverzét meghatározni

$$x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & x \end{bmatrix}$$

n-edrendű

$$\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)}{\left|x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right|}$$

A determinánst az első sor szerint kifejtve az alábbi rekurzív összefüggést kapjuk:

$$\left|x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right| := D_n = x \cdot D_{n-1} \underset{\text{sakktábla}}{-} \underset{\text{1,2 indexű elem}}{(-1)} \left[(-1) \cdot D_{n-2}\right] = xD_{n-1} - D_{n-2}$$

Az x tartományát 3 részre osztjuk: $|x| < 2$, $x > 2$, $x < -2$

a) $\underline{|x| < 2}$: legyen $x = 2\cos\Theta$ (Θ a transzformált változó)

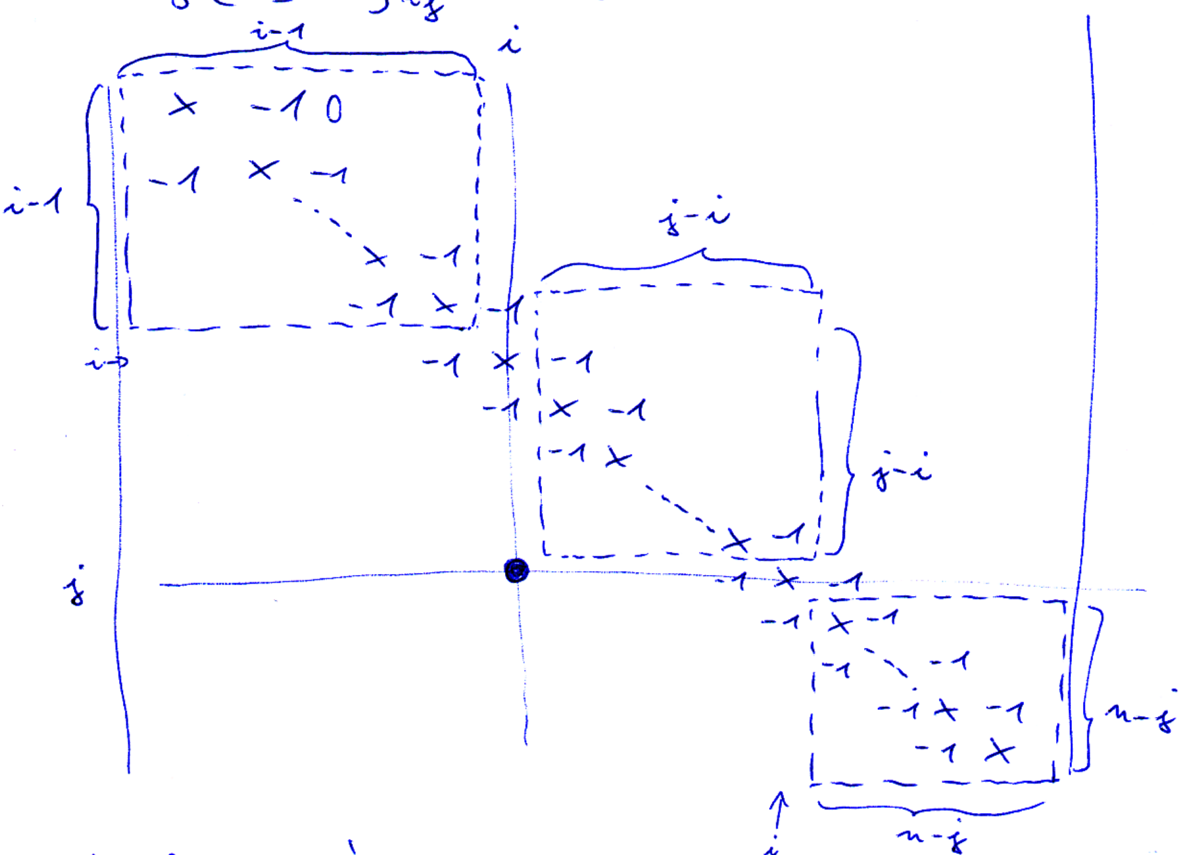
Ekkor $D_n = 2\cos\Theta\, D_{n-1} - D_{n-2} = U_n(\cos\Theta)$

(másodfajú Csebisev-polinom)

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin\Theta}$$

a) $x < 2$ esetén az adjungált elemei:

$\mathrm{adj}\{(x\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{K}})\}_{ij}$: a j,i indexű elemhez tartozó előjeles aldetermináns



$i \leq j$ esete

Az aldetermináns olyan blokkokra osztható, hogy a főátló blokkjai fölött csupa 0 blokkok vannak, ezért a determináns a főátló blokkjainak a determinánsainak a szorzata:

$$\mathrm{adj}\{(x\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{K}})\}_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot(-1)^{j-i}\cdot D_{i-1}\cdot D_{n-j} = D_{i-1}D_{n-j}$$

előjel a sakktábla szabály alapján

középső blokk determinánsa

bal felső blokk

jobb alsó blokk

$$\mathrm{adj}\{(x\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{K}})\}_{ij} = \begin{cases} D_{i-1}D_{n-j}, & \text{ha } i \leq j \\ D_{j-1}D_{n-i}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

$$(x\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{K}})^{-1}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{D_{i-1}D_{n-j}}{D_n} = \dfrac{\sin i\Theta}{\sin\Theta}\cdot\dfrac{\sin(n-j+1)\Theta}{\sin(n+1)\Theta}, & \text{ha } i \leq j \\[2ex] \dfrac{D_{j-1}D_{n-i}}{D_n} = \dfrac{\sin j\Theta}{\sin\Theta}\cdot\dfrac{\sin(n-i+1)\Theta}{\sin(n+1)\Theta}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

b) $\underline{x > 2}$ esetén legyen $\underline{x = 2\,\text{ch}\,\Theta}$

Ekkor $D_n = 2\,\text{ch}\,\Theta\, D_{n-1} - D_{n-2} = U_n(\text{ch}\,\Theta)$

$$D_n = \frac{\text{sh}(n+1)\Theta}{\text{sh}\,\Theta}$$

Ez alapján:

$$(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}})^{-1}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\text{sh}\, i\Theta}{\text{sh}\,\Theta} \cdot \dfrac{\text{sh}(n-j+1)\Theta}{\text{sh}(n+1)\Theta}, & \text{ha } i \leq j \\[2ex] \dfrac{\text{sh}\, j\Theta}{\text{sh}\,\Theta} \cdot \dfrac{\text{sh}(n-i+1)\Theta}{\text{sh}(n+1)\Theta}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

c) $\underline{x < 2}$ esetén legyen $\underline{x = -2\,\text{ch}\,\Theta}$

~~Ekkor~~ $x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}} =$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} 2\text{ch}\Theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\text{ch}\Theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\text{ch}\Theta & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2\text{ch}\Theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\text{ch}\Theta \end{bmatrix}$$

$$(-2\text{ch}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}})^{-1} = -(2\text{ch}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}})^{-1}$$

Determináns: (−1-es szorzótól eltekintve)

$$D_n = \left(2\,\text{ch}\,\Theta \cdot D_{n-1} - (+1)\cdot(+1) D_{n-2}\right)$$

$$D_n = U_n(\text{ch}\,\Theta)$$

Adjungáltnál a középső blokk determinánsa 1, ezért $i \leq j$ esetén és $i \geq j$:

$$\text{adj}(2\text{ch}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i-1} \cdot D_{n-j}, \quad \text{ha } i \leq j$$

$$\text{—''—} \qquad = (-1)^{i+j} \cdot D_{j-1} \cdot D_{n-i}, \quad \text{ha } i \geq j$$

Így az inverz (a −1-es szorzóval együtt):

$$(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}})^{-1}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j-1} \cdot \dfrac{\text{sh}\, i\Theta}{\text{sh}\,\Theta} \cdot \dfrac{\text{sh}(n-j+1)\Theta}{\text{sh}(n+1)\Theta}, & \text{ha } i \leq j \\[2ex] (-1)^{i+j-1} \cdot \dfrac{\text{sh}\, j\Theta}{\text{sh}\,\Theta} \cdot \dfrac{\text{sh}(n-i+1)\Theta}{\text{sh}(n+1)\Theta}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

d) $\underline{x = 2}$ esetén $(\Theta \to 0)$

$$\lim_{\Theta\to 0} \frac{sh\, i\Theta}{sh\,\Theta} \cdot \frac{sh(n-j+1)\Theta}{sh(n+1)\Theta} = \lim_{\Theta\to 0} \frac{sh\, i\Theta}{sh\,\Theta} \cdot \lim_{\Theta\to 0} \frac{sh(n-j+1)\Theta}{sh(n+1)\Theta} =$$

$$= \lim_{\Theta\to 0} \frac{i\, ch\,\Theta}{ch\,\Theta} \cdot \lim_{\Theta\to 0} \frac{(n-j+1)\, ch(n-j+1)\Theta}{(n+1)\, ch(n+1)\Theta} = \frac{i(n-j+1)}{n+1}$$

L'Hospital

$$\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)^{-1}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i(n-j+1)}{n+1}, & \text{ha } i \leq j \\[2ex] \dfrac{j(n-i+1)}{n+1}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

e) $\underline{x = -2}$ esetén $(\Theta \to 0)$

Az $x < -2$ eset határértéke alapján:

$$\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)^{-1}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j-1} \dfrac{i(n-j+1)}{n+1}, & \text{ha } i \leq j \\[2ex] (-1)^{i+j-1} \dfrac{j(n-i+1)}{n+1}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

A determinánssal kifejezve x tartományától függetlenül

$$\det\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right) = D_n = x D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$\operatorname{adj}\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right) = \begin{cases} D_{i-1} \cdot D_{n-j}, & \text{ha } i \leq j \\ D_{j-1} \cdot D_{n-i}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

$$\left(x\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{K}}\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{D_{i-1} \cdot D_{n-j}}{D_n}, & \text{ha } i \leq j \\[2ex] \dfrac{D_{j-1} \cdot D_{n-i}}{D_n}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

Egypárú mátrix

Def:

$$a_{ij} = \begin{cases} \varphi_i \cdot \psi_j, & \text{ha } i \leq j \\ \varphi_j \cdot \psi_i, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$