2. tétel

Rangra vonatkozó tételek:

① Összeg rangja nem nagyobb a rangok összegénél.

$$\varrho(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}) \leq \varrho(\underline{\underline{A}}) + \varrho(\underline{\underline{B}})$$

② Szorzás által a rang nem nőhet.

$$\varrho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \leq \varrho(\underline{\underline{A}}) \quad ; \quad \varrho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \leq \min\{\varrho(\underline{\underline{A}}), \varrho(\underline{\underline{B}})\}$$

③ Nemszinguláris mátrixszal való szorzással szemben a mátrix rangja invariáns.

$$\varrho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{M}}) = \varrho(\underline{\underline{A}}) \quad , \text{ ha } |\underline{\underline{M}}| \neq 0$$

Ekvivalens transzformációk:

Def: Ha $\underline{\underline{Q}}$ és $\underline{\underline{R}}$ nemszinguláris mátrixok, akkor az $\hat{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}$ transzformációt ekvivalens transzformációnak nevezzük. ($\underline{\underline{A}}: m \times n$; $\underline{\underline{Q}}: m \times m$, $\underline{\underline{R}}: n \times n$)

(Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja ekvivalens transzformációval szemben invariáns.)

Tétel: Bármely $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz (r-edrangú) található olyan $\underline{\underline{Q}}$ és $\underline{\underline{R}}$, hogy a velük végzett ekvivalens trafo-val a $\underline{\underline{A}}$ mátrix normálalakra hozható:

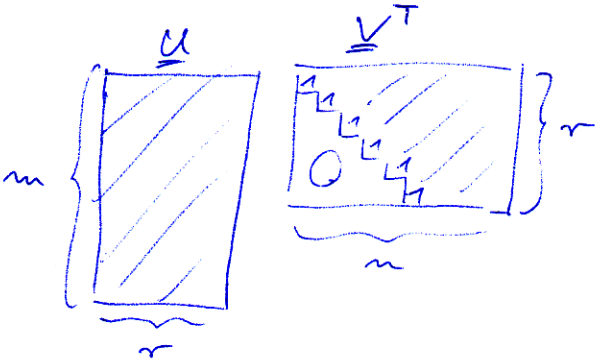
$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}} = \begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right] \end{array} = \underline{\underline{P}}_r$$

Bizonyítás:

Legyen az $\underline{\underline{A}}$ első r oszlopa lin. független. Ha nem így van, akkor egy alkalmas $\underline{\underline{P}}$ permutáló mátrixszal átrendezzük: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}$

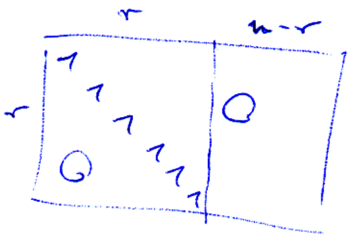
Végezzük el a min. diadikus felbontást úgy, hogy a generáló elemmel mindig a $\underline{v}_k^T$ sorvektort osztjuk. Ekkor az eredmény alakja:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T$$



A $\underline{\underline{V}}^T$ mátrix első oszlopának többszöröseit hozzáadjuk a többi oszlophoz úgy, hogy az első sor csupa 0 legyen. Aztán a 2. oszlopot adjuk hozzá megfelelő konstanssal szorozva a többihez és így tovább. Ezek a műveletek elemi transzformációk, ezek szorzatát jelölje $\underline{\underline{T}}$ mátrix:

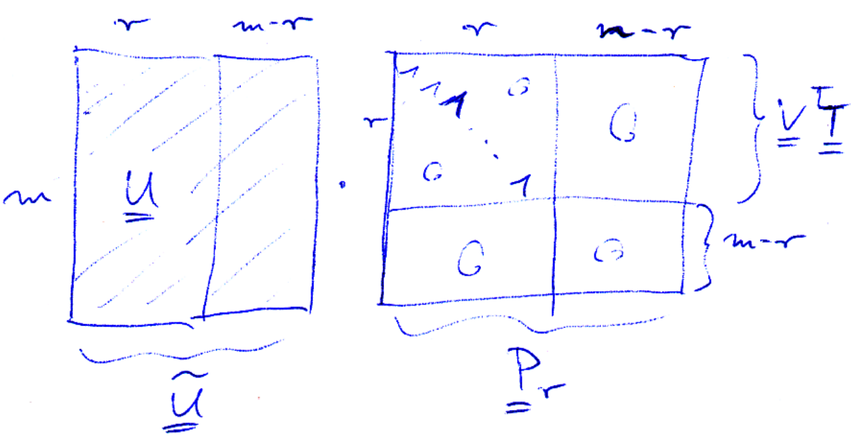
$$\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{T}} \rightarrow$$



$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{T}}$$

Egészítsük ki $\underline{\underline{U}}$-t $m-r$ db oszloppal nemszinguláris ~~mátr~~ $\underline{\underline{\tilde{U}}}$ mátrixszá, $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{T}}$ mátrixot pedig csupa $\emptyset$ sorokkal $m \times n$ méretűvé:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{U}}} \cdot \underline{\underline{P}}_r$$



Legyen $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\tilde{U}}}^{-1}$

$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{T}}$

Ekkor

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}}_r$$

Defektus / nullitás:

Egy n-edrendű kvadratikus mátrix defektusa (nullitása):

$d = n - r$, ahol r a mátrix rangja.

Sylvester-féle nullitási tétel:

(Szorzat rangjának alsó becslése)

Legyen az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixok rangja r_A és r_B, nullitása d_A és d_B. Ekkor a szorzat rangjára érvényes:

$$\rho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \geq \min(r_A, r_B) - \min(d_A, d_B)$$

Máshogy megfogalmazva:

$$\rho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \geq r_A - d_B \quad , \text{ha } r_A \leq r_B$$
$$\rho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \geq r_B - d_A \quad , \text{ha } r_A \geq r_B$$

Bizonyítás:

Tfh. $r_A \leq r_B$ (ha nem, akkor $\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}$ rangját nézzük)

Alakítsuk $\underline{\underline{A}}$-t normálalakra, és vizsgáljuk $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ rangját:

$$\rho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \rho(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}}_{\underline{\underline{E}}}\underline{\underline{B}}) = \rho(\underline{\underline{P}}_{r_A}\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{B}})$$

$\underline{\underline{P}}_{r_A}$ az $\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{B}}$-nek az első r_A sorát tartja meg, ezért a $\underline{\underline{P}}_r\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{B}}$ rangja legjobb esetben r_A (ha $\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{B}}$ első r_A sora lin. független volt), legrosszabb esetben $r_A - d_B$ (ha $\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{B}}$ minden „törölt" sora lin. ftlen. volt.

Tehát $\rho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \geq r_A - d_B$, ha $r_A \leq r_B$.

Összegezve:

$$\min(r_A, r_B) - \min(d_A, d_B) \leq \rho(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \leq \min(r_A, r_B)$$

Speciális eset:

Kvadratikus mátrixok szorzata csak akkor lehet 0, ha

$$r_A - d_B = r_A + r_B - n \leq 0$$

$$r_A + r_B \leq n$$

Projektorok

Def: $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ $\rightarrow$ projektor / idempotens mátrix

Tétel: Ha $\underline{\underline{P}}$ n-edrendű projektor, akkor $\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}$ is projektor ($\underline{\underline{P}}$ komplementer projektora). Ha $\underline{\underline{P}}$ rangja r, akkor $\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}$ rangja $n-r$.

Bizonyítás:

$$(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}})^2 = \underline{\underline{E}} - 2\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{E}} - 2\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}$$

Tehát projektor ✓

Rang:

$$\underline{\underline{P}} + (\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) = \underline{\underline{E}} \quad ; \quad \varrho(\underline{\underline{E}}) = n$$

$$\varrho(\underline{\underline{P}}) + \varrho(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) \geq \varrho(\underline{\underline{E}}) = n$$ alsó korlát

Másrészt:

$$\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) = 0$$

$$\cancel{\varrho(\underline{\underline{P}}) \cdot \varrho(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) \leq \varrho(\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}})) = 0}$$

Sylvester:

$$\varrho(\underline{\underline{P}}) + \varrho(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) \leq n$$ felső korlát

$$\varrho(\underline{\underline{P}}) + \varrho(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) = n$$

$$\varrho(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}) = n - \varrho(\underline{\underline{P}})$$ ✓

Biortogonális vektorrendszer def:

Legyenek $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ és $\underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_r^T$ n-elemű vektorok. Ha $\underline{v}_k^T \underline{u}_\ell = \delta_{k\ell}$ $(k, \ell = 1, \dots, r)$, akkor az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ és $\underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_r^T$ vektorok biortogonális vektorrendszert alkotnak.

Ha $r = n$, akkor teljes biortogonális vektorrendszert alkotnak.

Egerváry tétele:

Ha egy r-edrangú projektort minimális számú diád összegeként írunk fel, akkor e diádok oszlop-, ill. sorvektorai biortogonális vektorrendszert alkotnak.

Bizonyítás:

$$P = \sum_{k=1}^{r} u_k v_k^T = U V^T$$

U oszlopai és V^T sorai lin. függetlenek.

$$\Downarrow$$

$U C V^T = 0$ esetén $C = 0$

$$P^2 - P = 0$$

$$U V^T U V^T - U V^T = 0$$

$$U (V^T U - E) V^T = 0 \longrightarrow V^T U - E = 0$$

$$V^T U = E,$$ tehát

V^T sorai és U oszlopai valóban biort. vektorrendszert alkotnak.

Biortogonális vektorrendszer teljessé tétele:

Ha $\rho(P) = \rho(U V^T) = r$, akkor $\rho(E - P) = n - r$

$E - P$ min. diadikus előállítása:

$$E - P = \sum_{\ell=1}^{n-r} w_\ell z_\ell^T = W Z^T$$

Mivel

$$P(E - P) = 0 \quad \text{és} \quad (E - P)P = 0$$

$$U(V^T W) Z^T = 0 \qquad W(Z^T U) V^T = 0$$

lin. ftlen. $V^T W = 0$ (biortog.)   lin. ftlen. $Z^T U = 0$ (biortog.)

továbbá:

$$P + (E - P) = E$$

$$U V^T + W Z^T = E \longrightarrow \begin{array}{cc} r & n-r \\ \left[U \right. & \left. W \right] \end{array} \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} V^T \\ \hline Z^T \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array} = E \quad (n \times n)$$