4. tétel

Regressziós feladat

$$y_t \sim \hat{y}_t = \underline{x}_t^T \underline{\vartheta}$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} ; \quad \underline{\hat{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^T \\ \underline{x}_2^T \\ \vdots \\ \underline{x}_N^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\vartheta}$$

Paraméterbecslés:

$$\underline{\underline{E}}\left\{ W(y_t, \hat{y}_t) \right\} \to \min$$

Pl. LS becslés:

$S \to \min$

$$S = (\underline{Y} - \underline{\hat{Y}})^T (\underline{Y} - \underline{\hat{Y}}) = (\underline{Y} - \underline{\underline{X}}\,\underline{\vartheta})^T (\underline{Y} - \underline{\underline{X}}\,\underline{\vartheta}) =$$

$$= \underline{Y}^T \underline{Y} - \underline{\vartheta}^T \underline{\underline{X}}^T \underline{Y} - \underline{Y}^T \underline{\underline{X}}\,\underline{\vartheta} + \underline{\vartheta}^T \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}\,\underline{\vartheta}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{\vartheta}} = -2 \underline{\underline{X}}^T \underline{Y} + 2 \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}\,\underline{\hat{\vartheta}} = \emptyset$$

$$\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}\,\underline{\hat{\vartheta}} = \underline{\underline{X}}^T \underline{Y}$$

$$\underline{\hat{\vartheta}} = (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{Y}$$

$\underline{\hat{\vartheta}}$ becslése torzítatlan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\underline{\hat{\vartheta}})}{N-m}$$ ez a σ^2 becslés is torzítatlan

$\underline{\hat{\vartheta}}$ becslése konzisztens, ha megfelelően gerjesztett a rendszer $(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1}$ főátlóbeli elemei $\to 0$

$N(\cdot)$ esetén hatásos is.

Intervallumbecslés : ~~Adott egy pontbecslés~~

$$P(\gamma_1 \leq \vartheta_i \leq \gamma_2) = 1-\varepsilon \qquad (\varepsilon = 5\%\ \text{pl.})$$

? ?

~~Tudjuk, hogy~~

Adott egy pontbecslés, pl.:

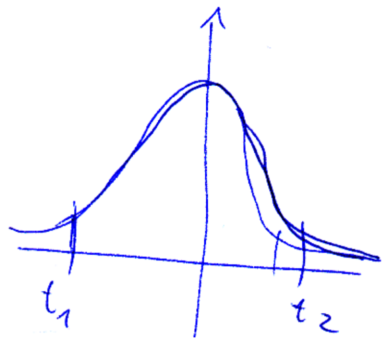
$$\underline{Y} \sim N(\underline{\underline{X}}\,\underline{\vartheta},\ \sigma^2 \underline{\underline{I}})$$

$$\underline{\vartheta} \sim \hat{\underline{\vartheta}} = (X^T X)^{-1} X^T Y \sim N\left(\underline{\vartheta},\ (X^T X)^{-1} \sigma^2\right)$$

$$\left(\sigma^2 \text{ nem ismert, becslése: } \hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\underline{\vartheta}})}{N-m}\right)$$

Tudjuk, hogy

$$\frac{\hat{\vartheta}_i - \vartheta_i}{\sqrt{c_{ii}}\,\hat{\sigma}} \sim t(N-m) \qquad \left[(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1}\right]_{ii} \to c_{ii}$$



$$P\Big(\underbrace{t_1}_{-t_{\varepsilon/2}(N-m)} < \frac{\hat{\vartheta}_i - \vartheta_i}{\sqrt{c_{ii}}\,\hat{\sigma}} < \underbrace{t_2}_{+t_{\varepsilon/2}(N-m)}\Big) = 1-\varepsilon$$

$$P\left(\hat{\vartheta}_i - t_{\varepsilon/2}\,\hat{\sigma}\cdot\sqrt{c_{ii}} < \vartheta_i < \hat{\vartheta}_i - t_{\varepsilon/2}\,\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}\right) = 1-\varepsilon$$

Struktúrabecslés (hipotézisvizsgálat)

Előírunk korlátozásokat a paraméterekre (egyenlőség típ.)

Elvégezzük a becslést, pl. LS + Lagrange-multiplikátor $\rightarrow \tilde{\hat{\vartheta}}$

$\tilde{\vartheta}$ a nullhipotézis

$\hat{\vartheta}$ az eredeti pontbecslés

$S(\hat{\vartheta})$ az eredeti hibanégyzetösszeg

$S(\tilde{\hat{\vartheta}})$ a korlátozások melletti hibanégyzetösszeg

a korl. nélküli eset ~~által~~ több paraméter által okozott csökkenés a becslési hibában

r: a korlátozások száma

$$\frac{\dfrac{S(\tilde{\hat{\vartheta}}) - S(\hat{\vartheta})}{r \cdot \sigma^2}}{\dfrac{S(\hat{\vartheta})}{(N-m)\sigma^2}} \hat{=} F(r, N-m) \quad \text{Fisher-eloszlás}$$

a több paraméter által még nem magyarázott hiba