9. tétel

Cayley - Hamilton-tétel :

Minden mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét, azaz ha

$$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = D_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n$$

ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix különböző sajátértékei, akkor

$$D_n(\underline{\underline{A}}) = 0$$

Bizonyítás :

A karakterisztikus polinom λ-nak n-edfokú polinomja:

$$D_n(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \ldots + d_{n-1}\lambda^{n-1} + d_n \cdot \lambda^n$$

A karakterisztikus mátrix adjungáltjának elemei λ-nak legfeljebb $n-1$-edfokú polinomjai. Az adjungált felírható mátrixegyütthatós polinomként:

$$\operatorname{adj}(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{C}}_0 + \underline{\underline{C}}_1\lambda + \underline{\underline{C}}_2\lambda^2 + \ldots + \underline{\underline{C}}_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Igazak a következő összefüggések:

$$(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \cdot \operatorname{adj}(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = |\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| \underline{\underline{E}} = D_n(\lambda) \cdot \underline{\underline{E}}$$

$$(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \cdot \operatorname{adj}(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \operatorname{adj}(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})$$ (mátrix és adjungáltja felcserélhető)

Helyettesítjük be a mátrixegyütthatós alakot:

$$(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})(\underline{\underline{C}}_0 + \lambda \underline{\underline{C}}_1 + \lambda^2 \underline{\underline{C}}_2 + \ldots + \lambda^{n-1} \underline{\underline{C}}_{n-1}) = (\underline{\underline{C}}_0 + \lambda \underline{\underline{C}}_1 + \ldots + \lambda^{n-1} \underline{\underline{C}}_{n-1})(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})$$

$$(\lambda \underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})(\underline{\underline{C}}_0+\lambda \underline{\underline{C}}_1+\ldots+\lambda^{n-1}\underline{\underline{C}}_{n-1})=(\underline{\underline{C}}_0+\lambda \underline{\underline{C}}_1+\ldots+\lambda^{n-1}\underline{\underline{C}}_{n-1})(\lambda \underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})$$

Hasonlítsuk össze λ azonos kitevőjű hatványait:

$$\lambda^0: \quad -\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_0 = -\underline{\underline{C}}_0\underline{\underline{A}} \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{C}}_0\underline{\underline{A}}$$

$$\lambda^1: \quad \lambda \underline{\underline{C}}_0 - \lambda \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_1 = \lambda \underline{\underline{C}}_0 - \lambda \underline{\underline{C}}_1\underline{\underline{A}} \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_1 = \underline{\underline{C}}_1\underline{\underline{A}}$$

$$\lambda^2: \quad \lambda^2 \underline{\underline{C}}_1 - \lambda^2 \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_2 = \lambda^2 \underline{\underline{C}}_1 - \lambda^2 \underline{\underline{C}}_2\underline{\underline{A}} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_2 = \underline{\underline{C}}_2\underline{\underline{A}}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\lambda^n: \quad \lambda^n \underline{\underline{C}}_{n-1} = \lambda^n \underline{\underline{C}}_{n-1} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_{n-1} = \underline{\underline{C}}_{n-1}\underline{\underline{A}}$$

Tehát a $\underline{\underline{C}}_i$ együtthatómátrixok felcserélhetők $\underline{\underline{A}}$-val, ezért λ-ban racionális egész skalár azonosságba $\underline{\underline{A}}$ behelyettesíthető λ helyére:

$$(\lambda \underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})\cdot \mathrm{adj}(\lambda \underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}) = D_n(\lambda)\cdot \underline{\underline{E}}$$

$$(\lambda \underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})\cdot(\underline{\underline{C}}_0+\lambda \underline{\underline{C}}_1+\ldots+\lambda^{n-1}\underline{\underline{C}}_{n-1}) = D_n(\lambda)\cdot E$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}_{0}\cdot(\underline{\underline{C}}_0+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_1+\ldots+\underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{C}}_{n-1}) = D_n(\underline{\underline{A}})$$

$$\downarrow$$

$$0 = D_n(\underline{\underline{A}}) \quad \checkmark$$

Redukált adjungált, minimálpolinom:

Legyen a karakterisztikus mátrix adjungáltja $D_{ij}(\lambda)$ elemeinek legnagyobb közös osztója $\Theta(\lambda)$. Ekkor

$$\underline{\underline{F}}(\lambda) = \frac{\mathrm{adj}(\lambda \underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}{\Theta(\lambda)} \quad \text{a redukált adjungált}$$

$$\Delta(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{\Theta(\lambda)} \quad \text{a minimálpolinom}$$

Mivel a $D_n(\lambda)$ karakterisztikus polinom az adjungált $D_{ij}(\lambda)$ elemeinek homogén lin. kombinációja, ezért $\Theta(\lambda)$ osztója $D_n(\lambda)$-nak is, tehát $\Delta(\lambda)$ valóban polinom.

A Cayley-Hamilton tétel élesítése:

Minden mátrix kielégíti a saját minimálegyenletét.

Minimálegyenlet: $\Delta(\lambda) = 0$

Tehát a tétel szerint $\Delta(\underline{\underline{A}}) = 0$

Bizonyítás:

A redukált adjungált is felírható mátrixegyütthatós polinomként: $\underline{\underline{F}}(\lambda) = \dfrac{adj(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}{\Theta(\lambda)} = \underline{\underline{F}}_0 + \lambda\underline{\underline{F}}_1 + \dots + \lambda^{m-1}\cdot\underline{\underline{F}}_{m-1}$

Azonosság:
$$(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})\cdot\frac{adj(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}{\Theta(\lambda)} = \frac{adj(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}{\Theta(\lambda)}\cdot(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})$$
$$(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})\cdot\underline{\underline{F}}(\lambda) = \underline{\underline{F}}(\lambda)(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})$$

A C-H tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy az $\underline{\underline{F}}_i$ együtthatómátrixok felcserélhetők $\underline{\underline{A}}$-val, ezért $\underline{\underline{A}}$ behelyettesíthető λ helyére λ-ban kifejezett racionális skalár azonosságba:

$$(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})\cdot\underbrace{\frac{adj(\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}{\Theta(\lambda)}}_{\underline{\underline{F}}(\lambda)} = \underbrace{\frac{D_n(\lambda)}{\Theta(\lambda)}}_{\Delta(\lambda)}\cdot\underline{\underline{E}}$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})}_{0}\cdot(\underline{\underline{F}}_0 + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{F}}_1 + \dots + \underline{\underline{A}}^{m-1}\underline{\underline{F}}_{m-1}) = \Delta(\underline{\underline{A}})$$
$$0 = \Delta(\underline{\underline{A}}) \checkmark$$

Tétel :

A karakterisztikus polinom minden λ_k gyöke a minimálpolinomnak is gyöke:

Ha $$D_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n$$

és $$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\gamma_k}, \quad \sum_{k=1}^{s} \gamma_k = m \leq n$$

akkor $$\gamma_k \geq 1 \quad (k = 1, \dots, s)$$

Bizonyítás:

Legyen $\Theta(\lambda)$ az $\mathrm{adj}(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = [D_{ij}(\lambda)]$ elemeinek legnagyobb közös osztója.

Mivel $D_n(\lambda)$ osztható $\Theta(\lambda)$-val, ezért $\Theta(\lambda)$ gyökei a λ_k sajátértékek $\beta_k \leq \alpha_k$ multiplicitással:

$$\Theta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\beta_k}$$

A determináns deriválási szabálya alapján $D_n(\lambda)$ deriváltja:

$$D_n'(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} D_{ii}(\lambda)$$ (az adjungált főátlóbeli elemeinek összege)

Ezért $\Theta(\lambda)$ osztója $D_n'(\lambda)$-nak is. ~~amit~~ Tehát ha λ_k $D_n(\lambda)$-nak α_k multiplicitású gyöke, akkor $D_n'(\lambda)$-nak $\alpha_k - 1$ multiplicitású gyöke.

Tehát λ_k multiplicitása $\Theta(\lambda)$-ban $\beta_k \leq \alpha_k - 1$.

Ezért λ_k multiplicitása $\Delta(\lambda)$-ban $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k \geq 1$.

Diagonalizálhatóság

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minimálpolinomja

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k) \qquad \text{(csak egyszeres gyökei vannak)}$$

akkor a mátrix <u>diagonalizálható.</u>

Ha a minimálpolinom

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\gamma_k}, \qquad s < \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \leq n$$

(vannak többszörös gyökök a minimálpolinomban)

akkor a mátrix <u>nem diagonalizálható.</u>