10. tétel Mátrixfüggvények

Lagrange-féle interpoláció

Ha ismert egy $f(x)$ függvény értéke x_k helyeken ($k=1,\dots,s$), akkor értéke közelíthető az $(s-1)$-edfokú Lagrange-féle alappolinomok lineáris kombinációjával.

A k-adik Lagrange-alappolinom értéke x_k helyen 1, a többi ismert helyen 0, így:

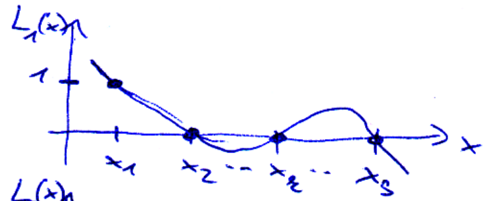
$$f(x) \cong \sum_{k=1}^{s} f(x_k)\cdot L_k(x)$$

$\rightarrow$ az $x_1,\dots,x_s$ helyeken pontos az egyezés, a többi helyen közelítés

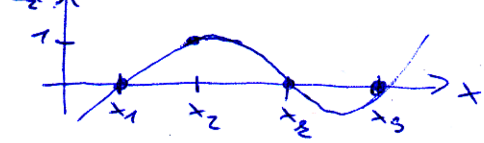
Ha $f(x)$ maga egy legfeljebb $(s-1)$-edfokú polinom, akkor s db pontban ismert függvényérték alapján a Lagrange-interpoláció azonosan előállítja.

Ha adott $x_1, x_2, \dots, x_s$, akkor $L_1(x), L_2(x), \dots, L_s(x)$ a következő alakban írható fel $L_k(x_k)=1$, $L_k(x_l)=0$ $(l\neq k)$ feltételek mellett:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_s)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_s)}$$



$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_s)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2-x_s)}$$



$\vdots$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_s)}{(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_s)}$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i\in\{1,\dots,s\}\setminus k}(x-x_i)}{\prod_{i\in\{1,\dots,s\}\setminus k}(x_k-x_i)}$$

Speciálisan $f(x)=1$ esetén adódik a Lagrange-alappolinomok fontos tulajdonsága

$$f(x)=1 = \sum_{k=1}^{s} 1\cdot L_k(x) \longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{s} L_k(x) = 1}$$

Mátrixok analitikus függvénye:

Tekintsük az $f(z)$ komplex változós függvényt, amely $|z|<R$ esetén (konvergenciakör belsejében)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

alakú hatványsorba fejthető.

Jelölje $S_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ az N-edik részletösszeget, akkor $|z|<R$ esetén létezik a következő határérték:

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} S_N(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$$

Ha $\underline{\underline{A}}$ egy kvadratikus mátrix, akkor az $f(\underline{\underline{A}})$ mátrixfüggvényt a következő határértékkel értelmezzük:

$$f(\underline{\underline{A}}) = \lim_{N\to\infty} S_N(\underline{\underline{A}}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} c_k \underline{\underline{A}}^k \quad \text{(feltéve, hogy létezik)}$$

Tétel: Ha $\underline{\underline{A}}$ minimálpolinomja csak 1-szeres gyököket tartalmaz (egyszerű struktúrájú) és sajátértékei $f(z)$ hatványsorának R sugarú konvergenciakörébe esnek ($|\lambda_k|<R$), akkor a fenti $f(\underline{\underline{A}})$ függvény létezik, és a minimálpolinomnál alacsonyabb fokú mátrixpolinomra redukálható.

Biz:
Tekintsük az $S_N(z)$ részletösszeget, és képezzük az $\underline{\underline{A}}$ $\Delta(z)$ minimálpolinomjával vett osztási maradékát $(N>s)$:

$$① \quad \underbrace{S_N(z)}_{N\text{-ed fokú}} \equiv \underbrace{\Delta(z)}_{s\text{-ed fokú}} \cdot q(z) + \overbrace{\underbrace{R_N(z)}_{\text{max. }(s-1)\text{-ed fokú}}}^{\text{maradék}}$$

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k), \text{ ahol}$$

λ_k az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei

$z = \lambda_k$ esetén:

$$S_N(\lambda_k) = R_N(\lambda_k)$$

Mivel s db λ_k $(k=1,..,s)$ helyen $S_N(\lambda_k)$ számítható $f(z)$ hatványsora alapján, az $R_N(z)$ polinom kifejezhető a Lagrange-féle alappolinomok segítségével, ahol

$$L_k(\lambda_l) = \delta_{kl} \quad (k, l = 1,\dots,s)$$

$$L_k(z) = \frac{\prod\limits_{i\in\{1,..,s\}\setminus k} (z-\lambda_i)}{\prod\limits_{i\in\{1,..,s\}\setminus k} (\lambda_k - \lambda_i)} = \frac{\overset{\text{a minimál-polinommal felírható}}{\Delta(z)\cdot(z-\lambda_k)^{-1}}}{\Delta'(\lambda_k)}$$

$$\boxed{L_k(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)(z-\lambda_k)}}$$

Így a legfeljebb $(s-1)$-edfokú $R_N(z)$ polinom azonosan előállítható:

$$R_N(z) = \sum_{k=1}^{s} S_N(\lambda_k) \cdot L_k(z)$$

Mivel az ① egyenlet z-ben racionális egész skalár azonosság, ezért $\underline{\underline{A}}$ behelyettesíthető:

$$S_N(\underline{\underline{A}}) = \underbrace{\Delta(\underline{\underline{A}})}_{=0 \text{ (Cayley-Ham.)}} \cdot q(\underline{\underline{A}}) + R_N(\underline{\underline{A}})$$

$$S_N(\underline{\underline{A}}) = \underbrace{\Delta(\underline{\underline{A}}) \cdot q(\underline{\underline{A}})}_{=0 \text{ a Cayley-Hamilton tétel alapján}} + R_N(\underline{\underline{A}})$$

$$S_N(\underline{\underline{A}}) = R_N(\underline{\underline{A}})$$

Helyettesítsük be $R_N(\cdot)$ azonos előállítását:

$$S_N(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} S_N(\lambda_k) \cdot L_k(\underline{\underline{A}})$$

Így az $S_N(\underline{\underline{A}})$ részletösszegben a mátrixpolinomok már nem függenek N-től, az $N \to \infty$ határátmenetet csak az $S_N(\lambda_k)$ számsorozatokon kell elvégezni:

$$f(\underline{\underline{A}}) = \lim_{N \to \infty} S_N(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left[\lim_{N \to \infty} S_N(\lambda_k)\right]}_{f(\lambda_k)} \cdot L_k(\underline{\underline{A}})$$

Tehát:

$$\boxed{f(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) \cdot L_k(\underline{\underline{A}})} \quad \left(\text{ha } |\lambda_k| < R\right)$$

Az $L_k(\underline{\underline{A}})$ mátrixpolinomok tulajdonságai

Tétel: Az $L_k(\underline{\underline{A}})$ mátrixpolinom projektor.

Biz:

Mivel $L_k(\lambda_k)=1$ és $L_k(\lambda_\ell)=0$ $(k\neq\ell)$, ezért

$$\underbrace{\underbrace{L_k(z)}_{\substack{\lambda_k\text{-nál}:\ 1\\ \lambda_\ell\text{-nél}:\ 0}}\cdot\Big[\underbrace{1-L_k(z)}_{\substack{\lambda_k\text{-nál}:\ 0\\ \lambda_\ell\text{-nél}:\ 1\ \ (\ell\neq k)}}}_{\text{minden } \lambda_i \text{ helyen } 0\ \to\ \text{osztható } \Delta(z)\text{-vel}}\Big]=\Delta(z)\cdot q(z)$$

(osztható a minimálpolinommal)

Helyettesítsük be $\underline{\underline{A}}$-t a z helyére; ekkor a C–H tétel alapján:

$$L_k(\underline{\underline{A}})\cdot\left[\underline{\underline{E}}-L_k(\underline{\underline{A}})\right]=0 \qquad (\text{mivel } \Delta(\underline{\underline{A}})=0)$$

$$L_k(\underline{\underline{A}})-L_k^2(\underline{\underline{A}})=0$$, tehát $L_k(\underline{\underline{A}})$ valóban projektor.

Tétel: Az $L_k(\underline{\underline{A}})$ mátrixpolinom rangja α_k (az λ_k sajátérték multiplicitása a karakterisztikus polinomban)

Biz:

$L_k(z)$ előállítása alapján:

$$L_k(z)=\frac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)\cdot(z-\lambda_k)} \rightarrow L_k(z)\cdot(z-\lambda_k)=\frac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)}$$

Helyettesítsük be $\underline{\underline{A}}$-t és alkalmazzuk a C–H tételt:

$$L_k(\underline{\underline{A}})\cdot(\underline{\underline{A}}-\lambda_k\underline{\underline{E}})=0$$

Tudjuk, hogy $\rho(\underline{\underline{A}}-\lambda_k\underline{\underline{E}})\geq n-\alpha_k$ (korábbi tétel)

$$\rho(L_k(\underline{\underline{A}}))+\rho(\underline{\underline{A}}-\lambda_k\underline{\underline{E}})\leq n$$ (Sylvester-féle nullitási tétel alapján)

$$\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}}) \geq n - \alpha_k \quad ; \quad \rho(L_k(\underline{\underline{A}})) + \rho(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}}) \leq n$$

$$n - \alpha_k \leq \rho(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}}) \leq n - \rho(L_k(\underline{\underline{A}}))$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(L_k(\underline{\underline{A}})) \leq \alpha_k$$

Másrészt $\sum_{k=1}^{s} L_k(z) \equiv 1$ alapján:

$$\sum_{k=1}^{s} L_k(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{E}}$$

És mivel az összeg rangja nem nagyobb, mint a rangok összege:

$$\sum_{k=1}^{s} \rho(L_k(\underline{\underline{A}})) \geq \rho(\underline{\underline{E}}) = n$$

Mivel $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n$, ez csak úgy lehetséges, ~~hogy~~ ha

$\rho(L_k(\underline{\underline{A}})) \not< \alpha_k$, tehát $\boxed{\rho(L_k(\underline{\underline{A}})) = \alpha_k}$

Mivel $L_k(\underline{\underline{A}})$ egy α_k rangú projektor, ezért a min. diadikus előállításában az oszlop- és sorvektorok biortogonális vektorrendszert alkotnak:

$$L_k(\underline{\underline{A}}) = \sum_{\nu=1}^{\alpha_k} \underline{u}_{k\nu} \underline{v}_{k\nu}^T = \underline{\underline{U}}_k \underline{\underline{V}}_k^T \quad , \text{ahol } \underline{\underline{V}}_k^T \underline{\underline{U}}_k = \underline{\underline{E}}_{\alpha_k}$$

Tudjuk, hogy $\sum_{k=1}^{s} L_k(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{E}}$

$$\sum_{k=1}^{s} L_k(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} \underline{\underline{U}}_k \underline{\underline{V}}_k^T = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{E}}$$

$$\sum_{k=1}^{s} \underline{\underline{L}}_k(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} \underline{u}_k \underline{v}_k^T = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{E}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{U}} = \left[\underline{u}_1 \,\vdots\, \underline{u}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{u}_s\right]; \quad \underline{\underline{V}}^T = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \vdots \\ \underline{v}_s^T \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{E}}$$

tehát az összes $L_k(\underline{\underline{A}})$ mátrixpolinom minimális diadikus felbontása teljes biortogonális vektorrendszert alkot.

Mátrixfüggvény spektrálfelbontása:

$$f(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) \cdot L_k(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k)\, \underline{u}_k \underline{v}_k^T$$

$$f(\underline{\underline{A}}) = \underbrace{\left[\underline{u}_1 \,\vdots\, \underline{u}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{u}_s\right]}_{\underline{\underline{U}}} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\lambda_1)\cdot \underline{\underline{E}}_{\alpha_1} & & & \\ & f(\lambda_2)\underline{\underline{E}}_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_s)\underline{\underline{E}}_{\alpha_s} \end{bmatrix}}_{f(\underline{\underline{\Lambda}})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \vdots \\ \underline{v}_s^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{V}}^T}$$

Tehát $f(\underline{\underline{A}})$ diagonalizálható, és $\underline{\underline{U}}$ oszlopai a sajátvektorok

$$f(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{U}} \cdot f(\underline{\underline{\Lambda}})\, \underline{\underline{U}}^{-1}$$

Ha speciálisan $f(z) = z$, akkor

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\, \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{\underline{U}}^{-1},$$

vagyis $f(\underline{\underline{A}})$ modálmátrixa megegyezik $\underline{\underline{A}}$ modálmátrixával, vagyis $f(\underline{\underline{A}})$ és $\underline{\underline{A}}$ sajátvektorrendszere megegyezik.

Ciklikus mátrixok spektrálfelbontása:

Minden ciklikus mátrix az elemi $\underline{\underline{\Omega}}$ ciklikus mátrix polinomjaként írható fel:

$$\underline{\underline{C}} = c_0 \underline{\underline{E}} + c_1 \underline{\underline{\Omega}} + c_2 \underline{\underline{\Omega}}^2 + \dots + c_{n-1} \underline{\underline{\Omega}}^{n-1}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $\underline{\underline{C}}$ spektrálfelbontását megkapjuk $\underline{\underline{\Omega}}$ spektrálfelbontása alapján.

$\underline{\underline{\Omega}}$ sajátértékei:

Első oszlop alapján kifejtve:

$$D(\lambda) = |\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\Omega}}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \lambda \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^{n-1} + \underbrace{(-1)^{n-1}}_{\text{sakktábla előjel}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{1. oszlop utolsó eleme}} \cdot \underbrace{(-1)^{n-1}}_{\text{aldet. értéke}} =$$

$$= \lambda^n - 1 = 0$$

Tehát $\lambda^n = 1$, azaz a sajátértékek az n-edik komplex egységgyökök:

$$\lambda_k = \omega_k = e^{\frac{2\pi k}{n} i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Mivel n db különböző λ_k van, ezért $D(\lambda) = \Delta(\lambda)$

Írjuk fel a Lagrange-féle alappolinomokat:

$$L_k(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)(z-\lambda_k)} = \frac{z^n - 1}{n\lambda_k^{n-1}(z-\lambda_k)} = \frac{z^n-1}{n\omega_k^{n-1}(z-\omega_k)}$$

Mivel $\omega_k^n = 1$:

$$L_k(z) = \frac{z-\omega_k^n}{z-\omega_k}\cdot\frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}}\cdot\left(z^{n-1} + z^{n-2}\omega_k + \ldots + z\,\omega_k^{n-2} + \omega_k^{n-1}\right)$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{\omega_k} = \bar{\omega}_k$, $\frac{1}{\omega_k^2} = \bar{\omega}_k^2, \ldots$

$$L_k(z) = \frac{1}{n}\left(1 + z\bar{\omega}_k + z^2\bar{\omega}_k^2 + \ldots + z^{n-2}\bar{\omega}_k^{n-2} + z^{n-1}\bar{\omega}_k^{n-1}\right)$$

Helyettesítsük be z helyére $\underline{\underline{\Omega}}$-t:

$$L_k(\underline{\underline{\Omega}}) = \frac{1}{n}\left(\underline{\underline{E}} + \bar{\omega}_k\underline{\underline{\Omega}} + \bar{\omega}_k^2\cdot\underline{\underline{\Omega}}^2 + \ldots + \bar{\omega}_k^{n-1}\underline{\underline{\Omega}}^{n-1}\right)$$

Ez is egy ciklikus mátrix, mivel $\underline{\underline{\Omega}}$ polinomja

$$L_k(\underline{\underline{\Omega}}) = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\omega}_k & \bar{\omega}_k^2 & \cdots & \bar{\omega}_k^{n-1} \\ \omega_k & 1 & \bar{\omega}_k & & \vdots \\ \omega_k^2 & \omega_k & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \bar{\omega}_k \\ \omega_k^{n-1} & \cdots & \cdots & \omega_k & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\bar{\omega}_k^{n-1} = \omega_k$$
$$\bar{\omega}_k^{n-2} = \omega_k^2$$

Mivel $\alpha_k = 1$ (hiszen egyszeres sajátértékek vannak), ezért $L_k(\underline{\underline{\Omega}})$ egyetlen diádként írható fel:

$$L_k(\underline{\underline{\Omega}}) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{u}_k}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \bar{\omega}_k & \bar{\omega}_k^2 & \cdots & \bar{\omega}_k^{n-1} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\underline{u}_k^H}$$

A modálmátrix unitér mátrix:

$$\underline{\underline{U}} = \left[\underline{u}_0 \,\middle|\, \underline{u}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{u}_{n-1} \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{n-1} \\ 1 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

A diagonalizált mátrix a sajátértékeket tartalmazza:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \omega_1 & & 0 & \\ & & \omega_2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \omega_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (\underline{\underline{\Omega}} \text{ sajátértékei})$$

Mivel $\underline{\underline{C}}$-nek is ugyanaz a modálmátrixa, a ~~[illegible]~~ sajátértékei pedig $\underline{\underline{\Omega}}$ sajátértékeinek polinomja, így $\underline{\underline{C}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \underline{\underline{\Omega}}^\nu$ spektrálfelbontása:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}} \left\langle \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \omega_k^\nu \right\rangle \underline{\underline{U}}^H$$

$k = 0, \dots, n-1$, összesen n db diagonálelem