# 11. tétel

## Többszörös gyökök, Hermite-interpoláció

$$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = D_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n$$

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\gamma_k}, \quad s < \sum_{k=1}^{s} \gamma_k = m \leq n$$

---

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} c_k z^k}_{S_N(z)} = \lim_{N\to\infty} S_N(z)$$

$$S_N(z) = \Delta(z) \cdot q(z) + R_N(z)$$

$$\cancel{S_N'(z) = \Delta'(z) \cdot q(z) + R_N'(z)}$$

$$S_N(\lambda_k) = R_N(\lambda_k)$$

$$S'(\lambda_k) = R_N'(\lambda_k) \quad \to \text{ mert } \Delta'(z) \ldots \Delta^{(\gamma_k - 1)}(z) \text{ is}$$

$$\vdots$$

$$S^{(\gamma_k - 1)}(\lambda_k) = R_N^{(\gamma_k - 1)}(\lambda_k) \quad \nearrow \text{ tartalmazza a } (z - \lambda_k) \text{ tényezőt}$$

$\varepsilon_z$ $\sum_{k=1}^{s} \gamma_k = m$ feltétel $\Rightarrow$ Hermite-interpoláció

$$S_N(z) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{\gamma_k} S_N^{(\nu-1)}(\lambda_k) \cdot H_{k(\nu-1)}(z)$$

$$f(z) = \sum \sum \underbrace{\lim_{N\to\infty} S_N^{(\nu-1)}(\lambda_k)}_{f^{(\nu-1)}(\lambda_k)} \cdot H_{k(\nu-1)}(z)$$

$$f(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{\gamma_k - 1} f^{(\nu)}(\lambda_k) H_{k\nu}(z)$$

## $H_{k\nu}(\underline{\underline{A}})$ tulajdonságai:

$$H_{k0}(\underline{\underline{A}})\, H_{l0}(\underline{\underline{A}}) = \delta_{kl} H_{k0}(\underline{\underline{A}})$$

$$\sum_{k=1}^{s} H_{k0}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{E}}$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}})^{\gamma_k} \cdot H_{k0}(\underline{\underline{A}})}_{\text{mert osztható a minimálpolinommal}} = \underline{\underline{0}}$$

Schur-tétel segítségével belátható, hogy $\varrho(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}})^{\gamma_k} \geq n - \alpha_k$

$H_{k0}(\underline{\underline{A}})$ projektor, és rangja $\alpha_k$.

$$H_{k\nu}(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{\nu!} (\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}})^{\nu} H_{k0}(\underline{\underline{A}})$$

$H_{k\nu}(\underline{\underline{A}})$ $\nu > 0$ esetén nilpotens

## Mátrixok kváziddiagonalizálása:

$$f(z) = z$$

$$f(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \cdot H_{k0}(\underline{\underline{A}}) + 1 \cdot H_{k1}(\underline{\underline{A}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \lambda_k H_{k0}(\underline{\underline{A}}) + (\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}}) H_{k0}(\underline{\underline{A}}) =$$

projektor, és felcserélhető $\underline{\underline{A}}$ polinomjaival

$$= \sum_{k=1}^{s} \lambda_k H_{k0}(\underline{\underline{A}}) + H_{k0}(\underline{\underline{A}})(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{E}}) H_{k0}(\underline{\underline{A}})$$

$$H_{\varrho 0}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{U}}_\varrho \underline{\underline{V}}_\varrho^T \qquad (\text{min. diad. felb.})$$

$$\underline{\underline{V}}_\varrho^T \underline{\underline{U}}_\varrho = \underline{\underline{E}}_{d_\varrho}$$

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{\varrho=1}^{s} \underline{\underline{U}}_\varrho \Big( \lambda_\varrho \underline{\underline{E}}_{d_\varrho} + \underbrace{\underline{\underline{V}}_\varrho^T (\underline{\underline{A}} - \lambda_\varrho \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{U}}_\varrho}_{\text{nilpotens mátrix}} \Big) \cdot \underline{\underline{V}}_\varrho^T$$

$$\cancel{\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_1 & \underline{\underline{U}}_2 & \cdots & \underline{\underline{U}}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{V_1^T A U_1} & & & \\ & \boxed{\phantom{V}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\phantom{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}_1 \\ \underline{\underline{V}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{V}}_s \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{V}}_p^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}}_p = \lambda_p \underline{\underline{E}}_{d_p} + \underline{\underline{V}}_p^T (\underline{\underline{A}} - \lambda_\varrho \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{U}}_p$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}_1^T \\ \underline{\underline{V}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\underline{V}}_s^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_1 & \underline{\underline{U}}_2 & \cdots & \underline{\underline{U}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{V_1^T A U_1} & & & \\ & \boxed{V_2^T A U_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{V_s^T A U_s} \end{bmatrix}$$

# Nilpotens mátrixok transzformációja Jordan-féle normálalakra.

Minden $\alpha$ rendű $\underline{\underline{N}}$ nemderogatórius nilpotens mátrix hasonlósági transzformációval alsó (felső) Jordan-féle normálalakra hozható, a normálalak mátrixa egyetlen $\alpha$ rendű alsó (felső) Jordan-blokk.

Biz:

Ha az $\alpha$ rendű nilp. mx nemderogatórius, akkor:

$$\underline{\underline{N}}^{\alpha} = 0 \; ; \quad \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \neq 0$$

Tfh. található olyan $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektor, amelyekre:

$$\underline{y}^T \underline{x} = \underline{y}^T \underline{\underline{N}} \underline{x} = \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^2 \underline{x} = \ldots = \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{x} = 0$$

$$\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{x} = 1$$

Képezzük a következő vektorrendszert:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \\ \vdots \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}} \\ \underline{y}^T \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{\underline{N}}\underline{x} & \ldots & \underline{\underline{N}}^{\alpha-1}\underline{x} \end{bmatrix}$$

Ez teljes biortogonális vektorrendszer:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \\ \vdots \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}} \\ \underline{y}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{\underline{N}}\underline{x} & \ldots & \underline{\underline{N}}^{\alpha-2}\underline{x} & \underline{\underline{N}}^{\alpha-1}\underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{x} & \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha} \underline{x} & \ldots & \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{2\alpha-2} \underline{x} \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{x} & \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{x} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \underline{y}^T \underline{x} & & & \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{x} \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}}$$

Vessük alá az $\underline{\underline{N}}$ mátrixot az ezekből álló hasonlósági transzformációnak!

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \\ \vdots \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}} \\ \underline{y}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \underline{\underline{N}} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{\underline{N}}\underline{x} & \cdots & \underline{\underline{N}}^{\alpha-1}\underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A keresett Jordan-alakot kaptuk.

$\underline{x}$ és $\underline{y}$ előállítása:

Először keressünk olyan $\underline{y}^T$ és $\underline{z}$ vektort, amelyekre:

$$\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{z} = 1 \Rightarrow \text{ilyen létezik}$$

Ha $\underline{\underline{N}}^{\alpha-1}$ $i,j$ indexű eleme $\neq 0$, akkor

$$\underline{e}_i^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{e}_j \neq 0$$

$$\underline{y}^T = \underline{e}_i^T \; ; \quad \underline{z} = \frac{1}{\underline{e}_i^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{e}_j} \cdot \underline{e}_j$$

Az $\underline{x}$ vektort a következő alakban keressük:

$$\underline{x} = \left(\underline{\underline{E}} + c_1 \underline{\underline{N}} + c_2 \underline{\underline{N}}^2 + \ldots + c_{\alpha-1} \underline{\underline{N}}^{\alpha-1}\right) \underline{z}$$

$c_1, c_2 \ldots c_{\alpha-1}$ együtthatók rekurzív úton meghatározhatók:

Szorozzuk az összefüggést balról rendre az $\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1}$, $\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2}$, $\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-3}$ ... $\underline{y}^T$ vektorokkal:

$$\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{x} = \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{z} = 1 \quad \Rightarrow \text{automatikusan teljesül}$$

$$\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{x} = \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{z} + \underbrace{\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{z}}_{1} \cdot c_1 = 0$$

$$\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-3} \underline{x} = \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-3} \underline{z} + \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{z} \cdot c_1 + \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-1} \underline{z} \cdot c_2 = 0$$

$$\vdots$$

Ezekből: $$c_1 = -\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{z}$$

$$c_2 = -\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-3} \underline{z} + \left(\underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\alpha-2} \underline{z}\right)^2$$

$$\vdots$$

A transzformáló mátrix vektorait fővektoroknak nevezzük.

A vektorok sorrendjének felcserélésével ~~alsó~~ felső Jordan-alakhoz jutunk.

---

Derogatórius nilpotens mátrixok esetén:

$\underline{\underline{N}}$ indexe $\beta < \alpha$, ezért $\underline{\underline{N}}^{\beta-1} \neq 0$, de $\underline{\underline{N}}^{\beta} = 0$

~~Akkor~~ Az eljárás hasonló a nemderogatórius esethez, azzal a különbséggel, hogy az $\underline{x}$, és $\underline{y}$ vektorokkal képzett biortogonális vektorrendszer nem teljes. Ezért ezt teljessé kell tennünk.

$$\underline{\underline{V}}_\beta^T = \begin{bmatrix} \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\beta-1} \\ \vdots \\ \underline{y}^T \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{U}}_\beta = \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{\underline{N}}\underline{x} & \cdots & \underline{\underline{N}}^{\beta-1}\underline{x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}}_\beta^T \underline{\underline{U}}_\beta = \underline{\underline{E}}_\beta \quad (\underline{x} \text{ és } \underline{y} \text{ definíciójából})$$

$\underline{\underline{U}}_\beta \underline{\underline{V}}_\beta^T$ : $\beta$-rangú projektor

$$\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{U}}_\beta \underline{\underline{V}}_\beta^T = \sum_{k=1}^{\alpha-\beta} \underline{w}_k \cdot \underline{z}_k^T$$

Az így nyert vektorokkal kiegészítve a fővektorokat, teljes biortogonális vektorrendszert kapunk.
Az ezekből képzett hasonlósági trafónak alávetve az $\underline{\underline{N}}$ mátrixot:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\beta-1} \\ \underline{y}^T \underline{\underline{N}}^{\beta-2} \\ \vdots \\ \underline{y}^T \\ \hline \underline{z}_1^T \\ \vdots \\ \underline{z}_{\alpha-\beta}^T \end{array}\right] \left[\; \underline{\underline{N}} \;\right] \left[\begin{array}{cccc|ccc} \underline{x} & \underline{\underline{N}}\underline{x} & \cdots & \underline{\underline{N}}^{\beta-1}\underline{x} & \underline{w}_1 & \cdots & \underline{w}_{\alpha-\beta} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} J_\beta & 0 \\ \hline 0 & \tilde{N}_{\alpha-\beta} \end{array}\right]$$

Kvázidiagonál-mátrix, amelyben $\beta$-rendű Jordan-blokk és $\alpha-\beta$ rendű nilpotens mátrix áll.

Ugyanezt az eljárást véges számú lépésben elvégezve megkapjuk a Jordan-alakot.