7. tétel

Nemparametrikus identifikáció:

1) Időtartományban:

   a) Tranziens analízis

   b) Korrelációs technika

      PRBS bemenet, u és y korrelációjának vizsgálata → súlyfüggvény kifejezhető

2) Frekvenciatartományban:

   - Periodikus jellel gerjesztés → LS → erősítés/fázistolás

Parametrikus identifikáció:

LS becslés ~~torzítatlansága~~ konzisztenciája függ a bemenő jeltől

Probléma zárt körben: $u_t = k y_t$ → u_t és y_t összefügg

$X^T X$ nem lesz invertálható

$(X = [y \;\; ky])$

LS becslés különböző modellek esetén:

ARX → torzítatlan becslést ad

ARMAX → kezdőérték probléma

ARARX:

$$Ay_t = Bu_t + \frac{1}{D}e_t$$

$$ADy_t = BDu_t + e_t$$

a) $y_t = BDu_t - \widetilde{AD}y_t + e_t$ → LS direkt módszerre vezet, de nem kapjuk meg külön A, B, D-t

b) legyen $Dr_t = e_t \Rightarrow r_t = -\tilde{D}r_t + e_t$

$$Ay_t = Bu_t + r_t$$

$$Ay_t = Bu_t - \tilde{D}r_t + e_t$$

$$y_t = Bu_t - \tilde{A}y_t - \tilde{D}r_t + e_t$$

paraméterekben lineáris, de nem ismerjük az r_t-ket

→ iteratív módszer: $\hat{r}_t \rightarrow \hat{A}, \hat{B}, \hat{D} \rightarrow \hat{r}_t \rightarrow \dots$

ML becslés:

$$y_t = \frac{B}{F}u_t + \frac{C}{D}e_t$$ → tudjuk, hogy $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$

$$e_t = \frac{D}{C}\left(y_t - \frac{B}{F}u_t\right)$$

$$\ln f = -\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{N} e_t^2 \rightarrow \min$$

deriválva $\left(\frac{\partial}{\partial A}, \frac{\partial}{\partial B}, \frac{\partial}{\partial D} \dots\right)$ iteratív módszerre vezet, nem biztos, hogy stabil $\frac{C}{D} \rightarrow \frac{D}{C}$ miatt

Segédváltozók módszere (IV)

A becslési hibával korrelálatlan ξ változót keresünk

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t(\vartheta)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \xi_{i_t}\varepsilon_t = 0 \qquad i = 1,2,\dots,m \quad (m \text{ a paraméterek száma})$$

$$\frac{1}{N}\underline{\underline{Z}}^T\left[\underline{Y} - \underline{\underline{X}}\,\underline{\vartheta}\right] = \emptyset \;\rightarrow\; \hat{\underline{\vartheta}}_{IV} = \left[\underline{\underline{Z}}^T\underline{\underline{X}}\right]^{-1}\underline{\underline{Z}}^T\underline{Y}$$

($\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{X}}$-et is választhatunk, ha a zaj fehér $\rightarrow$ LS)

ξ_i ($\underline{\underline{Z}}$) megválasztása:

1) véletlenszerűen
2) korábbi u bemenetek (m db) vagy ezek tetszőleges függvénye

Korábbi kimenetek: y_{t-m-1} és korábbiak jók, mert nem korrelálnak

3) Ha ismerjük a zaj kovarianciáját: $\underline{\underline{\Sigma}}$

$$\underline{\underline{Z}}^T = \underline{\underline{X}}^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \quad (\text{Generalized LS})$$

$$\hat{\underline{\vartheta}} = \left(\underline{\underline{X}}^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}\underline{\underline{X}}\right)^{-1}\underline{\underline{X}}^T\underline{Y} \rightarrow \text{optimális megoldás}$$

GMM módszer:

Momentumot számolunk:

$$m(\vartheta) = E\left(g(\underline{Y},\vartheta)\right) = g_0$$

$$\bar{g}(\underline{Y},\vartheta) = g(\underline{Y},\vartheta) - g_0$$

$$\text{pl. } \bar{g} = \underline{z}^T\left(y_t - \underline{x}_t^T\vartheta\right)$$

$$\bar{m}(\vartheta) = E\left\{g(\underline{Y},\vartheta)\right\} - E\left(g(Y,\vartheta)\right)$$

$$\bar{m}(\vartheta) = E\left\{\bar{g}(\underline{Y},\vartheta)\right\} = \emptyset$$

$$\cong \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\bar{g}(y_t,\vartheta) = \emptyset$$

STLS/PEM :

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + K e_k$$

$$y_k = C x_k + D u_k + e_k$$

$$y_{k+1} = C(A x_k + B u_k + K e_k) + D u_{k+1} + e_{k+1}$$

$$y_{k+1} = CA x_k + CB u_k + CK e_k + D u_{k+1} + e_{k+1}$$

$$y_{k+2} = CA^2 x_k + CAB u_k + CB u_{k+1} + CAK e_k + CK e_{k+1}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}}_{} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} D & & & \\ CB & D & & \\ CAB & CB & D & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ CK & 1 & & \\ CAK & CK & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{\Gamma}} \cdot x_1 + \underline{\underline{H}}_u \cdot \underline{u} + \underline{\underline{H}}_e \cdot \underline{e}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\min \ \underline{e}^T \underline{e} \\ &\underline{y} = \underline{\underline{\Gamma}} x_1 + \underline{\underline{H}}_u \underline{u} + \underline{\underline{H}}_e \underline{e} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{y} = \underline{\underline{B}}\, \underline{u} + \underline{\underline{C}}\, \underline{e}$$