7. tétel

Lineáris egyenletrendszerek

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Együtthatómátrix $(m \times n)$

ismeretlenek vektora (n elemű)

adott vektor (m elemű)

Ha $\underline{b} = 0$: homogén

Ha $\underline{b} \neq 0$: inhomogén

Homogén lin. egyenletrendszer megoldása:

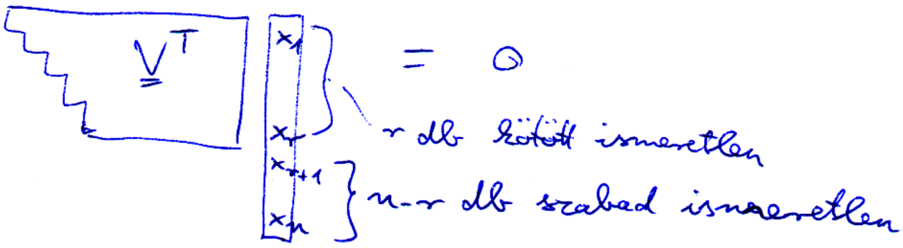
$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$$

$\underline{\underline{A}}$ egy min. diadikus előállítása:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{r} \underline{u}_k \underline{v}_k^T = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{V}}^T \underline{x} = 0$$

redukált egyenlet
(m helyett r db egyenlet)



Ha a szabad ismeretleneket megválasztjuk, akkor az r-edik egyenlettől visszafelé rekurzívan meghatározhatók a kötött ismeretlenek is.

Általános megoldás: ($n-r$ db lin. ftlen megoldásvektor lin. komb.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-r} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & & x_{r,n-r} \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{X}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{bmatrix}}_{\underline{t}} \quad \rightarrow \quad \underline{x} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{t}$$

Inhomogén lin. egyenletrendszer megoldása:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad \text{inhomogén, ha } \underline{b} \neq 0$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b} = 0$$

$$m\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{b} \end{bmatrix}}_{n+1}\begin{bmatrix} \underline{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0\right. \qquad x_{n+1} = -1$$

Visszavezettük homogén esetre

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{b} \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}}^T \rightarrow \underline{\underline{V}}^T \underline{\tilde{x}} = 0$$

A megoldhatóság feltétele, hogy x_{n+1} szabad ismeretlen legyen (tudjuk -1 értékűre választani), vagyis, hogy $\underline{b}$ hozzávételével az együtthatómátrix rangja ne növekedjen

$$\varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho([\underline{\underline{A}}\ \ \underline{b}])$$

Általános megoldás:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \\ \hline x_{n+1} = -1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-r} & x_{1,n-r+1} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,n-r} & x_{2,n-r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{r,1} & x_{r,2} & \cdots & x_{r,n-r} & x_{r,n-r+1} \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \\ \hline t_{n-r+1} = -1 \end{bmatrix}$$

($\underline{x}$: az $x_1 \ldots x_n$ rész; $\underline{\underline{X}}_{n-r}$: az első $n-r$ oszlop; $\underline{t}$: a $t_1 \ldots t_{n-r}$ rész)

$$\underline{x} = \underbrace{\underline{\underline{X}}_{n-r}\cdot\underline{t}}_{\text{a homogén lin. egyrsz. általános megoldása}} - \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,n-r+1} \\ x_{2,n-r+1} \\ \vdots \\ x_{r,n-r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{x}_0} \rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{X}}_{n-r}\cdot\underline{t} + \underline{x}_0$$

az inhomogén lin. egyrsz. egy partikuláris megoldása

Projektor együtthatómátrix esete :

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

(1) Homogén egyenlet ($\underline{b} = 0$) megoldása :

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{x} = 0 \qquad \text{mivel} \qquad \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}) = 0,$$

azaz $\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}$ minden oszlopa kielégíti az egyenletet.

Ha $\rho(\underline{\underline{P}}) = r$, akkor $\rho(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}) = n - r$, tehát $\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}$-nek van $n-r$ db lin. ftlen oszlopvektora, így:

$$\underline{x} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}})\,\underline{t}$$

(2) Inhomogén egyenlet ($\underline{b} \neq 0$) :

$$\underline{\underline{P}}^2\,\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b} \qquad , \text{mivel} \quad \underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$$

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$$

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad \text{(eredeti alak)}$$

$\searrow$ $\underline{\underline{P}}\,\underline{b} = \underline{b}$ a megoldhatóság feltétele

Ha teljesül, akkor $\underline{x} = \underline{b}$ az egy. rsz. egy partikuláris megoldása.

Általános megoldás :

$$\underline{x} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}})\,\underline{t} + \underline{b}$$

feltéve, hogy $\underline{\underline{P}}\,\underline{b} = \underline{b}$

Lineáris transzformációk (leképezések)

Legyen $\underline{x}$ és $\underline{y}$ az R_n^* komplex lineáris tér elemei (vektorai) úgy, hogy $A(\underline{x}) = \underline{y}$.

Az $A(\cdot)$-t lineáris leképezésnek nevezzük, ha

$$A(\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2) = \lambda_1 A(\underline{x}_1) + \lambda_2 A(\underline{x}_2),$$

ahol λ_1 és λ_2 skalárok.

Bázisvektorok: Egy n-dimenziós R_n lineáris térben mindig található n db lineárisan független vektor. Ezek a tér egy bázisát alkotják.

Legyen pl. egy bázis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$

Ekkor bármely $\underline{x}$ vektor kifejezhető a bázisvektorok lin. kombinációjaként:

$$\underline{x} = \xi_1 \underline{e}_1 + \xi_2 \underline{e}_2 + \dots + \xi_n \underline{e}_n,$$

ahol $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ az $\underline{x}$ vektor koordinátái.

Lineáris transzformáció mátrixa:

Alkalmazzuk az $A(\cdot)$ lin. trafo-t $\underline{x}$-re:

$$\underline{y} = A(\underline{x}) = A(\xi_1 \underline{e}_1 + \xi_2 \underline{e}_2 + \dots + \xi_n \underline{e}_n) =$$

$$= \xi_1 \underbrace{A(\underline{e}_1)}_{\underline{g}_1} + \xi_2 \underbrace{A(\underline{e}_2)}_{\underline{g}_2} + \dots + \xi_n \underbrace{A(\underline{e}_n)}_{\underline{g}_n}$$

A $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$ transzformált bázisvektorok is felírhatók $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisban:

$$\underline{g}_1 = \mathcal{A}(\underline{e}_1) = a_{11}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{n1}\,\underline{e}_n$$

$$\underline{g}_2 = \mathcal{A}(\underline{e}_2) = a_{12}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{n2}\,\underline{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\underline{g}_n = \mathcal{A}(\underline{e}_n) = a_{1n}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{nn}\,\underline{e}_n$$

$$\Big[\underbrace{\mathcal{A}(\underline{e}_1)}_{\underline{g}_1}\ \underbrace{\mathcal{A}(\underline{e}_2)}_{\underline{g}_2}\ \underbrace{\dots}_{\dots}\ \underbrace{\mathcal{A}(\underline{e}_n)}_{\underline{g}_n}\Big] = \big[\underline{e}_1\ \underline{e}_2 \dots \underline{e}_n\big]\cdot \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{A}}}$$

$\underline{\underline{A}}$ az $\mathcal{A}(\cdot)$ transzformáció $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisban felírt mátrixa.

Koordináta-transzformáció (új bázisra való áttérés)

Legyen az eredeti bázis: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$

új bázis: $\underline{e}_1', \underline{e}_2', \dots, \underline{e}_n'$

A kettő viszonya: $$\underline{e}_k' = \sum_{i=1}^{n} \underline{e}_i\, c_{i,k}$$

$$\big[\underline{e}_1'\ \underline{e}_2' \dots \underline{e}_n'\big] = \big[\underline{e}_1\ \underline{e}_2 \dots \underline{e}_n\big]\cdot \overbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{C}}\ \text{(nemszinguláris)}}$$

Legyen $\underline{x} = \xi_1 \underline{e}_1 + \xi_2 \underline{e}_2 + \dots + \xi_n \underline{e}_n$, írjuk fel az új bázisban: $\underline{x} = \xi_1' \underline{e}_1' + \xi_2' \underline{e}_2' + \dots + \xi_n' \underline{e}_n'$ (a vektor ugyanaz):

$$\big[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\big]\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix} = \big[\underline{e}_1' \dots \underline{e}_n'\big]\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = \big[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\big]\cdot \underline{\underline{C}}\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} \quad \Bigg\| \quad \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}$$

Hasonlósági transzformáció, hasonló mátrixok:

Legyen $\mathcal{A}(\cdot)$ egy lineáris transzformáció, és tekintsünk két bázist: ① $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$

② $\underline{e}_1', \dots, \underline{e}_n'$

Transzformáljuk a bázisvektorokat:

$$\left[\mathcal{A}(\underline{e}_1) \dots \mathcal{A}(\underline{e}_n)\right] = \left[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\right] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}$$

$$\left[\mathcal{A}(\underline{e}_1') \dots \mathcal{A}(\underline{e}_n')\right] = \left[\underline{e}_1' \dots \underline{e}_n'\right] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\underline{\underline{A}}}$$

Legyen a két bázis közötti kapcsolatot közvetítő mátrix $\underline{\underline{C}}$:

$$\left[\underline{e}_1' \dots \underline{e}_n'\right] = \left[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\right] \cdot \underline{\underline{C}}$$

Alkalmazzuk az $\mathcal{A}(\cdot)$ transzformációt:

$$\mathcal{A}\left(\left[\underline{e}_1' \dots \underline{e}_n'\right]\right) = \left[\underline{e}_1' \dots \underline{e}_n'\right] \cdot \tilde{\underline{\underline{A}}} = \left[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\right] \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{\underline{A}}}$$

$$\mathcal{A}\left(\left[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\right]\right) \cdot \underline{\underline{C}} = \left[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\right] \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}}$$

$$\boxed{\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}}}$$

$\underline{\underline{A}}$ mátrixon a $\underline{\underline{C}}$ nemszinguláris mátrixszal hasonlósági transzformációt végeztünk.

$\underline{\underline{A}}$ és $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ hasonló mátrix.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Legyen $A(\cdot)$ egy lineáris transzformáció. Ha az

$$A(\underline{x}) = \lambda \cdot \underline{x}$$

egyenletnek valamely λ skalár esetén van megoldása $\underline{x} \neq 0$ esetén, akkor:

- λ az $A(\cdot)$ transzformáció sajátértéke,
- $\underline{x}$ az $A(\cdot)$ transzf. λ-hoz tartozó sajátvektora.

Sajátaltér: Ugyanahhoz a λ_0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok által alkotott altér.

A sajátaltér dimenziója egyenlő a λ_0-hoz tartozó lin. független sajátvektorok számával.

Tétel: Minden lin. transzformációnak létezik legalább egy sajátvektora.

Biz.:

Legyen $[\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n]$ egy bázis, és legyen az $A(\cdot)$ transzf. mátrixa ebben a bázisban $\underline{\underline{A}}$.

Ekkor az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenletből $\underline{x}$ koordinátáit az alábbi homogén lin. egyrsz. alapján határozhatjuk meg:

$$(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\underline{x} = 0$$

Ennek csak akkor van a triviálistól különböző ($\underline{x} \neq 0$) megoldása, ha az együtthatómátrix nem maximális rangú (szinguláris):

$$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = 0$$

A determinánst kifejtve λ-ra n-edfokú egyenletet kapunk, amelynek van legalább egy gyöke. Ezt behelyettesítve az egyenletrendszerbe, van nemtriviális megoldás $\underline{x}$-re.

Karakterisztikus polinom:

A $|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}|$ determináns λ-nak n-edfokú polinomja, ez az $\underline{\underline{A}}$ mátrix karakterisztikus polinomja.

$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = 0 \Rightarrow$ karakterisztikus egyenlet

Tétel: Az $A(\cdot)$ transzformáció karakterisztikus polinomja független a bázis megválasztásától. (A bázis transzformációjával szemben invariáns.)

Biz: Legyen $\underline{\underline{\tilde{A}}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}}$:

$$|\lambda E - \tilde{A}| = |\lambda E - C^{-1} A C| = |\lambda C^{-1} C - C^{-1} A C| =$$

$$= |C^{-1}(\lambda E - A) C| = \cancel{|C^{-1}|} \cdot |\lambda E - A| \cdot \cancel{|C|} = |\lambda E - A| \checkmark$$

Diagonalizálhatóság:

Tétel: ~~Ha az $A(\cdot)$ lin. transf.-nak~~

Ha az n-dimenziós tér $A(\cdot)$ lin. transzformációjának n db lin. ftlen. sajátvektora van, akkor ezeket választva bázisnak, a transzf. mátrixa diagonálmátrix.

Biz: Legyen $A(\underline{u}_i) = \lambda_i \underline{u}_i$, akkor

$$[A(\underline{u}_1) \dots A(\underline{u}_n)] = [\underline{u}_1, \dots \underline{u}_n] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}$$

Diagonalizálhatóság tovább :

Def: Ha az n-dimenziós lin. tér $A(\cdot)$ transzformációjának létezik n db lin. független sajátvektora, akkor ezeket egy <u>teljes sajátvektorrendszernek</u> nevezzük.

Def: Ha egy lin. transzf.-nak létezik teljes sajátvektorrendszere, akkor azt <u>diagonalizálható lineáris transzformációnak</u> nevezzük.

Def: Hasonlósági transzformációval diagonalizálható mátrixokat <u>egyszerű struktúrájú mátrixoknak</u> nevezzük.