5. tétel

Blokkmátrixok (hipermátrixok)

4 blokkra particionált mátrixok:

$$\left[\begin{array}{c|c}\underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \hline \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}}\end{array}\right]$$

Szimmetrikus particionálás: $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{D}}$ kvadratikus

Perszimmetrikus particionálás: $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ kvadratikus

Szimmetrikusan particionált hipermátrixok

Faktorizáció:

1) Legyen $|\underline{\underline{A}}| \neq 0$

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}A\\ C\end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}E\\ CA^{-1}\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}E & A^{-1}B\end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}0\\ E\end{bmatrix}(D-CA^{-1}B)\begin{bmatrix}0 & E\end{bmatrix}}$$

hiperdiád

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}E & 0\\ CA^{-1} & E\end{bmatrix}}_{\text{unimoduláris mátrix: determinánsa 1}} \begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & \underbrace{D-CA^{-1}B}_{\text{A-hoz tartozó Schur-komplementum}}\end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}E & A^{-1}B\\ 0 & E\end{bmatrix}}_{\text{unimoduláris}}$$

2) Legyen $|\underline{\underline{D}}| \neq 0$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} D^{-1} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} BD^{-1} \\ E \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} D^{-1}C & E \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} (A-BD^{-1}C) \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BD^{-1} & E \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A-BD^{-1}C \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E & BD^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix}}_{\text{unimoduláris}} \begin{bmatrix} \underbrace{A-BD^{-1}C}_{\underline{D}\text{-hez tartozó Schur-komplementum}} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ D^{-1}C & E \end{bmatrix}}_{\text{unimoduláris}}$$

Determináns:

Felhasználjuk, hogy szorzat determinánsa = determinánsok szorzata

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \underbrace{|A| \cdot |D - CA^{-1}B|}_{\text{ha } |A| \neq 0} = \underbrace{|D| \cdot |A - BD^{-1}C|}_{\text{ha } |D| \neq 0}$$

Speciális eset:

Egyetlen sorral és oszloppal szegélyezett $\underline{\underline{A}}$ mx. determinánsa

Ha $|\underline{\underline{A}}| \neq 0$ (nemsinguláris):

$$\begin{vmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{vmatrix} = |\underline{\underline{A}}| \cdot (d - \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}) = |\underline{\underline{A}}| d - \underline{c}^T \operatorname{adj}(\underline{\underline{A}}) \cdot \underline{b}$$

Ha $|\underline{\underline{A}}| = 0$ (singuláris): $\begin{vmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{vmatrix} = -\underline{c}^T \operatorname{adj}(\underline{\underline{A}}) \cdot \underline{b}$

Inverz:

A faktorizációból indulunk ki, és felhasználjuk, hogy a szorzat inverze a tényezők inverzének fordított sorrendű szorzata.

Az első faktorizáció első tényezője:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{N}}$$

$\underline{N}$ nilpotens mátrix (2 indexű, mert $\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{N}} = 0$)

Skalár azonosság:

$$(1+x)(1-x) = 1-x^2$$

Behelyettesítve:

$$(E+N)(E-N) = E - N^2 = E$$

$$(E+N)^{-1} = E - N \quad , \quad \text{tehát} \quad \begin{bmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}$$

Hasonlóan adódik a többi ilyen tényező inverze. A középső tényezők hiperdiagonális mátrixok, ezek inverze a főátló blokkjainak az invertálásával kapható.

$|A| \neq 0$ esetén

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$|D| \neq 0$ esetén

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

Woodbury tétele: r-edrangú mátrixszal módosított mátrix inverze

Legyen $\underline{\underline{A}}$ nemszinguláris n-edrendű mátrix, és legyen $\underline{\underline{M}}$ olyan n-edrendű, r-edrangú mátrix, amelynek egy minimális diadikus felbontása $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$.

Ha $|E - CA^{-1}B| \neq 0$, akkor az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{M}}$ mátrix nemszinguláris és inverze:

$$(A-M)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(E-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

Bizonyítás:

Az első állítás (nemszinguláris) a szimm. part. blokkmátrix determinánsa alapján látható be:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & E \end{vmatrix} = |A|\cdot|E-CA^{-1}B| = \underbrace{|E|}_{1}\cdot|A-B\underbrace{E^{-1}}_{E}C|$$

$$\underset{\neq 0}{|A|}\cdot\underset{\neq 0}{|E-CA^{-1}B|} \rightarrow \underbrace{|A-BC|}_{\neq 0} \neq 0 \quad \checkmark$$

Az inverz a blokkmátrix inverzének bal felső blokkja kétféle alakjának egyenlőségéből következik ($D=E$ helyettesítéssel):

$$(A-BC)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(E-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad \checkmark$$

Ennek speciális esete az egyetlen diáddal módosított mátrix inverze (Sherman–Morrison formula):

$$(\underline{\underline{A}} - \underline{u}\underline{v}^T)^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} + \frac{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{u}\,\underline{v}^T\underline{\underline{A}}^{-1}}{1-\underline{v}^T A^{-1}\underline{u}}$$

Inverz tovább:

Blokkmátrix ~~főminorának~~ főminormátrixának inverze a blokkmátrix inverzének ismeretében:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ S & T \end{bmatrix}$$

Vonjuk le a T blokk által generált hiperdiádot:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} S & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A blokkmátrix inverzének képletéből adódik a fenti eredmény.

Tehát: $$A^{-1} = P - QT^{-1}S$$ (T blokkhoz tartozó Schur-komplementum)

Hasonlóan: $$D^{-1} = T - SP^{-1}Q$$ (P blokkhoz tartozó Schur-komplementum)

Blokkmátrix főminora (főminormátrix determinánsa) a determináns és az inverz ~~fő~~ komplementer főminora ismeretében:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} P & Q \\ S & T \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^{-1}} = |P| \cdot |\underbrace{T - SP^{-1}Q}_{|D^{-1}|}| = |T| \cdot |\underbrace{P - QT^{-1}S}_{|A^{-1}|}|$$

$$\left.\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot |T| \\ |D| &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot |P| \end{aligned}\right\} \text{Jacobi}$$

Perszimmetrikusan particionált hipermátrixok

Perszimmetrikus: a mellékátló blokkjai kvadratikusak:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & p \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline D & C \end{array}\right] \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} q & p \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & E_{p} \\ \hline E_{q} & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

permutáló mátrix (jobbról szorozva oszlopokat cserél)

Felírható egy szimmetrikusan particionált blokk mátrix és egy permutáló mátrix szorzataként.

Az inverz:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} & E_q \\ \hline E_p & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline D & C \end{array}\right]^{-1} =$$

Inverz permutáló mátrix

$$= \left[\begin{array}{c|c} & E_q \\ \hline E_p & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \\ -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

balról szorozva sorokat rendez át

$$= \begin{bmatrix} -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1}DB & -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline S & T \end{array}\right] & \begin{array}{c} q \\ p \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} \\ & \begin{array}{cc} q & p \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline S & T \end{array}\right] & \begin{array}{c} q \\ p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \end{array}$$

komplementer perszimmetrikus particionálás

Mellékminormátrix inverze a blokkmátrix inverzének ismeretében:

$B^{-1} = ?$

Vonjuk le a Q blokk által generált hiperdiádot:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ S & T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ B^{-1}+\dots & \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix} (C-DB^{-1}A)\cdot\begin{bmatrix} -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} \dots & \dots (C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} P & Q \\ S & T \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát:

$$B^{-1} = S - TQ^{-1}P$$ (Q blokkhoz tartozó Schur-komplementum)

Hasonlóan:

$$C^{-1} = Q - PS^{-1}T$$ (S blokkhoz tartozó Schur-komplementum)

Determináns:

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} p\{ \\ q\{ \end{matrix} & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} \;q\; & \;p\; \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E_p \\ E_q & 0 \end{bmatrix}}_{\text{determinánsa: } (-1)^{pq}}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{pq}\cdot |B| \cdot |\underbrace{C - DB^{-1}A}_{|Q^{-1}|}| = (-1)^{pq}|C|\cdot|\underbrace{B - AC^{-1}D}_{|S^{-1}|}|$$

Inverz determinánsa:

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} q\{ \\ p\{ \end{matrix} & \begin{bmatrix} P & Q \\ S & T \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} \;p\; & \;q\; \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} Q & P \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_q \\ E_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ S & T \end{vmatrix} = (-1)^{pq}\cdot|Q|\cdot|\overbrace{S - TQ^{-1}P}^{|B^{-1}|}| = (-1)^{pq}|S|\cdot|\overbrace{Q - PS^{-1}T}^{|C^{-1}|}|$$

Mellékminor kifejezése a determináns és a komplementer mellékminor ismeretében:

$$|B| = (-1)^{pq} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot |Q|$$

$$|C| = (-1)^{pq} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot |S|$$