12. tétel

Lineáris diff. egyenletrendszerek

$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{f}(t)$ $\quad\underline{f}(t) \equiv 0$ homogén lin. diff. egy. rsz.

$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ $\quad\underline{f}(t) \not\equiv 0$ inhomogén — " —

$\underline{x}_0 = 0$ homogén kezdeti feltétel

$\underline{x}_0 \neq 0$ inhomogén kezdeti feltétel

Inhomogén diff. egyrsz. inhomogén kezdeti felt. megoldása
= homogén diff. e. inhomogén k. f. kielégítő megoldása
+ inhomogén diff. e. homogén k. f. kiel. megoldása

A homogén diff. egyrsz:

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ -nek ~~van~~ n db. lin független megoldása

Alaprendszer:

$$\underline{x}_1(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{x}_2(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots\ \underline{x}_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{X}}(t) = \left[\underline{x}_1(t)\ \ \underline{x}_2(t)\ \dots\ \underline{x}_n(t)\right]$ rezolvensmátrix

$\underline{\underline{X}}(t_0) = \underline{\underline{E}}$

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ általános megoldása: $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{c}$

Állandó együtthatómátrix esete:

$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{f}(t)$
$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

$$\underline{\underline{X}}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}$$

$$\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\underline{f}(\tau)\,d\tau$$

$\underline{\underline{A}}$ egyszerű struktúrájú: $L_k(\underline{\underline{A}})$ segítségével fejezhető ki $e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}$

$\underline{\underline{A}}$ nem egyszerű struktúrájú: $H_{k\nu}(\underline{\underline{A}})$ segítségével

Periodikus megoldás:

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{f}(t)$ és legyen $\underline{x}(t) = \underline{x}(t+p)$

(p a periódus)

Ekkor $\underline{\dot{x}}$ és $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ is periodikus.

A periodikus megoldás létezésének szükséges feltétele, hogy $\underline{f}(t) = \underline{f}(t+p)$

Megoldás $t+p$ helyen:

$$\underline{x}(\cancel{t+p}) = e^{\underline{\underline{A}}(t+p-t_0)}\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t+p} e^{\underline{\underline{A}}(t+p-\tau)}\underline{f}(\tau)\,d\tau = \underline{x}(t)$$

$$e^{\underline{\underline{A}}p}\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t+p-t_0)}\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t+p-\tau)}\cdot\underline{f}(\tau)\,d\tau$$

Vonjuk ki:

$$\left(\underline{\underline{E}} - e^{\underline{\underline{A}}p}\right)\underline{x}(t) = \int_{t}^{t+p} e^{\underline{\underline{A}}(t+p-\tau)}\underline{f}(\tau)\,d\tau \qquad \left[\underline{\underline{E}} - e^{\underline{\underline{A}}p} = -e^{+\underline{\underline{A}}p}\left(e^{-\underline{\underline{A}}p} - \underline{\underline{E}}\right)\right]$$

Szorozzuk balról $\left(\underline{\underline{E}} - e^{\underline{\underline{A}}p}\right)^{-1} = \left(e^{-\underline{\underline{A}}p} - \underline{\underline{E}}\right)^{-1} \cdot e^{-\underline{\underline{A}}p}$ -vel:

$$\underline{x}(t) = \left(e^{-\underline{\underline{A}}p} - \underline{\underline{E}}\right)^{-1} \int_t^{t+p} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \underline{f}(\tau)\, d\tau$$

Ez a megoldás, ami a köv. kezdeti feltételt elégíti ki:

$$\underline{x}(0) = \left(e^{-\underline{\underline{A}}p} - \underline{\underline{E}}\right)^{-1} \cdot \int_0^p e^{-\underline{\underline{A}}\tau} \underline{f}(\tau)\, d\tau$$

Magasabbrendű diff. egyenletek:

Visszavezethetők elsőrendű diff. egyenletrendszer megoldására

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = f(t)$$

y-tól $y^{(n-1)}$-ig van kezdeti feltétel

Legyen:

$$y = y_1 \qquad y' = y_2 \qquad y'' = y_3 \qquad \vdots \qquad y^{(n-1)} = y_n$$

$$\underline{y}' = \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = -p_{n-1} y_n - p_{n-2} y_{n-1} - \dots - p_1 y_2 - p_0 y_1 + f(t) \end{cases}$$

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{y} + \underline{f}(t)$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & & -p_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$