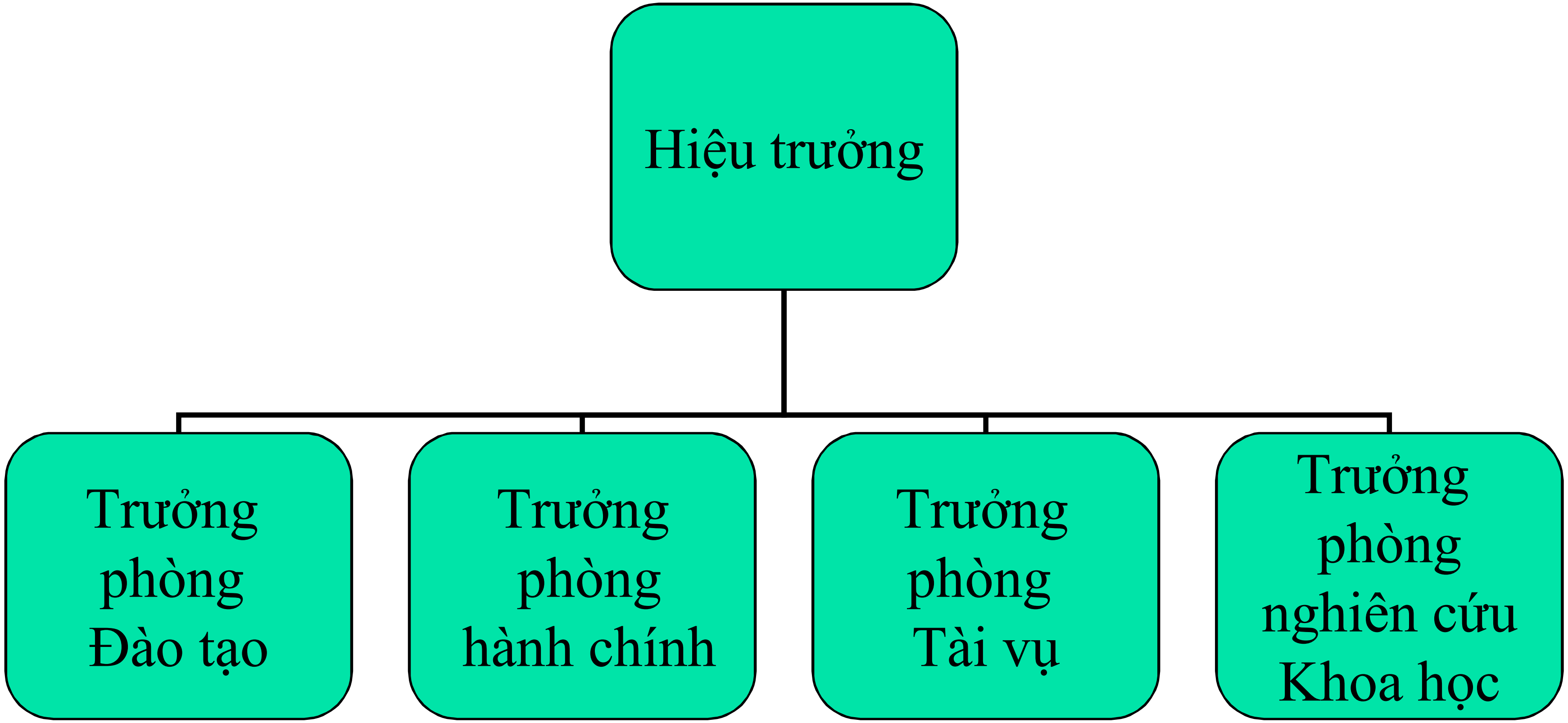
CHƯƠNG 3

KHÔNG GIAN VECTOR

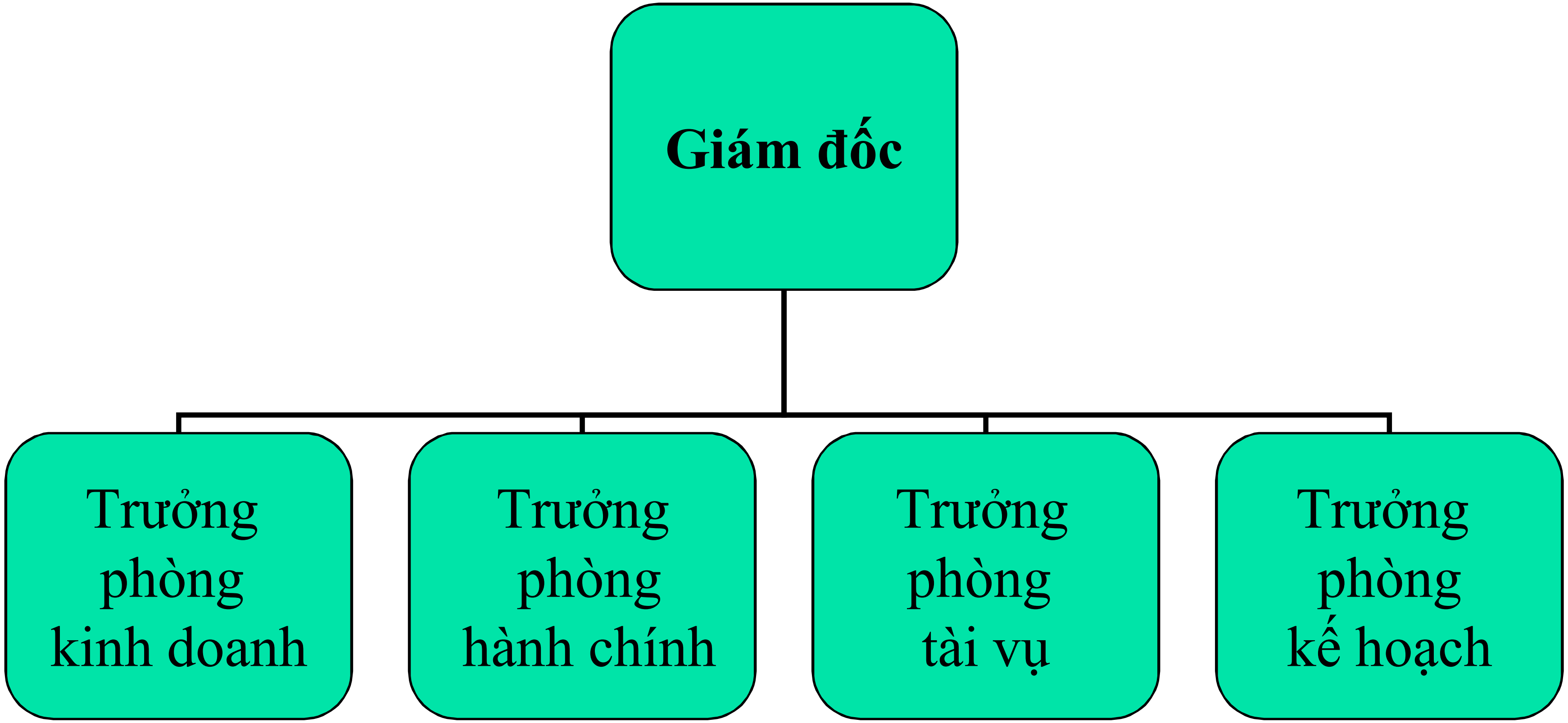
§1: Không gian vector

Cơ cấu tổ chức của trường đại học



§1 : Không gian vector

Cơ cấu tổ chức của công ty



§1 : Không gian vector

3.1.1 Mở đầu

- Xét $\mathbb{R}$ là tập các số thực:
  Ta biết trên $\mathbb{R}$ có 2 phép toán cộng và nhân thỏa mãn các tính chất sau:

i. $x + y = y + x$.

ii. $x + 0 = x$.

iii. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

v.v...

§ 1: Không gian vector

Đại Số Tuyến Tính

- Xét $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$.

  Ta biết trên $\mathbb{R}^2$ có 2 phép toán cộng và nhân vô hướng

  $$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

  $$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

  thỏa mãn các tính chất sau:

§ 1 : Không gian vector

i. $(x, y)+(x', y') = (x', y')+(x, y)$.

ii. $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$.

iii. $\lambda[(x, y) + (x', y')] = \lambda(x, y) + \lambda(x', y')$.

v.v...

§ 1 : Không gian vector

- Xét $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

  Ta biết trên $\mathbb{R}^3$ có 2 phép toán cộng và nhân vô hướng

  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

  $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

  thỏa mãn các tính chât sau:

§ 1 : Không gian vector

i. $(x, y, z)+(x', y', z') = (x', y', z')+(x, y, z).$

ii. $(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z).$

iii. $\lambda[(x, y, z)+(x', y', z')] = \lambda(x, y, z)+\lambda(x', y', z').$

v.v...

§ 1 : Không gian vector

- Xét M_{mn} là tập hợp các ma trân cấp mn. Ta biết trên M_{mn} có 2 phép toán cộng 2 ma trận và nhân một số với một ma trận thỏa mãn các tính chất sau:

  i. $A + B = B + A$.

  ii. $A + O = A$.

  iii. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

  v.v...

§ 1 : Không gian vector

- Xét $P_n[t] = \{x(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0\}$ là tập hợp các đa thức bậc nhỏ hơn $n+1$.

  Ta biết trên $P_n[t]$ có 2 phép toán cộng 2 đa thức và nhân một số với một đa thức thỏa mãn các tính chất sau:

§ 1 : Không gian vector

$$\text{i. } x(t)+y(t)=y(t)+x(t).$$

$$\text{ii. } x(t)+0(t)=x(t),\ 0(t)=0, \forall t.$$

$$\text{iii. } \lambda[x(t)+y(t)]=\lambda x(t)+\lambda y(t).$$

V.V...

§ 1 : Không gian vector

1.1. Khái niệm.

1.1.1. Định nghĩa.

Cho tập V khác rỗng và một trường số K, cùng hai phép toán:

- phép cộng: $"+" : V \times V \to V$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

- Phép nhân với vô hướng

$$"." : K \times V \to V$$

$$(k, v) \mapsto kv$$

§ 1 : Không gian vector

Bộ ba (V;+;.) gọi là một không gian vecto (KGVT) trên K hay một K-không gian vecto nếu thỏa mãn 8 tiên đề:

$$(1)\ u+v=v+u,\ \forall u,v\in V.$$

$$(2)\ (u+v)+w=u+(v+w),\ \forall u,v,w\in V.$$

$$(3)\ \exists\theta\in V:\ u+\theta=u,\ \forall u\in V.$$

$$(4)\ \forall u\in V, \exists -u\in V:\ u+(-u)=\theta.$$

§1: Không gian vector

(5) $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v,\ \forall u, v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

(6) $(\lambda+\mu)u = \lambda u+\mu u,\ \forall u \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u),\ \forall u \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$

(8) $1u = u,\ \forall u \in V.$

Khi đó, mỗi phần tử $v \in V$ được gọi là một vector, mỗi số thuộc $\lambda \in \mathbb{K}$ gọi là một vô hướng.

§1: Không gian vector

1.1.2. Ví dụ

VD1: Tập các số thực **R** là một **R** - không gian vecto với

- véc tơ không là số 0
- vecto đối của u là số đối (-u)

§1: Không gian vector

VD2. Tập $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

là không gian vector.

i. Vector không θ

ii. Vector đối của $u = (x, y)$

§1: Không gian vector

VD3. • Tập $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$; $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ là không gian vector.

i. Vector không θ là

ii. Vector đối của $u = (x, y, z)$

§1: Không gian vector

Tổng quát

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1;x_2;\ldots;x_n)/x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\right\}$$

với hai phép toán:

$$"+": (x_1;x_2;\ldots;x_n) + (y_1;y_2;\ldots;y_n)$$
$$= (x_1 + y_1;x_2 + y_2;\ldots;x_n + y_n)$$
$$".": k(x_1;x_2;\ldots;x_n) = (kx_1;kx_2;\ldots;kx_n)$$

là một **R**-kgvt với vecto không θ=(0;0;…;0) và vecto đối của v= $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ là $(-v)=(-x_1,- x_2,\ldots, -x_n)$

§1: Không gian vector

VD4. • Tập hợp các ma trận cấp mn : M_{mn} với 2 phép toán cộng 2 ma trận và nhân một số với một ma trận là không gian vector.

i. Vector không θ

ii. Vector đối của $u = A$

§1: Không gian vector

Đại Số Tuyến Tính

VD5 • Tập hợp các đa thức bậc nhỏ hơn $n+1$: $P_n[t]$ với 2 phép toán cộng 2 đa thức và nhân một số với một đa thức là không gian vector.

i. Vector không θ

ii. Vector đối của $u = x(t)$

§1: Không gian vector

VD6. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

Xét tập nghiệm của hệ AX=0:

$$V=\{X \in R^n \mid AX=0\}$$

Với phép toán cộng và nhân với vô hướng của R^n, ta có V là một không gian véctơ với vec tơ không là nghiệm tầm thường (0;0;…;0)

§1: Không gian vectơ

1.1.3. Một số tính chất đơn giản của không gian vectơ

Cho V là một K-kgvt. Khi đó ta luôn có

-Vectơ không θ là duy nhất.

-Vectơ đối (-v) của vectơ v là duy nhất.

- Ta có $\lambda v = \theta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ v = \theta \end{array}\right.$

§2: Không gian vectơ con

2.1. Không gian con.

a. Định nghĩa.

Cho không gian vectơ (V,+,.). Một tập con W khác rỗng của V gọi là không gian con của V nếu (W,+,.) là một không gian vectơ.

§2: Không gian vectơ con

b. Định lý. Tập con khác rỗng W của không gian vecto V là không gian con của V nếu W đóng kín đối với hai phép toán của V, tức là:

$$i)\quad \forall x, y \in W: \quad x + y \in W$$

$$ii)\quad \forall x \in W, \forall k \in K: \quad kx \in W$$

Chú ý: Các điều kiện (i) và (ii) tương đương với

$$\forall x, y \in W, \forall k, l \in K: \quad kx + ly \in W$$

§2: Không gian vectơ con

Để chứng minh một tập con W của không gian vecto V là không gian con của V ta cần chỉ ra:

(i) $W \neq \varnothing \quad (\theta \in W)$

(ii) W đóng kín đối với hai phép toán của V:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W: \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in W, \forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K}: \quad \boldsymbol{kx} \in W$$

Chú ý: -Mọi không gian con đều chứa vectơ không.

-Một kgvt V bất kì luôn có 2 không gian con tầm thường là $\{\theta\}$ và V.

§2: Không gian vectơ con

Ví dụ.

1. Tập $\boldsymbol{W} = \{(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$ là không gian vector con của $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy, rõ ràng $\theta = (0;0) \in W \Rightarrow W \neq \varnothing$

Mặt khác, $\forall \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a},0), \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b},0) \in W, \forall k \in \mathbb{R}$ ta có

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, 0) \in W$$

$$\boldsymbol{kx} = (\boldsymbol{ka}, 0) \in W$$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

§2: Không gian vectơ con

2. Tập

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$$

là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

§2: Không gian vectơ con

Thậy vậy, $\theta \in W, W \neq \varnothing$ và

với mọi $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in W$

ta có:

$$u + v = (x, y, z) + (x', y', z') \boxed{\in W}$$

§2: Không gian vectơ con

Xét $X - Y + 2Z = 0$

$$u + v \in W$$

§2: Không gian vectơ con

$$\lambda u = \lambda(x, y, z) \boxed{\in W}$$

$$= 0$$

$$\lambda u \in W$$

§2: Không gian vectơ con

3. Tập nghiệm của hệ AX=0 là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh.

§2: Không gian vectơ con

- **Bài Tập:** Kiểm tra các tập sau đây có là không gian vectơ con của các không gian vectơ tương ứng không?

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x - y + 3z = 0\}$$

$$W = \{(x, y) \in R^2 / x - 2y = 1\}$$

$$M = \{x(t) = at^2 + bt + c \in P_2[t] / a - b + c = 0\}$$

$$N = \{A \in M_n \mid A^t = A\}$$

§2: Không gian vectơ con

2.2. Tổ hợp tuyến tính-Hệ sinh.

a. **Định nghĩa** Cho hệ vectơ S={v_1, v_2,…,v_n} trong không gian vectơ V. Vectơ

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

với $c_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}$ gọi là một tổ hợp tuyến tính của S.

Khi đó, ta nói *v* được biểu diễn tuyến tính qua $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

§2: Không gian vectơ con

VD1: Cho $\boldsymbol{x}_1 = (1;-2), \boldsymbol{x}_2 = (3;1), \boldsymbol{x} = (5;-3)$

Ta có 2.(1;-2)+(3;1)=(5;-3)

hay $2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$

Vậy x là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{x_1, \boldsymbol{x}_2\}$ hay x được biểu diễn tuyến tính qua $x_1, \boldsymbol{x}_2$.

§2:Không gian vectơ con

Ví dụ. Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$, xét 3 vector $x_1 = (-1, 0), x_2 = (0, -1)$, $x_3 = (1, 1)$. Khi đó:

$$2(-1,0)+2(0,-1)+2(1,1) = (0,0)$$

$$3(-1,0)+3(0,-1)+3(1,1) = (0,0)$$

§2: Không gian vectơ con

Vậy vector không θ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\{x_1, x_2, x_3\}$ bằng hai cách sau:

$$\theta = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$

$$\theta = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3.$$

§2: Không gian vectơ con

Nhận xét:

(1) Cách biểu diễn $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ nói chung không duy nhất.

(2) Vector không θ thì biểu thị tuyến tính được qua mọi hệ vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§2: Không gian vectơ con

b. Định nghĩa. Cho hệ vectơ $S=\{v_1, v_2,\dots, v_m\}$ trong không gian vectơ V. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S gọi là bao tuyến tính của hệ S, kí hiệu là span(S) hoặc

$$\text{span}(v_1, v_2,\dots, v_m)$$

c. **Định lý.** $W= \text{span}(v_1, v_2,\dots, v_m)$ là một không gian con của không gian vectơ V. Hơn nữa, nó là không gian con nhỏ nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa $\{v_1, v_2,\dots, v_m\}$.

Chứng minh:

§2: Không gian vectơ con

d. Hệ sinh

- Hệ vectơ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ gọi là hệ sinh của không gian V nếu

$$\forall x \in V : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

tức là $$V = span(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Khi đó, ta cũng nói là V được sinh bởi

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

§2: Không gian vectơ con

Ví dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$, cho hệ vector $\boldsymbol{E} = \{e_1 = (1,0); e_2 = (0,1)\}$.

Khi đó, hệ vector $\boldsymbol{E}$ là hệ sinh của không gian vector $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Khi đó,

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(1;0) + \boldsymbol{b}(0;1) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{b}.\boldsymbol{e}_2$$

Đại Số Tuyến Tính

§2: Không gian vectơ con

Ví dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$, cho hệ vector

$$E' = \{e_1 = (1,0); e_2 = (0,1); e_3 = (2,5)\}$$

Khi đó, hệ vector E' là hệ sinh của không gian vector $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy, $\forall x \in \mathbb{R}^2, x = (a,b)$

Khi đó,

$$x = (a;b) = a(1;0) + b(0;1) + 0.(2;5)$$

§2: Không gian vectơ con

Ví dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$, cho hệ vector $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0); \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)\}$.

Khi đó, hệ vector $\boldsymbol{E}$ là hệ sinh của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

Thật vậy, $\forall x \in \mathbb{R}^3, x = (a, b, c)$

Khi đó,

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (a,b,c)$$

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = x$$