

CHƯƠNG 4

ÁNH XA TUYẾN TÍNH

§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1 Định nghĩa.

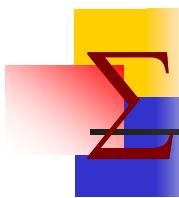
a. **Định nghĩa.** Cho V và W là 2 KGVT trên trường K . Ánh xạ $f: V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính nếu thỏa mãn 2 tính chất:

$$(i) \quad f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$(ii) \quad f(ku) = kf(u)$$

với $\forall u, v \in V, \forall k \in K$

+ Ánh xạ tuyến tính $f: V \rightarrow V$ gọi là *toán tử tuyến tính* hay *phép biến đổi tuyến tính* trên V .



§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH



NX: Ta có thể gộp (i) và (ii) thành

$$(iii) \quad f(ku + lv) = kf(u) + lf(v)$$

với $\forall u, v \in V, \forall k, l \in K$

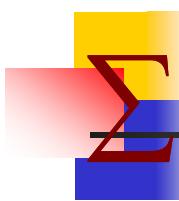
b. Các ví dụ.

VD1. Ánh xạ không $f : V \rightarrow W, f(v) = \theta_W, \forall v \in V$ là ánh xạ tuyến tính.

VD2. Ánh xạ đồng nhất $Id_V : V \rightarrow V$

$$v \mapsto Id_V(v) = v$$

là một toán tử tuyến tính.



§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH



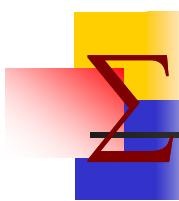
VD3. Ánh xạ đạo hàm $D : P_n[x] \rightarrow P_{n-1}[x]$

$$p \mapsto D(p) = p'$$

là ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, với $\forall f, g \in P_n[x]$, $k, l \in \mathbb{R}$ ta có

$$D(k \cdot f + l \cdot g) = (k \cdot f + l \cdot g)' = k \cdot f' + l \cdot g' = kD(f) + lD(g)$$



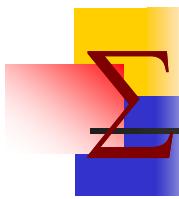
§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH



VD4. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$$

là ánh xạ tuyến tính.



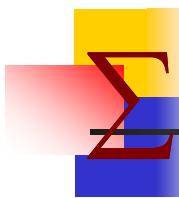
§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH



Thật vậy, với $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\&= ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2), (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)) \\&= ((x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2), (x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)) \\&= (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3) + (y_1 + 2y_2, y_2 - y_3) \\&= f(x) + f(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(kx) &= f(kx_1, kx_2, kx_3) = (kx_1 + 2kx_2, kx_2 - kx_3) \\&= (k(x_1 + 2x_2), k(x_2 - x_3)) = k(x_1 + 2x_2, x_2 - x_3) \\&= kf(x)\end{aligned}$$



§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH



VD5. Với A là một ma trận cỡ $m \times n$ bất kì, ánh xạ

$$f : M_{n \times p}(K) \rightarrow M_{m \times p}(K)$$

$$X \mapsto AX$$

là ánh xạ tuyến tính.

§1: KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Đại Số Tuyến Tính

1.2. Các phép toán

a. ĐL1. Cho các ánh xạ tuyến tính $f, g: V \rightarrow W$. Khi đó, các ánh xạ $\psi, \varphi: V \rightarrow W$ xác định bởi

$$\psi(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\varphi(x) = (kf)(x) = k \cdot f(x) \quad , k \in K, x \in V.$$

cũng là ánh xạ tuyến tính.

b. ĐL2. Cho các ánh xạ tuyến tính giữa các K-kgvt $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$. Khi đó, các ánh xạ $h: V \rightarrow U$, $h(x) = g(f(x))$ hợp thành của f và g cũng là ánh xạ tuyến tính.

§1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Đại Số Tuyến Tính

1.3 Đơn cầu - toàn cầu - đẳng cầu.

a. **Định nghĩa.** Ánh xạ tuyến tính $f: V \rightarrow W$ gọi là đơn cầu (toàn cầu, đẳng cầu) nếu f là đơn ánh (toàn ánh, song ánh).

Trường hợp f là đẳng cầu, ta nói V và W là đẳng cầu với nhau, kí hiệu: $V \cong W$

b. **Định lý.** Mọi không gian vectơ n chiều trên trường K đều đẳng cầu với K^n .

§1. Ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

1.4 Hạt nhân-Ánh-Hàng của ánh xạ tuyến tính.

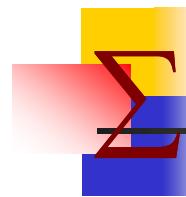
Đn1. Cho ánh xạ tuyến tính $f:V \rightarrow W$ giữa các không gian vecto.

- Hạt nhân của f , kí hiệu là $\text{Ker}(f)$ xác định bởi

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = \theta_W\} = f^{-1}(\{\theta_W\})$$

- Ánh của f , kí hiệu $\text{Im}(f)$ xác định bởi

$$\text{Im}(f) = \{f(u) | u \in V\} = f(V)$$



§1: Ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

Mđ 1. $\text{Ker}(f)$ là không gian con của V
 $\text{Im}(f)$ là không gian con của W .

c/m:....

Đn2: *Hạng của ánh xạ tuyến tính f , kí hiệu $r(f)$ hay $\text{rank}(f)$, là số chiều của $\text{Im}(f)$*

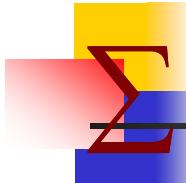
$$r(f) = \dim \text{Im}(f)$$

Mđ 2. Nếu $f: V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính và $V = \text{span}(S)$ thì $f(V) = \text{span}(f(S))$.

c/m:

Đại Số Tuyến Tính

§1: Ánh xạ tuyến tính



Mđ 3. Axtt $f: V \rightarrow W$ là đơn cấu khi và chỉ khi $\text{Ker}(f) = \{\theta\}$

c/m:

Mđ 4. Nếu $f: V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính và $\dim V = n$ thì

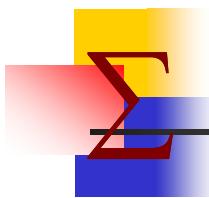
$$\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim V = n$$

c/m:

Hq. Hai không gian hữu hạn chiều trên trường K đẳng cấu khi và chỉ khi số chiều của chúng bằng nhau

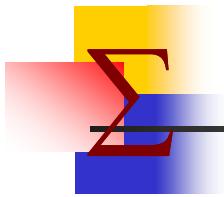


§1: Ánh xạ tuyến tính



VD 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_3)$

- Chứng minh f là toán tử tuyến tính.
- Tìm số chiều và một cơ sở của $\text{Im}(f)$ và $\text{Ker}(f)$



Đại Số Tuyến Tính

§2: MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

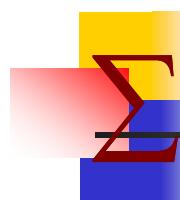
§2: MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

2.1 Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính giữa các không gian vec tơ hữu hạn chiều $f: V \rightarrow W$. G/s $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ và $B_W = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ lần lượt là cơ sở của V và W ($\dim V = m$, $\dim W = n$).

Ma trận A có cột j là ma trận tọa độ của vectơ $f(v_j)$ đối với cơ sở B_W gọi là ma trận của ánh xạ f đối với cặp cơ sở B_V và B_W :

$$A = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_{B_W} & [f(v_2)]_{B_W} & \dots & [f(v_m)]_{B_W} \end{bmatrix}$$



§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

NX: i) A là ma trận cỡ $n \times m$.

$$\text{ii)} [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]A = [f(v_1) \quad f(v_2) \quad \dots \quad f(v_m)]$$

MĐ 1.

$$r(A) = r(f) = \dim \text{Im}(f)$$

§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính



VD1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$$

- a) Tìm mtr của f đối với cặp cơ sở chính tắc.
- b) Tìm mtr của f đối với cặp cơ sở $B = \{v_1 = (1; 0; 0), v_2 = (1; 1; 2), v_3 = (1; 2; 3)\}$ và $B' = \{u_1 = (1; 0), u_2 = (1; 1)\}$

VD2. Tìm ma trận của ánh xạ $D: P_3[x] \rightarrow P_2[x]$,
 $D(p) = p'$ đối với cặp cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ và $E' = \{1, x, x^2\}$

§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính



VD 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_3[x] \rightarrow P_2[x]$
có ma trận đối với cặp cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Xác định $f(ax + bx^2 + cx^3)$
- Xác định cơ sở và số chiều của $\text{Im}(f)$ và $\text{Ker } f$

§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính



2.2 Công thức tọa độ.

Cho $f: V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận A đối với cặp cơ sở B_V và B_W . Khi đó, với mọi vecto $u \in V$, ta có

$$[f(u)]_{B_W} = A[u]_{B_V}$$

VD1. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2[x]$

Xác định $f(v)$ với $v=(1;2;3)$ biết f có ma trận đối với cặp cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

VD2. (Đề 1 Hè 2009)

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa mãn:

$$f(1;2;0) = (-1;4;7), f(0;1;2) = (-1;3;7), f(1;1;1) = (0;4;6)$$

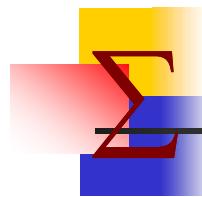
a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3

b) Tìm vecto $v \in \mathbb{R}^3$ sao cho $f(v) = (-1;7;13)$

VD3. (Đề 2 Hè 2009)

Tương tự VD2 với

$$f(1;2;0) = (1;5;5), f(0;1;2) = (1;4;5), f(1;1;1) = (0;4;6)$$

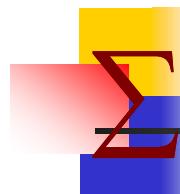


§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

Nhân xét.

Cho B_V và B_W tương ứng là cơ sở của các kgvt V và W, $\dim V=n$, $\dim W=m$. Khi đó, ta có tương ứng 1-1 giữa mỗi ánh xạ tuyến tính $f: V \rightarrow W$ với tập các ma trận cỡ $m \times n$.



§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

2.1.3. Ma trận của ánh xạ tổng và ánh xạ tích

ĐL1: Nếu $f, g: V \rightarrow W$ là các ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cặp cơ sở B_V và B_W lần lượt là A và B thì ma trận của các ánh xạ $f+g$ và λf đối với cặp cơ sở B_V và B_W tương ứng là: $A+B$ và λA .

ĐL2. Nếu $f: V \rightarrow W$, $g: W \rightarrow U$ là các ánh xạ tuyến tính, f có ma trận A đối với cặp cơ sở B_V và B_W và g có ma trận B đối với cặp cơ sở B_W và B_U thì ma trận của các ánh xạ $g \circ f$ đối với cặp cơ sở B_V và B_U là BA .

§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

2.4 Ma trận của toán tử tuyến tính theo một cơ sở.

2.4.1. Đ/n. Cho toán tử tuyến tính $f: V \rightarrow V$ trên không gian n chiều V và B là một cơ sở của V. Ma trận của f đối với cặp cơ sở B, B gọi là ma trận của toán tử f đối với cơ sở B.

NX. Nếu $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và A là ma trận của f đối với cơ sở B thì

$$[f(v_1) \quad f(v_2) \quad \cdots \quad f(v_n)] = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]A$$

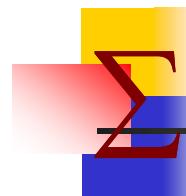
§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính



2.4.2 Mệnh đề. Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian véc tơ V . $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $\alpha' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là 2 cơ sở của V . G/s mtr chuyển cơ sở từ α sang α' là C , mtr của f đối với cơ sở α và α' lần lượt là A và B . Khi đó

$$B = C^{-1}AC$$

C/m:....



§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

VD1. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác bởi
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 - x_3, x_2 - 2x_3)$

- a) Tìm mtr của f đối với cơ sở chính tắc
- b) Tìm mtr của f đ/v $B = \{(1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 1; 1)\}$

VD2. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ có ma
 trận A đối với cơ sở $B = \{(1; 1; 1), (1; 1; 2), (1; 2; 3)\}$

Tính $f(6; 9; 14)$ biết

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

§2: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

2.4.3 Đ/n. Hai ma trận A và B gọi là đồng dạng, kí hiệu là $A \sim B$, nếu tồn tại ma trận khả nghịch C sao cho $B = C^{-1}AC$.

NX:

- (i) Các ma trận của một toán tử tuyến tính f trên không gian vectơ V theo hai cơ sở của V đồng dạng với nhau.
- (ii) Quan hệ đồng dạng của hai ma trận là quan hệ tương đương.
- (iii) A và B đồng dạng thì $\det A = \det B$



Một số đề thi

Bài 1. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f(1+x+x^2) = 3+5x+3x^2, f(2+x^2) = 10+8x^2,$$

$$f(2-x+3x^2) = 2-5x+4x^2$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

(Đề 1_K52)

Một số đề thi

Bài 2. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_5[x]$ xác định bởi $f(p(x)) = x^2 p(x) + p'(x)$

a) Tìm ma trận của f đối với các cơ sở cơ sở $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ và cơ sở chính tắc E của $P_5[x]$, trong đó

$$p_1 = 1 + x^3, p_2 = 2 + 3x^2 + x^3, p_3 = 3x - x^2, p_4 = 1 + x$$

b) Tìm $f(7 + 3x)$

(Đề 1-8/2010)

Bài 2'. Tương tự bài 2, với $f : P_2[x] \rightarrow P_5[x]$,

$$f(p(x)) = x^3 p(x) + p'(x)$$

$B = \{p_1, p_2, p_3\}$ với $p_1 = 1 + x^2, p_2 = 1 + 2x + 3x^2, p_3 = 3 + 5x$

(Đề 2-8/2010)

Đại Số Tuyến Tính

Một số đề thi

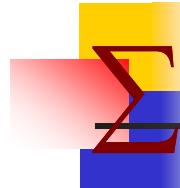
Bài 3. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ có ma trận theo cơ sở $B = \{1+x, 1-x, x^2\}$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & m \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Xác định một cơ sở và số chiều của Kerf theo m .

(Đề 1_K53)

Một số đề thi



Bài 4. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(a + bx + cx^2) = (a + 2b - 4c) + (2a + 3b - 7c)x + (3a + b - 7c)x^2$$

- a) Tìm ma trận A của f đối với cơ sở $\{1; x; x^2\}$. f có là toàn ánh không?
- b) G/S $u = 1 + mx + (m+3)x^2$. Xác định m để $u \in Im f$

Đ/s: m=5/2

(Đề 3_K56)

Bài 4'. Tương tự bài 4, với

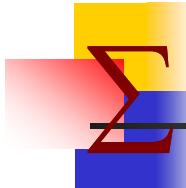
$$f(a + bx + cx^2) = (a - 2b + 3c) + (3a - 5b + 4c)x + (-2a + b + 9c)x^2$$

$$u = 1 + mx + (3m + 7)x^2$$

(Đề 4_K56)

Đ/s: m=0

Một số đề thi



Bài 5. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(2+x) = 4 + 11x + 2x^2; f(1+x+x^2) = 4 + 10x + (a+3)x^2;$$

$$f(1+x^2) = 2 + 5x + (a-1)x^2$$

- Tìm ma trận A của f đối với cơ sở $\{1; x; x^2\}$.
- G/s $u = 3 + 8x + bx^2$. Xác định a, b để $u \in Im f$

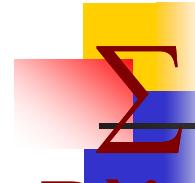
D/s: $a \neq 5$ hoặc $(a, b) = (5; 3)$ (Đề 1-K55)

Bài 5'. Tương tự bài 5, với

$$f(x-1) = 2 - 7x + 5x^2; f(1-x+x^2) = 10x + (a-5)x^2;$$

$$f(x+x^2) = 5 - 8x + (a+8)x^2; u = 1 - 2x + bx^2$$

D/s: $a \neq -5$ hoặc $(a, b) = (-5; 1)$ (Đề 2-K55)



Một số đề thi



Bài 6. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ có ma trận theo cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^4 là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1/ Xác định số chiều của $\text{Im}(f)$. Tìm một cơ sở của $\text{Ker}(f)$.

2/ Cho $v_1 = (2; 0; 2; 1), v_2 = (3; 2; 1; 0), v_3 = (-1; -2; 1; 1)$
 Đặt $W = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. Xác định số chiều và một cơ sở của W và $f(W)$. (Đề 1_K51)

Đại Số Tuyến Tính

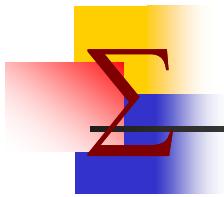
Một số đề thi

Bài 7. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ có ma trận theo cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^4 là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

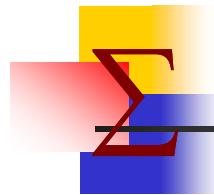
1/ Xác định số chiều của $\text{Im}(f)$. Tìm một cơ sở của $\text{Ker}(f)$.

2/ Cho $v_1 = (0; 1; 0; -1), v_2 = (1; 1; 1; 1), v_3 = (2; 0; 1; 0)$
Đặt $W = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. Xác định số chiều và một cơ sở của W và $f(W)$. (Đề 2-K51)



Đại Số Tuyến Tính

§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG CỦA MỘT TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH



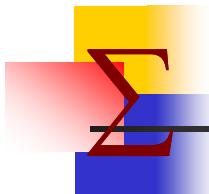
§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

3.1. Trị riêng và vectơ riêng

3.1.1 Đ/n1. Cho f là một toán tử tuyến tính trên kgvt V . Không gian con $V' \subset V$ được gọi là ***kg con bất biến*** đối với toán tử f nếu $f(V') \subset V'$

VD1. Với một toán tử tuyến tính bất kì f trên kgvt V bao giờ cũng có hai kg con bất biến là V và $\{\theta\}$.

§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG



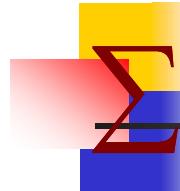
3.1.2 Đ/n2. Cho f là một toán tử tuyến tính trên kgvt V trên trường K . Phần tử $\lambda \in K$ gọi là (giá) **trị riêng** của f nếu tồn tại vec tơ $x \in V$ ($x \neq \theta$) sao cho $f(x) = \lambda x$. Khi đó, x gọi là **vec tơ riêng** của f ứng với trị riêng λ .

VD2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$

Khi đó $\lambda = 2$ là một trị riêng của f vì với $x = (1; -1)$, ta có $f(x) = f(1; -1) = (2; -2) = 2(x_1, x_2)$

§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

Đại Số Tuyến Tính

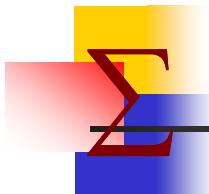


Mđ1. Cho f là một toán tử tuyến tính trên kgvt V . Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương

- (i) λ là trị riêng của f
- (ii) $(f - \lambda \cdot \text{Id}_V)$ không là đơn ánh trong đó Id_V là ánh xạ đồng nhất trên V . (c/m:...)

ĐL 1. Các vec tơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau đôi một của một toán tử tuyến tính là độc lập tuyến tính.

§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

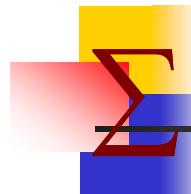


Mđ 2. Cho f là một toán tử tuyến tính f trên K -kgvt V .

Khi đó, với mọi $\lambda \in K$, tập $V_\lambda = \{v | f(v) = \lambda v\}$ là một kg con bất biến của f và không gian này khác $\{\theta\}$ khi và chỉ khi λ là một trị riêng của f . (C/m:...)

NX: Nếu λ là một trị riêng của f thì V_λ là tập tất cả các vec tơ riêng của f ứng với λ và vecto không.

Đ/n3. Nếu λ là một trị riêng của f thì V_λ ($V_\lambda(f)$) gọi là *không gian riêng* ứng với giá trị riêng λ .



§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

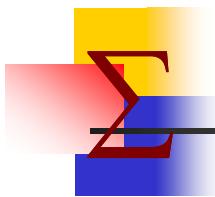
Đại Số Tuyến Tính

3.2. Bài toán tìm trị riêng và vecto riêng của toán tử tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều.

3.2.1. Phương trình đặc trưng.

Cho f là một toán tử tuyến tính trên kgvt n chiều V và có mtr A đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Gọi v là một vec tơ riêng ứng với trị riêng λ và tọa độ của v đối với B là $(v)_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Khi đó, ta có $[f(v)]_B = A[v]_B$ và $f(v) = \lambda v$.



§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

Đại Số Tuyến Tính

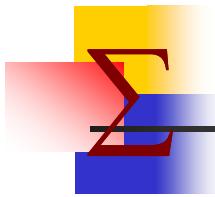
Ta có

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\Leftrightarrow [\lambda v]_B = A[v]_B \\ &\Leftrightarrow A[v]_B - [\lambda v]_B = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)[v]_B = 0 \end{aligned}$$

Vì $[v]_B \neq 0$ nên $\det(A - \lambda E) = 0$.

Đ/n 1: Cho ma trận A vuông cấp n và λ là một số. Nếu tồn vec tơ cột $x \neq 0$ sao cho $(A - \lambda E)x = 0$ thì λ gọi là trị riêng của A và x gọi là vec tơ riêng của A .

Rõ ràng, λ là trị riêng của $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.



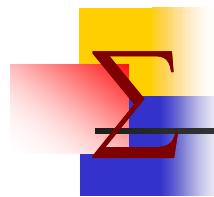
§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

Đại Số Tuyến Tính

NX. Nếu λ là trị riêng, v là vec tơ riêng của của f khi và chỉ khi λ là trị riêng, $[v]_B$ là vec tơ riêng của của A và ngược lại.

Đ/n2. Đa thức $\det(A - \lambda E)$ (bậc n đối với biến λ) gọi là đa thức đặc trưng của f và cũng gọi là đa thức đặc trưng của A .

NX: Nghiệm của đa thức đặc trưng là các trị riêng của f và ngược lại.



§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

Đại Số Tuyến Tính

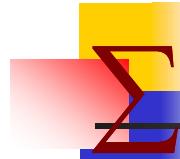
Định lí. Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của V .

(c/m:...)

NX. Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

Đại Số Tuyến Tính



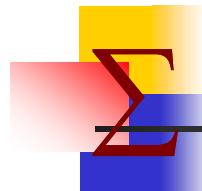
3.2.2 Thuật toán tìm trị riêng và vec tơ riêng của toán tử tuyến tính.

B1: Tìm mtr A của f đ/v một cơ sở nào đó của V. (thông thường ta chọn cơ sở chính tắc)

B2. Tìm đa thức đặc trưng của f: $\det(A - \lambda E)$.

B3. Giải pt $\det(A - \lambda E) = 0$. Nghiệm của pt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các trị riêng của f.

B4. Với mỗi trị riêng λ_i , giải hệ $(A - \lambda_i E)x = 0$. Nghiệm khác không của hệ là tọa độ các vec tơ riêng ứng với trị riêng λ_i .



§3: TRỊ RIÊNG VÀ VECTO RIÊNG

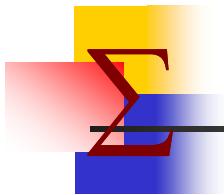
Đại Số Tuyến Tính

VD1. Tìm trị riêng và vec tơ riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (6x_1 + 4x_2; -3x_1 - x_2)$$

VD2. Tìm trị riêng và vectơ riêng của toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ xác định bởi

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - \\ &\quad -(a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2 \end{aligned}$$



Đại Số Tuyến Tính

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

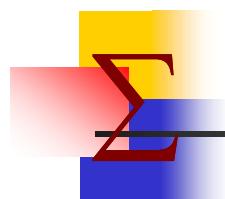
4.1 Ma trận chéo hóa được.

4.1.1. Đ/n. Ma trận đồng dạng với ma trận chéo được gọi là ma trận chéo hóa được.

Với A là một ma trận vuông cho trước, quá trình làm chéo hóa A là quá trình tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo. Khi đó, mtr T gọi là ma trận làm chéo hóa A.

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬM

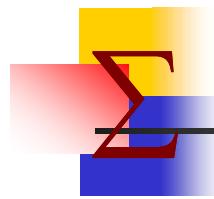
Đại Số Tuyến Tính



VD.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow T A T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

A là mtr chéo hóa được và T là mtr làm chéo hóa A



§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

Đại Số Tuyến Tính



?1. Tiêu chuẩn để một ma trận chéo hóa được?

?2. Nếu A chéo hóa được, hãy tìm ma trận T làm chéo hóa A.

?3. Ma trận T có duy nhất không?

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN



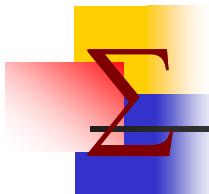
4.1.2. Tiêu chuẩn để một ma trận chéo hóa được.

ĐL Điều kiện cần và đủ để một ma trận chéo hóa được là ma trận đó có đủ n vec tơ riêng độc lập tuyến tính.

C/m:...

Hq Nếu ma trận A có n trị riêng phân biệt thì nó chéo hóa được

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

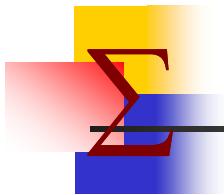


4.2. Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Giải pt đặc trưng $\det(A - \lambda E) = 0$. Nếu pt có đủ n nghiệm và g/s trong tập đó chỉ có k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2. Giải các hệ pt $(A - \lambda_i E)X = 0$ ($i=1,2,\dots,k$). Nếu không tìm đủ n nghiệm độc lập tuyến tính thi A không chéo hóa được. Trong trường hợp tìm được đủ n nghiệm độc lập tuyến tính u_1, u_2, \dots, u_n thì ta thực hiện bước 3.

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

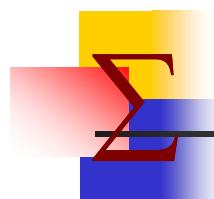


Bước 3. Lập ma trận T có các cột là u_1, u_2, \dots, u_n và T chính là ma trận làm chéo hóa A .

Bước 4. Ma trận $T^{-1}AT$ là ma trận chéo có các phần tử chéo là các trị riêng tương ứng với các vec tơ riêng u_1, u_2, \dots, u_n

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

Đại Số Tuyến Tính



VD. Đưa ma trận A về dạng chéo.

$$a) \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

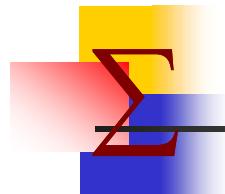
$$b) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

4.3. Bài toán tìm cơ sở để ma trận của một toán tử tuyến tính là ma trận chéo.

Cho toán tử tuyến tính $f: V \rightarrow V$.
Hãy tìm một cơ sở B của V để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

§4: BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN



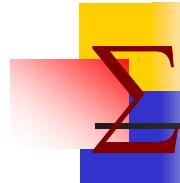
Bước 1. Chọn một cơ sở E tùy ý của V (thường là cơ sở chính tắc nếu có). Tìm ma trận A của f đối với E .

Bước 2. Chéo hóa ma trận A . Nếu A không chéo hóa được thì không tồn tại cơ sở B thỏa mãn điều kiện đầu bài. Nếu A chéo hóa được chuyển sang bước 3.

Bước 3. G/s T là ma trận làm chéo hóa A . Xét cơ sở B của V sao cho T là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B . Khi đó, ma trận của f đối với cơ sở B là $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Đại Số Tuyên Tính

MỘT SỐ ĐỀ THI



VD1.

Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & a \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
 đối với cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$ và

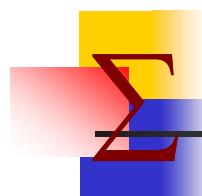
$$u = -4 + 3x + 3x^2; v = -7 + 6x + 3x^2$$

- Tìm $f(u), f(v)$. Xác định a để hệ $\{f(u); f(v)\}$ phụ thuộc tuyến tính.
- Với $a=0$, tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

(Câu III-Đề III-K55)

Đại Số Tuyến Tính

MỘT SỐ ĐỀ THI



VD2. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ có ma trận

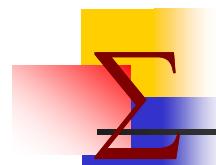
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
 đối với cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$ và

$$u = -6 - 2x + 3x^2; v = -5 - 2x + 3x^2$$

- Tìm $f(u), f(v)$. Xác định a để hệ $\{f(u); f(v)\}$ phụ thuộc tuyến tính.
- Với $a=0$, tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

(Câu III-Đề IV-K55)

MỘT SỐ ĐỀ THI



VD3. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & m \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

đối với cơ sở $B = \{1+x, 1-x, x^2\}$

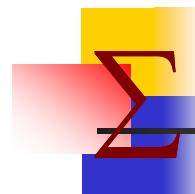
- a) Xác định một cơ sở và số chiều của $\text{Ker}(f)$ theo m .
- b) Khi $m=1$, tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng đường chéo. Tìm ma trận đồng dạng với A^n

(Đề I-K53)

VD3'. Tương tự VD3 với

$$B = \{1; 1-x; (1-x)^2\} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix} \quad m = 2$$

(Đề II-K53)



Một số đề thi

Đại Số Tuyến Tính

VD4. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(1 + x + x^2) = 3 + 5x + 3x^2; f(2 + x^2) = 10 + 8x^2;$$

$$f(2 - x + 3x^2) = 2 - 5x + 4x^2$$

- Tìm ma trận A của f đối với cơ sở $\{1; x; x^2\}$.
- Tìm cơ sở của $P_2[x]$ để với cơ sở đó ma trận của f có dạng chéo. Xác định dạng chéo đó.

(Đề 1-K52)

VD4'. Tương tự VD4 với

$$f(1 + 2x + x^2) = 2 + 4x + 5x^2; f(2 + x^2) = 4 + x;$$

$$f(x - 3x^2) = 5x + 9x^2$$

(Đề 2-K52)