

BÀI 5

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYỀN TỐ

$$\begin{array}{l} 3x + 3y = 9 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ x - z = 1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 / 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 3 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{-3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \boxed{\text{No solution}}$$

Σ §5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

5.1 Dạng tổng quát và dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính.

5.1.1. **Định nghĩa:** Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} (*)$$

trong đó a_{ij} là hệ số của pt thứ i của ẩn x_j , b_i là hệ số tự do của phương trình thứ i, x_j là các ẩn số ($i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$).

§5: Hệ phương trình tuyến tính



- Nếu $b_i = 0$ với mọi $i=1,2,\dots,m$ thì hệ được gọi là hệ tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

→ Hệ 4 phương trình 4 ẩn

→ Là hệ không thuần nhất

§5: Hệ phương trình tuyến tính



+ Ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình (*).

$$+ \text{Ma trận } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$+ \text{Ma trận } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

§5: Hệ phương trình tuyến tính

- Ví dụ: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Ma trận bổ sung của hệ (*):

$$A^{bs} = \bar{A} = [A \mid b]$$

- Ví dụ:** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow A^{bs} = \bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -7 & 9 \end{array} \right]$$

Nhận xét: Các hệ số của phương trình thứ i là các phần tử ở hàng thứ i của A^{bs} và ngược lại.

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

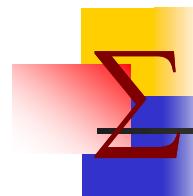
Với các kí hiệu đó, hệ (*) được đưa về dạng

$$Ax = b \quad (**)$$

gọi là dạng ma trận của hệ (*).

■ Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 9 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 5x + 9y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$



§5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

5.2. Hệ Cramer

Định nghĩa: Hệ phương trình tuyến tính n pt, n
ẩn số mà ma trận hệ số không suy biến được
gọi là hệ Cramer

Ví dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \det A = 2 \neq 0.$$

Do đó hệ trên là một hệ Cramer.

Đại Số Tuyến Tính

5.2 Hệ Cramé

Định lý: Mọi hệ Cramer n pt đều có nghiệm duy nhất (x_1, x_2, \dots, x_n) được xác định bởi công thức

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

trong đó D là định thức của ma trận hệ số của hệ, D_j là định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ j bởi cột tự do, $j = \overline{1, n}$.

Đại Số Tuyển Tính

5.2 Hệ Cramé

Chứng minh. Cho hệ Cramer n phương trình, n ẩn số với ma trận hệ số là A , cột tự do B . Khi đó hệ có dạng ma trận là

$$AX = B \quad (2.5)$$

Vì A không suy biến nên $D = \det A \neq 0$ và A khả nghịch

Lúc đó ta có

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$.

Đại Số Tuyến Tính

5.2 Hệ Cramé

Ví dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \det A = 2 \neq 0.$$

Do đó hệ trên là một hệ Cramer.

Đại Số Tuyến Tính

5.2 Hệ Cramé

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

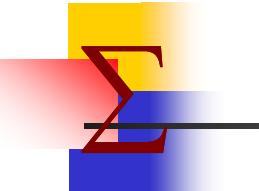
$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

Đại Số Tuyến Tính

5.2 Hệ Cramé

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2.$$



Đại Số Tuyến Tính

5.2 Hệ Cramé

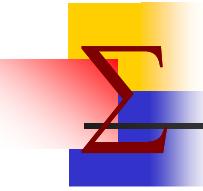
$$x_j = \frac{D_j}{D}; \quad j = \overline{1, n} \quad (2.4)$$

Vậy hệ có nghiệm là:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{-22} = 3,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{2} = 1,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{2} = -1.$$



Đại Số Tuyến Tính

5.2 Hệ Cramé

- Bài tập:** Giải hệ phương trình sau:

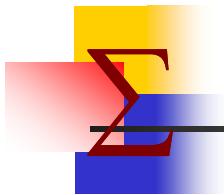
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -29$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$



5.2 Hệ Cramé

Đại Số Tuyến Tính

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-19}{-8}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-29}{-8}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-9}{-8}$$

§5: Hệ phương trình tuyến tính

5.3. Giải hệ phương trình bằng PP Gauss

5.3.1. Các phép biến đổi tương đương hệ phương trình

- Nhân một số ($\lambda \neq 0$) vào 2 vế của 1 PT của hệ.
- Đổi chỗ hai PT của hệ.
- Nhân một số ($\lambda \neq 0$) vào một PT rồi cộng vào PT khác của hệ.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pt3} \times 2} \left\{ \begin{array}{l} x - y + xz - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y + 2z = 10 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pt2} \leftrightarrow \text{pt3}}$$

Đại Số Tuyến Tính

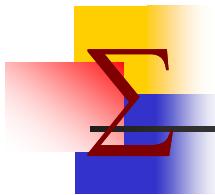
5. Giải hệ PT bằng PP Gauss

- Như vậy các phép biến đổi tương đương hệ PT chính là các phép BĐSC trên dòng của ma trận bổ sung tương ứng.

VD

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ x+2y+z=5 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} pt2+(-2)pt1 \\ pt3+(-1)pt1 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 3y-5z=0 \\ 3y=4 \end{array} \right. \xrightarrow{pt3 \leftrightarrow pt2} \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 3y=4 \\ 3y-5z=0 \end{array} \right.$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} h_2+(-2)h_1 \\ h_3+(-1)h_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right]$$



5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

5.3.2. Định lí Kronecker-Capelli

a. ĐL: Cho hệ phương trình $Ax=b$

$$\text{Hệ có nghiệm} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$$

Cụ thể hơn, ta có kết quả sau: Nếu $Ax=b$ là hệ n ẩn số, ta có

- + $r(A) \neq r(\bar{A}) \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm
- + $r(A) = r(\bar{A}) = n \Leftrightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất
- + $r(A) = r(\bar{A}) = r < n \Leftrightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $(n-r)$ tham số

Đại Số Tuyển Tính

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Chứng minh.

Xét hệ phương trình tổng quát sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Giả sử A có hạng là r

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyển Tính

Ta có ma trận bô sung tương ứng

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyển Tính

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Bằng các phép B ĐSC chuyển ma trận bổ sung
về dạng:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Khi đó ta có:

- Nếu $r(A) \neq r(\bar{A})$ thì tồn tại ít nhất một trong các $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n$ khác 0 nên hệ pt vô nghiệm.
- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = n$ thì hệ là hệ Cramer, nên có nghiệm duy nhất.
- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$ thì chuyển các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ sang vế phải ta được hệ:

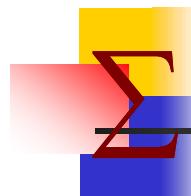
$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_r = b_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1,n}x_n \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_r = b_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{2,n}x_n \\ \dots \\ a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \dots + a'_{rr}x_r = b_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{r,n}x_n \end{cases}$$

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_r = b_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1,n}x_n \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_r = b_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{2,n}x_n \\ \dots \\ a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \dots + a'_{rr}x_r = b_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{r,n}x_n \end{array} \right.$$

Ta gán cho các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ các giá trị cụ thể ta sẽ được một hệ Cramer với r ẩn x_1, \dots, x_r . Do đó, trong trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $(n-r)$ tham số.

Các ẩn x_1, \dots, x_r gọi là các ẩn cơ sở (cơ bản), còn $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ gọi là các ẩn tự do hay ẩn phụ (tham số).



5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

5.3.3. Phương pháp Gauss

$$\text{Hệ } Ax=b \rightarrow A^{bs}=[A|b] \xrightarrow[\text{theo hàng}]{{\text{Bđsc}}} B^{bs}=[B|c] \text{ (bậc thang)}$$

Khi đó:

$$+ r(A)=r(B), r(A^{bs})=r(B^{bs})$$

$$+ Ax = b \Leftrightarrow Bx = c$$

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \quad (2.10)$$

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{array}{l}
 \text{B.S} = \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 2 & -3 & 1 & 0 & 3 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 -4 & 0 & 2 & 1 & -2 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 2
 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{c} h_2 - 2h_1 \\ h_4 + 4h_1 \\ h_5 - h_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & -7 & 3 & -2 & 3 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 8 & -2 & 5 & -2 \\
 0 & -1 & 2 & 0 & 2
 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & -7 & 3 & -2 & 3 \\
 0 & 8 & -2 & 5 & -2 \\
 0 & -1 & 2 & 0 & 2
 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{c} h_3 + 7h_2 \\ h_4 - 8h_2 \\ h_5 + h_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 10 & 5 & 10 \\
 0 & 0 & -10 & -3 & -10 \\
 0 & 0 & 3 & 1 & 3
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{h_3 - 3h_5} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{h_4 + 10h_3}{h_5 + (-3)h_3}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{17h_5 + 5h_4} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow r(A^{bs}) = r(A) = 4$ Hệ có nghiệm duy nhất

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Hệ tương đương với

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 17x_4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

1	2	-1	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	2	1
0	0	0	17	0
0	0	0	0	0

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (1;0;1;0)

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyển Tính

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

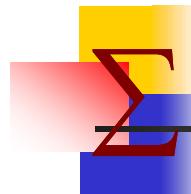
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

Đại Số Tuyến Tính

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Giải. Lập ma trận bổ sung:

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$



5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận bổ sung về dạng ma trận hình thang:

$$A^{bs} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

$$(2.11) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2 là ẩn cơ bản. Chọn x_3, x_4, x_5 là các ẩn phụ (tham số) chuyển sang vế phải ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 = 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 1 \end{cases}$$

Đại Số Tuyến Tính

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đặt x_3, x_4, x_5 lần lượt là α, β, γ .

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -\alpha - \beta + 2\gamma \\ 3x_2 = 3\alpha + 3\beta - 5\gamma + 1 \end{cases}$$

Đại Số Tuyến Tính

§5: Giải hệ PT bằng PP Gauss

Ta có nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\gamma \\ x_2 = \frac{1}{3}(1 + 3\alpha + 3\beta - 5\gamma) \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$



Đại Số Tuyển Tính

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

VD3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \quad (\text{K55-đề 1})$$

VD4: Biện luận về số nghiệm của hệ phương trình theo tham số a, b

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + ax_4 = b \end{cases} \quad (\text{Đề 2-K53})$$

5.4. Hệ PTTT thuần nhất

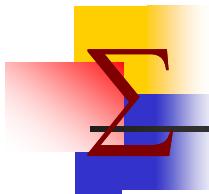
Đại Số Tuyến Tính

5.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 2.2.1. Hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.



§5: Hệ PTTT thuần nhất

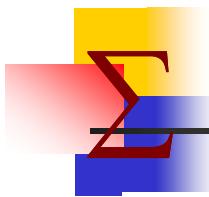
Đại Số Tuyến Tính

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là

$$AX = O. \quad (2.12)$$

Nhận xét. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bao giờ cũng có nghiệm.

Cụ thể bộ số $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ luôn là một nghiệm của hệ và được gọi là *nghiệm tâm thường*.



§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Mỗi bộ số $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ không đồng thời bằng không nếu là nghiệm của hệ (2.2.1) thì được gọi là *nghiệm không tâm thường*.

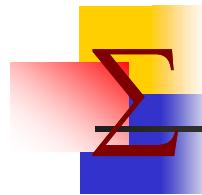
§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Nhận xét: Trong hệ thuần nhất hạng của ma trận hệ số luôn bằng hạng của ma trận bổ sung

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & | & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & | & 0 \\ .. & .. & .. & .. & | & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Khi biện luận cho hệ thuần nhất ta chỉ quan tâm hạng của ma trận hệ số



§5: Hệ PTTT thuần nhất



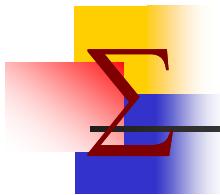
- Hệ thuần nhất chỉ có 2 trường hợp:

- Hệ có nghiệm duy nhất

Hạng ma trận hệ số bằng số ẩn của hệ phương trình

- Hệ có vô số nghiệm

Hạng ma trận hệ số nhỏ hơn số ẩn của hệ phương trình



§5: Hệ PTTT thuần nhất

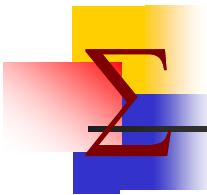
Đại Số Tuyến Tính

Tóm lại: Hệ thuần nhất n ẩn

- chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A)=n$
- có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) \neq n$.

VD1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x - y + mz = 0 \end{cases}$$



§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Ta có ma trận hệ số của hệ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix}$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi
 $r(A) < 3$.

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Cách 1. Ta có:

$$A \xrightarrow[\text{sơ cấp}]{\text{Biến đổi}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{bmatrix}$$

Do đó với $m = -2 \Rightarrow r(A) < 3$

Vậy với $m = -2$ thì hệ có nghiệm không
tầm thường

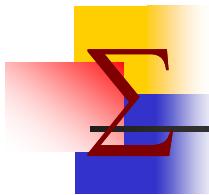
§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Cách 2. Vì $r(A) < 3 \Leftrightarrow \det A = 0$ nên

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} \\ &= (3m + 6) = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$



MỘT SỐ ĐỀ THI

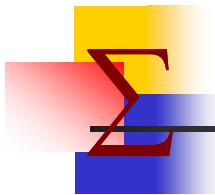
Bài 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = b \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + ax_4 = 14 \end{cases} \quad \text{với } a, b \text{ là tham số}$$

- a) Giải phương trình với $a=4, b=-5$
- b) Tìm a, b để hệ phương trình vô nghiệm.

(Đề 1-K52)

(Đ/s: a) $(3;1;-2;1)$ b) $a=10, b\neq-11$)



MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyển Tính

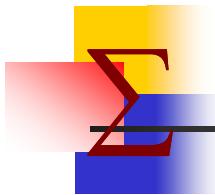
Bài 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases} \quad \text{với } a, b \text{ là tham số}$$

- Giải phương trình với $a=1, b=3$
- Tìm a, b để hệ phương trình vô số nghiệm.

(Đề 2-K52)

(Đ/s: a) (2;-1;1;3) b) $a=-1, b=-9$)



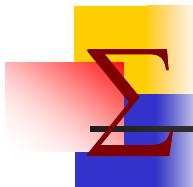
MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyển Tính

Bài 3. Biện luận về số nghiệm của hệ phương trình theo a và b

i)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 - 3x_4 = b \end{cases}$$
 (Đề 1-K53)

ii)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + ax_4 = b \end{cases}$$
 (Đề 2-K53)



MỘT SỐ ĐỀ THI



Bài 4. Giải hệ phương trình

i)

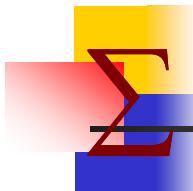
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -10 \end{cases}$$

(Đề 3-K54)

ii)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$$

(Đề 4-K54)



MỘT SỐ ĐỀ THI



Bài 4. Giải hệ phương trình

i)

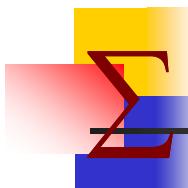
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -10 \end{cases}$$

(Đề 3-K54)

ii)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$$

(Đề 4-K54)



MỘT SỐ ĐỀ THI



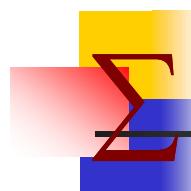
Bài 5. Tìm giá trị của tham số thực a để hệ có nghiệm duy nhất

i)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 = 5 \end{cases}$$
 (Đề 3-K51)

ii)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + (a+2)x_3 = 7 \end{cases}$$
 (Đề 4-K51)



MỘT SỐ ĐỀ THI



Bài 6. Cho hệ phương trình

$$\text{i)} \begin{cases} -2x_1 + 6x_2 + 16x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(Đề 1-hè 2010)

$$\text{ii)} \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 14x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(Đề 2-hè 2010)

- a) Giải hệ khi $\lambda=1$
- b) Với giá trị nào của λ thì số chiều của không gian nghiệm bằng 2?