Kapitel 3: Relationen und Funktionen

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

"Confusion is the most productive state that you can be in; the struggle out of that state is the primary drive for progress."

– Dror Bar-Natan

1. Geordnete Paare

Wir erinnern uns: in einer Menge wie {Andrea, Bernd} kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Sie ist die gleiche Menge wie {Bernd, Andrea}.

In gewissen Kontexten spielt jedoch die Reihenfolge eine Rolle: Wenn wir modellieren möchten, dass Andrea die *Vorgesetzte* ist von Bernd, dann können wir diese Information nicht mit der Menge {Andrea, Bernd} ausdrücken, denn woher sollten wir wissen, wer jetzt der oder die Vorgesetzte von wem ist?

Dafür gibt es die Konstruktion des *geordneten Paares*, für das wir schreiben:

$$(x, y).$$

Dort spielt die Reihenfolge eine Rolle: ist $x \neq y$, dann gilt $(x, y) \neq (y, x)$.

Für die, die es genau wissen wollen, erklären wir, wie das geordnete Paar in der Sprache der Mengenlehre definiert wird: Für beliebige Objekte x, y (Zahlen, Personen, allgemein, Dinge "unserer Anschauung oder unseres Denkens", nach Cantor) definieren wir das geordnete Paar (x, y) durch

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Wir werden im Unterricht zeigen können, dass nur $(x, y) = (a, b)$ gelten kann, wenn $x = a$ und $y = b$, und dass $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$. Die Reihenfolge spielt also eine Rolle.

Beispiel 1.1. Dies ist ein etwas informelles Beispiel, um die Rolle der *Ordnung* im Begriff des geordneten Paares herauszuhaben. Nehmen wir an, wir interpretieren ein geordnetes Paar von Personen x, y als: "Person x kennt den Namen von y". Dann ist sicher (Dominic, Obama) in dieser Interpretation ein "gültiges" geordnetes Paar, aber umgekehrt (Obama, Dominic) eher nicht.[1] Hier hätten wir übrigens ein Beispiel einer *Relation* - aber keine Angst vor diesem Begriff, wir werden ihn im übernächsten Abschnitt sauber einführen.

[1] Auf jeden Fall ist Obama kein Follower von https://twitter.com/dominiczypen/

2. Cartesische Produkte

Sind A, B Mengen, so bezeichnet man das *Cartesische Produkt* von A und B die Menge aller geordneten Paare, deren erster ein Element von A und deren zweiter Eintrag ein Element von B ist, und wir schreiben dafür

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Übung 2.1. Sei $P = \{\text{Alice, Bob, Charlie}\}$, also eine (kleine) Menge von Personen, und wir nehmen an, sie bilden eine WG. Wie in jeder WG fällt eine Menge von Tasks an, sagen wir $T = \{\text{Abwaschen, Staubsaugen, Abfall rausbringen, WC reinigen}\}$. Schreibe die Menge $P \times T$ explizit auf. Wieviele Elemente enthält diese Menge?

Übung 2.2. Wenn X ein beliebige Menge ist, was ist $X \times \emptyset$?

Übung 2.3. Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Schreibe $A \times A$ explizit auf. Wieviele Elemente hat $A \times A$?

3. Relationen

Seien A, B beliebige Mengen. Wir wissen jetzt, wie $A \times B$ aussieht.

Definition 3.1. Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen A, B ist eine Teilmenge von $A \times B$, also

$$R \subseteq A \times B.$$

Beispiel 3.2. Wir betrachten wieder die WG vom letzten Kapitel: Die Menge der Bewohner ist $P = \{\text{Alice, Bob, Charlie}\}$, und die Menge der periodisch anfallenden Tasks sei $T = \{\text{Abwaschen, Staubsaugen, Abfall rausbringen, WC reinigen}\}$ (es ist eine sehr anspruchslose WG, andere Tasks werden nicht gemacht). Ein typisches Mitglied des Cartesischen Produkts $P \times T$ wird also die Form (p, t) haben, wobei p ein WG-Mitglied, und t ein Task ist, also zum Beipiel

$$(\text{Charlie, Abfall rausbringen}) \in P \times T.$$

(Man beachte wieder die Reihenfolge: Das Paar (Abfall rausbringen, Charlie) ist nicht in $P \times T$!) Wir definieren die “Erledigungs”-Relation $R \subseteq P \times T$ durch folgende Liste:

$$R = \big\{(\text{Bob, WC reinigen}), (\text{Alice, Staubsaugen}), (\text{Bob, Staubsaugen})\big\}.$$

Wir interpretieren jeden Eintrag (p, t) dieser Relation so, dass Person p für die Erledigung des Tasks t vorgesehen ist.

Was fällt an dieser Liste auf? Zunächst wird eine kurze Überprüfung hervorbringen, dass wirklich jedes Element von R zu $P \times T$ gehört, wir haben also $R \subseteq P \times T$. Dann ist offenbar der fleissige Bob an 2 Tasks beteiligt, während sich Charlie vornehm zurückhält und nichts tut. Des Weiteren scheint der Task “Staubsaugen” so ressourcenintensiv zu sein, dass sowohl Alice als auch Bob daran beteiligt sind. Und schliesslich bleibt aber trotzdem keine Zeit, alle Tasks zu erledigen. Klein Übungsaufgabe: welche Tasks werden nicht erledigt?

Übung 3.3. Sei $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{9,10,11\}$. Wir betrachten folgende Relation $R \subseteq A \times B$:

$$R = \{(a,b) \in A \times B : a + b \in B\}.$$

Aufgaben:

(1) Zähle alle geordneten Paare auf, die Element der Relation R sind.
(2) Gibt es ein Paar $(m,n) \in R$, sodass sein "Spiegelbild" (n,m) auch ein Element von R ist?

Übung 3.4. Vorhin hatten wir eine Relation auf verschiedenen Mengen A, B. Diesmal schauen wir eine Relation einer Menge mit sich selber an. Sei $A = \{1,2,3,\dots,10\}$ und sei $R \subseteq A \times A$ definiert durch

$$R = \{(a,b) \in A \times A : \exists k \in \mathbb{N}(k \cdot a = b)\}.$$

Aufgaben:

(1) Beschreibe R in Worten.
(2) Schreibe die Menge aller Elemente von R auf.
(3) Gilt folgende Aussage?
Ist $(a,b),(b,c) \in R$, dann ist auch $(a,c) \in R$.

Übung 3.5. Wir betrachten die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und definieren eine Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$R = \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(m - n = 6 \cdot k)\big\}.$$

Aufgaben:

(1) Beschreibe in Worten, welche Zahlen R zueinander in Beziehung setzt.
(2) Gib ein Beispiel eines Paares von natürlichen Zahlen x, y, sodass $(x,y) \in R$.
(3) Gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $(1,n) \in R$?
(4) Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, sodass $(1,n) \in R$?
(5) Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, sodass $(1,n) \notin R$?
(6) Gibt es eine grösste natürliche Zahl m, sodass $(1,m) \in R$?
(7) Gibt es eine grösste natürliche Zahl m, sodass $(1,m) \notin R$?

3.1. **Komposition von Relationen.** Relationen kann man in folgender Art und Weise komponieren, oder, bildlicher gesprochen, "aneinanderhängen":

Seien A, B, C Mengen und $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann definieren wir eine Relation $T \subseteq A \times C$ folgendermassen:

$$T = \big\{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B\big((a,b) \in R \land (b,c) \in S\big)\big\}.$$

Intuitiv gesprochen "gelangt" man via R von A nach B und dann via S von B nach C. Die Relation T wird auch oft mit

$$S \circ R$$

geschrieben – man beachte die kontraintuitive Reihenfolge! Sie wird dann später bei der Komposition von Funktionen (einer Spezialart von Relationen) rechtfertigt.

Übung 3.6. Sei $A = \{p, q\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{11, 12\}$. Berechne für die unten gegebenen Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ die Komposition $S \circ R$:

(1) $R = \{(p, 1), (p, 2)\}$, $S = \{(2, 11), (3, 12)\}$.
(2) $R = \{(p, 1), (q, 1)\}$, $S = \{(2, 11), (3, 12)\}$.
(3) $R = \{(q, 2), (p, 1), (p, 3)\}$, $S = \{(1, 13), (3, 12), (2, 11), (3, 11)\}$.

Übung 3.7. Seien A, B, C Mengen, und $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen mit der Eigenschaft dass $S \circ R = A \times C$. Können wir dann schliessen, dass $R = A \times B$ oder $S = B \times C$?

Der Rest des Abschnitts "Relationen" ist fakultativ.

Sei X eine beliebige Menge. Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heisst

- *reflexiv*, falls $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$,
- *symmetrisch*, falls für alle $x, y \in X$ gilt: Wenn $(x, y) \in R$, dann $(y, x) \in R$, und
- *transitiv*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt: Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann $(x, z) \in R$. (Diese Eigenschaft wird auch
- "Übertragungseigenschaft" genannt, weil die Mitgliedschaft von (x, y) und (y, z) in R auf (x, z) "übertragen" wird.)

Übung 3.8. Sei V die Menge aller VBS-Mitarbeitenden. Wir sagen, ein geordnetes Paar von VBS-Mitarbeitenden $(x, y) \in V \times V$ stehen in Relation R, falls x und y einmal zur gleichen Zeit am selben Meeting waren. Beurteile R auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Übung 3.9. Wir schauen die *Teilbarkeitsrelation* auf $\mathbb{N}$ an:

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : k \cdot a = b\}.$$

Beurteile R auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

4. Funktionen

Definition 4.1. Seien X, Y Mengen, dann heisst eine Relation $f \subseteq X \times Y$ eine *Funktion*, in Symbolen $f : X \to Y$, falls folgende 2 Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. ("Linksexistenz")
(ii) Für jedes $x \in X$ gilt: falls $(x, y) \in f$ und $z \in Y \setminus \{y\}$, dann folgt $(x, z) \notin f$. ("Rechtseindeutigkeit")

Man kann diese beiden Bedingungen zusammenfassen als:

für jedes $x \in X$ gibt es **genau ein** $y \in Y$ sodass $(x, y) \in f$.

Man schreibt anstelle von $(x, y) \in f$ üblicherweise

$$f(x) = y,$$

da wegen der *Rechtseindeutigkeit* das y durch das x fest gegeben ist.

Übung 4.2. Seien die Mengen $X = \{a, b, c\}$ und $Y = \{0, 1\}$ gegeben. Sind folgende Relationen $f \subseteq X \times Y$ Funtionen?

(1) $f = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (b, 1)\}$,
(2) $f = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1)\}$,
(3) $f = \{(c, 0), (a, 1), (b, 0)\}$,
(4) $f = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (b, 0)\}$,
(5) $f = \{(a, 0), (b, 1)\}$,
(6) $f = \{(c, 1), (b, 1), (a, 1)\}$.

Übung 4.3. Betrachte das WG-Setting von Beispiel 3.2.

(1) Beurteile die dort beschriebene Relation R auf die charakterisierenden Faktoren von Funktionen:
   (a) Linksexistenz, und
   (b) Rechtseindeutigkeit.
(2) Gibt es ein Obermenge $f \supseteq R$, sodass f eine Funktion ist?

Übung 4.4. Zeichne die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch die untenstehenden Beschreibungen:

(1) $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(2) $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(3) $f(x) = e^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(4) $f(x) = \log(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(5) $f(x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4.1. **Komposition von Funktionen.** Im Unterabschnitt 3.1 haben wir gesehen, wie Relationen komponiert werden. Funktionen sind ja spezielle Relationen - man komponiert sie genau gleich. Die **Reihenfolge**, wie man die Komposition von zwei Funktionen schreibt, und die auf den ersten Blick etwas kontraintuitiv ist, ergibt sich aus der Lösung folgender Übung:

Übung 4.5. Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Funktionen. Zeige, dass $g \circ f \subseteq X \times Z$ nicht nur eine Relation ist, sondern eine *Funktion* $g \circ f : X \to Z$, die gegeben ist durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ für alle } x \in X.$$

Übung 4.6. Sei $A = \{1, 2, 3\}, B = \{c, d\}, C = \{99, 100, 101\}$. Sei $f : A \to B$ gegeben durch $f(1) = f(2) = c, f(3) = d$, und $g : B \to C$ sei gegeben durch $g(c) = 99, g(d) = 101$. Bestimme $g \circ f : A \to C$.

Übung 4.7. Wir betrachten Funktionen auf $\mathbb{N}$: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n) = n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(1) = g(2) = 1, g(n) = g(n-1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Bestimme die Funktionen $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Übung 4.8. Für folgende Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreibe die Funktionsgleichungen für $g \circ f, f \circ g, f \circ f$ und $g \circ g$ auf:

(1) $f(x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(2) $g(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 4.9. (*) Finde eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f(n) \neq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(2) $(f \circ f)(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh, $f \circ f$ ist die sogenannte *Identitätsfunktion* auf $\mathbb{N}$).

5. Bilder und Urbilder von Funktionen (fakultativ)

Definition 5.1. Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Seien $S \subseteq A$ und $T \subseteq B$ Teilmengen von A respektive B.

- Das *Bild von $S \subseteq A$ unter f* wird definiert durch
$$f(S) = \{f(s) : s \in S\} = \{b \in B : \exists s \in S(f(s) = b)\}.$$
- Das *Urbild von $T \subseteq B$ unter f* wird definiert durch
$$f^{-1}(T) = \{a \in A : f(a) \in T\}.$$

Übung 5.2. Sei $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$ und sei $f : X \to Y$ gegeben durch

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 4)\}.$$

(In anderer Schreibweise: $f(a) = f(b) = 1, f(c) = 4$.) Bestimme folgende Mengen:

(1) $f(\{b, c\})$;
(2) $f(X)$;
(3) $f^{-1}(\{2\})$;
(4) $f^{-1}(\{2, 3\})$;
(5) $f^{-1}(\{1\})$.

Übung 5.3. Betrachte die Sinus-Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) $\sin(\mathbb{R}) = ?$
(2) $\sin^{-1}(\{0\}) = ?$
(3) $\sin^{-1}(\{2\}) = ?$

Übung 5.4. (*) Ähnliche Aufgabe für den Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnet (Achtung: Relevant für Kapitel 4 über Logarithmen!)

(1) $\log([1, e]) = ?$ (e sei die Eulersche Zahl 2.71... das ist die *Basis* des natürlichen Logarithmus; und $[1, e] = x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \wedge x \leq e\}$.)
(2) $\log(\mathbb{R}_+) = ?$
(3) $\log^{-1}([0, 1]) = ?$
(4) $\sin^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}) = ?$

Übung 5.5. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n) = 2n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(1) $f(\{7, 8, 9, 10\}) = ?$
(2) $f^{-1}(\{7, 8, 9\}) = ?$
(3) $f^{-1}(f(\{1, 2, 3\})) = ?$

6. Zusätzliche Aufgaben

1. Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Zeige:

(1) Ist $S \subseteq A$, dann gilt $S \subseteq f^{-1}(f(S))$.
(2) Ist $T \subseteq B$, dann gilt $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$.

2. Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Funktionen. Sei $A \subseteq X$, $C \subseteq Z$. Zeige:

(1) $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$;
(2) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Was ist $f^{-1}([0, 1])$?

Definition 6.1. Sind A, B Mengen, dann heisst eine Funktion $f : A \to B$

- *injektiv*, falls für jedes $b \in B$ das Urbild $f^{-1}(\{b\})$ höchstens 1 Element enthält,
- *surjektiv*, falls $f(A) = B$,
- *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

4. Sei $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 2, 34\}$ und sei $f : X \to Y$ gegeben durch

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 4)\}.$$

(In anderer Schreibweise: $f(a) = f(b) = 1, f(c) = 4$.) Beurteile f auf Injektivität und Surjektivität.

5. Sei $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{a, b, c\}$.

   (1) Finde eine Funktion $f : X \to Y$, die weder injektiv noch surjektiv ist.
   (2) Finde eine Funktion $f : X \to Y$, die bijektiv ist.

6. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   - $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
   - $g(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beurteile f und g auf Injektivität und Surjektivität. Ist eine dieser Funktionen bijektiv?

7. Wir betrachten Funktionen auf $\mathbb{N}$: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n) = n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(1) = g(2) = 1, g(n) = g(n - 1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Beurteile diese Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

8. (*) Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Funktionen. Zeige:

   (1) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, dann ist f injektiv.
   (2) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, dann ist g surjektiv.

9. (*) Finde $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist, aber weder f noch g sind bijektiv.

Definition 6.2. Ist A eine Menge, dann bezeichne $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Ist A unendlich, schreiben wir $|A| = \infty$, also zB $|\mathbb{N}| = \infty$.

Es gilt: Ist $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}| = mn.$$

(Das wird im Unterricht demonstriert.)

10. (*) Zeige: Sind A, B Mengen und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $|A| = m, |B| = n$, dann gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B| = mn$.