Lösungen zu einigen Übungen von Kapitel 1–3

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

"Der heutige Stand des Irrtums." – Folklore

1. Einige Lösungen zu Kapitel 1 (Logik)

Übung 2.1.

(1) Nein
(2) Ja
(3) Ja
(4) Nein
(5) Ja
(6) Nein

Übung 3.1

P	Q	S	$((\neg P) \wedge Q) \vee S)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Übung 3.2(5)

P	$P \vee (\neg P)$
0	1
1	1

Übung 3.3(1) Zu zeigen: $\neg(P \wedge Q)$ ist äquivalent zu $(\neg P) \vee (\neg Q)$.

- Wahrheitstabelle für $\neg(P \wedge Q)$:

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Wahrheitstabelle für $\neg(P \wedge Q)$:

P	Q	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Da die rechteste Spalte der beiden Wahrheitstabellen identisch ist, sind die Ausdrücke äquivalent.

Übung 3.4 "Für Sophia trifft mindestens eine der folgenden Aussagen zu:

(1) Sie ist Griechin.
(2) Sie ist nicht 30-jährig.
(3) Sie hat nicht blondes Haar."

Übung 5.1

(1) $\forall x \in S\ (P(x))$. Das bedeutet: alle Schweizer/innen sind Bundesrat. Diese Aussage ist *falsch* (auch wenn man in politischen Diskussionen manchmal das Gegenteil glauben möchte).
(2) $\exists x \in S\ (P(x))$. Das bedeutet: Mindestens eine Schweizer/in ist Bundesrat. Da wir 7 Bundesräte und Bundesrätinnen haben, ist diese Aussage *wahr*.

Übung 5.2

(1) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x¡y)$. Das bedeutet: es gibt eine Zahl, die echt kleiner ist als jede natürliche Zahl. Als Kandidat kommt höchstens die 1 in Frage. Da aber *nicht* gilt, dass $1 < 1$, ist diese Aussage **falsch**.
(2) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x \leq y)$. Diese Aussage ist **wahr**, da $1 \leq 1$ gilt.
(3) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (y > x)$. Diese Aussage ist **wahr**, da es zu jeder Zahl x eine echt grössere Zahl gibt – nämlich $x + 1$!
(4) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ (y > x)$. (Beachte: Im Vergleich zur vorigen Aufgabe haben wir nur Quantoren vertauscht - und das macht einen Unterschied!). Diese Aussage ist **falsch**, da sie behauptet, es gebe eine natürliche Zahl, die echt grösser ist als alle natürliche Zahlen
(5) (*) $\exists x \in \mathbb{N}\ (\exists y \in \mathbb{N}\ (x = y^2) \wedge \exists z \in \mathbb{N}\ (x = 4z + 3))$. Diese Aussage behauptet die Existenz einer *Quadratzahl* der Form $x = 4z + 3$. Dazu müssen wir eine Fallunterscheidung machen für $x = y^2$: a) Ist y gerade, dann ist x ein Vielfaches von 4, und die Aussage ist falsch. b) Ist y ungerade, dann hat y die Form $y = 2n + 1$ für eine (eindeutige) natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, also gilt $x = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$, und somit ist x nicht von der behaupteten Form. Die ursprüngliche Aussage ist also in jedem Fall **falsch**.

Übung 5.3 Wir definieren die von $x, y \in M$ abhängige Aussage $S(x, y)$ wie folgt:

$S(x, y) =$ "x und y haben schon einmal gemeinsam an einer Sitzung teilgenommen."

Sind die folgenden Aussagen korrekt?

(1) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ (S(x,y) \Rightarrow S(y,x))$. Diese Aussage sagt, dass wenn Mitarbeiter x und y schon einmal gemeinsam in einer Sitzung gesessen sind, dann stimmt das auch für y und x. Diese Aussage ist **wahr**.

(2) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ \forall z \in M\ \big((S(x,y) \wedge S(y,z)) \Rightarrow S(x,z)\big)$. Diese Aussage sagt, dass wenn x und y irgendwann einmal zusammen gesessen sind, und wenn auch (zu einem möglicherweise anderen Zeitpunkt) y und z zusammengesessen sind, dann haben auch irgendwann x und z am selben Meeting teilgenommen. Das stimmt natürlich nicht in jedem denkbaren Szenario. Darum ist diese Aussage **falsch**.

Lösungen zu einigen Logikrätseln

Versuche, mindestens 5 der folgenden 10 Logikrätsel zu lösen. Challenges sind die Aufgaben 9 und 10, sie sind mit (*) markiert.

1. Jack schaut Anne an. Anne schaut George an. Jack ist verheiratet, George ist unverheiratet, und von Anne wissen wir's nicht. Gibt es eine verheiratete Person, die eine unverheiratete Person anschaut? (Hinweis: Fallunterscheidung).

Lösung: Anne ist entweder verheiratet oder unverheiratet. Im ersten Fall schaut die verheiratete Anne den unverheirateten George an. Im zweiten Fall (Anne unverheiratet) schaut der verheiratete Jack die unverheiratete Anne an. In jeden Fall schaut also eine verheiratete Person eine unverheiratete Person an - wir wissen einfach nicht, welcher der beiden Fälle zutrifft.

2. Fünf Freunde sind gegeneinander ein Wettrennen gelaufen. Nach der anschliessenden durchzechten Nacht können sie sich jedoch nur noch an wenige Details erinnern:

(1) Keine zwei von ihnen sind gleichzeitig im Ziel eingelaufen.
(2) Tim ist vor Lukas im Ziel eingelaufen.
(3) Janina war früher als Tim, Franz oder Lukas im Ziel.
(4) Anna ist vor Janina oder Franz im Ziel angekommen.
(5) Tim war vor Anna im Ziel oder Lukas war vor Anna im Ziel.
(6) Franz war früher als Tim im Ziel.

In welcher Reihenfolge sind die fünf eingelaufen?

Lösung: Aus den Aussagen (2) und (6) ergibt sich: Franz $<$ Tim $<$ Lukas (wobei $<$ als "vor" gelesen werden muss). Nehmen wir Aussage (5): Anna kann nicht letzte sein (sonst stimmen beide Teilaussagen nicht). Also ergibt sich:

Franz $<$ Tim $<$ Anna $<$ Lukas.

Jetzt ist noch die Frage: Wo Janina platzieren? Aus Aussage (3) bekommen wir, dass Janina nicht letzte wurde, woraus mit Aussage (4) direkt folgt:

Franz < Tim < Anna < Janina < Lukas.

3. Es waren einmal vier Freunde, die sich uneinig waren, wer von ihnen im Recht ist.

Tom :	“Genau zwei von uns haben recht.”
Anna :	“So eng würde ich das nicht sehen, denn mindestens zwei von uns liegen falsch.”
Mark :	“Also, was Anna da behauptet, ist auf jeden Fall falsch.”
Lisa :	“Höchstens einer von uns liegt richtig.”

Wer ist im Recht, und wer liegt falsch?

Lösung: Lisa kann nicht die Wahrheit sagen, sonst sagt auch Anna die Wahrheit und wir haben einen Widerspruch zu Lisas Aussage. Dann liegt von Anna und Mark genau jemand falsch, da sie sich direkt widersprechen. Somit hat Anna recht, dass mindensten 2 Personen falsch liegen, und es folgt direkt, dass Mark falsch liegt. Somit haben wir

Lisa: falsch
Anna: richtig
Mark: falsch
Tom: ?

Wenn nun Tom falsch liegen würde, hätte wiederum Lisa *recht*, was wir schon ausgeschlossen haben! Also bekommen wir:

Lisa: falsch
Anna: richtig
Mark: falsch
Tom: richtig

4. It’s quiz time! Du hast die Chance auf den Hauptpreis von CHF 1 Mio, der sich hinter genau einer von 2 Türen verbirgt. (Hinter der anderen Tür ist nichts.) An jeder Tür hängt ein Schild:

Tür 1: “Hinter dieser Tür ist der Hauptgewinn, und hinter Tür 2 gibts nichts.”
Tür 2: “Hinter einer der Türen ist der Hauptgewinn, und hinter der anderen nichts.”

Der Quizmaster sagt dir, dass genau 1 Tür mit einer wahren Aussage angeschrieben ist. Hinter welcher Tür ist der Hauptgewinn?

ŁWäre Tür 1 wahr angeschrieben, wäre auch die Aussage auf Tür 2 wahr, was der Anleitung des Quizmasters widersprechen würde. Also ist nur Tür 2 wahr angeschrieben. Somit folgt, dass Tür 1 *falsch* angeschrieben ist, woraus folgt, dass hinter Tür 2 der Hauptgewinn steckt.

5. Auf Crazy Island gibt es 3 Typen von Leuten: Solche, die immer die Wahrheit sagen, solche die immer lügen, und dann solche, die manchmal lügen, und manchmal die Wahrheit sagen. Wir bekommen folgendes Gespräch mit zwischen zwei Insulanern A und B:

> A: Mindestens einer von uns sagt immer die Wahrheit.
> B: Mindestens einer von uns lügt immer.
> A: Du sprichst wahre Worte.

Zu welchen Insulaner-Gruppen gehören A und B?

ŁA kann kein Wahrheits-Sager sein, sonst widerspricht er sich mit B's Aussage zusammengenommen. A kann auch kein permanenter Lügner sein - sonst ist A's 2. Aussage wahr, was er als permanenter Lügner nicht tun könnte. Also ist A ein "Flip-Flopper" – und B auch!

6. In einem weiteren Gespräch zwischen Insulanern - diesmal sind es 3 Stück - wissen wir, dass jeder Insulanertyp vorkommt. Wir belauschen das folgende Gespräch:

> X: Die Wahrheitssprechende unter uns ist Y.
> Y: Unser Freund Z lügt manchmal und sagt manchmal die Wahrheit.
> Z: X lügt immer!

Welche Person kann welchem Typ zugeordnet werden?

ŁX kann nicht permanent die Wahrheit sagen - sonst gehört Y zum gleichen Typ, und wir wissen, dass die Typen alle verschieden sind. Auch Y sagt nicht permanent die Wahrheit: sonst ist X ein Flip-Flopper (kann kein permanenter Lügner sein wegen seiner wahren Aussage), und auch Z ein Flip-Flopper. Also sagt Z permanent die Wahrheit, X lügt immer, und Y ist ein Flip-Flopper.

7. "I barbieri da Berna." - Ein Berner Barbier X heisse gewöhnlich, wenn es einen (Berner) Barbier Y gibt (nicht notwendig verschieden von X), sodass X den Y mindestens einmal im Monat rasiert und umgekehrt. Andernfalls heisst X *exklusiv.*

Die exklusiven Barbiere haben sich nun zum "Exklusivclub" zusammengeschlossen. Nun kommt eines Tages ein Berner Barbier namens Alfonso in die Stammbeiz der Barbiere - die goldene Schere - und prahlt, er würde jedes Mitglied des Exklusivclubs mindestens einmal im Monat rasieren - und niemanden sonst. Kann Alfonsos Geschichte stimmen?

ŁAlfonsos Geschichte kann **nicht stimmen**: Ist Alfonso nicht im Exklusivclub, dann qualifiziert er sich als Mitglied – und umgekehrt. Es gibt immer einen Widerspruch.

8. Aktenzeichen XY pur! Graf Eutin ist ermordet worden. Als Mörder kommen nur Fräulein Ming, Professor Bloom, Frau Weiss oder Oberst von Gatow in Frage. Versuche an Hand der Aussagen dieser vier Personen den Mörder/die Mörderin zu überführen. Dabei darfst du annehmen, dass bis auf den Mörder/die Mörderin alle anderen die Wahrheit sagen.

> Fräulein Ming: “Ich war zur Tatzeit mit Professor Bloom zusammen.”
> Professor Bloom: “Oberst von Gatow war zur Tatzeit im Saloon.”
> Frau Weiss: “Fräulein Ming, Oberst von Gatow und ich waren zur Tatzeit nicht im Saloon.”
> Oberst von Gatow: “Ich bin unschuldig. Der Mord ist im Saloon passiert.”

Wer ist der der Mörder/die Mörderin?

2. Einige Lösungen zu Kapitel 2 (Mengen)

Übung 2.1 $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ sowie $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}(n = 2k + 1)\}$

Übung 2.2 $P = \{n \in \mathbb{N} : (n > 1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1, n\}(\forall \ell \in \mathbb{N}(k\ell \neq n)\}$.

Übung 3.2(1) $A \subseteq B$, aber $B \not\subseteq A$.

Übung 3.3 Wenn m ein Teiler von n ist, dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $n = k_0 \cdot m$. Wenn $x \in V_n$, dann gibt es $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $x = k_1 \cdot n$. Dann gilt $x = k_1 \cdot n = k_1 \cdot (k_0 \cdot m) = (k_1 \cdot k_0) \cdot m$, somit $x \in V_m$. Da x beliebig war, erhalten wir

$$x \in V_n \implies x \in V_m.$$

Das impliziert $V_m \subseteq V_n$.

Die andere Implikation wird analog bewiesen.

Übung 3.4 Jede Menge von n Elementen hat 2^n Teilmengen, also gibt es $2^7 = 128$ bundesrätliche Teilmengen.

Übung 5.1(2) $A \setminus B = \{\text{Mark, Sara}\}$ und $B \setminus A = \{\text{Anna}\}$.

Übung 5.2

(1) $0 \in A \setminus B$
(2) $1 \in B \setminus A$
(3) $0.22 = \frac{22}{100} \in A \cap B$.
Zusätzlich gilt $\mathbb{Q} \setminus (A \cup B) = \emptyset$, also die leere Menge.

Übung 5.3(2) $V_2 \cap V_3 = V_6$.

Übung 6.1

(1) $\bigcap \mathcal{K}$ = Menge der Parlamentarier/innen, die in *allen* Kommissionen sitzen.
(2) $\bigcup \mathcal{K}$ = Menge der Parlamentarier/innen, die in *mindestens einer* Kommission sitzen
(3) $P \setminus (\bigcup \mathcal{K})$ = Menge der Parlamentarier/innen, die *gar keiner Kommission* angehören.

Zusätzliche Aufgaben

1. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 5, 6\}$.

2. Null Elemente, da $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

5.

- $C \not\subseteq B$, da $1 \in C$, aber die "nackte" Zahl 1 kommt in der Auflistung von B nicht vor! (B enthält als Element nur $\{1\}$, das etwas anderes ist als 1).
- Die Aussage ist richtig.
- $A \cap B = \{3\}$, und $C \cap D = \{3\}$, also ist die Aussage $A \cap B = C \cap D$ richtig.
- $C \cup D = \big\{1, 2, \{1, 2\}, 3, 4, 5\big\}$ hat 6 Elemente, daher hat diese Menge $2^6 = 64$ Teilmengen, nicht nur 32.

7.

(1) $A \cup B$ = Menge der Elemente, die in A, B oder beiden Mengen vorkommen = Menge der Elemente, die in B, A oder beiden Mengen vorkommen = $B \cup A$.
(2) $A \not\subseteq A \setminus B$ im Allgemeinen: Sei $A = \{1, 2\}$ und sei $B = \{2\}$, dann ist $A \setminus B = \{1\}$ und es gilt *nicht* dass $A \subseteq \{1\} = A \setminus B$.
(3) Die gleichen Mengen wie vorher funktionieren als Gegenbeispiel auch zu dieser Aussage: $B = \{2\}$ und $A \setminus B = \{1\}$, somit $B \not\subseteq A \setminus B$.
(4) Diese Aussage ist richtig: $A \setminus B$ ist die Menge der Elemente, die in A, aber *nicht* in B enthalten sind. Das ist trivialerweise eine Teilmenge von A, also $A \setminus B \subseteq A$.

3. Einige Lösungen zu Kapitel 3 (Funktionen)

Übung 2.1 Alle Kombinationen (Person, Task) aufschreiben - das gibt $3 \cdot 4 = 12$ Paare im Total.

Übung 2.2 $X \times \emptyset = \emptyset$ für jede Menge X.

Übung 2.3 $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Als besteht $A \times A$ aus 9 Elementen.

Übung 3.3(1) $R = \{(1, 9), (1, 10), (2, 9)\}$.

Übung 3.4(1) Ein Paar $(a, b) \in A \times A$ ist genau dann ein Element von R wenn $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ und b ist ein Vielfaches von a.

Übung 3.5

(1) $(x, y) \in R$ genau dann, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von 6 ist.
(2) $(4, 34) \in R$ zum Beispiel.

(3) $(1,19) \in R$.
(4) $(1,18) \notin R$.

Übung 3.6

(1) $S \circ R = \{(p,11)\}$
(2) $S \circ R = \emptyset$
(3) $S \circ R = \{(q,12),(p,11),(p,12)\}$.

Übung 4.2

(1) Nein, Rechtseindeutigkeit ist durch $(b,0),(b,1) \in f$ verletzt.
(2) Ja.

Übung 4.3

(1) (a) Linksexistenz ist nicht gegeben: Charlie (der Faulpelz...!) hat sich vor allen Tasks gedrückt.
    (b) Rechtseindeutigkeit herrscht auch nicht: Bob (aka "Pestalozzi") hat 2 Tasks übernommen, nämlich das Staubsaugen und das WC-Reinigen.
(2) Keine Obermenge $f \supseteq R$ kann die Rechtseindeutigkeit herstellen, wenn sie in der Untermenge R schon verletzt ist!

Übung 4.6 $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(2) = 99$ und $(g \circ f)(3) = 101$.

Übung 4.7 Wir haben $(g \circ f)(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $(f \circ g)(1) = 2$ und $(f \circ g)(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Übung 4.9 Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die $1 \leftrightarrow 2$ vertauscht, $3 \leftrightarrow 4$ vertauscht, $5 \leftrightarrow 6$ vertauscht, etc.... Also $f(n) = n+1$ für alle ungeraden Zahlen $n = 1,3,5,\ldots$, und $f(m) = m-1$ für alle geraden Zahlen $m = 2,4,6,8,\ldots$. Dann gilt $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{N}$, aber $(f \circ f)(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Übung 5.2

(1) $f(\{b,c\}) = \{1,4\}$.
(2) $f(X) = \{1,4\}$.
(3) $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.
(4) $f^{-1}(\{2,3\}) = \emptyset$.
(5) $f^{-1}(\{1\}) = \{a,b\}$.

Übung 5.5

(1) $f(\{7,8,9,10\} = \{15,17,19,21\}$.
(2) $f^{-1}(\{7,8,9\} = \{3,4\}$.
(3) $f^{-1}(f(\{1,2,3\})) = \{1,2,3\}$.

Zusätzliche Aufgaben

1.(1) Sei $s \in S$. Dann ist $f(s) \in f(S)$, also folgt direkt nach Definition des Urbildes, dass $s \in f^{-1}(f(S))$. Da $s \in S$ beliebig war, schliessen wir, dass jedes Element von S auch in $f^{-1}(f(S))$ liegt, also $S \subseteq f^{-1}(f(S))$.

4. f ist weder injektiv noch surjektiv.

5.

(1) $f = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$, oder in anderer Schreibweise $f(1) = a, f(2) = a, f(3) = b$ ist weder injektiv noch surjektiv.
(2) $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ ist injektiv und surjektiv.

7.

(1) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(2) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.

9. f und g von Aufgabe 7 oben funktionieren: Es gilt $(g \circ f)(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was eine bijektive Funktion ist, aber weder f noch g sind bijektiv!