Kapitel 4: Grundbegriffe der Graphentheorie

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

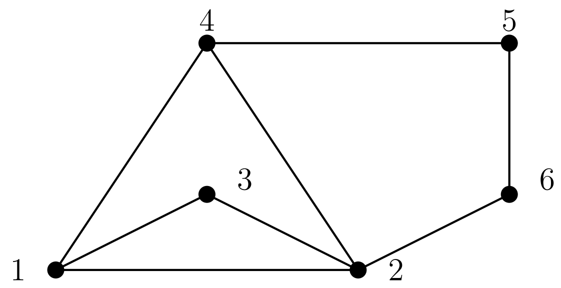
"The origins of graph theory are humble, even frivolous."
– R J. Wilson et al, *Graph Theory: 1736-1936*

1. Einführung

Graphen gehören zu den einfachsten mathematischen Objekten überhaupt. Sie bestehen aus einer gegebenen Menge von *Punkten*, sowie einer Liste von *Verbindungen*, die gewisse Paare von Punkten verbinden. Im täglichen Leben gibt es viele Situationen, die man mit Graphen modellieren kann, zum Beispiel:

(1) Stromleitungen zwischen Stromverteilzentren
(2) Direkte Zugverbindungen (ohne Umsteigen) zwischen Städten
(3) Computer-Netzwerke
(4) Bekanntschaften unter Menschen
(5) Followers in sozialen Netzwerken

So werden Graphen bildlich dargestellt:



Interpretieren wir die Punkte oben zum Beispiel als Städte, und die Linien als Zugverbindungen, sehen wir, dass zwischen Stadt 2 und Stadt 6 eine direkte Verbindung ohne Umsteigen besteht. Will man allerdings von Stadt 3 zu Stadt 6, muss man mindestens 1 Mal umsteigen (wenn man über Stadt 2 geht), und von Stadt 3 zu Stadt 5 schafft man es nicht ohne 2-maliges Umsteigen.

Die Theorie der Graphen wurde vom grossen Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler* (1707–1783) ins Leben gerufen, und zwar mit seiner Lösung zum *Königsberger Brückenproblem*: als Euler Zeit in der Stadt Königsberg vebrachte, fragte er sich, ob er einen

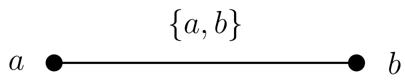
Spaziergang machen könne, der ihn genau einmal über jede der 7 Brücken[1] von Königsberg führen würde. (Euler fand ein einfaches und elegantes Argument, das bewies, dass ein solcher Spaziergang unmöglich ist.)

2. Menge von (ungeordneten) Paaren

Sei X eine beliebige Menge, dann bezeichnen wir mit $[X]^2$ die Menge aller Teilmengen von X, die genau 2 Elemente beinhalten - auch genannt: Menge aller "ungeordneten Paare". Formell korrekt schreibt sich das so

$$[X]^2 = \big\{\{a, b\} : (a, b \in X) \wedge (a \neq b)\big\}.$$

Jetzt natürlich gleich die Frage, wozu wir das brauchen. Die Antwort ist, dass wir in Graphen jede Verbindung von zwei Punkten a, b schlicht und einfach als 2-er Menge $\{a, b\}$ schreiben:



Beispiel 2.1. Sei $X = \{i, j, k\}$. Jetzt wollen wir $[X]^2$ explizit aufschreiben, in Listenform sozusagen. Das geht so:

$$[X]^2 = \big\{\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}\big\}.$$

Man hätte auch schreiben können

$$[X]^2 = \big\{\{j, i\}, \{k, j\}, \{k, i\}\big\},$$

und unzählige andere Reihenfolgen - das ist jedes Mal die gleiche Menge aller 2-er Mengen!

Kleine Zwischenfrage für das Beispiel $X = \{i, j, k\}$ oben: Wie sieht es mit der Menge $\{i, i\}$ aus, haben wir

$$\{i, i\} \in [X]^2?$$

Nein, denn die Menge $\{i, i\}$ besteht nur aus 1 Element, nämlich i, das heisst also wir haben

$$\{i, i\} = \{i\}.$$

In den "Club" $[X]^2$ werden aber nur Mitglieder mit 2 Elementen aufgenommen, wir haben also

$$\{i\} = \{i, i\} \notin [X]^2.$$

Übung 2.2. Für $X = \{1, 2, 3, 4\}$ schreibe die Menge $[X]^2$ explizit auf.

Beispiel 2.3. Betrachten wir $X = \{1, 2, 3\}$. Was ist ein Beispiel einer 2-elementigen Teilmenge von X? Nehmen wir $\{1, 3\}$ (es gibt auch andere). Aus dem Kurs über Mengenlehre wissen wir, dass es bei Mengen **nicht auf die Reihenfolge** ankommt: die Information,

[1]für ein Setup der Brücken im damaligen Königsberg, google nach "Königsberger Brückenproblem"

die in einer Menge drinsteckt, ist nur, welche Elemente in der Menge enthalten sind, und welche nicht. Wir haben also

$$\{1,3\} = \{3,1\},$$

es handelt sich also nicht um 2 verschiedene Mengen, sondern um eine und dieselbe Menge.

Übung 2.4. Wenn $X = \{1,\ldots,n\}$, also n Elemente hat, wieviele Elemente hat $[X]^2$?

Bitte versuche die Aufgabe erst selber zu lösen, bevor du gleich unten die Lösung nachliest.

2.1. **Lösung zur Übung.** Sei $X = \{1,\ldots,n\}$. Jedes Element von X hat die Form $\{a,b\}$, wobei a,b Zahlen aus der Menge $X = \{1,\ldots,n\}$ sind. Wir gehen schrittweise vor zum Zählen dieser 2er-Mengen: Nehmen wir zuerst eimal nur 1 Element heraus. Wieviele Möglichkeiten haben wir da? Genau: n Möglichkeiten, wir nehmen eine der Zahlen in $\{1,\ldots,n\}$.

Und wieviele Möglichkeiten haben wir, das 2. Mitglied der 2er-Menge zu wählen? $n-1$ Möglichkeiten, weil wir ja eine andere Zahl wählen sollen. (Die Menge $\{k,k\}$ enthält, wie wir im Kurs 2 über Mengenlehre gesehen haben, nur 1 Element, nämlich k, das heisst $\{k,k\} = \{k\}$!).

Also für jede der n Möglichkeiten, ein 1. Element zu wählen, haben wir $n-1$ Möglichkeiten, ein 2. Element dazuzuwählen und landen bei

$$n(n-1).$$

Aber Achtung! So zählen wir jede Menge doppelt: die Menge $\{1,3\}$ und die Menge $\{3,1\}$ haben wir je einmal, also zusammengezählt 2 Mal, gezählt, obwohl es sich um eine und dieselbe Menge handelt.

Wenn wir also jede Menge doppelt zählen mit der Formel $n(n-1)$, dann müssen wir noch durch 2 teilen, bekommen also als Anzahl der Elemente von $[X]^2$ den Term

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Noch eine letzte Bemerkung: Man könnte sich fragen, ob man immer eine ganze Zahl erhält, wenn man $n(n-1)$ durch 2 teilt? Könnte es nicht auch einen Bruch $(\ldots 5)$ geben, was natürlich sehr unangenehm wäre?

Bitte kurz überlegen.

Die Antwort ist: Nein, es kann nicht passieren, denn von den Zahlen n und $n-1$ ist genau eine **gerade**, also ist auch $n(n-1)$ gerade - und wir können sorglos durch 2 dividieren.

3. Formell korrekte Definition

Ein Graph ist ein geordnetes Paar[2], bestehend aus 2 Mengen:

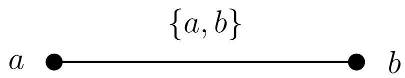
(1) V, die Menge der Punkte (auf Englisch: *vertices*)
(2) E, die Menge der Verbindungen (auf Englisch: *edges*).

Die folgende formale Definition ist erstaunlich kurz und knackig – wie es sich für saubere Mathematik gehört:

Definition 3.1. Ein *Graph* G ist ein geordnetes Paar $G = (V, E)$, wobei $V \neq \emptyset$ eine (nichtleere) Menge ist, und $E \subseteq [V]^2$.

That's it!

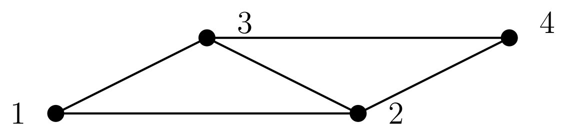
Wir sehen also, dass das Konzept einer *Verbindungslinie* zwischen den Punkten $a, b \in V$ schlicht durch die 2-er Menge $\{a, b\} \in E$ modelliert wird.



Übung 3.2. Zeichne folgende Graphen $G = (V, E)$ auf:

(1) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $E = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\big\}$;
(2) $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, e\}\big\}$;

Übung 3.3. Bestimme die Mengen V und E für den untenstehend gezeichneten Graphen:



Falls $G = (V, E)$ ein Graph auf der Vertex-Menge V ist und wir haben

$$\{a, b\} \in E,$$

das heisst, a und b bilden eine Verbindung oder auf Englisch eine *edge*, dann sagen wir auch, a, b sind *Nachbarn* oder *benachbart*.

Definition 3.4. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein vertex (Punkt), dann definieren wir die Menge der Nachbarn von v in G durch

$$N(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in E\}.$$

Der *Grad* (engl: *degree*) von v ist die Anzahl Nachbarn:

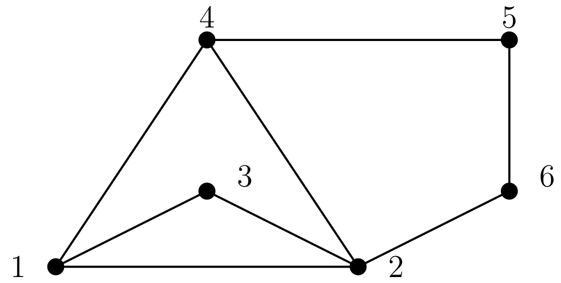
$$\deg(v) = |N(x)|.$$

[2]geordnete Paare haben wir in Kurs 3, Funktionen und Relationen, Abschnitt 1 "Geordnete Paare", kennengelernt

(Wir erinnern uns: ist X eine endliche Menge, dann bezeichnet $|X|$ die Anzahl der Elemente von X.)

Beachte dass v **kein** Nachbar von sich selber ist, denn $\{v, v\} = \{v\}$ und E enthält ausschliesslich 2-elementige Mengen, also $\{v, v\} = \{v\} \notin E$!

Beispiel 3.5. Betrachten wir folgenden Graphen:



Hier haben wir

(1) $N(1) = \{2, 4\}$ und somit $\deg(1) = 2$,
(2) $N(2) = \{1, 3, 4, 6\}$ und somit $\deg(2) = 4$,
(3) $N(6) = \{2, 5\}$ und somit $\deg(6) = 2$.

Übung 3.6. Nachbarschaftsmengen berechnen:

(1) Bestimme für den Graphen aus Übung 3.2 die Menge $N(1)$ und den Grad $\deg(1)$.
(2) Bestimme für den Graphen aus Übung 3.3 die Menge $N(4)$ und den Grad $\deg(4)$.

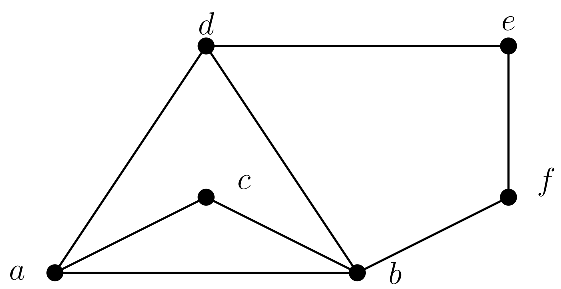
Wir definieren nun das wichtige Konzept eines Unter- oder *Sub*-Graphen. Wenn wir einen Graphen $G = (V, E)$ gegeben haben und $V' \subseteq V$ eine Untermenge ist, dann übernehmen wir alle Verbindungen (edges) von G, die schon ganz innerhalb der Teilmenge V' liegen. Exakt ausgedrückt:

Definition 3.7. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V' \subseteq V$ dann ist das Paar

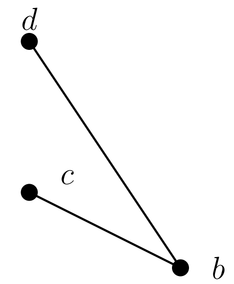
$$(V', E \cap [V']^2)$$

ein *induzierter Subgraph auf der Menge* V' von G.

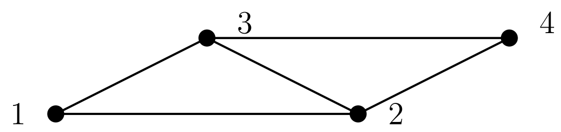
Beispiel 3.8. Sei folgender Graph auf der Menge $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ gegeben:



Sei $V' = \{b, c, d, e\}$. Dann sieht der induzierte Subgraph auf V' so aus:



Übung 3.9. Sei folgender Graph gegeben auf $V = \{1, 2, 3, 4\}$:



Sei $V' = \{1, 3, 4\}$. Zeichne den von der Menge V' induzierten Subgraphen.

Übung 3.10. Sei folgender Graph $G = (V, E)$ gegeben:

$$V = \{a, b, c, d, e\},\ E = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, e\}\big\}.$$

Sei $V' = V \setminus \{d\}$. Sei $G' = (V', E')$ der induzierte Subgraph auf V'. Schreibe die Elemente der Menge $E' = E \cap [V']^2$ explizit auf.

Definition 3.11. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst *vollständig* (engl: *complete*), falls $E = [V]^2$, das heisst, falls jeder Punkt mit jedem anderen Punkt verbunden ist. Den vollständigen Graphen auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit K_n.

Übung 3.12. Sei $n > 1$ gegeben und betrachte den vollständigen Graphen K_n.

(1) Wieviele edges (Verbindungen) gibt es in K_n?
(2) Sei $k \in \{1, \ldots n\}$. Bestimme $N(k)$ und $\deg(k)$.
(3) Muss ein induzierter Subgraph eines vollständigen Graphen wieder vollständig sein?

Übung 3.13. (*) Ein unendlicher Graph...! Auf der Menge $V = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ seien Zahlen m, n verbunden, falls 1 der einzige gemeinsame Teiler (und somit der *grösste* gemeinsame Teiler) von m und n ist. Formell: wir setzen[3]:

$$E = \big\{\{m, n\} : m, n \in V \wedge (\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) : \neg((k \mid m) \wedge (k \mid n)))\big\},$$

wobei $k \mid n$ bedeutet, dass k die Zahl n teilt[4]. Also bildet eine Zweiermenge $\{m, n\} \in [\mathbb{N}]^2$ genau dann ein edge (Verbindung), falls keine Zahl $k > 1$ **gleichzeitig** m und n teilt.

Sei P die Menge der Primzahlen $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$. Sei $G = (V, E)$. Wie sieht der auf P induzierte Subgraph aus?

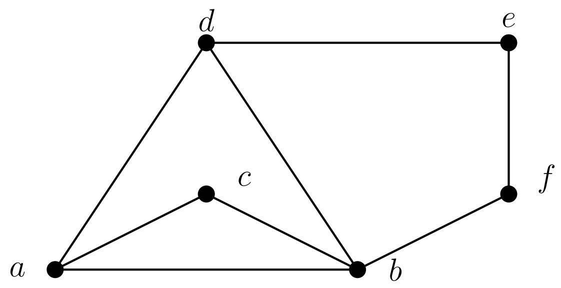
[3]bitte nachvollziehen, warum dieser Formalismus korrekt ist, oder dann bei mir nachfragen

[4]Der Ausdruck $k \mid n$ ist also eine Abkürzung für die längere logische Formel $(\exists a \in \mathbb{N}) : ak = n$

4. Pfade, Zusammenhang, Komponenten

Pfade sind konzeptuell genau das, was wir uns in einem Graphen vorstellen würden: ein Spaziergang von Punkt zu Punkt, sodass jeder Schritt entlang einer Verbindung stattfindet.

Betrachten wir diesen Graphen hier:



Wir können von c nach e über folgende, unterschiedlich lange Pfade laufen:

(1) $c \to b \to f \to e$,
(2) $c \to a \to d \to e$,
(3) $c \to b \to c \to b \to a \to d \to e$.

Es gibt unendlich viele weitere Möglichkeiten. Wir sehen aber, dass auch der kürzeste Pfad von c nach e mindestens 3 edges (Verbindungen) entlangläuft, und darum sagen wir, die *Distanz* von c und e betrage 3; in Graph-Notation:

$$d(c, e) = 3.$$

Es folgt die formelle Definition eines Pfades:

Definition 4.1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und seien $v \neq w \in V$ gegebene Punkte. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann heisst eine Abbildung

$$p : \{1, \dots n\} \to V$$

ein Pfad von v nach w, falls

(1) $p(1) = v$ und $p(n) = w$ (dh, die Anfangs- und Endpunkte sind v respektive w), und
(2) $\{p(k), p(k+1)\} \in E$ für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$, dh wir bewegen uns immer entlang von edges.

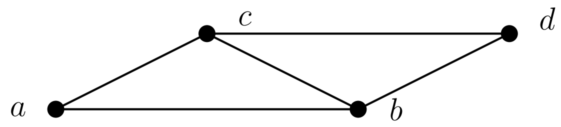
Die *Länge* des Pfades p definieren wir als $n - 1$, da wir $n - 1$ edges entlang laufen.

Beispiel 4.2. Im vorherigen Graphen ist im Sinne der folgenden Definition ein möglicher Pfad von c nach e gegeben durch

$$n = 4,\ p : \{1, 2, 3, 4\} \to V \text{ mit } p(1) = c, p(2) = b, p(3) = f, p(4) = e.$$

Die Länge des Weges ist $n - 1$, also 3.

Übung 4.3. Finde in folgendem Graph einen Weg der Länge 2, und einen anderen Weg der Länge 3 von a nach d:



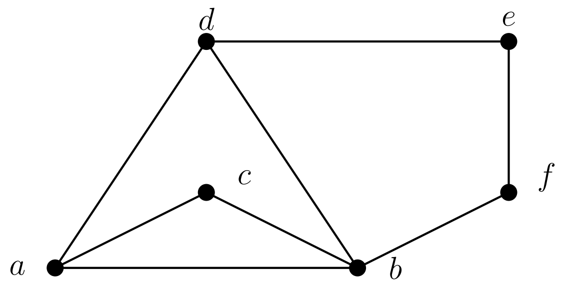
Auch was ein zusammenhängender Graph sein soll, ist mit dem Konzept des Pfades unmittelbar einleuchtend:

Definition 4.4. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst *zusammenhängend* (engl: *connected*), falls für jede Auswahl von 2 verschiedenen Punkten v, w ein Pfad existiert von v nach w.

Ist ein Graph nicht zusammenhängend, dann zerfällt er in verschiedene, maximale zusammenhängende Teilgraphen, die wir die *(Zusammenhangs-)Komponenten* des Graphen nennen - auch das wieder ein sehr intuitives Konzept!

Übung 4.5. Bleibt der folgende Graph zusammenhängend, wenn man 1 Verbindung entfernt?

Betrachten wir diesen Graphen hier:



Wie ist es, wenn wir 2 Verbindungen entfernen? Oder sogar 3? Bleibt der Zusammenhang bestehen?

Wenn der Zusammenhang nicht bestehen bleibt: in wieviele Komponenten zerfällt der Graph?