Kapitel 6: Grundzüge der Kombinatorik

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

"When angry, count to 10 before you speak. If very angry, count to 100."
– Thomas Jefferson

1. Einführung

Zählen können wir seit früher Schulzeit. Sobald es jedoch um grössere Zahlen und komplexere Sachverhalte geht, wie etwa in der folgenden Frage, kann man nicht mehr in Sekundenschnelle Antworten finden:

> Wieviele 6-stellige numerische PINs gibt es, in der nicht alle Ziffern strikt aufsteigend sortiert sind?[1]

Die Disziplin der *Kombinatorik* befasst sich unter anderem mit der korrekten Beantwortung von Fragen wie der obigen. Auch zum Abschätzen von Datenmengen, Anzahl Rechenoperationen, oder anderer Fragen, die im Umgang mit Berechnungen in der Informatik auftauchen, sind kombinatorische Methoden zentral.

2. Additionsprinzip

Hier ist ein einfaches Einführungsbeispiel.

Beispiel 2.1. Nehmen wir an, ein Restaurant offeriere 9 Vorspeisen und 12 Hauptspeisen. Wenn wir genau eine Spiese wählen dürfen, auf wieiviele Arten können wir das tun?

Lösung. Es ist einfach zu sehen, dass wir hier einfach die beiden Zahlen 9 und 12 addieren müssen, um zur korrekten Lösung 21 zu gelangen.

> Das **Additionsprinzip** besagt, dass wenn Ereignis A auf m Arten eintreten kann, und Eregnis B auf n davon disjunkten[a] Arten, dann kann das Ereignis "A oder B" auf $m+n$ Arten eintreten.
>
> [a]disjunkt: es kann nicht passieren, dass A und B *zugleich* eintreten

[1]Ein PIN, in dem nicht alle Ziffern strikt aufsteigen, ist `141770`. Jedoch nicht zählen würden wir beispielsweise den PIN `134689`.

Beispiel 2.2. Wieviele 2-er Buchstaben-Kombinationen (zb `xy`, `am`) beginnen mit den Buchstaben `'a'` oder `'b'`?

Lösung. Mit Buchstabe `a` beginnen genau 26 solche Kombinationen, also die 2er-Strings `aa` bis `az`. Mit demselben Argument bekommen wir 26 weitere 2er-Strings, die mit dem Buchstaben `b` beginnen. Jetzt können wir das Additionsprinzip anwenden, da die *Disjunktheits-Forderung* trivialerweise erfüllt ist: kein 2er-String beginnt sowohl mit `a` als auch mit `b`! Folglich bekommen wir als Lösung

$$26 + 26 = 52.$$

Übung 2.3. Wieviele 6-stellige PIN-Codes (der "niedrigste" ist `00000` und der "höchste" ist `99999`) starten mit einer der Ziffern `3,4` oder `5`?

Man kann übrigens das Additionsprinzip auch in der Sprache der Mengenlehre formulieren:

Additionsprinzip für Mengen: Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \varnothing$ (dh die Mengen haben keine gemeinsamen Elemente, sind also *disjunkt*), dann gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Wir nehmen folgende Definition mit, sie wird später eine wichtige Rolle spielen

Definition 2.4. Zwei Mengen A, B heissen *disjunkt*, falls

$$A \cap B = \varnothing,$$

das heisst, falls A und B keine gemeinsamen Elemente enthalten.

3. Multiplikationsprinzip

Hier wiederum ein einfaches Einführungsbeispiel.

Beispiel 3.1. Meine Sommergarderobe ist relativ klein: ich besitze 5 Shorts und 13 T-Shirts. In wievielen Kombinationen kann ich diese Kleider kombinieren?

Lösung. Nehme ich meine Lieblings-Shorts, die orange, kann ich dazu eines von 13 T-Shirts wählen. Auch bei Shorts No. 2, die blaue, die ich auch heiss liebe (aber nicht ganz wie die orange), besteht mein Auswahl-Universum an T-Shirts wieder aus 13 T-Shirts. Das kann ich für jede meiner 5 Shorts so machen und bekomme also

$$5 \cdot 13 = 65$$

Kombinationsmöglichkeiten.

Das **Multiplikationsprinzip** besagt, dass wenn Ereignis A auf m Arten eintreten kann, und für *jede* Möglichkeit von A kann Eregnis B auf n Arten eintreten, dann kann das Ereignis "A und B" auf $m \cdot n$ Arten eintreten.

Übung 3.2. Früher bestanden die Nummernschilder von Schottland aus 3 Buchstaben gefolgt von 3 Ziffern. Wieviele mögliche solche Nummernschilder gibt es?

Man kann übrigens das Multiplikationsprinzip auch in der Sprache der Mengenlehre formulieren – wir haben das schon in Kapitel 3 zum Thema "Kartesisches Produkt" gemacht:

Multiplikationsprinzip für Mengen.
Seien A, B Mengen, dann gilt

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

4. Inklusions-Exklusions-Prinzip

Wir beginnen wieder mit einem Einführungsbeispiel.

Beispiel 4.1. Erinnerst du dich an den Sportclub aus dem Kurs 4 über `SQL`? Nun, alle diese Leute betreiben gerne Sport, und sie haben wie zu erwarten, verschiedene Präferenzen. Der Club befindet sich auf dem Land, und dementsprechend fokussieren wir auf die folgenden 3 Sportarten:

- Hornussen (A)
- Schiessen (B)
- Jassen[2] (C)

Am Jahresanlass des Sportvereins wurden die Mitglieder gebeten, ihre Sportarten aus A, B, C anzukreuzen, die ihnen liegen (sie konnten auch mehrere Sportarten, oder gar keine, ankreuzen). Hier ist die Tabelle der Auswahlen:

Angekreuzte Sportart	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Anzahl Mitglieder	20	13	26	9	15	7	5

Wieviele Leute mögen mindestens eine der Sportarten A, B, C? Die Antwort ist **nicht** 95, die Summe der Zahlen oben. Versuche zuerst selber die richtige Antwort zu finden.

Dieses Beispiel wird dann in einem Video vorgelöst.

4.1. Nur 2 Mengen.

Wissen wir, dass Menge A aus 10 Elementen, und Menge B aus 8 Elementen besteht, können wir noch nichts über

$$|A \cup B|$$

aussagen (der Anzahl Elemente, die in A oder B liegen):

- Es könnte sein, dass A, B disjunkt sind, dann haben sie also keine gemeinsamen Elemente, folglich könnten wir das *Additionsprinzip* anwenden und schliessen dass

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 18.$$

[2] Wird Schach als Sport aufgeführt, darf man dasselbe auch mit Jassen tun!

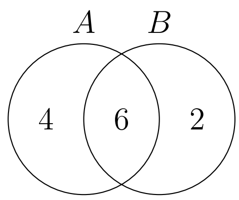
- Es könnte aber auch sein, dass $B \subseteq A$ (dh B ist eine *Teilmenge* von A, also alle 8 Elemente von B liegen schon in der Menge A drin, die 10 Elemente hat), was bedeuten würde, dass
$$|A \cup B| = |A| = 10.$$

Ohne zusätzliche Information können wir also die Frage nach $|A \cup B|$, der Anzahl Elemente von $A \cup B$, nicht beantworten.

Wissen wir aber, dass A und B gemeinsame Elemente haben, und zwar 6 an der Zahl (dh $|A \cap B| = 6$), dann können wir die ganze Geschichte in disjunkte Mengen aufteilen und dann das Additionsprinzip verwenden, denn es gilt:

> Wenn $A \cap B$ 6 Elemente umfasst, dann umfasst die Menge $A \setminus B$ (die Menge der Elemente, die in A aber nicht B liegen) 4 Elemente, da ja A selber 10 Elemente hat. Dasselbe Argument führt zu $|B \setminus A| = 2$. Also gilt
> $$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = 4 + 6 + 2 = 12,$$
> da alle beteiligten Mengen disjunkt sind!

Am einfachsten löst man diese Aufgabe grafisch mit dem untenstehenden **Venn-Diagramm**:



Man kann aber auch anders auf das korrekte Resultat 12 kommen:

> Addieren wir die Mengen-Anzahlen $|A| = 10$ und $|B| = 8$, bekommen wir 18, dann haben wir aber die gemeinsamen Elemente, dh die Elemente von $A \cap B$ **doppelt** gezählt, müssen diese also wieder *subtrahieren* und bekommen 18-6 = 12.

Übung 4.2. Begründe, warum die beiden Zählarten oben immer auf dasselbe Resultat führen.

Die 2. Rechenart oben kann man zu einer kompakten Regel verdichten:

> **Inklusions-Exklusions-Prinzip für 2 Mengen.**
> Seien A, B Mengen, dann gilt
> $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Der Name *Inklusions-Exklusions-Prinzip* rührt daher, dass man zunächst die gemeinsamen Elemente von A und B doppelt zählt, dann wieder “rausschmeisst”.

Je mehr Mengen involviert sind, desto komplizierter wird dieser Inklusions-Exklusions-Mechanismus.

Übung 4.3. (*) Zeige das Inklusions-Exklusions-Prinzip für 3 Mengen A, B, C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

5. Binomialkoeffizienten

Wieder ein Beispiel:

Beispiel 5.1. Am Salatbuffet gibt es 12 Salate. Im Standard-Salatmenu ist die Wahl von genau 3 Salaten inbegriffen. Wieviele Arten von 3 Salaten aus den 12 Salaten gibt es?

Dieses Beispiel werden wir gleich sauber durchrechnen.

Wir definieren zuerst eine Zahl namens "Binomialkoeffizient" sozusagen semantisch, und geben dann erst später eine konkrete Berechnungsformel für die Zahl an.

Binomialkoeffizient.
Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \geq 0$ und jede ganze Zahl k mit $0 \leq k \leq n$ definieren wir eine natürliche Zahl

$$\binom{n}{k},$$

gelesen als "n tief k", die die Anzahl Möglichkeiten bezeichnet aus total n Objekten genau k Objekte auszuwählen.[a]

[a] Bemerkung:Auf Englisch wird $\binom{n}{k}$ gelesen als "n choose k", was der Bedeutung der Zahl besser gerecht wird als der deutsche Ausdruck.

Bemerkung. Wir haben bisher die Zahl $\binom{n}{k}$ nur *ihrer Bedeutung nach (semantisch)* definiert, aber noch nicht explizit. Das machen wir schrittweise via sogenannte *Rekursion*. Das ist ein Verfahren, wie es oft auch in der Informatik angewendet wird. Um Rekursion geht es im folgenden kurzen Abschnitt.

5.1. **Rekursion.** Der Prozess der *Rekursion*[3] bedeutet die Rückführung eines Problems auf ein kleineres Problem[4]. Wollen wir also unserer Cousine zum Geburtstag 2 Torten backen, weil viele Gäste vorbeischauen wollen, müssen wir zuerst wissen, wie man überhaupt *eine* Torte bäckt.

Es folgt ein etwas mathematischeres Beispiel für eine Rekursion.

[3] lat *re-currere*, "zurücklaufen"

[4] "Inside every problem, there is a smaller problem trying to get out." – Arthur Cohn, *Murphy's Law Complete*

Beispiel 5.2. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir ihre *Fakultät* $n!$ - eine Zahl, die später im Kapitel über *Permutationen* auftauchen wird - folgendermassen:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Beachte, dass man zB 5! berechnen kann als $5! = 5 \cdot 4!$. Allgemein kann man folgende *Rekursionsrelation* schreiben:

- $n! = n \cdot (n-1)!$ für $n \geq 2$. Das ist die Rückführung des Falles von n auf $n-1$.
- $1! = 1$. Da man nicht "ewig heruntersteigen kann" muss die Rekursion für den tiefsten Wert $n = 1$ "verankert" werden, und da sind wir beim wichtigen Konzept der **Rekursionsverankerung**!

5.2. **Rekursionsrelation für $\binom{n}{k}$.** Für die bisher nur abstrakt definierte Zahl $\binom{n}{k}$ können wir folgende Beobachtungen machen. Wir erinnern uns, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl Arten bezeichnet, auf die wir genau k Objekte aus n Objekten auswählen können.

Jetzt kommt ein Trick!

Wir fixieren ein "Lieblings-Objekt" unter den n Objekten und taufen es x^*.

Jetzt gilt für eine Auswahl von k Objekten aus den total n Objekten genau einer von 2 sich ausschliessenden Fällen:

- FaIl 1: In der Auswahl der k Objekte ist x^* dabei, wir wählen also aus den übrigen $n-1$ Elementen noch die restlichen $k-1$ aus.
- Fall 2: In der Auswahl der k Objekte ist x^* *nicht* dabei, wir wählen also aus den übrigen $n-1$ Elementen alle k Elemente aus

Die Anzahl Arten, wie wir Fall 1 erfüllen können, ist $\binom{n-1}{k-1}$ und die Anzahl Arten, wie wir Fall 2 ausführen könnennist $\binom{n-1}{k}$. Da sich Fall 1 und 2 ausschliessen, kommt das *Additionsprinzip* zum Tragen und wir erhalten

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Total Auswahlen}} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{Fall 1: } x^* \text{ in Auswahl}} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{Fall 2: } x^* \text{ nicht in Auswahl}}$$

Wir wissen also den Fall $n, k > 0$ auf $n-1$ und $k-1$, also um 1 kleinere Zahlen zu reduzieren. Aber irgendwann kommen wir bei 0 an und es kann nicht mehr weitergehen! Das ist dann die *Rekursionsverankerung.*

Auf wieviele Arten kann man aus n Objekten $k = 0$ Objekte auswählen? Auf genau 1 Art: indem man nichts auswählt! Also haben wir

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ für alle } n \geq 0,$$

und das ist unsere Rekursionsverankerung. Zusammenfassend können wir sagen:

Rekursion für $\binom{n}{k}$.
Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \geq 1$ und jede ganze Zahl k mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

- (Rekursionsrelation:) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $n \geq k > 0$;
- (Rekursionsverankerung:) $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \geq 0$.

Übung 5.3. Berechne mithilfe der obigen Rekursionsrelation und der Rekursionsverankerung folgende Binomialkoeffizienten:

(1) $\binom{1}{0}$,
(2) $\binom{2}{0}$,
(3) $\binom{2}{1}$,
(4) $\binom{n}{1}$ für jedes $n > 2$,
(5) $\binom{3}{2}$,
(6) $\binom{4}{2}$,
(7) $\binom{5}{2}$,
(8) $\binom{5}{3}$.

Eine explizite Formel für $\binom{n}{k}$ werden wir später herleiten.

6. Permutationen

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Antwort auf die Frage

> Auf wieviele Arten können wir n Objekte anordnen?

Die Antwort gibt das schon vorher eingeführte *Permutationsprinzip*: Um den 1. Platz zu besetzen, haben wir n Auswahlmöglichkeiten. Für jede Wahl für den 1. Platz können wir den 2. Platz mit einem der $(n-1)$ verbleibenden Objekte besetzen. Das gibt also $n(n-1)$ Möglichkeiten, die ersten beiden Plätze zu besetzen. Wir sehen wie es weitergeht: Es gibt

$$n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Arten, alle n Plätze zu besetzen.

Für Permutationen verwendet man auch die Schriftweise $P(n)$, also $P(n) = n!$.

7. Variationen mit Wiederholung

Wir haben 26 Buchstaben und 10 Ziffernsymbole. Wieviele Strings der Länge 7 (= Format der britischen Nummernschilder) kann man mit diesen 36 Zeichen bilden? Antwort:

$$36^7 \simeq 7.8 \cdot 10^{10},$$

also ca 78 Milliarden (das würde für jeden Menschen auf der Erde mehr als 9 Nummernschilder geben).

Wenn es auf die Reihenfolge darauf ankommt, spricht man von “*Variationen*”.

Allgemein: Man kann n^k Variationen mit Wiederholungen der Länge k aus n Objekten bilden.

8. Variationen ohne Wiederholung

Wiederum eine Anwendung des Multiplikationsprinzips. Auf wieviele Arten können wir k Objekte aus n auswählen, wobei es auf die Reihenfolge ankommt? Antwort:

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{\text{total } k \text{ Faktoren}}$$

Diese Formel kann man auch etwas kompakter mithilfe der oben eingeführten Fakultät darstellen:

$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\overbrace{(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}^{=(n-k)!}}{(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}$
$= \frac{n!}{(n-k)!}$ Diese Anzahl Anordnungen nennt man auch *Variationen*, und man verwendet dafür die Kurzform $V(n,k)$, also $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

9. Kombinationen ohne Reihenfolge: Explizite Formel für $\binom{n}{k}$

Kehren wir zu den Binomialkoeffizienten zurück. Dort ging es um die Frage, auf wieviele Arten wir k Objekte von n Objekten auswählen können, *ohne* dass uns die Reihenfolge interessiert.

Übung 9.1. Zeige, dass wenn wir obige Formel benutzen, wir jede Menge von k Objekten genau $k!$ mal gezählt haben!

Die Aussage in der obige Übung gibt uns den Schlüssel für eine explizite Formel: In der Zahl der Kombinationen müssen wir also einfach durch $k!$ dividieren, da wir ja jede Auswahl von k Elementen $k!$-fach gezählt haben, als wir mit Reihenfolge rechneten!

Folglich gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}.$$

Die Anzahl Auswahlen von k Objekten aus n Objekten nennt man wie schon angetönt *Kombinationen* und man verwendet auch das Symbol $C(n,k)$, also $C(n,k) = \binom{n}{k}$.

10. Übungen

1. Mit einem Oldschool-Freund, der tatsächlich noch Filme auf DVD hat, willst du einen gemütlichen Filmabend verbringen. Er hat 12 Romantik-Filme, 4 Dramen und 9 Krimis.

Ihr wollt 3 Filme schauen, aus jedem Genre (Romantik, Drama, Krimi) genau 1 Film. Auf wieviele Arten kann man das Abendprogramm zusammenstellen?

2. Über zwei Mengen A, B wissen wir, dass $|A| = 10$ und $|B| = 14$.

(1) Was ist der grösste mögliche Wert von $|A \cap B|$?
(2) Was ist der kleinste mögliche Wert von $|A \cap B|$?
(3) Was sind die möglichen Werte für $|A \cup B|$?

3. Unter den Mitarbeitern einer Firma sei P die Menge der MA die *Portugiesisch* sprechen, R die Menge der MA, die *Rumänisch* sprechen, und S die Menge der MA, die *Spanisch* sprechen. Wir wissen folgendes:

(1) $|P| = 50, |R| = 45, |S| = 40$,
(2) $|P \cap R| = 20, |P \cap S| = 15, |R \cap S| = 23$,
(3) $|P \cap R \cap S| = 12$.

Aufgaben:

(1) Beschreibe $(P \cup S) \setminus R$ in Worten: Was ist das für eine Menge von Mitarbeitern?
(2) Wie gross ist die Zahl $|(P \cup S) \setminus R|$?

4. Die Primfaktorisierung der Zahl $735'000$ lautet

$$735'000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2.$$

Finde alle Teiler von $735'000$.

5. Meine Garderobe besteht aus 5 Hemden, 4 Hosen und 12 Krawatten. Wieviele Outfits kann ich daraus kreieren?

6. Ein *binärer String* ist eine Abfolge von 0en und 1en, wobei es auf die Reihenfolge darauf ankommt, wie jede/r Informatiker/in schon schmerzhaft erfahren musste. Zum Beispiel ist 0100111 ein binärer String der Länge 7.

(1) Wieviele binäre Strings der Länge 7 gibt es insgesamt?
(2) Wieviele von diesen Strings haben nicht 2 oder mehr mal dasselbe Bit hintereinander? (Also enthalten nicht 00 oder 11.)
(3) Wieviele binäre Strings der Länge 7 beinhalten mindestens einmal 00 oder 11?
(4) Wieviele binäre Strings der Länge 7 enden auf 1100?
(5) Wieviele binäre Strings der Länge 7 enden auf 1100 oder 0011?

7. Wieviele natürliche Zahlen ≤ 1000 sind ein Vielfaches von $3, 5$ oder 7? Tipp: Inklusions-Exklusions-Prinzip.

8. Im Subway Restaurant kann man sich Sandwiches zusammenstellen lassen und man kann aus 11 Zutaten genau 3 auswählen.

(1) Auf wieviele Arten kann man sein Sandwich zusammenstellen, wenn man 3 Zutaten nimmt?
(2) Auf wieviele Arten kann man sein Sandwich zusammenstellen, wenn man *höchstens* 3 Zutaten, aber mindestens 1 Zutat nimmt?
(3) Auf wieviele Arten kann man sein Sandwich mit 3 Zutaten zusammenstellen, wenn man *auf keinen Fall* Zwiebeln in sein Sandwich will?
(4) Auf wieviele Arten kann man sein Sandwich mit 3 Zutaten zusammenstellen, wenn man *auf jeden Fall* Zwiebeln in sein Sandwich will?

9. Wieviele Bit-Strings (= binäre Strings) gibt es mit den folgenden Eigenschaften?

(1) Sie enthalten genau 5 mal eine 1.
(2) Sie enthalten genau 5 mal eine 1 und enden mit 101.
(3) Sie beginnen mit 11 und enden auf 101 (oder beides).
(4) Sie beginnen mit 11 und enden auf 101 (oder beides) und enthalten genau 5 mal eine 1.

10. Aus einem Team von 11 Mitgliedern wollen wir ein Pikett-Team zusammenstellen, das mindestens 3 Teammitglieder umfasst. Auf wieviele Arten können wir das tun?

11. (*) Während einer langweiligen Sitzung leere ich mein Portemonnaie aus und entdecke dort drin 6 Einfrankenstücke und 4 Zweifrankenstücke. Auf wieviele Arten ich diese 10 Münzen in eine Reihe legen?

12.

(1) Wieviele 6-stellige numerische PINs gibt es, in der alle Ziffern strikt aufsteigend sortiert sind?
(2) Wir kehren zurück zur ersten Frage in diesem Skript: Wieviele 6-stellige numerische PINs gibt es, in der **nicht** alle Ziffern strikt aufsteigend sortiert sind?

11. "Cheat Sheet"

Formel	**Erklärung**	**Beispiel**
$A \cap B = \varnothing \implies$ $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$	Additionsprinzip	Ich habe 4 Polo-Shirts und 5 andere T-Shirts. Wieviele Kleidungsstücke sind das?
$\lvert A \times B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$	Multiplikationsprinzip	Ich habe 7 T-Shirts und 5 Hosen. Auf wieviele Arten kann ich diese Kleider anziehen?
$\lvert A \cup B\rvert =$ $\lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$	Inklusions-Exklusions-Prinzip	Hat A 4 Elemente und B 6 Elemente und sind 3 Elemente gemeinsam. $\lvert A \cup B\rvert =?$
$P(n) = n!$	Anzahl *Permutationen* von n Objekten, also Anordnungen, wo Reihenfolge eine Rolle spielt.	Wieviele 3-stellige Zahlen ohne Wiederholung einer Ziffer lassen sich aus $3, 4, 5$ bilden?
n^k	Variationen ohne Wiederholung.	Länge-7-Wörter $(k = 7)$ mit 8 $(n = 8)$ Buchstaben.
$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Variationen mit Wiederholung.	An die 8 Läufer eines Sprints sind die 3 Medaillen Gold, Silber, Bronze zu vergeben Wie viele Möglichkeiten?
$C(n,k) = \binom{n}{k}$	Kombinationen / Auswahlen von k Objekten aus total n Objekten *ohne Reihenfolge*.	Wieviele mögliche 4er-Kommissionen aus 200 Parlamentariern sind möglich?

Anmerkung. Will man für konkrete Beispiele die oben abstrakt gegebenen Zahlen berechnen, finden sich auf wissenschaftlichen Rechnern (oder den entsprechenden Apps auf Smartphones) Tasten zu $C(n,k)$ und $V(n,k)$. Je nach App sind sie anders benannt. Genaueres kann man via Suchmaschine herausfinden.