# Kapitel 1: Logik in Alltag und Mathematik

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

*"Alle Wissenschaft ist nur eine Verfeinerung des Denkens des Alltags."*

– Albert Einstein

## 1. Einführung

Das Ziel des ganzen Repetitoriums ist, *Selbstvertrauen im Umgang mit mathematischen Begriffen* zu gewinnen und selbständig korrekte mathematische Argumente zu finden.

Ein mathematisches Argument (auch genannt: Beweis), besteht aus wohldefinierten Blöcken, nämlich präzisen *Aussagen*, und deren Verbindungsbrücken dazwischen, den *Schlussregeln*.

Wir werden sehen, dass – ganz in Anbindung an das eingangs vorgebrachte Zitat von Albert Einstein – die mathematische Logik im Alltagsdenken ihren Ursprung hat.

## 2. Aussagen

Eine *Aussage* ist eine Feststellung (im Unterschied zu "Frage", "Befehl", oder anderen Äusserungen), von der es sinnvoll ist, zu fragen, ob sie **wahr** oder **falsch** ist. Eine Aussage ist also entweder wahr oder falsch, eine dritte Möglichkeit ist nicht vorgesehen.[1] Aussagen sind somit Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Beispiele von wahren Aussagen:

(1) Paris ist die Hauptstadt Frankreichs.
(2) 9 ist durch 3 teilbar.
(3) Jeder Mensch ist ein Wirbeltier.

Beispiele von falschen Aussagen:

(1) Die Schweiz hat keine Hauptstadt.
(2) 15 ist eine Primzahl.
(3) Pilze sind eine Unterart der Tiere.

[1] Auf Lateinisch: Tertium non datur ("ein Drittes ist nicht gegeben"), es gibt verschiedene Richtungen in der Philosophie, die die Sinnhaftigkeit dieser Dychotomie anzweifeln.

Beispiele für Äusserungen, die keine Aussagen sind:

(1) Jede Primzahl ist grün.
(2) Setz dich hin!
(3) Ist rot eine Farbe?

**Übung 2.1.** Sind folgende Äusserungen Aussagen?

(1) Man sollte jede SVP-Initiative grundsätzlich ablehnen.
(2) Die letzte Initiative der SVP wurde abgelehnt.
(3) Wenn ich zu 3 nochmal 3 addiere, bekomme ich 4.
(4) Jetzt lös endlich diese Aufgabe!
(5) Ist $p$ eine Primzahl, dann sind die einzigen Teiler von $p$ die Zahlen 1 und $p$.
(6) Ist 9 eine Primzahl?

## 3. Aussagenoperatoren

Hier geht es nicht um *konkrete* Aussagen, sondern darum, wie man aus schon bestehenden Aussagen $P, Q, \ldots$ weitere Aussagen bauen kann. Dafür verwendet man **Operatoren**, die wir auch schon 1:1 im Alltag verwenden. Der "Mechanismus" der Operatoren wird beschrieben durch eine sogenannte *Wahrheitstabelle*, in der der Wert **falsch** mit **0** und **wahr** mit **1** symbolisiert wird.[2]

### 3.1. **Negation ("nicht") $\neg$.**

Ist $P$ ein Aussage, dann ist auch $\neg P$ eine Aussage, und die Wirkungsweise dieses Operators ist gegeben durch die folgende Wahrheitstabelle:

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Diese Tabelle ist so zu lesen: Ist eine Aussage $P$ mit dem Wahrheitswert 0 ("falsch") belegt, dann bekommt $\neg P$ den Wahrheitswert 1 ("wahr").[3]

### 3.2. **Konjunktion ("und") $\wedge$.**

Sind $P, Q$ Aussagen, dann ist auch $P \wedge Q$ eine Aussage, und die Wirkungsweise dieses Operators ist gegeben durch die folgende Wahrheitstabelle:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

[2]Diese 0/1-Symbolisierung haben auch diverse Programmiersprachen wie C oder Java übernommen.

[3]Die Mathematik folgt also explizit **nicht** dem berühmten Diktum des Physikers Niels Bohr: "Das Gegenteil einer tiefen Wahrheit kann wiederum eine tiefe Wahrheit sein."

3.3. **Disjunktion ("oder") $\vee$.** Sind $P, Q$ Aussagen, dann ist auch $P \vee Q$ eine Aussage, und die Wirkungsweise dieses Operators ist gegeben durch die folgende Wahrheitstabelle:

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

3.4. **Implikation ("impliziert") $\Rightarrow$.** Sind $P, Q$ Aussagen, dann ist auch $P \Rightarrow Q$ eine Aussage, und die Wirkungsweise dieses Operators ist gegeben durch die folgende Wahrheitstabelle:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Wir können die Operatoren nach belieben kombinieren und für die Kombination dann eine Wahrheitstafel aufstellen, wie hier:

| $P$ | $Q$ | $S$ | $(\neg P) \wedge (Q \vee S)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

**Übung 3.1.** Stelle wie oben eine Wahrheitstabelle für $((\neg P) \wedge Q) \vee S$ auf. Merke: Klammersetzung spielt eine Rolle!

**Übung 3.2.** Erstelle für die folgenden Aussagenvebindungen Wahrheitstabellen:

(1) $P \wedge (\neg Q)$
(2) $\neg((\neg P) \wedge Q)$
(3) $(\neg Q) \Rightarrow P$
(4) $P \wedge (\neg P)$
(5) $P \vee (\neg P)$. Diese Aussagenverbindung ist *immer wahr*, solche Aussagenvebindungen nennt man *Tautologien*.

Wir sagen, zwei Ausdrücke seien *äquivalent*, wenn sie übereinstimmende Wahrheitstabellen haben.

**Übung 3.3.** Zeige durch Erstellen von Wahrheitstabellen die folgenden Äquivalenzen:

- $\neg(P \wedge Q)$ ist äquivalent zu $(\neg P) \vee (\neg Q)$.
- $\neg(P \vee Q)$ ist äquivalent zu $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.
- $P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu
  (1) $\neg(P \wedge (\neg Q))$ und
  (2) $(\neg P) \vee Q$.

**Übung 3.4.** Bilde die Negation zu der Aussage: "Sophia ist Griechin, 30-jährig und hat blondes Haar."

## 4. Schlussregeln

Um mathematische Beweise zu formulieren, genügt es nicht, Aussagen aneinander zu reihen, sondern man zieht mittels einiger unmittelbar einleuchtenden Regeln *logische Schlüsse*. Im folgenden werden die Regeln, die man in der Mathematik benutzt, mit einfachen Beispielen aufgeführt.

### 4.1. **Modus Ponens.**

| Schema | Beispiel |
|---|---|
| $P \Rightarrow Q$ | Wenn Jumbo ein Elefant ist, dann ist er ein Säugetier. |
| $P$ | Jumbo ist ein Elefant. |
| $Q$ | Jumbo ist ein Säugetier. |

### 4.2. **Modus Tollens / Kontraposition.**

| Schema | Beispiel |
|---|---|
| $P \Rightarrow Q$ | Wenn Jumbo ein Elefant ist, dann ist er ein Säugetier. |
| $\neg Q$ | Jumbo ist kein Säugetier. |
| $\neg P$ | Jumbo ist kein Elefant. |

### 4.3. **Komposition.**

| Schema | Beispiel |
|---|---|
| $P \Rightarrow Q$ | Wenn Sarah eine Kdo-Op-MA ist, ist sie eine VBS-MA. |
| $Q \Rightarrow R$ | Wenn Sarah eine VBS-MA ist, arbeitet sie beim Bund. |
| $P \Rightarrow R$ | Wenn Sarah eine Kdo-Op-MA ist, dann arbeitet sie beim Bund. |

### 4.4. **Fallunterscheidung.**

| Schema | Beispiel |
|---|---|
| $P \Rightarrow T$ | (Beispiel unten) |
| $Q \Rightarrow T$ | ... |
| $(P \vee Q) \Rightarrow T$ | ... |

**Beispiel 4.1.** Es gibt zwei irrationale Zahlen $a, b$, sodass $a^b$ rational ist.

*Beweis.* Wir schauen uns die Zahl $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ an. Diese Zahl ist entweder rational oder irrational. Es gibt also eine Fallunterscheidung:

Fall 1: Ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational, dann können wir $a = b = \sqrt{2}$ wählen und der Beweis ist fertig.

Fall 2: Ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational, dann setzen wir $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$ und bekommen

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

was eine rationale Zahl ist und womit der Beweis auch wieder fertig ist. □

**Bemerkung 4.2.** Es ist *nicht bekannt*, welcher der beiden obigen Fälle zutrifft - aber man weiss, dass einer zutrifft und somit die Aussage von 4.1 bewiesen ist!

## 5. Quantoren

Als Abkürzung für die Formulierungen

"es gibt ...", "für alle ..."

werden der **Existenzquantor** $\exists$ und der **Allquantor** $\forall$ verwendet. Diese Quantoren werden in Verbindungen mit *Aussagen mit Variablen* $P(x)$ verwendet. Was abstrakt tönt, zeigt sich ganz natürlich auf in den Übungen, die wir gleich nach der Einführung der Schreibweise präsentieren:

| Schreibweise | Bedeutung |
|---|---|
| $\exists x \in X\ (P(x))$ | es gibt (mindestens) ein $x$ aus X, für das $P(x)$ wahr ist |
| $\forall x \in X\ (P(x))$ | für alle $x$ aus X ist $P(x)$ wahr wahr ist |

**Übung 5.1.** Sei $S$ die Menge aller Schweizer.[4] Sei $P(x)$ die von $x$ abhängige Aussage:

"$x$ ist Bundesrat."

Beurteile den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen:

(1) $\forall x \in S\ (P(x))$.
(2) $\exists x \in S\ (P(x))$.

Ein ganz wichtiges Thema ist die **Negation von Quantoren**: Die Negation von $\forall x \in A\ (P(x))$ ist $\exists x \in A\ (\neg P(x))$ (und nicht etwa $\forall x \in A\ (\neg P(x))$)! Das sieht man ganz leicht, wenn man das Beispiel oben mit den Bundesräten anschaut: Die Aussage $\forall x \in A\ (P(x))$ heisst: "Jeder Schweizer ist Bundesrat", was natürlich Quatsch ist. Die Verneinung davon ist: "Es gibt mindestens eine Person in der Schweiz, die nicht Bundesrat ist." und nicht etwa: "Für jede Person in der Schweiz gilt: sie ist nicht Bundesrat." – was bedeuten würde, dass es in der Schweiz keine Bundesräte gibt, was auch wieder falsch ist!

[4]Weibliche Formen sind immer eingeschlossen.

Analog ist die Verneinung von $\exists x \in A\ (P(x))$ die Aussage $\forall x \in A\ (\neg P(x))$.

Jetzt wollen wir diese Dinge etwas mit Übungen vertiefen.

**Übung 5.2.** Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Untersuche folgende Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt und schreibe zu jeder Aussage ihre Negation auf gemäss der obigen Negationsregel.

(1) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x < y)$
(2) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x \leq y)$
(3) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (y > x)$
(4) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ (y > x)$. (Beachte: Im Vergleich zur vorigen Aufgabe haben wir nur Quantoren vertauscht - und das macht einen Unterschied!)
(5) (*) $\exists x \in \mathbb{N}\ (\exists y \in \mathbb{N}\ (x = y^2) \land \exists z \in \mathbb{N}\ (x = 4z + 3))$.

(Das Sternchen (*) bezeichnet eine sehr anspruchsvolle Aufgabe.)

**Übung 5.3.** Sei $M$ die Menge aller zur Zeit im VBS arbeitenden Menschen. Wir definieren die von $x, y \in M$ abhängige Aussage $S(x, y)$ wie folgt:

> $S(x, y) =$ "$x$ und $y$ haben schon einmal gemeinsam an einer Sitzung teilgenommen."

Sind die folgenden Aussagen korrekt?

(1) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ (S(x, y) \Rightarrow S(y, x))$
(2) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ \forall z \in M\ \big((S(x, y) \land S(y, z)) \Rightarrow S(x, z)\big)$

**Übung 5.4.** Schreibe folgende Aussagen mit Hilfe von Quantoren in möglichst einfacher Form, dann verneine die Aussagen und übersetze sie wieder in deutsche Sätze:

(1) Jede Hütte enthält Räume mit Betten.
(2) Jede Hütte enthält (mindestens) einen Raum ohne Betten.
(3) Es gibt Hütten, die mindestens zwei Räume mit Betten haben.
(4) Es gibt Hütten mit WC, aber ohne Dusche.
(5) Jede Hütte mit Betten hat auch ein WC.

## 6. Spass mit Logikrätseln

Versuche, mindestens 5 der folgenden 10 Logikrätsel zu lösen. Challenges sind die Aufgaben 9 und 10, sie sind mit (*) markiert.

1. Jack schaut Anne an. Anne schaut George an. Jack ist verheiratet, George ist unverheiratet, und von Anne wissen wir es nicht. Gibt es eine verheiratete Person, die eine unverheiratete Person anschaut? (Hinweis: Fallunterscheidung.)

2. Fünf Freunde sind gegeneinander ein Wettrennen gelaufen. Nach der anschliessenden durchzechten Nacht können sie sich jedoch nur noch an wenige Details erinnern:

(1) Keine zwei von ihnen sind gleichzeitig im Ziel eingelaufen.
(2) Tim ist vor Lukas im Ziel eingelaufen.
(3) Janina war früher als Tim, Franz oder Lukas im Ziel.
(4) Anna ist vor Janina oder Franz im Ziel angekommen.
(5) Tim war vor Anna im Ziel oder Lukas war vor Anna im Ziel.
(6) Franz war früher als Tim im Ziel.

In welcher Reihenfolge sind die fünf eingelaufen?

3. Es waren einmal vier Freunde, die sich uneinig waren, wer von ihnen im Recht ist.

Tom : "Genau zwei von uns haben recht."
Anna : "So eng würde ich das nicht sehen, denn mindestens zwei von uns liegen falsch."
Mark : "Also, was Anna da behauptet, ist auf jeden Fall falsch."
Lisa : "Höchstens einer von uns liegt richtig."

Wer ist im Recht, und wer liegt falsch?

4. It's quiz time! Du hast die Chance auf den Hauptpreis von CHF 1 Mio, der sich hinter genau einer von 2 Türen verbirgt. (Hinter der anderen Tür ist nichts.) An jeder Tür hängt ein Schild:

Tür 1: "Hinter dieser Tür ist der Hauptgewinn, und hinter Tür 2 gibts nichts."
Tür 2: "Hinter einer der Türen ist der Hauptgewinn, und hinter der anderen nichts."

Der Quizmaster sagt dir, dass genau 1 Tür mit einer wahren Aussage angeschrieben ist. Hinter welcher Tür ist der Hauptgewinn?

5. Auf Crazy Island gibt es 3 Typen von Leuten: Solche, die immer die Wahrheit sagen, solche die immer lügen, und dann solche, die manchmal lügen, und manchmal die Wahrheit sagen. Wir bekommen folgendes Gespräch mit zwischen zwei Insulanern $A$ und $B$:

$A$: Mindestens einer von uns sagt immer die Wahrheit.
$B$: Mindestens einer von uns lügt immer.
$A$: Du sprichst wahre Worte.

Zu welchen Insulaner-Gruppen gehören $A$ und $B$?

6. In einem weiteren Gespräch zwischen Insulanern - diesmal sind es 3 Stück - wissen wir, dass jeder Insulanertyp vorkommt. Wir belauschen das folgende Gespräch:

$X$: Die Wahrheitssprechende unter uns ist $Y$.
$Y$: Unser Freund $Z$ lügt manchmal und sagt manchmal die Wahrheit.
$Z$: $X$ lügt immer!

Welche Person kann welchem Typ zugeordnet werden?

7. “I barbieri da Berna.” - Ein Berner Barbier $X$ heisse gewöhnlich, wenn es einen (Berner) Barbier $Y$ gibt (nicht notwendig verschieden von $X$), sodass $X$ den $Y$ mindestens einmal im Monat rasiert und umgekehrt. Andernfalls heisst $X$ *exklusiv.*

Die exklusiven Barbiere haben sich nun zum “Exklusivclub” zusammengeschlossen. Nun kommt eines Tages ein Berner Barbier namens Alfonso in die Stammbeiz der Barbiere - die goldene Schere - und prahlt, er würde jedes Mitglied des Exklusivclubs mindestens einmal im Monat rasieren - und niemanden sonst. Kann Alfonsos Geschichte stimmen?

8. Aktenzeichen XY pur! Graf Eutin ist ermordet worden. Als Mörder kommen nur Fräulein Ming, Professor Bloom, Frau Weiss oder Oberst von Gatow in Frage. Versuche an Hand der Aussagen dieser vier Personen den Mörder/die Mörderin zu überführen. Dabei darfst du annehmen, dass bis auf den Mörder/die Mörderin alle anderen die Wahrheit sagen.

> Fräulein Ming: “Ich war zur Tatzeit mit Professor Bloom zusammen.”
> Professor Bloom: “Oberst von Gatow war zur Tatzeit im Saloon.”
> Frau Weiss: “Fräulein Ming, Oberst von Gatow und ich waren zur Tatzeit nicht im Saloon.”
> Oberst von Gatow: “Ich bin unschuldig. Der Mord ist im Saloon passiert.”

Wer ist der der Mörder/die Mörderin?

9.(*) Das neue Forschungsziel von Professor Knusi sind die Bru-Inseln. Dort gibt es einige Einwohner, die immer lügen, und einige, die immer die Wahrheit sagen. Professor Knusi hat schon herausgefunden, dass das vom Alter der Person abhängt: Ab einer ganz bestimmten Altersschwelle beginnen die Einwohner zu lügen. Auf die Frage nach dieser Altersschwelle erhält Knusi die folgenden Antworten:

Aru: “Beru ist älter als 15.” Beru: “Ceru ist älter als 13.” Ceru: “Deru ist jünger als 17.” Deru: “Eru ist nicht 12.” Eru: “Aru ist älter als 16.” Aru: “Deru ist älter als 11.” Beru: “Eru ist jünger als 15.” Ceru: “Aru ist 14.” Deru: “Beru ist 15.” Eru: “Ceru ist jünger als 13.”

Wo liegt die Altersschwelle? Und was kann Professor Knusi sonst noch aus den Aussagen schliessen?

10.(*) Schulanfang! “Die Wünsche der Erstklässler werden immer seltsamer”, meint die Sekretärin. Die 8 Schüler sollen nämlich in zwei Klassen à 4 Schüler aufgeteilt werden. Hier sind die Wünsche:

Ah: “Wenn Yi und Mo zusammen sind, möchte ich auch in dieser Klasse sein.”

Ba: “Wenn Bo mit mir in die Klasse geht, möchte ich, dass auch Ah in unserer Klasse ist.”

El: “Ul und Ah sollen mit mir zusammen sein.”

Ul: “Ich möchte mit Ba zusammen sein, oder Lu und Ba sollen nicht zusammen sein.”

Yi: “Wenn Mo in der A ist, möchte ich nicht mit Bo in einer Klasse sein.”

Lu: “Yi und Mo sollen zusammen sein oder Ah bei mir.”

Bo: “Ich möchte nicht mit Lu zusammen sein, es sei denn, Ul und El sind nicht zusammen.”

Mo: “Ich möchte mit Ah zusammen sein oder in der Klasse $B$.”

Die Direktorin seufzt, übelegt und meint schliesslich: “Alle Wünsche berücksichtigen geht nicht – aber alle ausser einem, das geht.”

Wie sieht die Klasseneinteilung aus?