Kapitel 5: Digraphen und Hypergraphen

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

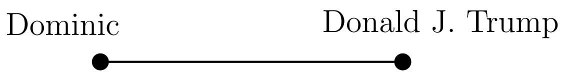
"Lost in the right direction."
– Musikalbum der Band "Etherwood"

1. Einführung

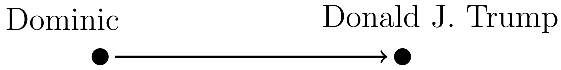
Bisher gab es zwischen 2 Punkten eines Graphen nur entweder eine Verbindung, oder keine Verbindung. Die Graphen, die wir in den letzten zwei Kursen anschauten, gelten als die einfachste Art von Graphen, darum werden sie auch *einfache, ungerichtete Graphen* genannt.

1.1. **Vorbemerkungen zu gerichteten Graphen.** Manchmal möchte man aber auch mehr Information in einen Graphen stecken können, als "es besteht eine Verbindung zwischen Punkt x und Punkt y": Stellen wir uns vor, wir befinden uns auf auf einer Party, und wir möchten eine Verbindung (edge) zeichnen, wenn Partybesucher a den Partybesucher b kennt.

Aber halt...! Was heisst "kennen"? Definieren wir, dass a den b *kennt*, falls a den Namen von b korrekt sagen kann. Dann rennen wir aber in das "Prominenten"-Problem: Wenn ich an einer Party mit Donald Trump bin, kann ich ihn zweifelsfrei mit Namen identifizieren - aber er mich (sehr wahrscheinlich) nicht. Also modelliert das Bild



die Situation in irreführender Weise: es wird nämlich insinuiert, dass "Donald Trump und ich uns kennen". Eigentlich würde aber folgendes Bild die Situation besser grafisch darstellen:



Dieses Bild sagt korrekt aus, dass ich "45" (wie Trump sich gerne nennt, da er der 45. Präsident der USA ist) sofort erkenne, aber er mich nicht.

Diese Gedanken führen uns zum Konzept der *gerichteten Graphen.*

1.2. **Vorbemerkungen zu Hypergraphen.** Des weiteren fragt sich natürlich auch, warum man immer nur genau 2 Punkte miteinander verbinden möchte. Nehmen wir das Schweizer Parlament. Etliche Parlamentarier sind in einer oder mehreren *Kommissionen*, und diese bestehen praktisch immer aus mehr als 2 Leuten. Also wollen wir beliebig grosse Verbindungen (edges) darstellen können - und das ist genau das, was ein *Hypergraph* tut.

In den folgenden 2 Kapiteln gehen wir zunächst auf gerichtete Graphen, und dann auf Hypergraphen ein. Es gibt noch weitere "cousins" von den einfachen, ungerichteten Graphen, von denen aus wir gestartet sind, aber gerichtete Graphen und Hypergraphen sind in der Datenanalyse weit verbreitet, und die anderen Cousins viel weniger, darum beschränken wir uns auf diese beiden Arten.

2. Gerichtete Graphen (Digraphs)

Wir haben gesehen, dass im Beispiel "Dominic kennt Donald Trump, aber Trump kennt Dominic nicht" offenbar die *Reihenfolge* eine wichtige Rolle spielt. Deshalb ist es nicht überraschend, kommen die *geordneten Paare*, die wir in Kurs 3 (Funktionen) kennengelernt haben, zum Zug.

Eine edge zwischen zwei Punkten a, b werden wir also durch ein geordnetes Paar

$$(a, b)$$

modellieren. Des weiteren wollen wir "self-edges" (a, a) ausschliessen, also bildlich gesprochen Pfeile, die von einem Element auf sich selber zeigen: sie modellieren triviale Situationen wie "ich kenne meinen eigenen Namen", die in den meisten Fällen keine interessante Informationen über ein Netzwerk geben.

Definition 2.1. Ein *gerichteter Graph* (engl. *directed graph* oder kurz: *digraph*) ist ein Paar $G = (V, E)$ wobei V eine Menge von Punkten (vertices) bezeichnet, und

$$E \subseteq \{(a, b) \in V \times V : a \neq b\}$$

eine Teilmenge von geordneten Paaren aus dem Cartesischen Produkt $V \times V$ ist.

2.1. Indegree und Outdegree.

Wir erinnern uns: Bei einfachen, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist der Grad eines Punktes definiert als

$$\deg(v) = |N(v)| = |\{w \in V : \{v, w\} \in E\}|.$$

(Erinnerung: Ist A eine Menge, dann bezeichnet $|A|$ die Anzahl Elemente der Menge A.)

Nun haben wir im Kontext von gerichteten Graphen neu eine *Richtung* in den Verbindungen, also sozusagen mehr Informtation. Der *Indegree* $\deg^-(v)$ eines Punktes $v \in V$, wobei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph ist, ist informell gesprochen die Anzahl in v endender Pfeile, und der *Outdegree* $\deg^+(v)$ ist die Anzahl der von v ausgehenden Pfeile.

Übung 2.2. Das ist eine reine Formalisierungs-Übung: Gib eine Mengendefinition von $\deg^-(v)$ und $\deg^+(v)$; Lösung gleich unten, aber bitte zuerst selber versuchen!

Lösung:

$$\deg^-(v) = |\{a \in V : (a, v) \in E\}|, \text{ sowie } \deg^+(v) = |\{z \in V : (v, z) \in E\}|.$$

Übung 2.3. Betrachte den folgenden gerichteten Graphen $G = (V, E)$:

- $V = \{2, \ldots, 30\}$,
- $E = \{(a, b) \in V \times V : (a < b) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} : ka = b)\}$.

Aufgaben:

(1) Zeichne (mit Punkten und Pfeilen) den Graphen auf.
(2) Berechne $\deg^-(12)$ und $\deg^+(12)$.
(3) Finde eine Zahl $n \in V$ mit $\deg^+(v) = 0$ und $\deg^-(v) > 0$.
(4) Welche Zahlen $v \in V$ haben die umgekehrte Eigenschaft, dh $\deg^+(v) > 0$ und $\deg^-(v) = 0$?

Übung 2.4. (*) Zeige, dass für jeden gerichteten Graphen gilt, dass die Summe aller Outdegrees über alle Punkte gleich de Summe über alle Indegrees über alle Punkte ist.In Formeln ausgedrückt:

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v).$$

Tipp. Jeder Pfeil (gerichteter edge) trägt genau 1 Outdegree und 1 Indegree bei...)

3. Hypergraphen

In vielen Bereichen des Lebens (oder des Teils des Lebens, der sich mit Graph-ähnlichen Strukturen modellieren lässt), ist die Gegebenheit, dass wir jeweils nur 2 Punkte miteinander in eine (2er-)Verbindung stecken können, zu einschränkend. Wie eingangs erwähnt, wollen wir in gewissen Kontexten Ideen wie "Komitees", "Teams" und so weiter darstellen können, wobei die Teamgrösse nicht auf 2 beschränkt sein soll.

Für die Definition eines Hypergraphen benötigen wir das Konzept des *Power Sets* $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X. Dieses ist die *Menge aller Teilmengen von* X.

Beispiel 3.1. Für die Menge $X = \{1, 2\}$ haben wir

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\},$$

also hat $\mathcal{P}(X)$ genau 4 Elemente.

Übung 3.2. Schreibe in expliziter Form die Menge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ auf.

Übung 3.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $|\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})| = 2^n$.

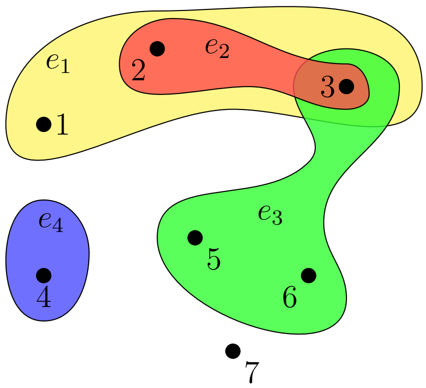
Definition 3.4. Ein *Hypergraph* $H = (V, E)$ ist ein Paar bestehend aus einer Menge V und einer Menge E von *nichtleeren* Teilmengen von V, das heisst

$$E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}.$$

Die Elemente von E nennen wir wiederum *edges*. Ein Graph ist ein Spezialfall eines Hypergraphen, der dann eintritt, wenn alle edges genau 2 Elemente beinhalten.

Beispiel 3.5. So kann man einen Hypergraphen sich bildlich vorstellen auf der Beispiel-Menge $V = \{1, 2, \dots, 7$ mit $E = \{e_1, \dots, e_4\}$ sodass

- $e_1 = \{1, 2, 3\}$,
- $e_2 = \{2, 3\}$ (also haben wir $e_2 \subseteq e_1$ - das ist nicht verboten!),
- $e_3 = \{3, 5, 6\}$ und
- $e_4 = \{4\}$.



Übrigens ist der arme Punkt 7 in gar keinem edge enthalten!

Definition 3.6. Ist $H = (V, E)$ ein Hypergraph, dann ist der *Grad* eines Punktes $v \in V$ die Anzahl edges, die den Punkt v enthalten, also

$$\deg(v) = |\{e \in E : v \in e\}|.$$

Übung 3.7. Zeige, dass wenn ein Hypergraph $H = (V, E)$ ein Graph ist (also alle edges haben genau 2 Elemente), dann stimmt der oben definierte Grad-Begriff mit dem in Kapitel 5 definierten Grad-Begriff für einfache, ungerichtete Graphen überein! (Es wäre ja auch sehr unschön, wenn dem nicht so wäre.)

Übung 3.8. Bestimme die Grade der Punkte $1, 2, \ldots, 7$ im Graphen von Beispiel 3.5.

Übung 3.9. Wir schauen den folgenden Hypergraphen $H = (V, E)$ an, der definiert ist durch

- $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$
- E sei die Menge der Teilmengen von V, sodass die Summe der Elemente der Teilmenge gleich 10 ist, also zB haben wir $\{1, 4, 6\} \in E$.

Aufgaben:

(1) Zeichne den Hypergraphen (oder einen Teil davon).
(2) Wie gross ist die grösste edge?
(3) Bestimme deg(4).
(4) Gibt es ein $v \in V$ mit $\deg(v) = 0$?

Übung 3.10. (*) In einer Klasse mit $N \geq 3$ Schülern werden jeweils 3 Schüler für eine Zeitlang abbeordert, um die Tafel am Lektionenende zu putzen, und einige weitere Tasks zu erledigen. Jetzt will die Lehrerin die 3-er-Gruppen so bilden, dass jede 2-er-Menge von Schülern genau einmal in einer 3-er-Gruppe eingeteilt ist.

Für welche $N \geq 3$ lässt sich so eine Gruppeneinteilung bewerkstelligen?