Kapitel 2: Mengen - die Legosteine der Mathematik

Dominic van der Zypen
dominic.zypen@gmail.com

"Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können." – David Hilbert

1. Einführung

Hier ist das Verrückte an der Mathematik: Die ganze Disziplin lässt sich mit zwei Begriffen, nämlich den der **Menge** und **Mengenzugehörigkeit** $\in$, aufbauen. - In der Physik hingegen haben wir schon diverse undefinierte Begriffe wie *Zeit*, *Ausdehnung*, *Masse*, *elektrische Ladung*, für die wir unterschiedlich gute Intuitionen haben. Noch schwieriger ist die Situation in den Rechtswissenschaften: dort haben wir Konzepte wie *Schuld*, *Ursache*, oder *Urteilsvermögen*, die in den Gesetzestexten nicht weiter definiert werden, und die selber mit ihren eigenen, schwierigen philosophischen Problemen behaftet sind.

Die Mengenlehre als Basis aller Mathematik wurde 1874 von **Georg Cantor** (1845-1918) erschaffen.[1] Der Begriff der Menge ist für uns intuitiv sehr zugänglich: Wir kategorisieren zum Beispiel die Lebewesen in die Menge der Tiere, der Pflanzen, Pilze etc., und bei allen diesen Mengen gibt es Untermengen wie Wirbeltiere, Mollusken und so weiter.

Cantor selber hat folgendes zum Mengenbegriff gesagt:

> Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Kurz und prägnant.

2. Notation

Will man Mengen explizit aufschreiben, verwendet man die *Klammerschreibweise* $\{\ldots\}$. Zum Beispiel die Menge B der Mitglieder des Bundesrats[2] ist

$$\{\text{Amherd, Sommaruga, Keller-Sutter, Cassis, Parmelin, Maurer, Berset}\}.$$

Die Reihenfolge spielt keine Rolle - die Menge bleibt gleich. Dasselbe gilt, wenn eine Bundesrätin mehrfach in der Aufzählung genannt worden wäre.

[1]Einige Mathematiker würden sich gegen das Wort "erschaffen" wehren, und mit "entdeckt" ersetzen.
[2]Stand Februar 2020

Unter Verwendung der *Mengenzugehörigkeitsrelation* $\in$ schreiben wir beispielsweise

$$\text{Sommaruga} \in B.$$

(Trotz aller Bemühungen gilt jedoch im Moment noch van der Zypen $\notin B$).

2.1. **Spezielle Mengen.**

- $\emptyset$: die leere Menge, sie enthält keine Elemente, wird auch geschrieben als $\{\}$.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, die Menge der *natürlichen Zahlen.*
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, die Menge der *ganzen Zahlen.*
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b > 0\}$, die Menge der *rationalen Zahlen.*
- $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen.

2.2. **Beschreibende Form zur Darstellung von Mengen.** Die Menge aller Bundesräte kann man explizit aufschreiben, wie oben getan, aber bei der Menge aller geraden Zahlen ist das unmöglich.

Darum die folgende Notation: Die Menge der geraden Zahlen können wir schreiben als

$$\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 2k)\}.$$

Das Colon (Doppelpunkt :) lesen wir in der Mengenbeschreibung oben als "sodass".

Übung 2.1. Gib 2 verschiedene Arten an, wie man die Menge der ungeraden Zahlen aufschreiben kann.

Übung 2.2. Gib eine Mengenbeschreibung der Menge aller Primzahlen.

3. Teilmengenrelation $\subseteq$

Eine wichtige Beziehung, die zwischen Mengen bestehen kann (aber nicht muss), ist die *Teilmengenrelation*: Sind A, B Mengen, schreiben wir

$$A \subseteq B$$

falls jedes Element von A ein Element von B ist. In diesem Fall sagen wir auch, die Menge A sei in B *enthalten.*

Die Mengen A und B sind **gleich**, falls sie die gleichen Elemente umfassen, oder mit anderen Worten:

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Beachte: Die leere Menge $\emptyset = \{\}$ ist Teilmenge *jeder* Menge A - man kann kein Element in $\emptyset$ finden, das nicht in der Menge A enthalten wäre - egal, wie A aussieht!

Beispiel 3.1. Betrachten wir die Menge aller aktuellen Bundesrätinnen

$$B_F = \{\text{Amherd, Sommaruga, Keller-Sutter}\}$$

und zählen wir alle Teilmengen davon auf:

$\emptyset$,
$\{$Amherd$\}$, $\{$Sommaruga$\}$, $\{$Keller-Sutter$\}$,
$\{$Amherd, Sommaruga$\}$, $\{$Amherd, Keller-Sutter$\}$, $\{$Sommaruga, Keller-Sutter$\}$,
B_F.

Übung 3.2. Für welche der Mengen A und B gilt mindestens eine der Teilmengenbeziehungen $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$?

(1) $A =$ Menge der Menschen, $B =$ Menge der Wirbeltiere;
(2) $A =$ Menge der VBS-Mitarbeiter, $B =$ Menge der Leute, die mindestens 3 Diensttage im Militär geleistet haben;
(3) $A =$ Menge der ungeraden Zahlen, $B =$ Menge der Primzahlen;
(4) $A =$ Menge der ungeraden Zahlen ≥ 3, $B =$ Menge der Primzahlen ≥ 3;

Übung 3.3. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne V_n die Menge der Vielfachen von n, dh

$$V_n = \{a \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(k \cdot n = a)\}.$$

Zeige, dass gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$V_n \subseteq V_m$ genau wenn $m|n$ (dh m ist ein Teiler von n).

Übung 3.4. Betrachten wir die Menge B aller 7 Mitglieder des Bundesrats: Wieviele Teilmengen gibt es von B?

4. Mengen von Mengen von Mengen von ...

Jede und jeder in der Firma “FantasyCorp” ist in einem Team eingeteilt. Jedes Team bildet eine Menge, nämlich die Menge der Mitarbeitenden im jeweiligen Team.

Jetzt können wir auch die folgende *Menge von Mengen* bilden, nämlich die Menge $\mathcal{T}$ aller Teams. Diese Menge besteht *nicht* aus einzelnen Menschen, sondern aus Diensten. Die Menge $\mathcal{T}$ hat also viel weniger Elemente, als wenn man die Menge aller FantasyCorp-Mitarbeitenden angeschaut hätte! Die Menge F der FantasyCorp-Mitarbeitenden besteht also aus Personen, die Menge $\mathcal{T}$ jedoch aus Mengen (Teams), folglich sind F und $\mathcal{T}$ komplett verschiedene Mengen!

Dieser Gedanke wird später eine wichtige Rolle spielen.

5. Mengenoperationen

Aus Mengen kann man neue Mengen erzeugen. Sind A, B Mengen dann definieren wir:

- Die *Schnittmenge*: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
- Die *Vereinigungsmenge*: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ – Achtung: das logische “oder” bedeutet hier x ist Element von A oder von B, oder von beiden Mengen!
- Die *Differenzmenge*: $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Das Verständnis für diese drei Operationen vertiefen wir in den folgenden Übungen:

Übung 5.1. Sei $A = \{\text{Lisa, Mark, Tom, Sara}\}$ und $B = \{\text{Anna, Tom, Lisa}\}$. Welche Personen umfassen die folgenden Mengen?

(1) $A \cap B$, und vergleiche mit $B \cap A$;
(2) $A \setminus B$, und vergleiche mit $B \setminus A$;
(3) $A \cup B$, und vergleiche mit $B \cap A$;
(4) $\{\text{Tom, Mark}\} \setminus A$?

Übung 5.2. Wir betrachten folgende Teilmengen von $\mathbb{Q}$:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \tfrac{1}{4}\} \text{ und}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \tfrac{1}{5}\}.$$

Benenne je ein Element aus den folgenden Mengen:

(1) $A \setminus B$,
(2) $B \setminus A$,
(3) $A \cap B$.

Kann man ein Element finden in $\mathbb{Q} \setminus (A \cup B)$?

Übung 5.3. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, und bezeichne V_n die Menge aller Vielfachen von n.

(1) Welche Zahlen sind in der Menge $V_2 \cap \{1, 2, \ldots, 11\}$ enthalten?
(2) Vergleiche $V_2 \cap V_3$ und V_6.
(3) Umfasst die Menge $\mathbb{N} \setminus (V_2 \cap V_3)$ unendlich viele Zahlen?

6. Operationen auf Mengen von Mengen

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Mengen, das heisst, jedes Element von $\mathcal{A}$ ist wiederum eine Menge. Dann definieren wir:

(1) $\bigcup \mathcal{A} = \{x : \exists A \in \mathcal{A}(x \in A)\}$, und
(2) $\bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}$.

Wir bezeichnen $\bigcup \mathcal{A}$ als *Vereinigung* aller in $\mathcal{A}$ enthaltenen Mengen, und $\bigcap \mathcal{A}$ als *Durchschnitt* aller in $\mathcal{A}$ enthaltenen Mengen.

Übung 6.1. Unser Schweizer Parlament arbeitet unter anderem in *Kommissionen*, das sind Untermengen von Parlamentarier[3], die sich mit gewissen Themen befassen. Sei P die Menge der Parlamentarier. Wir fassen jede Kommission K als eine Menge von ein paar Parlamentariern auf, also $K \subseteq P$. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Kommissionen. Achtung: $\mathcal{K}$ besteht also nicht also nicht aus einzelnen Parlamentariern, sondern aus Kommissionen, die Mengen von Parlamentariern sind! Wer ist alles in den folgenden Mengen enthalten?

[3] Parlamentarierinnen sind selbstverständlich mitgemeint

(1) $\bigcap \mathcal{K}$;
(2) $\bigcup \mathcal{K}$;
(3) $P \setminus (\bigcup \mathcal{K})$?

Übung 6.2. Für $n \in \mathbb{N}$ wir definieren die Menge der echten Vielfachen von n mit

$$W_n = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(k > 1 \wedge k \cdot n = x)\}.$$

Wir setzen $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2\}$. Sei P die Menge aller Primzahlen. Vergleiche die Menge P mit

$$\mathbb{N} \setminus (\bigcup \mathcal{W}).$$

Ist eine Menge in der anderen enthalten? Oder sind sie sogar gleich?

7. Zusätzliche Aufgaben

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$. Aus welchen Elementen besteht die Menge $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

2. Seien A, B beliebige (endliche oder unendliche) Mengen. Wieviele Elemente enthält die Menge $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$?

3. In einer Schule mit 100 Schülern werden die 3 Wahlfächer A, B und C angeboten. Das Wahlfach A belegen 50, das Wahlfach B 30, und das Wahlfach C 60 Schüler. Für die beiden Wahlfächer A und B haben sich 10 Schüler angemeldet, und für die beiden Wahlfächer A und C 20 Schüler. Nur das Wahlfach C besuchen 20 Schüler. Fragen:

- Wieviele Schüler besuchen kein Wahlfach?
- Wieviele Schüler besuchen höchstens alle 3 Wahlfächer?
- Wieviele Schüler besuchen mindestens nur das Wahlfach A?

4. Gleiche Aufgabe wie vorher von den Gegebenheiten her, ausser, dass wir jetzt noch wissen, dass genau 1 Schüler alle 3 Wahlfächer besucht. Fragen:

- Wieviele Schüler besuchen nur das Wahlfach A?
- Wieviele Schüler besuchen genau 2 Wahlfächer?

5. Gegeben seien die folgenden Mengen:

$A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}, 3\}$
$B = \{\{\}, \{1\}, 2, 3\}$
$C = \{1, 2, 3\}$
$D = \{\{1, 2\}, 3, 4, 5\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Bitte mit kurzer Begründung!

- $C \subseteq B$.
- Die Menge A hat 4 Elemente.
- $A \cap B = C \cap D$.

- $C \cup D$ hat 32 verschiedene Teilmengen.

6. Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} E &= \{\{\}, 1, \{1\}\} \\ F &= \{1, 2, \{1, 2\}\} \\ G &= \{\{1\}, \{1, 2\}\} \\ H &= \{\{\}\}. \end{aligned}$$

(1) Wieviele Elemente haben die Mengen E, F, G, H?
(2) Bestimme die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} &E \cap F = ? \\ &E \cup (F \cap G) = ? \\ &(H \cup E) \setminus (G \setminus F) = ? \\ &H \cup (E \setminus (G \setminus F)) = ? \end{aligned}$$

7. Seien A, B Mengen. Für jede der folgenden Aussagen, beweise sie, oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel:

(1) $A \cup B = B \cup A$.
(2) $A \subseteq A \setminus B$.
(3) $B \subseteq A \setminus B$.
(4) $A \setminus B \subseteq A$.

8. Seien A, B Mengen. Für jede der folgenden Aussagen, beweise sie, oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel:

(1) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
(2) $A \cap (B \setminus A) = A \cap B$.

9. Seien A, B, C Mengen. Zeige, dass das folgende *Distributivgesetz* gilt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

10. *DeMorgan's Law.* Sei X eine Menge, und sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von X, das heisst für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt: $A \subseteq X$. Dann zeige, dass gilt:

(1) $X \setminus \left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \bigcap \left\{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\right\}$.
(2) $X \setminus \left(\bigcap \mathcal{A}\right) = \bigcup \left\{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\right\}$.