

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 69420

# **Simulacija kvantnog računala**

Dominik Matić

Zagreb, svibanj 2021.



# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Kvantno računalo</b>	<b>3</b>
2.1. Polarizacija svjetlosti . . . . .	3
2.2. Kvantni bit . . . . .	4
2.2.1. Definicija . . . . .	4
2.2.2. Diracova notacija . . . . .	5
2.2.3. Svojstva Hilbertovog prostora . . . . .	5
2.2.4. Amplituda vjerojatnosti i vjerojatnost . . . . .	6
2.2.5. Vektorski prikaz . . . . .	6
2.3. Sustav kvantnih bitova . . . . .	7
2.3.1. Dva ili više kvantnih bitova . . . . .	7
2.3.2. Spregnutost . . . . .	8
2.4. Kvantni operatori . . . . .	9
2.4.1. Svojstva . . . . .	9
2.4.2. Blochova sfera . . . . .	9
2.4.3. Operator projekcije . . . . .	10
2.4.4. Hermitski operator . . . . .	10
2.4.5. Paulijeve matrice . . . . .	11
2.4.6. Hadamardov operator . . . . .	11
2.4.7. Ostali unarni operatori . . . . .	12
2.4.8. CU operatori . . . . .	12
2.4.9. SWAP operator . . . . .	13
2.4.10. Toffolijeva i Fredkinova vrata . . . . .	13
2.5. Kvantni logički kurg . . . . .	14
2.5.1. Topografija logičkog kruga . . . . .	14
2.5.2. Reprezentacija logičkih operatora . . . . .	15
2.5.3. Matrični prikaz . . . . .	16

<b>3. Kvantni algoritmi</b>	<b>19</b>
3.1. Kvantni paralelizam . . . . .	19
3.2. Phase kickback . . . . .	19
3.3. Deutschov algoritam . . . . .	20
3.4. Groverov algoritam . . . . .	22
3.5. Shorov algoritam . . . . .	22
<b>4. Simulacija kvantnog računala</b>	<b>23</b>
4.1. Postojeći simulatori kvantnog računala . . . . .	23
4.2. Izrada simulatora kvantnog računala . . . . .	23
4.3. Primjeri simulacije kvantnih logičkih krugova . . . . .	23
4.4. Prednosti i mane simulatora kvantnog računala . . . . .	23
<b>5. Zaključak</b>	<b>24</b>
<b>Literatura</b>	<b>25</b>

# 1. Uvod

Neprestanim razvojem znanosti i tehnologije, kvantna računala postaju sve bitnijim dijelom računarstva. Predstavljaju sasvim drugačiji način računanja koji otvara vrata rješavanju mnogih problema koje klasično računalo, zbog same prirode problema, ili rješava znatno sporije ili uopće ne može riješiti u razumnom vremenu. Takvi problemi javljaju se u područjima kriptografije, umjetne inteligencije i strojnog učenja, računalne biologije, financija, simulacije kvantnih sustava kao i u ostalim područjima računarstva kao što su algoritmi pretraživanja.

Područje kriptografije je posebno zanimljivo jer se većina današnjih sigurnosnih mehanizama interneta temelji na matematičkim problemima za koje se smatra da su teško izračunljivi. To su primarno problem faktORIZACIJE velikih brojeva te problem diskretnog logaritma. Kvantno računalo efikasno rješava takve probleme, što je još devedesetih godina demonstrirao Peter Shor[3]. Naravno, iz toga slijedi da će kvantna računala biti velika prijetnja sigurnosti na internetu, no već su se počeli razvijati mehanizmi koji će biti otporni na napade kvantnim računalom[citati?] što samo govori o tome koliko je kvantno računalo blizu da postane veliki dio računarstva.

Potencijal kvantnog računala poznat je desetljećima te su već smišljeni i detaljno opisani mnogi od algoritama prikladni za takav način računanja. Sve što je preostalo je izgraditi računalo koja će moći provoditi te algoritme. Danas, IBM posjeduje kvantno računalo s najvećim brojem kvantnih bitova, njih čak 65, no ni to još nije dovoljno da bude korisno. Naime, problem nastaje s pojavom kvantne dekoherencije. Dekoherencija predstavlja gubitak informacije kvantnog sustava zbog interakcije s okolinom što onemogućava precizno ili čak bilo kakvo računanje. No, kvantno računarstvo je trenutno veliki predmet istraživanja te se napretci ostvaruju skoro svaki dan. Mogućnost izgradnje kvantnog računala sa dovoljno velikim brojem kvantnih bitova je sve izglednija, kao primjer, IBM obećava do 2023. godine izgraditi kvantno računalo sa 1000 kvantnih bitova[1].

S ciljem demonstracije nekih od mogućnosti kvantnog računala, ovaj rad se u prvom dijelu bavi osnovnim načelima kvantnog računala, odnosno matematičkim mo-

delom kojim opisujemo kvantnomehaničke pojave koje nam omogućuju drugačiji način računanja. Nakon toga rad opisuje neke od algoritama namijenjenih za kvantno računalo koji će zatim neki od njih biti implementirani i demonstrirani u samostalno izgrađenom simulatoru.

## 2. Kvantno računalo

### 2.1. Polarizacija svjetlosti

Klasična fizika shvaća svjetlost kao transversalni elektromagnetski val koji može biti poraliziran na različite načine. Polarizacija svjetlosti određena je njenom električnom komponentom te je svjetlost koju emitiraju prirodni izvori svjetlosti uglavnom nepolarizirana. Tek kada se snop svjetlosti pusti kroz polarizator dobije se linearno polariziran val svjetlosti — val koji ima stalni smjer širenja okomit na smjer titranja. Njegova električna komponenta dana je jednadžbom:

$$E = E_0 \hat{p} e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

gdje je  $\hat{p}$  jedinični vektor u smjeru polarizacije vala. Intenzitet ovako polariziranog vala biti će upola manji od intenziteta početnog nepolariziranog vala jer će točno toliko intenziteta polarizator apsorbirati. Kada ovakav val pustimo kroz još jedan polarizator (tzv. analizator), val koji ćemo dobiti jest:

$$E' = (E \cdot \hat{n}) \hat{n} = E_0 (\hat{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} e^{i\omega t} = E_0 \cos \alpha \quad (2.2)$$

gdje je  $\hat{n}$  jedinični vektor u smjeru polarizacije analizatora, a  $\alpha$  kut između vektora  $\hat{p}$  i  $\hat{n}$ . Intenzitet novog vala dobivamo po Malusovom zakonu:

$$I' = I \cos^2 \alpha \quad (2.3)$$

gdje je  $I$  intenzitet prethodno polariziranog vala. Drugim riječima, polarizacijom vala dobivamo njegovu projekciju na ravninu određenu kutom polarizatora.

U kvantnoj mehanici, svjetlost je definirana drugačije — kao niz fotona, nedjeljivih elementarnih čestica. Kod takve interpretacije postavlja se pitanje što se događa kada individualni fotoni prolaze kroz polarizator. Ako polarizator propušta projekciju, koja je uvijek manja ili jednaka ulaznom valu, što će se dogoditi fotonu, ako je on nedjeljiv? Eksperimenti su pokazali da će foton sa točno određenom šansom ili cijeli proći kroz

polarizator sa novim smjerom polarizacije ili biti apsorbiran. Ključan element takvih eksperimenata je činjenica da je nemoguće *niti u načelu* odrediti što će se dogoditi sa fotonom. To znači da čak uz poznavanje svih varijabli nekog sustava, nemoguće je deterministički odrediti ishod.

Prijelaze kvantnih sustava iz jednog stanja u drugo modeliramo takozvanom amplitudom vjerojatnosti:

$$a(\Phi \rightarrow \Psi) \quad (2.4)$$

koja je element skupa kompleksnih brojeva, a vjerojatnost da neki sustav koji je u stanju  $\Phi$  bude izmjeren u stanju  $\Psi$  dobivamo na način:

$$p(\Phi \rightarrow \Psi) = |a(\Phi \rightarrow \Psi)|^2 \quad (2.5)$$

U slučaju polarizatora, vjerojatnost smo mogli izračunati pomoću Malusovog zakona što nam daje vjerojatnost prolaska fotona kroz polarizator jednaku

$$p(\Phi \rightarrow \Psi) = \cos^2 \alpha \quad (2.6)$$

iz čega je vidljiva amplituda vjerojatnosti:

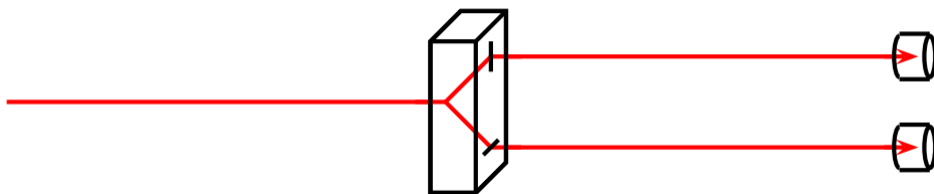
$$|a(\Phi \rightarrow \Psi)|^2 = \cos^2 \alpha \Rightarrow a(\Phi \rightarrow \Psi) = \cos \alpha \quad (2.7)$$

gdje je  $\alpha$  kut koji zatvaraju vektori polarizacije fotona i polarizatora,  $\Phi$  stanje fotona prije prolaska kroz polarizator, a  $\Psi$  stanje u kojemu foton nije apsorbiran.

## 2.2. Kvantni bit

### 2.2.1. Definicija

Dvolomac je vrsta polarizatora koji dijeli svjetlost na dva ortogonalno polarizirana snopa. Kombinirajući dvolomac sa dva detektora uvijek je moguće odrediti u koje je stanje prešao foton pušten kroz dvolomac.



**Slika 2.1:** Dvolomac s dva detektora



Nakon detekcije, foton je apsorbiran i ne može se više mjeriti. Takav kvantnomehanički sustav, koji je moguće samo jednom izmjeriti u samo jednom od dva moguća stanja nazivamo **kvantnim bitom** ili **qubitom**. Kvantni bit prije mjerenja može biti u beskonačno mnogo različitih stanja te općenito jedno takvo stanje zovemo **superpozicijom** dvaju stanja. Ta dva stanja se odnose na stanja baze mjerenja koja mogu biti proizvoljna, ali su uvijek međusobno ortogonalna. Pojam superpozicije se može primijeniti i u klasičnom smislu. U slučaju svjetlosti, uzimajući dva linearno polarizirana vala s okomitim smjerovima polarizacije kao bazu sustava, općenito stanje polarizacije vala možemo prikazati kao:

$$E = E_x \hat{x} e^{i(\omega t + \phi_x)} + E_y \hat{y} e^{i(\omega t + \phi_y)} = E_0 (\lambda \hat{x} + \mu \hat{y}) e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

gdje vrijedi:

$$E_0 = \sqrt{(E_x^2 + E_y^2)} \quad \lambda = \frac{E_x}{E_0} e^{i\phi_x} \quad \mu = \frac{E_y}{E_0} e^{i\phi_y} \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1 \quad (2.9)$$

Bitno je uočiti da su  $\lambda$  i  $\mu$  kompleksni brojevi kao i da dio izraza  $\lambda \hat{x} + \mu \hat{y}$  sadrži informaciju o stanju polarizacije vala te da takvih stanja ima beskonačno mnogo.

### 2.2.2. Diracova notacija

Stanja kvantnih bitova u praksi se prikazuje ket simbolima koji su dio Diracove ili bra-ket notacije:

$$\text{bra:} \quad \langle \Phi |$$

$$\text{ket:} \quad | \Phi \rangle$$

$$\text{braket:} \quad \langle \Phi | \Phi \rangle$$

S pretpostavkom da su  $|x\rangle$  i  $|y\rangle$  dva stanja baze mjerenja sustava, kao npr. stanje fotona polariziranog u smjeru  $x$  i stanje fotona polariziranog u smjeru  $y$ , općenito stanje polarizacije fotona možemo prikazati superpozicijom ta dva stanja:

$$| \Phi \rangle = \lambda |x\rangle + \mu |y\rangle$$

gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  kompleksni brojevi te vrijedi  $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ .

### 2.2.3. Svojstva Hilbertovog prostora

U matematičkom smislu, stanja kvantnih bitova prikazanih ketovima su zapravo vektori dvodimenzionalnog kompleksnog Hilbertovog prostora. Za takav prostor vrijede sljedeća svojstva.

Skalarni umnožak:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle^* \in \mathbb{C}$$

$$\langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0$$

Norma vektora  $|\Phi\rangle$  :

$$||\Phi|| = \sqrt{\langle \Phi | \Phi \rangle}$$

Vektori stanja baze moraju biti ortonormirani što znači da mora vrijediti:

$$\langle x | y \rangle = 0 \quad \langle x | x \rangle = \langle y | y \rangle = 1$$

Za računanje skalarnog umnoška potrebno je izračunati bra nekog stanja koji se dobiva kompleksnom konjugacijom keta. Općenito, izračun  $\langle \Psi | \Phi \rangle$  dobiva se:

$$|\Phi\rangle = \lambda |x\rangle + \mu |y\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \nu |x\rangle + \sigma |y\rangle \Rightarrow \langle \Psi | = \nu^* \langle x | + \sigma^* \langle y |$$

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \nu^* \lambda \langle x | x \rangle + \nu^* \mu \langle x | y \rangle + \sigma^* \lambda \langle y | x \rangle + \sigma^* \mu \langle y | y \rangle = \nu^* \lambda + \sigma^* \mu = \langle \Phi | \Psi \rangle^*$$

Norma vektora se računa na analogan način.

## 2.2.4. Amplituda vjerojatnosti i vjerojatnost

Amplituda vjerojatnosti modelira prijelaz jednog kvantnog stanja u drugo kojeg računamo skalarnim umnoškom vektora stanja.

$$a(\Phi \rightarrow \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle$$

Odgovarajuća vjerojatnost mjerenja kvantnog bita u stanju  $\Psi$  ako se prethodno nalazio u stanju  $\Phi$  računa se:

$$p(\Phi \rightarrow \Psi) = |a(\Phi \rightarrow \Psi)|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2$$

## 2.2.5. Vektorski prikaz

Za lakšu implementaciju kvantnog bita na klasičnom računalu, korisno je prikazati kvantne bitove vektorski. Klasična nula i jedinica bi imale vektorski oblik:

$$0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ti vektori odgovaraju ujedno i vektorima stanja baze mjerenja nekog sustava koji se mogu označiti kao  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$ . Sva ostala stanja mogu se dobiti superpozicijom tih vektora:

$$|\Phi\rangle = \lambda |0\rangle + \mu |1\rangle = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

Bra dobivamo kompleksnim konjugiranjem i transponiranjem keta:

$$\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \nu \\ \sigma \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{bmatrix}$$

Računanje amplitude vjerojatnosti se tada svodi na jednostavno matrično množenje:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{bmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \nu^* \lambda + \sigma^* \mu$$

## 2.3. Sustav kvantnih bitova

### 2.3.1. Dva ili više kvantnih bitova

Kao što se jedan kvantni bit prikazuje kao vektor u dvodimenzionalnom kompleksnom Hilbertovom prostoru, sustav od  $n$  kvantnih bitova može se prikazati kao vektor u  $2^n$ -dimenzionalnom kompleksnom Hilbertovom prostoru.

Za  $n$  stanja oblika  $|\Phi_i\rangle$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , njihov zajednički vektor stanja  $|\Psi\rangle$  dobiva se **tenzorskim produktom** svih stanja:

$$|\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Phi_n\rangle$$

Za dva kvantna bita, tenzorski produkti vektora stanja baze mjerenja sustava označavaju se kao:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \quad |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle \quad |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

U vektorskom obliku te baze se prikazuju kao:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Općenito, za dva kvantna bita dana u obliku  $|\Phi_i\rangle = \lambda_i |0\rangle + \mu_i |1\rangle$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , tenzorski produkt jednak je:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle &= (\lambda_1 |0\rangle + \mu_1 |1\rangle) \otimes (\lambda_2 |0\rangle + \mu_2 |1\rangle) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 |00\rangle + \lambda_1 \mu_2 |01\rangle + \mu_1 \lambda_2 |10\rangle + \mu_1 \mu_2 |11\rangle \end{aligned} \tag{2.10}$$

U vektorskom obliku:

$$|\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\ \mu_1 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 \mu_2 \\ \mu_1 \lambda_2 \\ \mu_1 \mu_2 \end{bmatrix}$$

Analogno se dobiju vektori 3 ili više kvantnih bitova.

Naravno, za svaki vektor koji opisuju sustav od  $n$  kvantnih bitova oblika

$$\lambda_1 |00 \dots 00\rangle + \lambda_2 |00 \dots 01\rangle + \dots + \lambda_{2^n} |11 \dots 11\rangle$$

vrijedi:

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots + |\lambda_{2^n}|^2 = 1 \quad (2.11)$$

### 2.3.2. Spregnutost

Spregnutost (engl. *entanglement*) opisuje sustav kvantnih bitova koji se ne može prikazati tenzorskim produktom vektora stanja pojedinih kvantnih bitova. Bitno je uočiti da iz jednadžbe 2.10 vrijedi da je umnožak koeficijenata uz  $|00\rangle$  i  $|11\rangle$  jednak umnošku koeficijenata uz  $|01\rangle$  i  $|10\rangle$ .

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdot \mu_1 \mu_2 = \lambda_1 \mu_2 \cdot \mu_1 \lambda_2$$

Stanja u kojima vrijedi prethodna jednadžba nazivaju se separabilnima, te zauzimaju samo podskup Hilbertovog prostora u kojemu se nalaze. Vektori stanja koji ne zadovoljavaju takvu jednakost, uz nužan uvjet da zadovoljavaju jednadžbu 2.11 nazivaju se spregnutim stanjima. Jedno takvo stanje jest:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Mjerenje takvog sustava rezultiralo bi detekcijom stanja  $|00\rangle$  ili  $|11\rangle$ , ali nikada stanja  $|01\rangle$  ili  $|10\rangle$ . Drugim riječima, mjerenjem samo jednog kvantnog bita u sustavu, odmah je poznata i vrijednost drugoga.

Spregnutost se ne odnosi samo na sustave s dva kvantna bita, analogno se ista logika može primijeniti i na sustave s 3 ili više kvantnih bitova. Primjer jednog spregnutog stanja s tri kvantnih bitova:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

## 2.4. Kvantni operatori

### 2.4.1. Svojstva

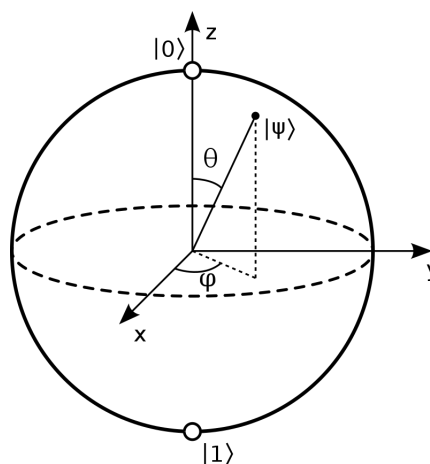
Kako bi bilo kakav izračun s kvantnim bitovima bio moguć, potrebno je moći manipulirati s njima. S klasičnim bitovima to rade operatori kao što su AND, OR, XOR i sl. Kvantni operatori su nešto drugačiji. Naime, pošto je jedna od glavnih značajki kvantne mehanike reverzibilnost sustava, kvantni operatori moraju biti **reverzibilni**, što je od klasičnih operatora samo NOT. Pošto stanja kvantnih bitova moraju uvijek ostati normirana, operatori su također **unitarni**. Uz unitarnost, kvantni operatori su i **hermitski**.

### 2.4.2. Blochova sfera

Radi lakše interpretacije nekih od operatora, korisno je poznavati reprezentaciju kvantnog bita na Blochovoj sferi. Svako stanje<sup>1</sup> kvantnog bita može se prikazati točkom na površini Blochove sfere.

Ta činjenica se čini zbunjujućom jer svaki kvantni bit u potpunosti određuju dva kompleksna broja što rezultira s četiri stupnja slobode, no uzimajući u obzir da kvantni bit mora biti normiran i da množenje kvantnog bita s faznim faktorom nema nikakvog fizičkog utjecaja na njegovo stanje, dobiju se samo dva stupnja slobode. Na temelju toga, općenito stanje kvantnog bita se može izraziti kao:

$$|\Psi\rangle = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$



Slika 2.2: Blochova sfera

<sup>1</sup>Odnosi se na čista stanja (engl. *pure states*), ali postoje i takozvana mješovita stanja (engl. *mixed states*) koja se mogu prikazati kao točkama unutar sfere, ali takva stanja nisu bitna u sklopu ovog rada

Bitno je primjetiti da vektori koji su u Hilbertovom prostoru ortogonalni su na Blochovoj sferi suprotni. U točki gdje os  $x$  probada sferu nalazi se stanje  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ , a suprotno njemu  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ . Na isti način u smjeru osi  $y$  nalazi se stanje  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$  te suprotno njemu  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$ . Navedeni vektori označavaju se kao  $|x\rangle$  i  $|y\rangle$ , odnosno  $|R\rangle$  i  $|L\rangle$ .

### 2.4.3. Operator projekcije

Skalarnim umnoškom dva vektora stanja kvantnih bitova dobije se skalar koji se može interpretirati kao koliko prvi vektor 'ide' u smjeru drugoga. Ako se taj skalar pomnoži drugim vektorom, dobije se vektor projekcije prvoga na drugi.

$$|\Omega\rangle = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle$$

Dio izraza  $|\Psi\rangle \langle\Psi|$  možemo shvatiti kao operator projekcije na stanje  $|\Psi\rangle$  te se takav operator naziva projektorom. Vektori dobiveni projekcijom općenito nisu normirani te kao takvi ne predstavljaju neko stanje kvantnog bita. Projektori se koriste kako bi se konstruirali drugi operatori.

Matrični prikaz projektora na vektore stanja  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$ :

$$|0\rangle \langle 0| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle \langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.4.4. Hermitski operator

Svaki operator u Hilbertovom prostoru koji je jednak sebi kada se kompleksno konjugira i transponira naziva se Hermitskim operatorom.

$$A^\dagger = A$$

Hermitski operator se može prikazati kao linearna kombinacija projektora ortonormirane baze  $N$ -dimenzionalnog prostora pomnoženih *realnim* koeficijentima:

$$A = \sum_{i=1}^N a_i |i\rangle \langle i| \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Vektori  $|i\rangle$  su svojstveni vektori Hermitskog operatora sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima  $a_i$ .

Hermitski operatori se mogu koristiti za izračune vezane uz fizikalne veličine pripisane baznim stanjima nekog kvantnog sustava, no u sklopu kvantnog računarstva koriste se za manipulaciju stanjima.

### 2.4.5. Paulijeve matrice

Paulijeve matrice su Hermitske i unitarne matrice koje su često korišteni operatori u kvantnim logičkim krugovima, označavaju se kao X, Y i Z, odnosno  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$ . Svojstvene vrijednosti svake Paulijeve matrice su  $\pm 1$ , dok su svojstveni vektori:

$$\begin{aligned}\sigma_x : \quad |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) & |y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ \sigma_y : \quad |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) & |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) \\ \sigma_z : \quad |x\rangle & & |y\rangle & \end{aligned}$$

Njihove vrijednosti iznosee:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Svaka Paulijeva matrica vrši operaciju rotacije vektora stanja kvantnog bita za  $\pi$  radijana na Blochovoj sferi oko osi po kojoj je nazvana.

Paulijeve matrice su također važne jer linearnom kombinacijom njih i jedinične matrice moguće je konstruirati bilo koji Hermitski operator:

$$A = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \sigma_i \quad (2.12)$$

gdje su svi  $\lambda$  koeficijenti realni.

### 2.4.6. Hadamardov operator

Hadamardov operator vrši operaciju rotacije od  $\pi$  radijana oko osi  $\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$ . Primarno se koristi kako bi se kvantni bit postavio u stanje superpozicije. Njegova vrijednost je:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Primjer Hadamardovog operatora nad kvantnim bitom  $|1\rangle$ :

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Naravno, zbog reverzibilnosti operatora, ponovnom primjenom Hadamardovog operatora kvantni bit bi se vratio u stanje  $|1\rangle$ .

### 2.4.7. Ostali unarni operatori

Svi do sada navedeni operatori djeluju nad samo jednim kvantnim bitom, pa se takvi operatori nazivaju unarnim. Postoje i drugi operatori kao što su  $\sqrt{\text{NOT}}$  i operator faznog pomaka  $R[\phi]$ :

$$\sqrt{\text{NOT}} = \sqrt{\sigma_x} = \frac{1}{1+i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad R[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

No, njih, kao i sve ostale unitarne Hermitske operatore koje je moguće dobiti na način dan jednačbom 2.12, nije toliko bitno razraditi u sklopu ovoga rada.

### 2.4.8. CU operatori

CU operatori ili control-U operatori djeluju na 2 kvantna bita od kojih je jedan bit **kontrolni**. Općeniti izgled CU operatora u *blok-matričnom* prikazu je:

$$CU = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

gdje je  $U$  bilo koji unarni operator, a  $I$  jedinična matrica. U načelu, operator provodi operaciju  $U$  nad drugim kvantnim bitom ako je prvi u jedinici, inače ga ne mijenja.

Najkorišteniji CU operator jest CX ili CNOT čija se funkcionalnost može opisati kao:

$$CNOT |xy\rangle = |x, y \oplus x\rangle$$

gdje je  $x$  upravljački bit, a  $\oplus$  operator zbrajanja modulo 2. Vrijedi:

$$CNOT |00\rangle = |00\rangle$$

$$CNOT |01\rangle = |01\rangle$$

$$CNOT |10\rangle = |11\rangle$$

$$CNOT |11\rangle = |10\rangle$$

s odgovarajućom matricom:

$$CNOT = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Na analogan način se dobiju matrice za CY, CZ i CH unarnih operatora  $\sigma_y, \sigma_z$ , odnosno  $H$ .

Ovakva konstrukcija CU operatora uvijek pretpostavlja da će prvi kvantni bit biti kontrolni, a onaj nad kojim se vrši operacija drugi. Pošto je na kvantnom računalu moguće da bilo koja dva para kvantnih bitova budu operandi, korisno je, za svrhu izgradnje kvantnog simulatora, na drugačiji način prikazati konstrukciju CU operatora. Sljedeća jednadžba opisuje CU operator već spomenutog oblika 2.13, gdje je prvi bit kontrolni.

$$CU_{1,2} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_2 + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

Ukoliko je potrebno izgraditi matricu CU operatora gdje je kontrolni bit drugi, a ne prvi, u prethodnoj jednadžbi potrebno je samo promijeniti redoslijed varijabli na način:

$$CU_{2,1} = I_2 \otimes |0\rangle\langle 0| + U \otimes |1\rangle\langle 1|$$

#### 2.4.9. SWAP operator

SWAP operator zamjenjuje stanja dvaju kvantnih bitova. Moguće ga je dobiti kombinacijom CNOT operatora:

$$SWAP = CNOT_{1,2} \cdot CNOT_{2,1} \cdot CNOT_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2.4.10. Toffolijeva i Fredkinova vrata

Toffolijeva vrata ili CCNOT operator jest operator koji djeluje na tri kvantna bita od kojih su dva kontrolna. Oba kontrolna bita moraju biti u jedinici kako bi se obavila operacija NOT nad trećim bitom. Matrična forma CCNOT operatora gdje su prvi i drugi bit kontrolni jest:

$$CCNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

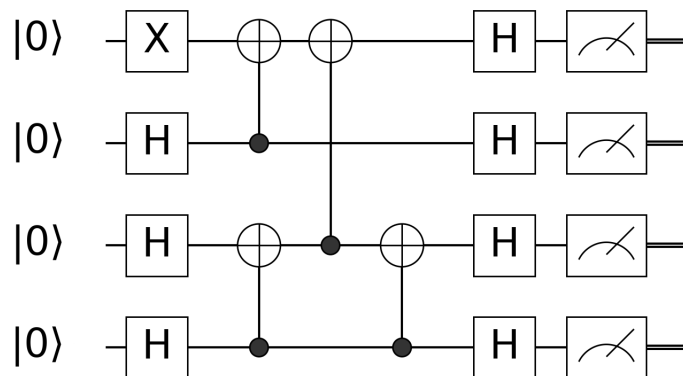
Fredkinova vrata ili drugim imenom CSWAP operator radi točno što mu ime sugeri-  
ra. Ako je kontrolni bit u jedinici, obavi operaciju SWAP nad ostala dva bita, inače  
ne radi ništa. Njegova matrica jest:

$$CSWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.5. Kvantni logički kurg

### 2.5.1. Topografija logičkog kruga

Kvantni logički krug sastoji se od kvantnih bitova i kvantnih logičkih vrata kroz koja  
prolaze određeni kvantni bitovi. Bitovi su reprezentirani kao paralelne linije na koje se  
s lijeva na desno primjenjuju odgovarajuća logička vrata. Na kraju logičkog kruga vrši  
se mjerenje<sup>2</sup>.



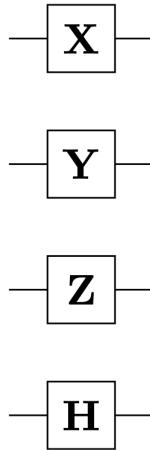
**Slika 2.3:** Primjer kvantnog logičkog kruga

<sup>2</sup>Po načelu odgođenog mjerenja (engl. *Deferred Measurement Principle*) odgađanje mjerenja do kraja logičkog kruga ne utječe na raspodjelu vjerojatnosti ishoda, pa se iz tog razloga mjerenje uvijek smješta na kraj, iako je sasvim moguće mjeriti pojedine kvantne bitove kada se zna da više neće prolaziti kroz neka logička vrata.

Također, standardno je da su svi kvantni bitovi inicijalizirani u  $|0\rangle$  te će u ovom radu prvi bit biti najmanje težine, iako to ne mora svugdje biti tako.

### 2.5.2. Reprezentacija logičkih operatora

Svaki do sada spomenuti logički operator ima svoju reprezentaciju u kvantnom logičkom krugu. Operatori  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  i Hadamard:



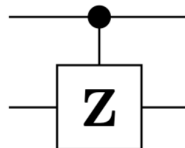
**Slika 2.4:** Reprezentacija unarnih logičkih operatora

Pošto je  $\sigma_x$  često korišten ima i drugi oblik:



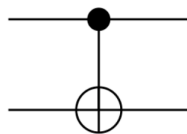
**Slika 2.5:** Alternativni  $\sigma_x$

CU operatori imaju crnu točku na kontrolnom bitu spoјenu vertikalnom crtom sa unarnim operatorom na drugom bitu:



**Slika 2.6:** CZ operator

No, kao i  $\sigma_x$ , CNOT ima drugačiji prikaz koji se puno češće koristi:



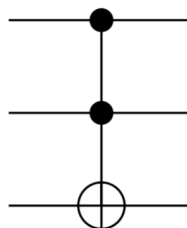
**Slika 2.7:** CNOT operator

SWAP operator također ima dvije reprezentacije:

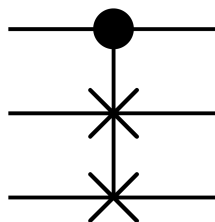


**Slika 2.8:** SWAP operator

Toffolijeva i Fredkinova vrata:



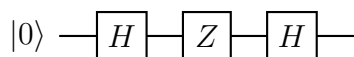
**Slika 2.9:** Toffolijeva vrata



**Slika 2.10:** Fredkinova vrata

### 2.5.3. Matrični prikaz

Svaki kvantni logički krug može se prikazati jednom unitarnom transformacijom. U slučaju kvantnog logičkog kruga s jednim kvantnim bitom, matricu cijelog logičkog kruga dobivamo jednostavnim matričnim množenjem operatora.



$$U = HZH = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektor stanja na kraju logičkog kruga:

$$U |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

Matrica nezavisnih paralelnih operatora dobiva se *tenzorskim produktom* pojedinih operatora, odnosno matricom identiteta ako nema operatora.

$$\begin{array}{c} |0\rangle \text{---} \boxed{H} \text{---} \\ |0\rangle \text{---} \text{---} \text{---} \\ |0\rangle \text{---} \boxed{H} \text{---} \end{array}$$

$$\begin{aligned} U = H \otimes I \otimes H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H & 0 & H & 0 \\ 0 & H & 0 & H \\ H & 0 & -H & 0 \\ 0 & H & 0 & -H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stanje sustava na kraju logičkog kruga je:

$$U |000\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bitovi 0 i 2 su postavljeni u stanje superpozicije dok je bit 1 ostao u stanju  $|0\rangle$  rezultirajući da se mjerenjem sustava uvijek dobije stanje koje na drugom bitu ima nulu. Iz

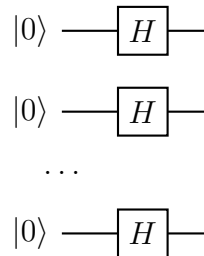
vektora se vidi da se mjerenjem mogu dobiti samo stanja  $|000\rangle$ ,  $|001\rangle$ ,  $|100\rangle$  i  $|101\rangle$  što odgovara očekivanjima.

Kombinirajući tenzorski produkt i matrično množenje može se izračunati matrična reprezentacija svakog kvantnog logičkog kruga što je u suštini točno ono što simulator kvantnog računala i radi.

## 3. Kvantni algoritmi

### 3.1. Kvantni paralelizam

Kvantni paralelizam je svojstvo kvantnih računala da izvrše neku operaciju nad više mogućih ulaza odjednom. To svojstvo proizlazi iz prirode kvantnih bitova koja im omogućava da se nalaze u superpoziciji stanja. Za višestruku evaluaciju neke funkcije  $f$ , klasično računalo mora evaluirati  $f$  više puta za različite ulaze, no kvantno računalo može tu istu funkciju evaluirati samo jednom i dobiti vektor stanja koji je težinska superpozicija svih mogućih izlaza. Takvo svojstvo se možda na prvi pogled ne čini previše korisnim, ali postoje algoritmi i situacije gdje se takvo svojstvo pokazalo iznimno korisnim, ponajviše kada je bitno neko općenito svojstvo funkcije.



Iz tog razloga, veliki broj kvantnih algoritama kao prvi korak ima postavljanje svih kvantnih bitova u stanje superpozicije korištenjem Hadamardovih operatora što se često označava operatorom  $H^{\otimes N}$  gdje je  $N$  broj kvantnih bitova.

### 3.2. Phase kickback

U načelu, operator CNOT mijenja drugi bit ako je upravljački postavljen u  $|1\rangle$ , no situacija se zakomplicira ako su bitovi u superpoziciji. Kao podsjetnik, Hadamardov operator pretvara  $|0\rangle$  u  $|+\rangle$ , a  $|1\rangle$  u  $|-\rangle$ . Kada se na bitove u takvim stanjima, uz

pretpostavku da je lijevi bit upravljački, primijeni operator CNOT dobiva se:

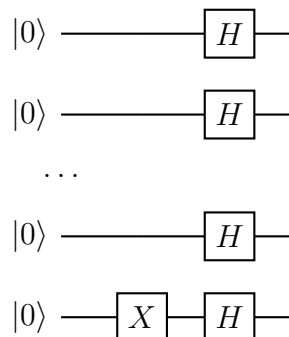
$$CNOT |++\rangle = |++\rangle$$

$$CNOT |+-\rangle = |--\rangle$$

$$CNOT |-+\rangle = |-+\rangle$$

$$CNOT |--\rangle = |+-\rangle$$

Vidi se da je u drugom i četvrtom slučaju, kada je drugi bit bio u stanju,  $|-\rangle$  on promijenio upravljački. Taj se fenomen naziva *phase kickback*<sup>1</sup>. Ovo je također jedno svojstvo koje se često koristi u kvantnim algoritmima zbog kojeg se neki bitovi inicijaliziraju u  $|1\rangle$  prije primjene Hadamardovog operatora.



No, u praksi stanje kvantnog sustava na početku kvantnog logičkog kruga uvijek bude inicijalizirano u  $|00 \dots 00\rangle$ , pa je potrebno samo primijeniti operator  $\sigma_x$  na kvantni bit koji treba biti u jedinici.

### 3.3. Deutschov algoritam

Deutschov algoritam jedan je od najjednostavnijih primjera kvantnog paralelizma koji demonstrira kvantnu nadmoć nad klasičnim računalom. Problem koji Deutschov algoritam rješava jest određivanje je li neka funkcija crne kutije oblika  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  *uravnotežena* ili *konstantna*. Postoje četiri takve funkcije:

$$f(x) = 0 \quad f(x) = 1 \quad f(x) = x \quad f(x) = \neg x$$

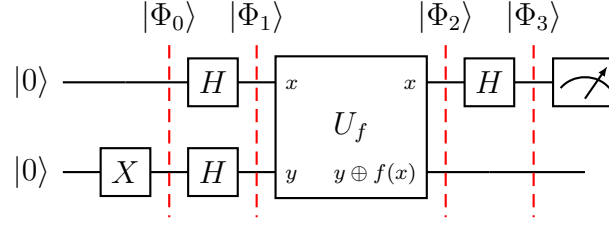
gdje su prve dvije konstantne, a druge dvije uravnotežene. Za rješavanje ovog problema, klasično računalo treba evaluirati funkciju barem dva puta, dok na kvantnom računalu funkciju je dovoljno evaluirati samo jednom.

---

<sup>1</sup>Ne znam ovo prevesti



Kvantni logički krug Deutschevog algoritma izgleda ovako:



$U_f$  je kvantna implementacija funkcije  $f$  za koju vrijedi:

$$U_f |x \otimes y\rangle = |x \otimes (y \oplus f(x))\rangle \quad x, y \in \{0, 1\}$$

Na kraju logičkog kruga, izmjerena vrijednost prvog kvantnog bita bila bi 0 za konstantne funkcije, a 1 za uravnotežene. Razlog tome se može pronaći analizirajući tok algoritma. Prije primjene Hadamardovih vrata sustav se nalazi u stanju:

$$|\Phi_0\rangle = |0 \otimes 1\rangle$$

Nakon Hadamardovih vrata:

$$|\Phi_1\rangle = |+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle + |1-\rangle)$$

Primjenom  $U_f$  na stanje  $|x-\rangle$  gdje je  $x = \{0, 1\}$  dobiva se:

$$\begin{aligned} U_f |x-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U_f |x0\rangle - U_f |x1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \otimes |f(x)\rangle - |x\rangle \otimes |f(x) \oplus 1\rangle) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem 0 i 1 umjesto  $f(x)$  dobiva se:

$$U_f |x-\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|x0\rangle - |x1\rangle) = |x-\rangle & \text{za } f(x) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|x1\rangle - |x0\rangle) = -|x-\rangle & \text{za } f(x) = 1 \end{cases}$$

odnosno:

$$U_f |x-\rangle = (-1)^{f(x)} |x-\rangle$$

Sada, primjenom  $U_f$  na stanje  $|\Phi_1\rangle$  dobije se  $|\Phi_2\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\Phi_2\rangle &= U_f |\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_f |0-\rangle + U_f |1-\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((-1)^{f(0)} |0-\rangle + (-1)^{f(1)} |1-\rangle) \\ &= \frac{(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |-\rangle \end{aligned}$$

Očigledno je da su stanja separabilna, stoga se prvi bit može promatrati samostalno. Primjenom Hadamardovih vrata na prvi kvantni bit dobiva se konačno stanje:

$$\begin{aligned} |\Phi_3\rangle &= H \cdot \frac{(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} |0\rangle + \frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} |1\rangle \end{aligned}$$

Iz jednadžbe se vidi da za konstantne funkcije vrijedi,

$$|\Phi_3\rangle = \pm |0\rangle$$

a za uravnotežene

$$|\Phi_3\rangle = \pm |1\rangle$$

Pošto faza nema utjecaja na rezultate mjerenja, za konstantne funkcije rezultat mjerenja uvijek bude 0, a za uravnotežene 1.

Postoji generalizacija ovoga algoritma pod nazivom Deutsch-Jozsin algoritam koji rješava isti problem, ali sa ulazom proizvoljnog broja bitova. U njemu također je potrebno evaluirati funkciju samo jednom gdje će izlazni registar biti u nulama ako je funkcija konstantna, a bilo što drugo ako je uravnotežena. U njega ovaj rad neće ulaziti, ali je sličan i može se pogledati u [2]

### 3.4. Groverov algoritam

### 3.5. Shorov algoritam

## **4. Simulacija kvantnog računala**

- 4.1. Postojeći simulatori kvantnog računala**
- 4.2. Izrada simulatora kvantnog računala**
- 4.3. Primjeri simulacije kvantnih logičkih krugova**
- 4.4. Prednosti i mane simulatora kvantnog računala**

## **5. Zaključak**

# LITERATURA

- [1] Adrian Cho. IBM promises 1000-qubit quantum computer—a milestone—by 2023, September 2020. URL <https://www.sciencemag.org/news/2020/09/ibm-promises-1000-qubit-quantum-computer-milestone-2023>.
- [2] M.A. Nielsen i I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139495486.
- [3] Peter W. Shor. Polynomial time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 26:1484, 1997. doi: 10.1137/S0097539795293172.

## Simulacija kvantnog računala

### Sažetak

Sažetak na hrvatskom jeziku.

**Ključne riječi:** Ključne riječi, odvojene zarezima.

### Title

### Abstract

Abstract.

**Keywords:** Keywords.