SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 69420

Simulacija kvantnog računala

Dominik Matić

Zagreb, svibanj 2021.

SADRŽAJ

1. Uvod

Neprestanim razvojem znanosti i tehnologije, kvantna računala postaju sve bitnijim dijelom računarstva. Predstavljaju sasvim drugačiji način računanja koji otvara vrata rješavanju mnogih problema koje klasično računalo, zbog same prirode problema, ili rješava znatno sporije ili uopće ne može riješiti u razumnom vremenu. Takvi problemi javljaju se u područjima kriptografije, umjetne inteligencije i strojnog učenja, računalne biologije, financija, simulacije kvantnih sustava kao i u ostalim područjima računarstva kao što su algoritmi pretraživanja.

Područje kriptografije je posebno zanimljivo jer se većina današnjih sigurnosnih mehanizama interneta temelji na matematičkim problemima za koje se smatra da su teško izračunljivi. To su primarno problem faktorizacije velikih brojeva te problem diskretnog logaritma. Kvantno računalo efikasno rješava takve probleme, što je još devedesetih godina demonstrirao Peter Shor[4]. Naravno, iz toga slijedi da će kvantna računala biti velika prijetnja sigurnosti na internetu, no već su se počeli razvijati mehanizmi koji će biti otporni na napade kvantnim računalom[citati?] što samo govori o tome koliko je kvantno računalo blizu da postane veliki dio računarstva.

Potencijal kvantnog računala poznat je desetljećima te su već smišljeni i detaljno opisani mnogi od algoritama prikladni za takav način računanja. Sve što je preostalo je izgraditi računalo koja će moći provoditi te algoritme. Danas, IBM posjeduje kvantno računalo s najvećim brojem kvantnih bitova, njih čak 65, no ni to još nije dovoljno da bude korisno. Naime, problem nastaje s pojavom kvantne dekoherencije. Dekoherencija predstavlja gubitak informacije kvantog sustava zbog interakcije s okolinom što onemogućava precizno ili čak bilo kakvo računanje. No, kvantno računarstvo je trenutno veliki predmet istraživanja te se napretci ostvaruju skoro svaki dan. Mogućnost izgradnje kvantnog računala sa dovoljno velikim brojem kvantnih bitova je sve izglednija, kao primjer, IBM obećava do 2023. godine izgraditi kvantno računalo sa 1000 kvantnih bitova[1].

S ciljem demonstracije nekih od mogućnosti kvantnog računala, ovaj rad se u provm dijelu bavi osnovnim načelima kvantnog računala, odnosno matematičkim mo-

delom kojim opisujemo kvantnomehaničke pojave koje nam omogućuju drugačiji način računanja. Nakon toga rad opisuje neke od algoritama namijenjenih za kvantno računalo koji će zatim neki od njih biti implementirani i demonstrirani u samostalno izgrađenom simulatoru.

2. Kvantno računalo

2.1. Polarizacija svjetlosti

Klasična fizika shvaća svjetlost kao transverzalni elektromagnetski val koji može biti poraliziran na različite načine. Polarizacija svjetlosti određena je njenom električnom komponentom te je svjetlost koju emitiraju prirodni izvori svjetlosti uglavnom nepolarizirana. Tek kada se snop svjetlosti pusti kroz polarizator dobije se linearno polariziran val svjetlosti — val koji ima stalni smjer širenja okomit na smjer titranja. Njegova električna komponenta dana je jednadžbom:

$$E = E_0 \hat{p} e^{i\omega t} \tag{2.1}$$

gdje je $\hat{p}$ jedinični vektor u smjeru polarizacije vala. Intenzitet ovako polariziranog vala biti će upola manji od intenziteta početnog nepolariziranog vala jer će točno toliko intenziteta polarizator apsorbirati. Kada ovakav val pustimo kroz još jedan polarizator (tzv. analizator), val koji ćemo dobiti jest:

$$E' = (E \cdot \hat{n})\hat{n} = E_0(\hat{p} \cdot \hat{n})\hat{n} e^{i\omega t} = E_0 \cos\alpha \tag{2.2}$$

gdje je $\hat{n}$ jedinični vektor u smjeru polarizacije analizatora, a α kut između vektora $\hat{p}$ i $\hat{n}$. Intenzitet novog vala dobivamo po Malusovom zakonu:

$$I' = I \cos^2\alpha \tag{2.3}$$

gdje je I intenzitet prethodno polariziranog vala. Drugim riječima, polarizacijom vala dobivamo njegovu projekciju na ravninu određenu kutom polarizatora.

U kvantnoj mehanici, svjetlost je definirana drugačije — kao niz fotona, nedjeljivih elementarnih čestica. Kod takve interpretacije postavlja se pitanje što se događa kada individualni fotoni prolaze kroz polarizator. Ako polarizator propušta projekciju, koja je uvijek manja ili jednaka ulaznom valu, što će se dogoditi fotonu, ako je on nedjeljiv? Eksperimenti su pokazali da će foton sa točno određenom šansom ili cijeli proći kroz

polarizator sa novim smjerom polarizacije ili biti apsorbiran. Ključan element takvih eksperimenata je činjenica da je nemoguće *niti u načelu* odrediti što će se dogoditi sa fotonom. To znači da čak uz poznavanje svih varijabli nekog sustava, nemoguće je deterministički odrediti ishod.

Prijelaze kvantnih sustava iz jednog stanja u drugo modeliramo takozvanom amplitudom vjerojatnosti:

$$a(\Phi \to \Psi) \tag{2.4}$$

koja je element skupa kompleksnih brojeva, a vjerojatnost da neki sustav koji je u stanju Φ bude izmjeren u stanju Ψ dobivamo na način:

$$p(\Phi \to \Psi) = |a(\Phi \to \Psi)|^2 \tag{2.5}$$

U slučaju polarizatora, vjerojatnost smo mogli izračunati pomoću Malusovog zakona što nam daje vjerojatnost prolaska fotona kroz polarizator jednaku

$$p(\Phi \to \Psi) = \cos^2 \alpha \tag{2.6}$$

iz čega je vidljiva amplituda vjerojatnosti:

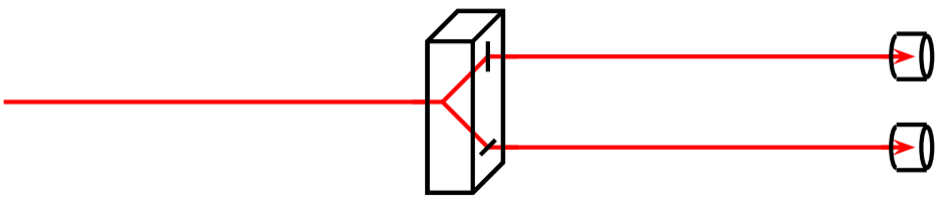
$$|a(\Phi \to \Psi)|^2 = \cos^2 \alpha \Rightarrow a(\Phi \to \Psi) = \cos \alpha \tag{2.7}$$

gdje je α kut koji zatvaraju vektori polarizacije fotona i polarizatora, Φ stanje fotona prije prolaska kroz polarizator, a Ψ stanje u kojemu foton nije apsorbiran.

2.2. Kvantni bit

2.2.1. Definicija

Dvolomac je vrsta polarizatora koji dijeli svjetlost na dva ortagonalno polarizirana snopa. Kombinirajući dvolomac sa dva detektora uvijek je moguće odrediti u koje je stanje prešao foton pušten kroz dvolomac.



Slika 2.1: Dvolomac s dva detektora

Nakon detekcije, foton je apsorbiran i ne može se više mjeriti. Takav kvantnomehanički sustav, koji je moguće samo jednom izmjeriti u samo jednom od dva moguća stanja nazivamo **kvantnim bitom** ili **qubitom**. Kvantni bit prije mjerenja može biti u beskonačno mnogo različitih stanja te općenito jedno takvo stanje zovemo **superpozicijom** dvaju stanja. Ta dva stanja se odnose na stanja baze mjerenja koja mogu biti proizvoljna, ali su uvijek međusobno ortogonalna. Pojam superpozicije se može primijeniti i u klasičnom smislu. U slučaju svjetlosti, uzimajući dva linearno polarizirana vala s okomitim smjerovima polarizacije kao bazu sustava, općenito stanje polarizacije vala možemo prikazati kao:

$$E = E_x \hat{x} e^{i(\omega t + \phi_x)} + E_y \hat{y} e^{i(\omega t + \phi_y)} = E_0(\lambda \hat{x} + \mu \hat{y}) e^{i\omega t} \tag{2.8}$$

gdje vrijedi:

$$E_0 = \sqrt{(E_x^2 + E_y^2)} \qquad \lambda = \frac{E_x}{E_0} e^{i\phi_x} \qquad \mu = \frac{E_y}{E_0} e^{i\phi_y} \qquad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1 \tag{2.9}$$

Bitno je uočiti da su λ i μ kompleksni brojevi kao i da dio izraza $\lambda\hat{x} + \mu\hat{y}$ sadrži informaciju o stanju polarizacije vala te da takvih stanja ima beskonačno mnogo.

2.2.2. Diracova notacija

Stanja kvantnih bitova u praksi se prikazuje ket simbolima koji su dio Diracove ili bra-ket notacije:

$$\begin{aligned} \text{bra:} \quad & \langle \Phi | \\ \text{ket:} \quad & | \Phi \rangle \\ \text{braket:} \quad & \langle \Phi | \Phi \rangle \end{aligned}$$

S pretpostavkom da su $|x\rangle$ i $|y\rangle$ dva stanja baze mjerenja sustava, kao npr. stanje fotona polariziranog u smjeru x i stanje fotona polariziranog u smjeru y, općenito stanje polarizacije fotona možemo prikazati superpozicijom ta dva stanja:

$$|\Phi\rangle = \lambda\,|x\rangle + \mu\,|y\rangle$$

gdje su λ i μ kompleksni brojevi te vrijedi $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$.

2.2.3. Svojstva Hilbertovog prostora

U matematičkom smislu, stanja kvantnih bitova prikazanih ketovima su zapravo vektori dvodimenzionalnog kompleksnog Hilbertovog prostora. Za takav prostor vrijede sljedeća svojstva.

Skalarni umnožak:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle^* \in \mathbb{C}$$

$$\langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0$$

Norma vektora $|\Phi\rangle$:

$$||\Phi|| = \sqrt{\langle \Phi | \Phi \rangle}$$

Vektori stanja baze moraju biti ortonormirani što znači da mora vrijediti:

$$\langle x | y \rangle = 0 \qquad \langle x | x \rangle = \langle y | y \rangle = 1$$

Za računanje skalarnog umnoška potrebno je izračunati bra nekog stanja koji se dobiva kompleksnom konjugacijom keta. Općenito, izračun $\langle \Psi | \Phi \rangle$ dobiva se:

$$|\Phi\rangle = \lambda |x\rangle + \mu |y\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \nu |x\rangle + \sigma |y\rangle \Rightarrow \langle \Psi | = \nu^* \langle x | + \sigma^* \langle y |$$

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \nu^* \lambda \langle x | x \rangle + \nu^* \mu \langle x | y \rangle + \sigma^* \lambda \langle y | x \rangle + \sigma^* \mu \langle y | y \rangle = \nu^* \lambda + \sigma^* \mu = \langle \Phi | \Psi \rangle^*$$

Norma vektora se računa na analogan način.

2.2.4. Amplituda vjerojatnosti i vjerojatnost

Amplituda vjerojatnosti modelira prijelaz jednog kvantnog stanja u drugo kojeg računamo skalarnim umnoškom vektora stanja.

$$a(\Phi \to \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle$$

Odgovarajuća vjerojatnost mjerenja kvantnog bita u stanju Ψ ako se prethodno nalazio u stanju Φ računa se:

$$p(\Phi \to \Psi) = |a(\Phi \to \Psi)|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2$$

2.2.5. Vektorski prikaz

Za lakšu implementaciju kvantnog bita na klasičnom računalu, korisno je prikazati kvantne bitove vektorski. Klasična nula i jedinica bi imale vektorski oblik:

$$0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ti vektori odgovaraju ujedno i vektorima stanja baze mjerenja nekog sustava koji se mogu označiti kao $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Sva ostala stanja mogu se dobiti superpozicijom tih vektora:

$$|\Phi\rangle = \lambda\,|0\rangle + \mu\,|1\rangle = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

Bra dobivamo kompleksnim konjugiranjem i transponiranjem keta:

$$\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \nu \\ \sigma \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{bmatrix}$$

Računanje amplitude vjerojatnosti se tada svodi na jednostavno matrično množenje:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{bmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \nu^*\lambda + \sigma^*\mu$$

2.3. Sustav kvantnih bitova

2.3.1. Dva ili više kvantnih bitova

Kao što se jedan kvantni bit prikazuje kao vektor u dvodimenzionalnom kompleksnom Hilbertovom prostoru, sustav od n kvantnih bitova može se prikazati kao vektor u 2^n-dimenzionalnom kompleksnom Hilbertovom prostoru.

Za n stanja oblika $|\Phi_i\rangle, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, njihov zajednički vektor stanja $|\Psi\rangle$ dobiva se **tenzorskim produktom** svih stanja:

$$|\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\Phi_n\rangle$$

Za dva kvantna bita, tenzorski produkti vektora stanja baze mjerenja sustava označavaju se kao:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle \qquad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \qquad |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle \qquad |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

U vektorskom obliku te baze se prikazuju kao:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Općenito, za dva kvantna bita dana u obliku $|\Phi_i\rangle = \lambda_i\,|0\rangle + \mu_i\,|1\rangle, i \in \{1, 2\}$, tenzorski produkt jednak je:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle &= (\lambda_1\,|0\rangle + \mu_1\,|1\rangle) \otimes (\lambda_2\,|0\rangle + \mu_2\,|1\rangle) \\ &= \lambda_1\lambda_2\,|00\rangle + \lambda_1\mu_2\,|01\rangle + \mu_1\lambda_2\,|10\rangle + \mu_1\mu_2\,|11\rangle \end{aligned} \tag{2.10}$$

U vektorskom obliku:

$$|\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\ \mu_1 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\mu_2 \\ \mu_1\lambda_2 \\ \mu_1\mu_2 \end{bmatrix}$$

Analogno se dobiju vektori 3 ili više kvantnih bitova.

Naravno, za svaki vektor koji opisuje sustav od n kvantnih bitova oblika

$$\lambda_1 |00\ldots00\rangle + \lambda_2 |00\ldots01\rangle + \ldots + \lambda_{2^n} |11\ldots11\rangle$$

vrijedi:

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \ldots + |\lambda_{2^n}|^2 = 1 \tag{2.11}$$

2.3.2. Spregnutost

Spregnutost (engl. *entaglement*) opisuje sustav kvantnih bitova koji se ne može prikazati tenzorskim produktom vektora stanja pojedinih kvantnih bitova. Bitno je uočiti da iz jednadžbe 2.10 vrijedi da je umnožak koeficijenata uz $|00\rangle$ i $|11\rangle$ jednak umnošku koeficijenata uz $|01\rangle$ i $|10\rangle$.

$$\lambda_1\lambda_2 \cdot \mu_1\mu_2 = \lambda_1\mu_2 \cdot \mu_1\lambda_2$$

Stanja u kojima vrijedi prethodna jednadžba nazivaju se separabilnima, te zauzimaju samo podskup Hilbertovog prostora u kojemu se nalaze. Vektori stanja koji ne zadovoljavaju takvu jednakost, uz nužan uvjet da zadovoljavaju jednadžbu 2.11 nazivaju se spregnutim stanjima. Jedno takvo stanje jest:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Mjerenje takvog sustava rezultiralo bi detekcijom stanja $|00\rangle$ ili $|11\rangle$, ali nikada stanja $|01\rangle$ ili $|10\rangle$. Drugim riječima, mjerenjem samo jednog kvantnog bita u sustavu, odmah je poznata i vrijednost drugoga.

Spregnutost se ne odnosi samo na sustave s dva kvantna bita, analogno se ista logika može primijeniti i na sustave s 3 ili više kvantnih bitova. Primjer jednog spregnutog stanja s tri kvantnih bitova:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

2.4. Kvantni operatori

2.4.1. Svojstva

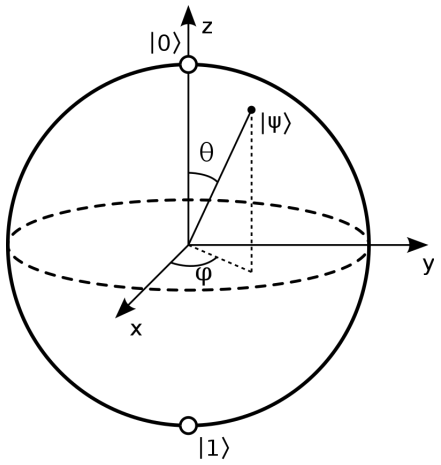
Kako bi bilo kakav izračun s kvantnim bitovima bio moguć, potrebno je moći manipulirati s njima. S klasičnim bitovima to rade operatori kao što su AND, OR, XOR i sl. Kvantni operatori su nešto drugačiji. Naime, pošto je jedna od glavnih značajki kvantne mehanike reverzibilnost sustava, kvantni operatori moraju biti **reverzibilni**, što je od klasičnih operatora samo NOT. Pošto stanja kvantnih bitova moraju uvijek ostati normirana, operatori su također **unitarni**. Uz unitarnost, kvantni operatori su i **hermitski**.

2.4.2. Blochova sfera

Radi lakše interpretacije nekih od operatora, korisno je poznavati reprezentaciju kvantnog bita na Blochovoj sferi. Svako stanje[1] kvantnog bita može se prikazati točkom na površini Blochove sfere.

Ta činjenica se čini zbunjujućom jer svaki kvantni bit u potpunosti određuju dva kompleksna broja što rezultira s četiri stupnja slobode, no uzimajući u obzir da kvantni bit mora biti normiran i da množenje kvantnog bita s faznim faktorom nema nikakvog fizičkog utjecaja na njegovo stanje, dobiju se samo dva stupnja slobode. Na temelju toga, općenito stanje kvantnog bita se može izraziti kao:

$$|\Psi\rangle = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



Slika 2.2: Blochova sfera

[1]Odnosi se na čista stanja (engl. *pure states*), ali postoje i takozvana mješovita stanja(engl. *mixed states*) koja se mogu prikazati kao točkama unutar sfere, ali takva stanja nisu bitna u sklopu ovog rada

Bitno je primjetiti da vektori koji su u Hilbertovom prostoru ortogonalni su na Blochovoj sferi suprotni. U točki gdje os x probada sferu nalazi se stanje $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, a suprotno njemu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Na isti način u smjeru osi y nalazi se stanje $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$ te suprotno njemu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$. Navedeni vektori označavaju se kao $|x\rangle$ i $|y\rangle$, odnosno $|R\rangle$ i $|L\rangle$.

2.4.3. Operator projekcije

Skalarnim umnoškom dva vektora stanja kvantnih bitova dobije se skalar koji se može interpretirati kao koliko prvi vektor 'ide' u smjeru drugoga. Ako se taj skalar pomnoži drugim vektorom, dobije se vektor projekcije prvoga na drugi.

$$|\Omega\rangle = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle$$

Dio izraza $|\Psi\rangle \langle\Psi|$ možemo shvatiti kao operator projekcije na stanje $|\Psi\rangle$ te se takav operator naziva projektorom. Vektori dobiveni projekcijom općenito nisu normirani te kao takvi ne predstavljaju neko stanje kvantnog bita. Projektori se koriste kako bi se konstruirali drugi operatori.

Matrični prikaz projektora na vektore stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$|0\rangle \langle 0| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle \langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.4. Hermitski operator

Svaki operator u Hilbertovom prostoru koji je jednak sebi kada se kompleksno konjugira i transponira naziva se Hermitskim operatorom.

$$A^\dagger = A$$

Hermitski operator se može prikazati kao linearna kombinacija projektora ortonormirane baze N-dimenzionalnog prostora pomnoženih *realnim* koeficijentima:

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \,|i\rangle \langle i| \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Vektori $|i\rangle$ su svojstveni vektori Hermitskog operatora sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima a_i.

Hermitski operatori se mogu koristiti za izračune vezane uz fizikalne veličine pripisane baznim stanjima nekog kvantnog sustava, no u sklopu kvantnog računarstva koriste se za manipulaciju stanjima.

2.4.5. Paulijeve matrice

Paulijeve matrice su Hermitske i unitarne matrice koje su često korišteni operatori u kvantnim logičkim krugovima, označavaju se kao X, Y i Z, odnosno σ_x, σ_y i σ_z. Svojstvene vrijednosti svake Paulijeve matrice su ± 1, dok su svojstveni vektori:

$$\begin{aligned}
\sigma_x: &\qquad |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
\sigma_y: &\qquad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle) \qquad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle) \\
\sigma_z: &\qquad |x\rangle \qquad |y\rangle
\end{aligned}$$

Njihove vrijednosti iznosee:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Svaka Paulijeva matrica vrši operaciju rotacije vektora stanja kvantnog bita za π radijana na Blochovoj sferi oko osi po kojoj je nazvana.

Paulijeve matrice su također važne jer linearnom kombinacijom njih i jedinične matrice moguće je konstruirati bilo koji Hermitski operator:

$$A = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \sigma_i \tag{2.12}$$

gdje su svi λ koeficijenti realni.

2.4.6. Hadamardov operator

Hadamardov operator vrši operaciju rotacije od π radijana oko osi $\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$. Primarno se koristi kako bi se kvantni bit postavio u stanje superpozicije. Njegova vrijednost je:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Primjer Hadamardovog operatora nad kvantnim bitom $|1\rangle$:

$$H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Naravno, zbog reverzibilnosti operatora, ponovnom primjenom Hadamardovog operatora kvantni bit bi se vratio u stanje $|1\rangle$.

2.4.7. Ostali unarni operatori

Svi do sada navedeni operatori djeluju nad samo jednim kvantnim bitom, pa se takvi operatori nazivaju unarnim. Postoje i drugi operatori kao što su $\sqrt{\text{NOT}}$ i operator faznog pomaka $R[\phi]$:

$$\sqrt{\text{NOT}} = \sqrt{\sigma_x} = \frac{1}{1+i}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \qquad R[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

No, njih, kao i sve ostale unitarne Hermitske operatore koje je moguće dobiti na način dan jednadžbom 2.12, nije toliko bitno razraditi u sklopu ovoga rada.

2.4.8. CU operatori

CU operatori ili control-U operatori djeluju na 2 kvantna bita od kojih je jedan bit **kontrolni**. Općeniti izgled CU operatora u *blok-matričnom* prikazu je:

$$CU = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

gdje je U bilo koji unarni operator, a I jedinična matrica. U načelu, operator provodi operaciju U nad drugim kvantnim bitom ako je prvi u jedinici, inače ga ne mijenja.

Najkorišteniji CU operator jest CX ili CNOT čija se funkcionalnost može opisati kao:

$$CNOT\,|xy\rangle = |x, y \oplus x\rangle$$

gdje je x upravljački bit, a $\oplus$ operator zbrajanja modulo 2. Vrijedi:

$$CNOT\,|00\rangle = |00\rangle$$

$$CNOT\,|01\rangle = |01\rangle$$

$$CNOT\,|10\rangle = |11\rangle$$

$$CNOT\,|11\rangle = |10\rangle$$

s odgovarajućom matricom:

$$CNOT = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Na analogan način se dobiju matrice za CY, CZ i CH unarnih operatora σ_y, σ_z, odnosno H.

Ovakva konstrukcija CU operatora uvijek pretpostavlja da će prvi kvantni bit biti kontrolni, a onaj nad kojim se vrši operacija drugi. Pošto je na kvantnom računalu moguće da bilo koja dva para kvantnih bitova budu operandi, korisno je, za svrhu izgradnje kvantnog simulatora, na drugačiji način prikazati konstrukciju CU operatora. Sljedeća jednadžba opisuje CU operator već spomenutog oblika 2.13, gdje je prvi bit kontrolni.

$$CU_{1,2} = |0\rangle \langle 0| \otimes I_2 + |1\rangle \langle 1| \otimes U$$

Ukoliko je potrebno izgraditi matricu CU operatora gdje je kontrolni bit drugi, a ne prvi, u prethodnoj jednadžbi potrebno je samo promijeniti redoslijed varijabli na način:

$$CU_{2,1} = I_2 \otimes |0\rangle \langle 0| + U \otimes |1\rangle \langle 1|$$

2.4.9. SWAP operator

SWAP operator zamjenjuje stanja dvaju kvantnih bitova. Moguće ga je dobiti kombinacijom CNOT operatora:

$$\mathit{SWAP} = CNOT_{1,2} \cdot CNOT_{2,1} \cdot CNOT_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.10. Toffolijeva i Fredkinova vrata

Toffolijeva vrata ili CCNOT operator jest operator koji djeluje na tri kvantna bita od kojih su dva kontrolna. Oba kontrolna bita moraju biti u jedinici kako bi se obavila operacija NOT nad trećim bitom. Matrična forma CCNOT operatora gdje su prvi i drugi bit kontrolni jest:

$$\mathit{CCNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

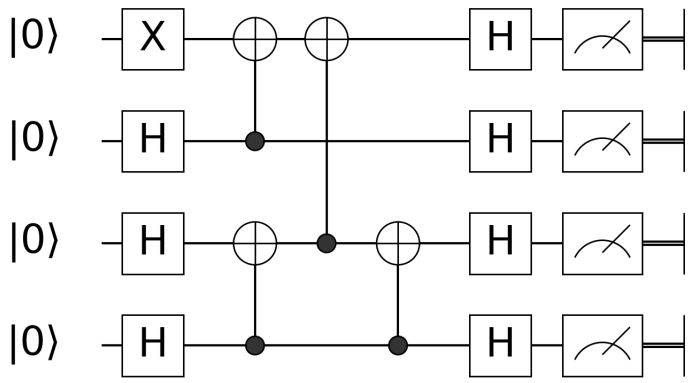
Fredkinova vrata ili drugim imenom CSWAP operator radi točno što mu ime sugerira. Ako je kontrolni bit u jedinici, obavi operaciju SWAP nad ostala dva bita, inače ne radi ništa. Njegova matrica jest:

$$CSWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5. Kvantni logički kurg

2.5.1. Topografija logičkog kruga

Kvantni logički krug sastoji se od kvantnih bitova i kvantnih logičkih vrata kroz koja prolaze određeni kvantni bitovi. Bitovi su reprezentirani kao paralelne linije na koje se s lijeva na desno primjenjuju odgovarajuća logička vrata. Na kraju logičkog kruga vrši se mjerenje[2].



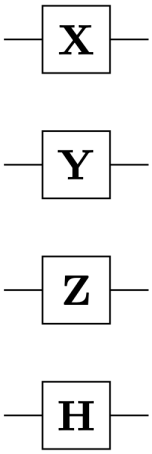
Slika 2.3: Primjer kvantnog logičkog kruga

[2]Po načelu odgođenog mjerenja (engl. *Deferred Measurement Principle*) odgađanje mjerenja do kraja logičkog kruga ne utječe na raspodjelu vjerojatnosti ishoda, pa se iz tog razloga mjerenje uvijek smješta na kraj, iako je sasvim moguće mjeriti pojedine kvantne bitove kada se zna da više neće prolaziti kroz neka logička vrata.

Također, standardno je da su svi kvantni bitovi inicijalizirani u stanje $|0\rangle$.

2.5.2. Reprezentacija logičkih operatora

Svaki do sada spomenuti logički operator ima svoju reprezentaciju u kvantnom logičkom krugu. Operatori σ_x, σ_y, σ_z i Hadamard:

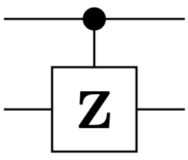


Slika 2.4: Reprezentacija unarnih logičkih operatora

Pošto je σ_x često korišten ima i drugi oblik:

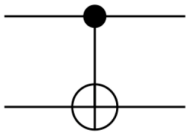
Slika 2.5: Alternativni σ_x

CU operatori imaju crnu točku na kontrolnom bitu spojenu vertikalnom crtom sa unarnim operatorom na drugom bitu:



Slika 2.6: CZ operator

No, kao i σ_x, CNOT ima drugačiji prikaz koji se puno češće koristi:

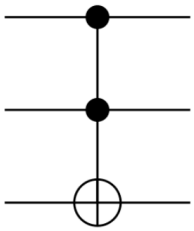


Slika 2.7: CNOT operator

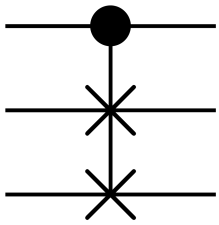
SWAP operator također ima dvije reprezentacije:

Slika 2.8: SWAP operator

Toffolijeva i Fredkinova vrata:



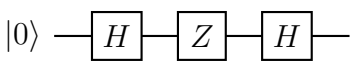
Slika 2.9: Toffolijeva vrata



Slika 2.10: Fredkinova vrata

2.5.3. Matrični prikaz

Svaki kvantni logički krug može se prikazati jednom unitarnom transformacijom. U slučaju kvantnog logičkog kruga s jednim kvantnim bitom, matricu cijelog logičkog kruga dobivamo jednostavnim matričnim množenjem operatora.

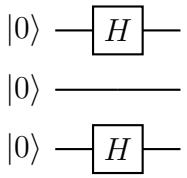


$$U = HZH = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektor stanja na kraju logičkog kruga:

$$U |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

Matrica nezavisnih paralelnih operatora dobiva se *tenzorskim produktom* pojedinih operatora, odnosno matricom identiteta ako nema operatora.



$$\begin{aligned} U = H \otimes I \otimes H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H & 0 & H & 0 \\ 0 & H & 0 & H \\ H & 0 & -H & 0 \\ 0 & H & 0 & -H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stanje sustava na kraju logičkog kruga je:

$$U |000\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bitovi 0 i 2 su postavljeni u stanje superpozicije dok je bit 1 ostao u stanju $|0\rangle$ rezultirajući da se mjerenjem sustava uvijek dobije stanje koje na drugom bitu ima nulu. Iz

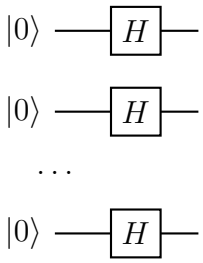
vektora se vidi da se mjerenjem mogu dobiti samo stanja $|000\rangle$, $|001\rangle$, $|100\rangle$ i $|101\rangle$ što odgovara očekivanjima.

Kombinirajući tenzorski produkt i matrično množenje može se izračunati matrična reprezentacija svakog kvantnog logičkog kruga što je u suštini točno ono što simulator kvantnog računala i radi.

3. Kvantni algoritmi

3.1. Kvantni paralelizam

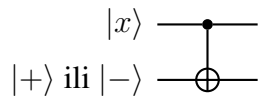
Kvantni paralelizam je svojstvo kvantnih računala da izvrše neku operaciju nad više mogućih ulaza odjednom. To svojstvo proizlazi iz prirode kvantnih bitova koja im omogućava da se nalaze u superpoziciji stanja. Za višestruku evaluaciju neke funkcije f, klasično računalo mora evaluirati f više puta za različite ulaze, no kvantno računalo može tu istu funkciju evaluirati samo jednom i dobiti vektor stanja koji je težinska superpozicija svih mogućih izlaza. Takvo svojstvo se možda na prvi pogled ne čini previše korisnim, ali postoje algoritmi i situacije gdje se takvo svojstvo pokazalo iznimno korisnim, ponajviše kada je bitno neko općenito svojstvo funkcije.



Iz tog razloga, veliki broj kvantnih algoritama kao prvi korak ima postavljanje svih kvantnih bitova u stanje superpozicije korištenjem Hadamardovih operatora što se često označava operatorom $H^{\otimes N}$ gdje je N broj kvantnih bitova.

3.2. Prevrtanje faze

Prevrtanje faze je pojava kada ciljni bit CU operatora utječe na upravljački bit mijenjajući mu fazu. Javlja se kada je ciljni bit postavljen u svojstveno stanje unarnog operatora i kada je upravljački bit u jedinici.



Slika 3.1: Prevrtanje faze

Na primjeru operatora CX, svojstvena stanja operatora X su $|+\rangle$ i $|-\rangle$ uz svojstvene vrijednosti ± 1. Jednostavnim izračunom se dobije:

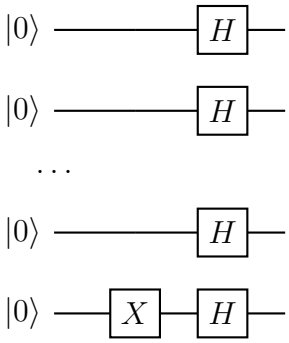
$$CNOT\,|0+\rangle = |0+\rangle \qquad CNOT\,|0-\rangle = |0-\rangle$$

$$CNOT\,|1+\rangle = 1 \cdot |1+\rangle \qquad CNOT\,|1-\rangle = -1 \cdot |1-\rangle$$

$$CNOT\,|++\rangle = |++\rangle \qquad CNOT\,|+-\rangle = |--\rangle$$

$$CNOT\,|-+\rangle = |-+\rangle \qquad CNOT\,|--\rangle = |+-\rangle$$

Prevrtanje faze je svojstvo koje se često koristi u kvantnim algoritmima zbog kojeg se neki bitovi inicijaliziraju u $|1\rangle$ prije primjene Hadamardovog operatora.



Slika 3.2: Česta inicijalizacija kvantnog logičkog kruga

No, u praksi stanje kvantnog sustava na početku kvantnog logičkog kruga uvijek bude inicijalizirano u $|00\ldots00\rangle$, pa je potrebno samo primijeniti operator X na kvantni bit koji treba biti u jedinici.

3.3. Deutschev algoritam

3.3.1. Opis

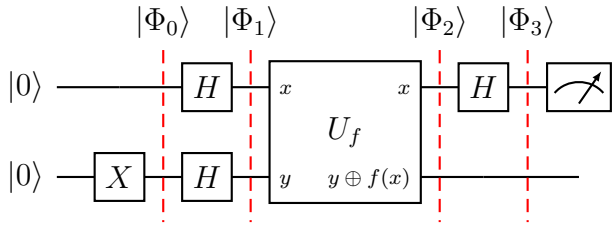
Deutschev algoritam jedan je od najjednostavnijih primjera kvantnog paralelizma koji demonstrira kvantnu nadmoć nad klasičnim računalom. Problem koji Deutschev algoritam rješava jest određivanje je li neka funkcija crne kutije oblika $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$

uravnotežena ili *konstantna*. Postoje četiri takve funkcije:

$$f(x) = 0 \qquad f(x) = 1 \qquad f(x) = x \qquad f(x) = \neg x$$

gdje su prve dvije konstantne, a druge dvije uravnotežene. Za rješavanje ovog problema, klasično računalo treba evaluirati funkciju barem dva puta, dok na kvantnom računalu funkciju je dovoljno evaluirati samo jednom.

Kvantni logički krug Deutschevog algoritma prikazan je kao:



Slika 3.3: Kvantni logički krug Deutschevog algoritma

U_f je kvantna implementacija funkcije f za koju vrijedi:

$$U_f \left|x \otimes y\right\rangle = \left|x \otimes (y \oplus f(x))\right\rangle \qquad x, y \in \{0, 1\}$$

Na kraju logičkog kruga, izmjerena vrijednost prvog kvantnog bita iznosi 0 za konstantne funkcije, a 1 za uravnotežene.

3.3.2. Analiza toka algoritma

Razlog takvom ishodu može se pronaći analizirajući tok algoritma. Prije primjene Hadamardovih vrata sustav se nalazi u stanju:

$$|\Phi_0\rangle = |0 \otimes 1\rangle$$

Nakon Hadamardovih vrata:

$$|\Phi_1\rangle = |+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle + |1-\rangle)$$

Primjenom U_f na stanje $|x-\rangle$ gdje je $x = \{0, 1\}$ dobiva se:

$$\begin{aligned} U_f \left|x-\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U_f \left|x0\right\rangle - U_f \left|x1\right\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \otimes |f(x)\rangle - |x\rangle \otimes |f(x) \oplus 1\rangle) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem 0 i 1 umjesto $f(x)$ dobiva se:

$$U_f \left|x-\right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|x0\right\rangle - \left|x1\right\rangle) = \left|x-\right\rangle & \text{za} f(x) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|x1\right\rangle - \left|x0\right\rangle) = -\left|x-\right\rangle & \text{za} f(x) = 1 \end{cases}$$

odnosno:

$$U_f \left|x-\right\rangle = (-1)^{f(x)} \left|x-\right\rangle$$

Sada, primjenom U_f na stanje $\left|\Phi_1\right\rangle$ dobije se $\left|\Phi_2\right\rangle$:

$$\begin{aligned} \left|\Phi_2\right\rangle = U_f \left|\Phi_1\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U_f \left|0-\right\rangle + U_f \left|1-\right\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((-1)^{f(0)} \left|0-\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1-\right\rangle) \\ &= \frac{(-1)^{f(0)} \left|0\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \left|-\right\rangle \end{aligned}$$

Očigledno je da su stanja separabilna, stoga se prvi bit može promatrati samostalno. Primjenom Hadamardovih vrata na prvi kvantni bit dobiva se konačno stanje:

$$\begin{aligned} \left|\Phi_3\right\rangle &= H \cdot \frac{(-1)^{f(0)} \left|0\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} \left|0\right\rangle + \frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} \left|1\right\rangle \end{aligned}$$

Iz jednadžbe se vidi da za konstantne funkcije vrijedi,

$$\left|\Phi_3\right\rangle = \pm \left|0\right\rangle$$

a za uravnotežene

$$\left|\Phi_3\right\rangle = \pm \left|1\right\rangle$$

Pošto faza nema utjecaja ne rezultate mjerenja, za konstantne funkcije rezultat mjerenja uvijek bude 0, a za uravnotežene 1.

3.3.3. Deutsch-Joszin algoritam

Postoji generalizacija ovoga algoritma pod nazivom Deutsch-Jozsin algoritam koji rješava isti problem, ali sa ulazom proizvoljnog broja bitova. U njemu je također potrebno evaluirati funkciju samo jednom gdje će izlazni registar biti u nulama ako je funkcija konstantna, a bilo što drugo ako je uravnotežena. U njega ovaj rad neće ulaziti, ali je sličan i može se pogledati u [3]

Deutschev i Deutsch-Joszin algoritam dobro demonstriraju situaciju gdje je kvantno računalo puno efikasnije od klasičnog, ali za sada ne postoje neke korisne primjene tih algoritama.

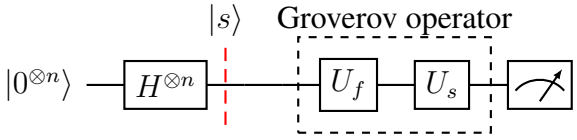
3.4. Groverov algoritam

3.4.1. Opis

Groverov algoritam[2] jedan je od algoritama koji je definirao principe kvantnih algoritama pretraživanja. U načelu, problem koji rješava jest pretraživanje nestrukturirane baze podataka. Klasično računalo taj problem rješava u prosječno $N/2$ koraka, dok kvantno računalo implementirajući Groverov algoritam pronađe rješenje s visokom vjerojatnošću u samo $\sqrt{N}$ koraka.

Definirati Groverov algoritam kao algoritam pretraživanja nestrukturirane baze podataka malo je zavaravajuće jer se u praktičnom smislu nikada ne bi mogao koristiti za točno to. Prikladnija primjena Groverovog algoritma bila bi pronalaženje inverza funkcije što čak i zvuči puno zanimljivijim i korisnijim. Jedna takva funkcija jest kriptografska funkcija sažetka. Groverov algoritam može pronaći kolizije takve funkcije u $\sqrt{N}$ koraka gdje je N veličina domene funkcije, što klasično računalo u načelu može izračunati samo grubom silom.

Kvantni logički krug Groverovog algoritma može se prikazati kao:



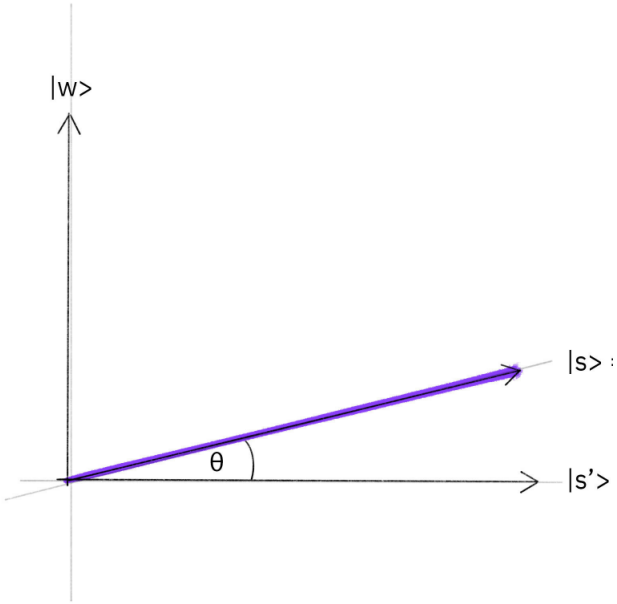
Slika 3.4: Kvantni logički krug Groverovog algoritma

Groverov operator potrebno je primijeniti $\sqrt{N}$ puta gdje je $N = 2^n$, a n broj kvantnih bitova. Sastoji se od kvantnog proroka (engl. *quantum oracle*) U_f i difuzera (engl. *diffuser*) U_s. Kvantni prorok je jedinična matrica koja na mjestu jednog ili više elemenata kojeg tražimo umjesto jedinice ima -1. Difuzer je operator koji provodi operaciju $2\left|s\right\rangle\left\langle s\right| - I_{2^n}$. Uzastopnim primjenjivanjem ovih operatora, stanje sustava se približava ciljnom stanju $|w\rangle$ koje želimo pronaći. Mjerenjem sustava nakon $\sqrt{N}$ primjena Groverovog operatora dobiva se traženi element s dovoljno velikom vjerojatnošću.

3.4.2. Analiza toka algoritma

Algoritam započinje kao i mnogi drugi, postavljanjem svih bitova u stanje superpozicije primjenom Hadamardovih operatora čime dobivamo stanje $|s\rangle$. Neka se traženo stanje zove $|w\rangle$ koji može biti ciljno stanje ili superpozicija ciljnih stanja ako ih ima

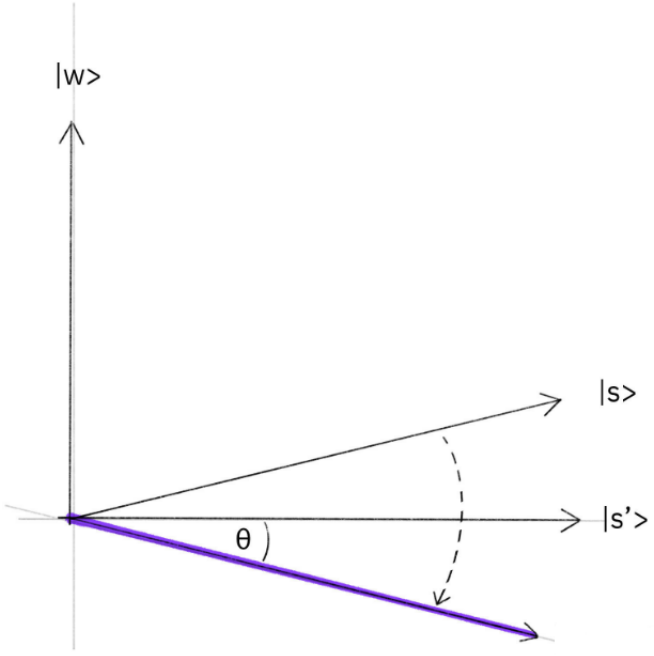
više. Neka se vektor stanja koji je okomit na stanje $|w\rangle$ zove $|s'\rangle$. Takvo stanje može se dobiti oduzimanjem stanja $|w\rangle$ od stanja $|s\rangle$ i normiranjem. Stanja $|w\rangle$, $|s\rangle$ i $|s'\rangle$ mogu se nacrtati u dvodimenzioalnom prostoru:



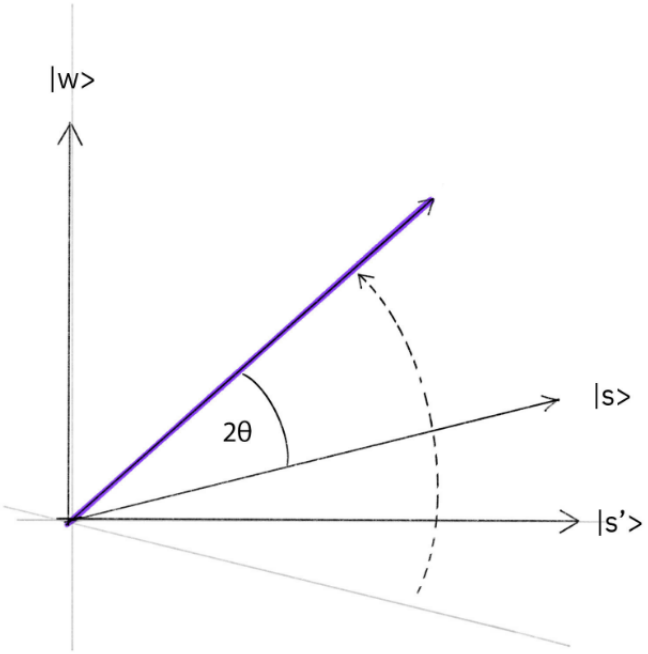
gdje kut θ opisuje koliko je stanje $|s\rangle$ zakrenuto prema $|w\rangle$. Za njega vrijedi:

$$\langle s|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} = \sin\theta \approx \theta$$

Idući korak algoritma primjenjuje kvantni prorok U_f na stanje $|s\rangle$. Sve što U_f radi jest refleksiju oko stanja $|s'\rangle$:



Zatim se primjenjuje difuzer U_s koji radi refleksiju oko stanja $|s\rangle$:



Dakle, nakon jedne primjene Groverovog operatora, stanje $|s\rangle$ se zaokrenulo za dodatnih 2θ prema ciljnom stanju $|w\rangle$. Nakon k primjena Groverovog operatora, stanje $|s\rangle$ biti će za $(2k+1)\theta$ zaokrenuto prema stanju $|w\rangle$. Cilj je da to bude što bliže stanju $|w\rangle$, dakle da vrijedi:

$$(2k+1)\theta \approx \frac{\pi}{2}$$

Rješavajući jednadžbu za k, dobiva se:

$$k \approx \frac{\pi}{4\theta} \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{N} \approx \sqrt{N}$$

što znači da je potrebno primijeniti Groverov operator približno $\sqrt{N}$ puta kako bi vjerojatnost mjerenja stanja $|w\rangle$ bila najveća.

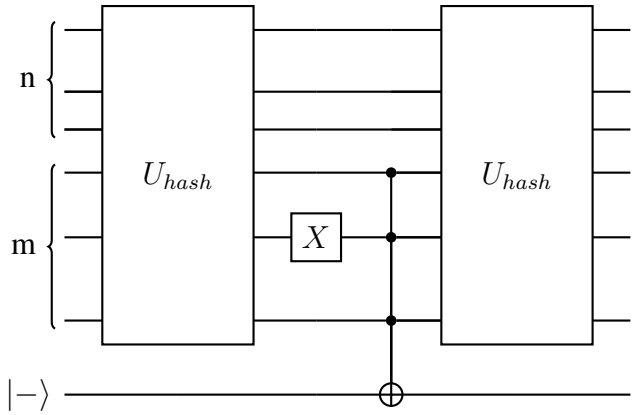
3.4.3. Kvantni prorok

Neka je U_f kvantni prorok Groverovog algoritma koji traži stanje $|10\rangle$. Njegova vrijednost iznosi:

$$U_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Čini se kao da je za samu izgradnju logičkog kruga odnosno proroka potrebno poznavati rješenje koje tražimo što poništava cijeli smisao Groverovog algoritma. To je donekle i istina; poznavanjem matrične reprezentacije proroka, moguće je odrediti ciljna stanja, ili obratno, za konstrukciju proroka na ovakav način, potrebno je poznavati ciljna stanja. Iz toga slijedi da je Groverov algoritam koristan jedino kada se prorok tretira kao crna kutija ili ako se prorok konstruira na način gdje njegova vrijednost nije očita, ali da i dalje daje ispravan rezultat. Takva konstrukcija proroka postiže se koristeći kvantni paralelizam i phase kickback.

Neka je f kriptografska funkcija sažetka za koju vrijedi $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ te neka je njoj potrebno pronaći inverz.



Slika 3.5: Kvantni prorok za pronalaženje inverza od $|101\rangle$

Za implementaciju kvantnog proroka potrebno je $n + m + 1$ kvantnih bitova od kojih su $m + 1$ pomoćni. Prvih n bitova se očekuje da su u stanju superpozicije, idućih m bitova se postavlja u stanje $|0\rangle$, dok se zadnji bit postavlja u stanje $|-\rangle$. Zatim je potrebno u kvantnom logičkom krugu implementirati samu funkciju f na način da će joj ulaz biti prvih n bitova, a izlaz idućih m bitova. Koristeći Toffolijeva vrata sa m upravljačkih bitova, može se odabrati izlaz funkcije kojemu je potrebno pronaći inverz (na slici je to $f(x) = 101$). Ciljni bit Toffolijevih vrata je poslijednji bit koji je u stanju $|-\rangle$. Svrha Toffolijevih vrata je svakoj komponenti stanja koja rezultira željenim izlazom promijeniti predznak. To radi koristeći phase kickback. Naime, vrijedi:

$$CNOT\,|0-\rangle = |0-\rangle$$

$$CNOT\,|1-\rangle = -\,|1-\rangle$$

Pošto se prorok koristi iterativno u algoritmu, potrebno je vratiti svih m izlaznih kvantnih bitova u stanje nule. Zbog reverzibilnosti svih operatora, potrebno je samo ponovno primijeniti funkciju f.

3.5. Shorov algoritam

3.5.1. Opis problema

Shorov algoritam rješava problem faktorizacije velikih brojeva. To je problem na čiju se tešku izračunljivost oslanja veliki dio modernih kriptografskih mehanizama. Dobar primjer toga jest RSA kriptosustav čija se tajnost privatnog ključa temelji na težini računanja Eulerove funkcije koja se može svesti na problem faktorizacije brojeva. Iz algoritma generiranja ključeva i funkcija enkripcije i dekripcije može se vidjeti zašto je to tako.

Algoritam generiranja ključeva:

1. Generiranje broja $N = p \cdot q$, gdje su p i q veliki slučajno odabrani prosti brojevi
2. Računanje Eulerove funkcije[1] $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$
3. Odabir proizvoljnog broja e iz reduciranog sustava ostataka modulo $\varphi(N)$
4. Računanje $d = e^{-1}$ u reduciranom sustavu ostataka modulo $\varphi(N)$
5. Javni ključ: pk = (e, N)
6. Privatni ključ: sk = (d, N)

Funkcija enkripcije:

$$E(m, (e, N)) = m^e \mod N$$

Funkcija dekripcije:

$$D(c, (d, N)) = c^d \mod N$$

Ovo funkcionira jer vrijedi $e \cdot d = 1 \mod \varphi(N)$, tj.

$$D(m^e, (d, N)) = m^{e \cdot d} \mod N = m \mod N$$

Dakle, kako bi se narušila sigurnost ovakvog sustava potrebno je moći efikasno izračunati proste faktore, odnosno $\varphi(N)$.

[1] Eulerova funkcija računa broj koji opisuje koliko relativno prostih faktora ima neki broj, tj. veličinu raduciranog sustava ostataka, no ovdje važnije svojstvo Eulerove funkcije jest da ako vrijedi $nzd(a, N) = 1$ onda isto vrijedi $a^{\varphi(N)} \equiv 1 \mod N$

3.5.2. Kvantna Fourierova transformacija

Kvantna Fourierova transformacija transformira bazu računanja iz tzv. Z baze (nazvane po osima Blochove sfere) u tzv. X bazu, odnosno iz $|0\rangle$ i $|1\rangle$ u $|+\rangle$ i $|-\rangle$.

3.5.3. Kvantna procjena faze

3.5.4. Opis algoritma

4. Simulacija kvantnog računala

4.1. Postojeći simulatori kvantnog računala

4.2. Izrada simulatora kvantnog računala

4.3. Primjeri simulacije kvantnih logičkih krugova

4.4. Prednosti i mane simulatora kvantnog računala

5. Zaključak

LITERATURA

[1] Adrian Cho. IBM promises 1000-qubit quantum computer—a milestone—by 2023, September 2020. URL https://www.sciencemag.org/news/2020/09/ibm-promises-1000-qubit-quantum-computer-milestone-2023.

[2] Lov K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. U *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '96, stranica 212–219, New York, NY, USA, 1996. Association for Computing Machinery. ISBN 0897917855. doi: 10.1145/237814.237866. URL https://doi.org/10.1145/237814.237866.

[3] M.A. Nielsen i I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139495486.

[4] Peter W. Shor. Polynomial time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 26:1484, 1997. doi: 10.1137/S0097539795293172.

Simulacija kvantnog računala

Sažetak

Sažetak na hrvatskom jeziku.

Ključne riječi: Ključne riječi, odvojene zarezima.

Title

Abstract

Abstract.

Keywords: Keywords.