CAS Datenanalyse HS16 - DeskStat

Statistische Tests

Hypothesentests

- Ausgehend von einer Zufallsstichprobe soll die Plausibilität einer Hypothese getestet werden.

Hypothesentests

- Ausgehend von einer Zufallsstichprobe soll die Plausibilität einer Hypothese getestet werden.
- Die Nullhypothese H_0 wird verworfen, wenn ihr p-Wert unter dem Signifikanzniveau α liegt.

Hypothesentests

- Ausgehend von einer Zufallsstichprobe soll die Plausibilität einer Hypothese getestet werden.
- Die Nullhypothese H_0 wird verworfen, wenn ihr p-Wert unter dem Signifikanzniveau α liegt.
- Typ-I-Fehler: Eine wahre Nullhypothese wird verworfen.

Hypothesentests

- Ausgehend von einer Zufallsstichprobe soll die Plausibilität einer Hypothese getestet werden.
- Die Nullhypothese H_0 wird verworfen, wenn ihr p-Wert unter dem Signifikanzniveau α liegt.
- Typ-I-Fehler: Eine wahre Nullhypothese wird verworfen.
- Typ-II-Fehler: Eine falsche Nullhypothese wird beibehalten.

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu < \mu_0$$

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu < \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu < \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir z_α, wobei z_α das 100α-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu < \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir z_α, wobei z_α das 100α-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$z < z_\alpha$$

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Problem: Ein Hersteller von Glühbirnen behauptet eine Mindestlebensdauer von $10'000$ Stunden für seine Glühbirnen. Der Mittelwert einer Stichprobe aus 30 Glühbirnen ergab einen Stichprobenmittelwert von $9'900$ Stunden. Die Standardabweichung der Population beträgt 120 Stunden. Können wir bei einem Signifikanzniveau von 5% die Behauptung des Herstellers verwerfen?

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Antwort:

H_0: $\mu \geqslant 10'000$ Stunden, $\quad H_a$: $\mu < 10'000$ Stunden

```
xbar <- 9900    # Stichprobenmittelwert
mu0 <- 10000    # Wert der Nullhypothese
sigma <- 120    # Standardabweichung
n <- 30         # Stichprobengrösse
z <- (xbar-mu0)/(sigma/sqrt(n))
z               # Testgrösse

## [1] -4.564355
```

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Antwort:

```
alpha <- 0.05                # Stichprobenmittelwert
z.alpha <- qnorm(alpha)      # kritischer Wert
z.alpha

## [1] -1.644854

z < z.alpha                  # H0 wird verworfen

## [1] TRUE
```

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Erweiterte Antwort:

Anstatt den kritischen Wert zu berechnen, können wir den *p*-Wert bestimmen und diesen mit dem Signifikanzniveau α vergleichen.

```
pval <- pnorm(z)
pval                 # unterer p-Wert

## [1] 2.505166e-06

pval < alpha         # H0 wird verworfen

## [1] TRUE
```

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu > \mu_0$$

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu > \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu > \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha}$, wobei $z_{1-\alpha}$ das $100(1-\alpha)$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu > \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha}$, wobei $z_{1-\alpha}$ das $100(1-\alpha)$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$z > z_{1-\alpha}$$

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Problem: Ein Produzent von Keksen behauptet, dass seine Produkte ein Höchstanteil an gesättigten Fettsäuren von 2 g pro Keks enthalten. In einer Stichprobe von 35 Keksen wurde ein Mittelwert von 2.1 g gemessen. Nehmen Sie eine Standardabweichung von 0.25 g an. Kann die Behauptung bei einem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden?

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Antwort:

H_0: $\mu \leqslant 2$ g, H_a: $\mu > 2$ g

```r
xbar <- 2.1
mu0 <- 2
sigma <- 0.25
n <- 35
z <- (xbar-mu0)/(sigma/sqrt(n))
z

## [1] 2.366432
```

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Antwort:

```
alpha <- 0.05
z.critical <- qnorm(1-alpha)
z.critical

## [1] 1.644854

z > z.critical   # H0 wird verworfen

## [1] TRUE
```

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Erweiterte Antwort:

Anstatt den kritischen Wert zu berechnen, können wir den *p*-Wert bestimmen und diesen mit dem Signifikanzniveau α vergleichen.

```
pval <- pnorm(z, lower.tail=FALSE)
pval              # oberer p-Wert

## [1] 0.008980239

pval < alpha      # H0 wird verworfen

## [1] TRUE
```

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha/2}$, wobei $z_{1-\alpha/2}$ das

  $100(1 - \frac{\alpha}{2})$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha/2}$, wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $100(1 - \frac{\alpha}{2})$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$z > z_{1-\alpha/2} \text{ oder } z < -z_{1-\alpha/2}$$

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Problem: Das durchschnittliche Gewicht von antarktischen Königspinguinen einer bestimmten Kolonie betrug im letzten Jahr 15.4 kg. Eine Stichprobe von 35 Pinguinen derselben Kolonie zeigte ein Durchschnittsgewicht von 14.6 kg. Die Standardabweichung der Population beträgt 2.5 kg. Lässt sich die Behauptung, dass sich das Durchschnittsgewicht nicht verändert hat, bei einem Signifikanzniveau von 5% verwerfen?

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Antwort:

H_0: $\mu = 15.4$ kg, H_a: $\mu \neq 15.4$ g

```
xbar = 14.6

mu0 = 15.4

sigma = 2.5

n = 35

z = (xbar-mu0)/(sigma/sqrt(n))

z


## [1] -1.893146
```

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Antwort:

```
alpha = .05
z.alpha = qnorm(1-alpha/2)
c(-z.alpha, z.alpha)

## [1] -1.959964  1.959964
```

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ bekannt

Erweiterte Antwort:

Anstatt den kritischen Wert zu berechnen, können wir den *p*-Wert bestimmen und diesen mit dem Signifikanzniveau α vergleichen.

```
pval = 2 * pnorm(z)      # lower tail
pval                     # zweiseitiger p-Wert

## [1] 0.05833852

# automatisierter p-Wert
pval = 2*ifelse(z < 0, pnorm(z), pnorm(z, lower.tail=FALSE))
pval

## [1] 0.05833852
```

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu < \mu_0$

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu < \mu_0$
- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu < \mu_0$
- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $t_{\alpha,n-1}$, wobei $t_{\alpha,n-1}$ das 100α-Perzentil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad $n-1$ darstellt.

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu < \mu_0$
- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $t_{\alpha,n-1}$, wobei $t_{\alpha,n-1}$ das 100α-Perzentil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad $n-1$ darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$t < t_{\alpha,n-1}$$

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Problem: Ein Hersteller von Glühbirnen behauptet eine Mindestlebensdauer von $10'000$ Stunden für seine Glühbirnen. Der Mittelwert einer Stichprobe aus 30 Glühbirnen ergab einen Stichprobenmittelwert von $9'900$ Stunden. Die Stichprobenstandardabweichung beträgt 120 Stunden. Können wir bei einem Signifikanzniveau von 5% die Behauptung des Herstellers verwerfen?

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Antwort:

H_0: $\mu \geqslant 10'000$ Stunden, H_a: $\mu < 10'000$ Stunden

```
xbar = 9900                # Stichprobenmittelwert
mu0 = 10000                # Wert der Nullhypothese
s = 125                    # Stichprobenstandardabweichung
n = 30                     # Stichprobengrösse
t.val = (xbar-mu0)/(s/sqrt(n))
t.val                      # Testgrösse

## [1] -4.38178
```

Linksseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Antwort:

```
alpha = .05
t.alpha = qt(1-alpha, df=n-1)
-t.alpha                          # kritischer Wert

## [1] -1.699127

# alternative Lösung
pval = pt(t.val, df=n-1)
pval                              # unterer p-Wert

## [1] 7.035026e-05
```

Lösung: Linksseitiger Test bei μ, σ unbekannt

Erweiterte Antwort:

Anstatt den kritischen Wert zu berechnen, können wir den *p*-Wert bestimmen und diesen mit dem Signifikanzniveau α vergleichen.

```
test <- t.test(x, mu=mu0, alternative="less")
test$p.value

## [1] 1.591783e-05
```

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung *s* geschätzt.
- $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu > \mu_0$

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu > \mu_0$
- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu > \mu_0$
- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $t_{1-\alpha,n-1}$, wobei $t_{1-\alpha,n-1}$ das $100(1-\alpha)$-Perzentil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad $n-1$ darstellt.

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Ist die Standardabweichung σ unbekannt, wird sie durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt.
- $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ versus $H_a : \mu > \mu_0$
- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $t_{1-\alpha,n-1}$, wobei $t_{1-\alpha,n-1}$ das $100(1-\alpha)$-Perzentil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad $n-1$ darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$t > t_{1-\alpha,n-1}$$

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Problem: Ein Produzent von Keksen behauptet, dass seine Produkte ein Höchstanteil an gesättigten Fettsäuren von 2 g pro Keks enthalten. In einer Stichprobe von 35 Keksen wurde ein Mittelwert von 2.1 g gemessen. Die Stichprobenstandardabweichung betage 0.3 g. Kann die Behauptung bei einem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden?

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Antwort:

H_0: $\mu \leqslant 2$ g, H_a: $\mu > 2$ g

```
xbar <- 2.1
mu0 <- 2
s <- 0.3
n <- 35
t.val <- (xbar-mu0)/(s/sqrt(n))
t.val

## [1] 1.972027
```

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Antwort:

```
alpha <- 0.05
t.alpha <- qt(1-alpha, df=n-1)
t.alpha

## [1] 1.690924
```

Rechtsseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Erweiterte Antwort:

Anstatt den kritischen Wert zu berechnen, können wir den *p*-Wert bestimmen und diesen mit dem Signifikanzniveau α vergleichen.

```
pval <- pt(t.val, df=n-1, lower.tail=FALSE)
pval                # oberer p-Wert

## [1] 0.02839295

pval < alpha        # H0 wird verworfen

## [1] TRUE
```

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $t_{1-\alpha/2,n-1}$, wobei $t_{1-\alpha/2,n-1}$ das $100(1 - \frac{\alpha}{2})$-Perzentil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad $n - 1$ darstellt.

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Weiter bestimmen wir $t_{1-\alpha/2,n-1}$, wobei $t_{1-\alpha/2,n-1}$ das $100(1 - \frac{\alpha}{2})$-Perzentil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad $n - 1$ darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$t > t_{1-\alpha/2,n-1} \text{ oder } t < -t_{1-\alpha/2,n-1}$$

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Problem: Das durchschnittliche Gewicht von antarktischen Königspinguinen einer bestimmten Kolonie betrug im letzten Jahr 15.4 kg. Eine Stichprobe von 35 Pinguinen derselben Kolonie zeigte ein Durchschnittsgewicht von 14.6 kg. Die Stichprobenstandardabweichung beträgt 2.5 kg. Lässt sich die Behauptung, dass sich das Durchschnittsgewicht nicht verändert hat, bei einem Signifikanzniveau von 5% verwerfen?

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Antwort:

H_0: $\mu = 15.4$ kg, H_a: $\mu \neq 15.4$ g

```
xbar = 14.6
mu0 = 15.4
s = 2.5
n = 35
t.val = (xbar-mu0)/(s/sqrt(n))
t.val

## [1] -1.893146
```

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Antwort:

```
alpha = .05
ta = qt(1-alpha/2, df=n-1)
c(-ta, ta)

## [1] -2.032245  2.032245
```

Zweiseitiger Test des Mittelwerts μ, σ unbekannt

Erweiterte Antwort:

Anstatt den kritischen Wert zu berechnen, können wir den p-Wert bestimmen und diesen mit dem Signifikanzniveau α vergleichen.

```
pval = 2 * pt(t.val, df=n-1)
pval                                # zweiseitiger p-Wert

## [1] 0.06687552

# automatisierter p-Wert
pval = 2*ifelse(t.val < 0, pt(t.val, df=n-1), pt(t.val, df=n-1, lo
pval

## [1] 0.06687552
```

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \geqslant p_0 \text{ versus } H_a : p < p_0$$

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \geqslant p_0 \text{ versus } H_a : p < p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \geqslant p_0 \text{ versus } H_a : p < p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- Weiter bestimmen wir z_α, wobei z_α das 100α-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \geqslant p_0 \text{ versus } H_a : p < p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- Weiter bestimmen wir z_α, wobei z_α das 100α-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$z < z_\alpha$$

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

Problem: Die Wahlbeteiligung an den letzten Wahlen betrug 60%. Eine telefonische Umfrage ergab, dass 85 von 148 Befragten angaben, an den kommenden Wahlen teilzunehmen. Lässt sich die Hypothese, dass die kommende Wahlbeteiligung über 60% liegt, bei einem Signifikanzniveau von 5% verwerfen?

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

Antwort:

H_0: $p \geqslant 60\%$, H_a: $p < 60\%$

```
pbar <- 85/148    # Stichprobenmittelwert
p0 <- 0.6         # Wert der Nullhypothese
n <- 148          # Stichprobengrösse
z <- (pbar-p0)/sqrt(p0*(1-p0)/n)
z                 # Testgrösse

## [1] -0.6375983
```

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

Antwort:

```
alpha <- 0.05                # Stichprobenmittelwert
z.alpha <- qnorm(alpha)      # kritischer Wert
z.alpha                      # H0 wird nicht verworfen

## [1] -1.644854

pval <- pnorm(z)
pval

## [1] 0.2618676
```

Linksseitiger Test des Populationsanteils p

Erweiterte Antwort:

```
prop.test(85, 148, p=0.6, alt="less", correct=FALSE)

##
##  1-sample proportions test without continuity
##  correction
##
## data:  85 out of 148, null probability 0.6
## X-squared = 0.40653, df = 1, p-value = 0.2619
## alternative hypothesis: true p is less than 0.6
## 95 percent confidence interval:
##  0.0000000 0.6392527
## sample estimates:
##         p
## 0.5743243
```

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \leqslant p_0 \text{ versus } H_a : p > p_0$$

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \leqslant p_0 \text{ versus } H_a : p > p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \leqslant p_0 \text{ versus } H_a : p > p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha}$, wobei $z_{1-\alpha}$ das $100(1-\alpha)$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p \leqslant p_0 \text{ versus } H_a : p > p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha}$, wobei $z_{1-\alpha}$ das $100(1-\alpha)$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$z > z_{1-\alpha}$$

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

Problem: Die Apfelernte im letzten Jahr enthielt 12% faule Äpfel. Im aktuellen Jahr zeigte eine Zufallsstichprobe 30 verfaulte Äpfel auf insgesamt 214 Äpfeln. Lässt sich die Hypothese, dass in diesem Jahr der Anteil verfaulter Äpfel weniger als 12% beträgt, bei einem Signifikanzniveau von 5% verwerfen?

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

Antwort:

H_0: $p \leqslant 12\%$, $\quad H_a$: $p > 12\%$

```
pbar <- 30/214    # Stichprobenmittelwert
p0 <- 0.12        # Wert der Nullhypothese
n <- 214          # Stichprobengrösse
z <- (pbar-p0)/sqrt(p0*(1-p0)/n)
z                 # Testgrösse

## [1] 0.908751
```

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

Antwort:

```
alpha <- 0.05                 # Stichprobenmittelwert
z.alpha <- qnorm(1-alpha)    # kritischer Wert
z.alpha                       # H0 wird nicht verworfen

## [1] 1.644854

pval <- pnorm(z)
pval

## [1] 0.8182592
```

Rechtsseitiger Test des Populationsanteils p

Erweiterte Antwort:

```
prop.test(30, 214, p=0.12, alt="greater", correct=FALSE)
```

```
##
##  1-sample proportions test without continuity
##  correction
##
## data:  30 out of 214, null probability 0.12
## X-squared = 0.82583, df = 1, p-value = 0.1817
## alternative hypothesis: true p is greater than 0.12
## 95 percent confidence interval:
##  0.1056274 1.0000000
## sample estimates:
##         p
## 0.1401869
```

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p = p_0 \text{ versus } H_a : p \neq p_0$$

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p = p_0 \text{ versus } H_a : p \neq p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p = p_0 \text{ versus } H_a : p \neq p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha/2}$, wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $100(1 - \frac{\alpha}{2})$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

- Wir formulieren die Hypothesen:

$$H_0 : p = p_0 \text{ versus } H_a : p \neq p_0$$

- Mit der Stichprobe berechnen wir die Testgrösse:

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- Weiter bestimmen wir $z_{1-\alpha/2}$, wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $100(1 - \frac{\alpha}{2})$-Perzentil der Standardnormalverteilung darstellt.
- H_0 wird verworfen, wenn

$$z < -z_{1-\alpha/2} \text{ oder } z > z_{1-\alpha/2}$$

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

Problem: Nach 20 Würfen zeigt eine Münze 12 Kopf. Lässt sich bei einem Signifikanzniveau von 5% die Behauptung verwerfen, dass es sich um eine faire Münze handelt?

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

Antwort:

H_0: $p = 50\%$, H_a: $p \neq 50\%$

```
pbar <- 12/20      # Stichprobenmittelwert
p0 <- 0.5          # Wert der Nullhypothese
n <- 20            # Stichprobengrösse
z <- (pbar-p0)/sqrt(p0*(1-p0)/n)
z                  # Testgrösse

## [1] 0.8944272
```

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

Antwort:

```
alpha <- 0.05                   # Stichprobenmittelwert
z.alpha <- qnorm(1-alpha/2)     # kritischer Wert
c(-z.alpha, z.alpha)            # H0 wird nicht verworfen

## [1] -1.959964  1.959964

pval <- 2*pnorm(z, lower.tail=FALSE)
pval

## [1] 0.3710934
```

Zweiseitiger Test des Populationsanteils p

Erweiterte Antwort:

```
prop.test(12, 20, p=0.5, correct=FALSE)

##
##  1-sample proportions test without continuity
##  correction
##
## data:  12 out of 20, null probability 0.5
## X-squared = 0.8, df = 1, p-value = 0.3711
## alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
## 95 percent confidence interval:
##  0.3865815 0.7811935
## sample estimates:
##   p
## 0.6
```