Aufgabe 1 (8 + 2 Punkte)

Von 20 Teilnehmern einer Bergwanderung geben 8 Personen an Knieschmerzen zu haben. 6 Teilnehmer leiden an Sonnenbrand. 8 Teilnehmer blieben unversehrt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer

   i) Sonnenbrand oder Knieschmerzen hat?
   (**Hinweis:** Sollten Sie zu keinem Ergebnis kommen, setzen Sie diese Wahrscheinlichkeit im Folgenden gleich 0.6.)
   $P(K) = 8/20 = 0.4 \quad P(S) = 6/20 = 0.3 \quad P(\bar{K} \cap \bar{S}) = 8/20 = 0.4$
   $\Rightarrow P(K \cup S) = 1 - P(\bar{K} \cap \bar{S}) = 1 - 0.4 = 0.6$

   ii) Knieschmerzen und Sonnenbrand aufweist?
   (**Hinweis:** Sollten Sie zu keinem Ergebnis kommen, setzen Sie diese Wahrscheinlichkeit im Folgenden gleich 0.1.)
   $P(K \cap S) = P(K) + P(S) - P(K \cup S) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$

   iii) der Knieschmerzen hat, keinen Sonnenbrand hat?
   $P(\bar{S}|K) = 1 - P(\bar{S}|K) = 1 - \frac{P(S \cap K)}{P(K)} = 1 - \frac{0.1}{0.4} = 0.75$

   iv) Sonnenbrand, aber keine Knieschmerzen hat?
   $P(S \cap \bar{K}) = P(S \backslash K) = P(S) - P(S \cap K) = 0.3 - 0.1 = 0.2$

b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse “Knieschmerzen” und “Sonnenbrand” stochastisch abhängig sind.

   $P(K) \cdot P(S) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \neq P(K \cap S) = 0.1$

Aufgabe 2 (3 + 1 + 2 + 4 Punkte)

Gegeben sei die (diskrete) Zufallsvariable Y, die die Werte $1, 2, 3, 4$ annehmen kann. Betrachten Sie folgende Funktion:

$$f(y) = P(Y = y) = \begin{cases} \frac{y(b-y)}{20} & \text{für } y \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie muss b gewählt werden, damit es sich bei $f(y)$ um eine Wahrscheinlichkeitsfunktion handelt?
(**Hinweis:** Falls Sie zu keiner Lösung kommen, verwenden Sie im Folgenden $b = 5$.)

Es muss gelten: $\sum_i f(y_i) = 1$
$\frac{1}{20}\left[1(b-1) + 2(b-2) + 3(b-3) + 4(b-4)\right] = 1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{20}(10b - 30) = 1 \Leftrightarrow b = 5.$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable Y genau den Wert 3 annimmt.

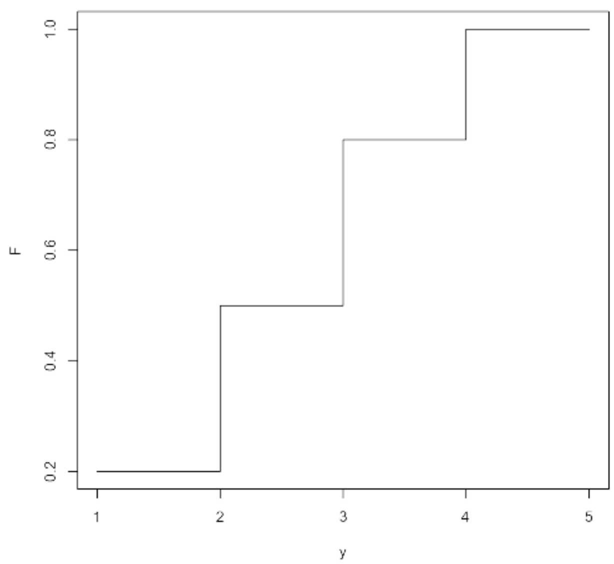
$P(Y = 3) = \frac{3(5-3)}{20} = 0.3$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

$E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i f(y_i) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 = 2.5$

d) Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$.

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 1 \\ 0.2 & \text{für } 1 \leq y < 2 \\ 0.5 & \text{für } 2 \leq y < 3 \\ 0.8 & \text{für } 3 \leq y < 4 \\ 1 & \text{für } y \geq 4 \end{cases}$$



Aufgabe 3 (2 + 4 + 2 Punkte)

In einer Autowerkstatt ist bekannt, dass 20% der Fahrzeuge, die in die Werkstatt kommen, einen Motorschaden haben. Bezeichne X die Anzahl der ankommenden Fahrzeuge ohne Motorschaden bis zum ersten Fahrzeug mit Motorschaden.

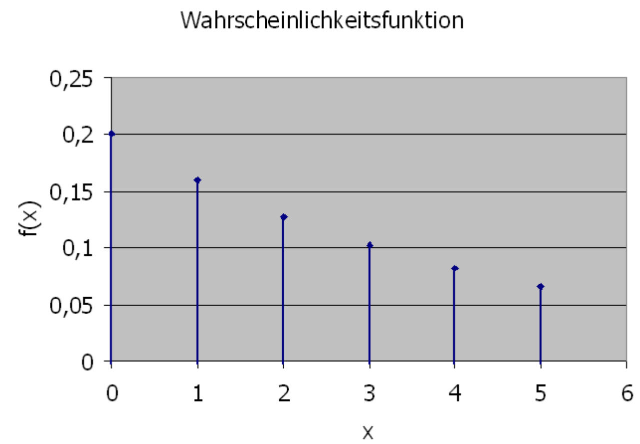
a) Wie und mit welchen Parametern ist die Zufallsvariable X verteilt? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 10. vorbeigebrachte Fahrzeug das erste Fahrzeug ist, das einen Motorschaden hat?

   $X \sim Geo(p = 0.2)$

   $P(X = 9) = f_{Geo}(9; 0.2) = (1 - 0.2)^9 \cdot 0.2 = 0.0268$

b) Berechnen und zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_X(x) = P(X = x)$ im Intervall von 0 bis 5.

x	0	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0.2	0.16	0.128	0.1024	0.0819	0.0655



c) Berechnen und interpretieren Sie den Erwartungswert von X.

   $E(X) = \frac{1-p}{p} = 0.8/0.2 = 4$
   Im Durchschnitt werden 4 Fahrzeuge ohne Motorschaden angeliefert, bevor das erste Fahrzeug mit Motorschaden kommt.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 Punkte)

In einer Fabrik werden Tüten mit Kartoffelchips befüllt. Das durchschnittliche Gewicht der Tüten soll nach den Angaben des Werkes 200 Gramm betragen. Da die Tüten maschinell befüllt werden, wird dieser Wert nur mit einer Standardabweichung von 5 Gramm eingehalten. Betrachten Sie nun die Zufallsvariable X: "Gewicht einer Tüte Kartoffelchips". Gehen Sie davon aus, dass X mit oben genannten Parametern normalverteilt ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Tüte mindestens 210 Gramm wiegt?

$P(X \geq 210) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{210-200}{5}) =$
$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

b) Welches Gewicht wird von 40% der Tüten unterschritten?

$P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{G-200}{5}) = 0.4 \Leftrightarrow \frac{G-200}{5} = \Phi^{-1}(0.4) = -0.2533 \Leftrightarrow G = 198.73$

Aus der Produktion wird eine stochastisch unabhängige mit obigen Parametern identisch normalverteilte Stichprobe $X_1, \ldots, X_{10}$ vom Umfang $n = 10$ gezogen.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass (genau) 3 der gezogenen Tüten mehr als 200 Gramm wiegen?

$P(\text{"Tüte wiegt über 200 Gramm"}) = 0.5$
Y: "Anzahl der Tüten mit Gewicht über 200 Gramm"
$Y \sim bin(p = 0.5, n = 10)$
$P(Y = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^7 = 0.1172$

Aufgabe 5 (2 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Sie stehen im Supermarkt an der Kasse in der Warteschlange. Sie wissen, dass die durchschnittliche Wartezeit 4 Minuten beträgt. Gehen Sie davon aus, dass die Wartezeit W (in Minuten) exponentialverteilt ist.

a) Wie groß ist die Standardabweichung der Wartezeit?

   $E(W) = 1/\lambda = 4$, ALSO $\lambda = 0.25$. DAMIT FOLGT ABER $\sigma_W = \sqrt{\frac{1}{0.25^2}} = \sqrt{16} = 4$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit warten Sie genau 3 Minuten?

   $P(W = 3) = 0$, DA PUNKTWAHRSCHEINLICHKEIT GLEICH NULL FÜR EINE STETIGE VERTEILUNG.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit warten Sie länger als 4 Minuten?

   $P(W \geq 4) = 1 - P(W \leq 4) = 1 - (1 - \exp(-0.25 \cdot 4)) = 0.3679$

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie zwischen 2 und 7 Minuten warten?

   $P(2 \leq W \leq 7) = P(W \leq 7) - P(W \leq 2) = 1 - \exp(-0.25 \cdot 7) - [1 - \exp(-0.25 \cdot 2)] = 0.4328$

Aufgabe 6 (4 + 2 + 3 Punkte)

Gegeben sei folgende Dichtefunktion für $x \in \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,1] \\ \frac{3}{14}x^2 & \text{für } x \in (1,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{FÜR } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{FÜR } x \in [0,1] \\ \frac{1}{14}x^3 + \frac{3}{7} & \text{FÜR } x \in (1,2] \\ 1 & \text{FÜR } x \in (2,\infty). \end{cases}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert zwischen 0.5 und 1.5 an?

$P(0.5 \leq X \leq 1.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5) = \frac{1}{14}1.5^3 + \frac{3}{7} - \frac{1}{2}0.5^2 = 0.5446$

c) Berechnen Sie das zweite unzentrierte Moment $E(X^2)$.

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x\, dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{3}{14}x^2\, dx = [0.25x^4]_0^1 + [\frac{1}{70}x^5]_1^2 = 0.25 - 0 + \frac{3}{70}\,8 - \frac{3}{70}\,1 = 0.5786$

Aufgabe 7 (2 + 2 + 3 Punkte)

Eine politische Gesprächsrunde von 10 Leuten trifft sich regelmäßig zu Diskussionen und sitzt dabei um einen runden Tisch herum.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es die Leute um den Tisch herumzusetzen, wenn lediglich die Anordnung eine Rolle spielt, nicht aber der konkrete Sitzplatz?

   $10!/10 = 9! = 362880$

b) Frau Müller möchte unbedingt auf dem Platz rechts von ihrem Ehemann sitzen. Auch Frau Schneider möchte unbedingt neben ihrem Ehemann sitzen. Ihr ist aber egal, ob sie den Platz links oder rechts von ihm einnimmt. Wieviele Möglichkeiten gibt es unter Berücksichtigung der Wünsche der Ehepaare Müller und Schneider die 10 Personen um den Tisch zu setzen? (Wiederum soll lediglich die Anordnung, nicht aber der konkrete Sitzplatz beachtet werden.)

   $8!/8 \cdot 2 = 10080$

Die Diskussionrunde lässt sich grob in die 2 Gruppen "liberal" und "konservativ" einteilen. 6 Personen werden den "Liberalen" und 4 Personen den "Konservativen" zugerechnet.

c) Gegen Ende der Diskussion verlässt eine Person nach der anderen (stochastisch unabhängig voneinander) die Runde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten 3 Personen, die die Runde verlassen mindestens ein "Liberaler" ist?

   X :Anzahl der Liberalen

   $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}.$

Aufgabe 8 (2 + 3 + 5 Punkte)

Sei X eine mit Parameter $n = 10$ und $p = 0.4$ binomialverteilte Zufallsvariable.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert 3 annimmt.
$P(X = 3) = f_{bin}(3; 0.4, 10) = \binom{10}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^7 = 0.215$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte größer 1 annimmt.
$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [f_{bin}(0; 0.4, 10) + f_{bin}(1; 0.4, 10)] =$
$1 - [(\begin{matrix} 10 \\ 0 \end{matrix}) \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + (\begin{matrix} 10 \\ 1 \end{matrix}) \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^9 = 0.9536$

Sei nun $n = 1000$ und weiterhin $p = 0.4$.

c) Berechnen Sie $P(370 < X < 420)$.
APPROXIMATIONREGEL ERFÜLLT: $np(1 - p) = 100 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 240 > 9$
$P(350 < X < 400) = P(Z \leq \frac{420-1000\cdot0.4+0.5}{\sqrt{1000\cdot0.4\cdot0.6}}) - P(Z \leq \frac{370-100\cdot0.5+0.5}{\sqrt{1000\cdot0.4\cdot0.6}}) =$
$\Phi(1.3233) - [1 - \Phi(1.9042)] = 0.9071 - 1 + 0.9716 = 0.8787$