Übungsblatt 3 Zeitreihenanalyse: Lösungen

Aufgabe 1: Terminologie

1. Was versteht man unter einem stochastischen Prozess?

   Ein stochastischer Prozess ist eine zeitliche Folge von Zufallsvariablen. Je nachdem, ob die Zufallsvariablen in diskreter oder stetiger Zeit gemessen werden, heisst der Prozess diskret oder stetig. Der stochastische Prozess läuft also in der Zeit ab.

2. Charakterisieren Sie einen schwach stationären Prozess.

   Ein stochastischer Prozess X_t heisst schwach stationär, wenn Erwartungswert, Varianz und (Auto)kovarianz des Prozesses unabhängig vom Zeitpunkt (t) sind.

3. Erklären Sie intuitiv was Stationarität bedeutet. Geben Sie ein Beispiel dazu.

   Ein stationärer Prozess hat zu allen Zeitpunkten den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz.
   Interpretation: Gegenwart ist wie Vergangenheit und wie Zukunft (in einem statistischen Sinn ...). Der wichtigste stationäre Prozess ist das weisse Rauschen.

4. Wodurch ist ein schwach stationärer stochastischer Prozess gekennzeichnet?

   Der stochastische Prozess ist mittelwert- und varianzstationär.
   Mittelwertstationärer Prozess: die Folge der Mittelwerte ist konstant → $E(y_t) = \mu_t = \mu$
   Kovarianzstationarität schliesst Varianzstationarität ein. Ein kovarianzstationärer Prozess hat über die Zeit eine konstante Varianz; seine Kovarianzen hängen nicht von der konkreten Zeiteinheit, sondern allein von der zeitlichen Differenz der Zufallsvariablen ab → $\gamma_{t,s} = \gamma_{t-s} = \gamma(h)$ → die Autokovarianz wird nur als Funktion eines Arguments aufgefasst → h = t-s Distanz.

5. Wodurch ist ein weisses Rauschen (white noise) gekennzeichnet?

   Die Zeitreihe (u_t) ist stationär und

   $E(u_t) = 0$,

   $var(u_t) = \sigma^2$
   $cov(u_t, u_{t+s}) = 0$ für $s \neq t$

6. Erklären Sie die Implikation eines weissen Rauschens (white-noise process) in Bezug auf Prognosen.

   Ein white-noise-Prozess ist zeitlich unkorreliert. Da die Autokorrelationsfunktion keine Struktur aufweist, kann man durch Beobachtung der Vergangenheit keine Rückschlüsse über den zukünftigen Verlauf des Prozesses schliessen → u_{t+h} mit $h > 0$ kann auf der Basis eines linearen Zeitreihenmodells nicht prognostiziert werden.

7. Wodurch ist ein Martingale-Prozess charakterisiert. Erklären Sie die Implikation in Bezug auf Prognosen.

   Martingale-Prozess wenn $\mathrm{E}\left(X_{t+1} \middle| X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right) = X_t$

Wenn X_t der bekannte aktuelle Aktienkurs ist, dann würde für die Periode t+1 bei einem Martingale-Prozess unter Kenntnis aller vergangenen Kursinformationen (X_t, X_{t-1}....) genau derselbe Kurs zu erwarten sein.

→Der beste Prognosekurs für morgen ist der Aktienkurs heute

→ Die Verwertung vergangener Aktienkurse führt zu keiner verbesserten Kursprognose

8. Erklären Sie was ein Random Walk ist.

Der Prozess (X_t) ist ein **Random Walk** wenn $X_t = X_{t-1} + U_t$ → der aktuelle Wert einer Zufallsvariable ergibt sich aus dem Vorperiodenwert X_{t-1} plus einer Realisation einer i.i.d.-Zufallsvariable U_t.

9. Was ist eine i.i.d.- Zufallsvariable?

i.i.d ist die Abkürzung für independent and identically distributed →unabhängig und identische verteilte Zufallsvariable.

10. Erklären Sie warum ein Random Walk nicht stationär ist.

Die Varianz nimmt mit wachsendem t zu und ist daher zeitvariabel: var(X_t) = **t**σ^2

Der Random Walk-Prozess ist mittelwertstationär, aber nicht varianzstationär → nicht stationär.

11. Erklären Sie was ein Korrelogramm ist

Ein Korrelogramm ist die graphische Darstellung der Autokorrelationen einer Zeitreihe. Dazu werden die Korrelationskoeffizienten r_k gegen die Dauer der Zeitverschiebung k (Lags) abgetragen.

12. Erklären Sie was man unter Autokorrelation 1. Ordnung der Residuen versteht.

Die Korrelation der aktuellen Residuen mit den um eine Periode verzögerten Residuen. Das Ausmass der noch in den Residuen enthaltenen systematischen Schwankungen wird durch den Autokorrelationskoeffizienten gemessen.

13. Wie kann man feststellen, dass die Trend- und Saisonbereinigung durch das Glättungsverfahren effektiv ist?

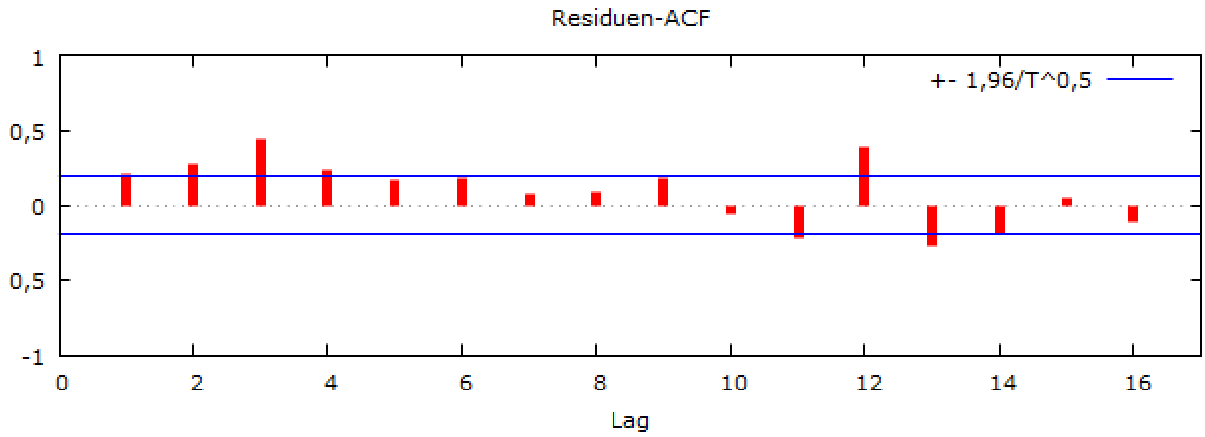
Wenn die Residualkomponente keine Systematik mehr enthält, d.h. nur noch zufällig schwankt → die Autokorrelationen (Reihenkorrelationen) müssen approximativ gleich 0 sein.

Aufgabe 2: Korrelogramm

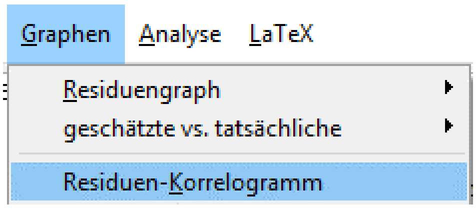
Modell 2 aus Übungsblatt 2 wurde geschätzt.

Modell 2: $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 \cos 1t + \beta_5 \sin 1t + \beta_6 \cos 2t + \beta_7 \sin 2t + u$

1. Erstellen Sie ein Korrelogramm der Residuen bis zum Lag = 16



LAG	ACF		PACF		Q-Stat.	[p-Wert]
1	0,2028	**	0,2028	**	4,1146	[0,043]
2	0,2749	***	0,2438	**	11,7549	[0,003]
3	0,4522	***	0,3998	***	32,6453	[0,000]
4	0,2274	**	0,0935		37,9829	[0,000]
5	0,1629		-0,0580		40,7529	[0,000]
6	0,1849	*	-0,0786		44,3605	[0,000]
7	0,0691		-0,1124		44,8698	[0,000]
8	0,0936		0,0109		45,8143	[0,000]
9	0,1863	*	0,1861	*	49,6029	[0,000]
10	-0,0567		-0,0930		49,9579	[0,000]
11	-0,2213	**	-0,4204	***	55,4254	[0,000]
12	0,3932	***	0,5079	***	72,8931	[0,000]
13	-0,2676	***	-0,3817	***	81,0770	[0,000]
14	-0,1948	*	-0,1243		85,4690	[0,000]
15	0,0460		0,0429		85,7166	[0,000]
16	-0,1172		0,1290		87,3451	[0,000]



gretl Output-Fenster: Graphen / Residuen-Korrelogramm

2. Was ist die Bedeutung einer Überschreitung oder Unterschreitung der blauen Linien im Korrelogramm?

   Überschreitet (unterschreitet) r_k die Obergrenze (Untergrenze) $\pm 1.96/\sqrt{T}$, so wird die Nullhypothese, dass keine Autokorrelation vorliegt, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α abgelehnt.

3. Interpretieren Sie den Ljung-Box Testwert für Lag k = 16

   Nullhypothese H_0: $r_1 = r_2 = \ldots r_{16} = 0$

   P-Wert = 0 → H_0 verwerfen → die Residuen stellen keinen reinen Zufallsprozess dar.

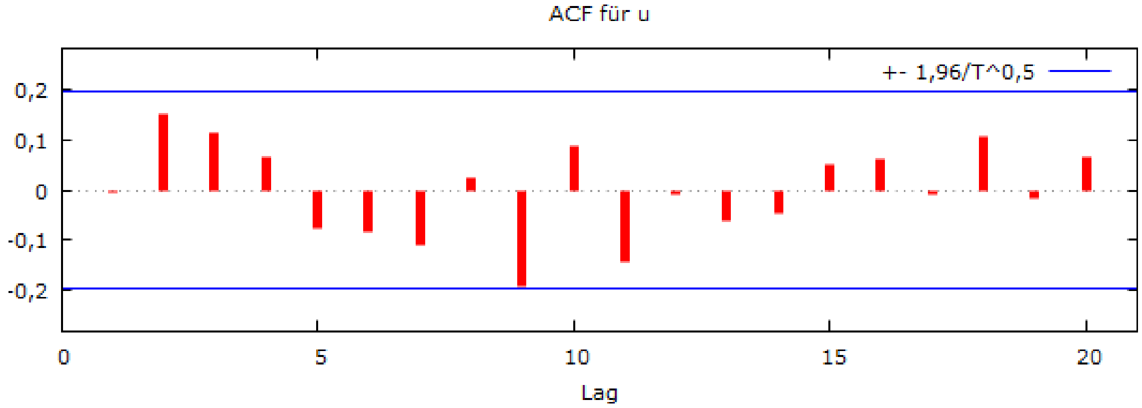
Aufgabe 3: Skript in gretl

Doppelklick auf die Datei Random Walk 1.inp →das Skript-Fenster öffnet sich. Alternativ können Sie das Skript in das gretl Skript-Fenster hineinkopieren.

Skript ausführen indem Sie Tasten Ctrl + R drücken oder auf Symbol klicken.

1. Analysieren Sie das Korrelogramm der Variable u (Gausscher Prozess). Was stellen Sie fest?

   Sie werden andere Werte als ich bekommen, da der Zufallsgenerator andere Zahlen produzieren wird.



LAG	ACF	PACF	Q-Stat.	[p-Wert]
1	-0,0048	-0,0048	0,0023	[0,961]
2	0,1520	0,1520	2,4063	[0,300]
3	0,1126	0,1166	3,7387	[0,291]
4	0,0648	0,0463	4,1847	[0,382]
…				
16	0,0618	0,0699	15,7418	[0,471]
17	-0,0082	0,0036	15,7502	[0,542]
18	0,1054	0,0076	17,1326	[0,514]
19	-0,0159	-0,0302	17,1644	[0,579]
20	0,0658	-0,0153	17,7171	[0,606]

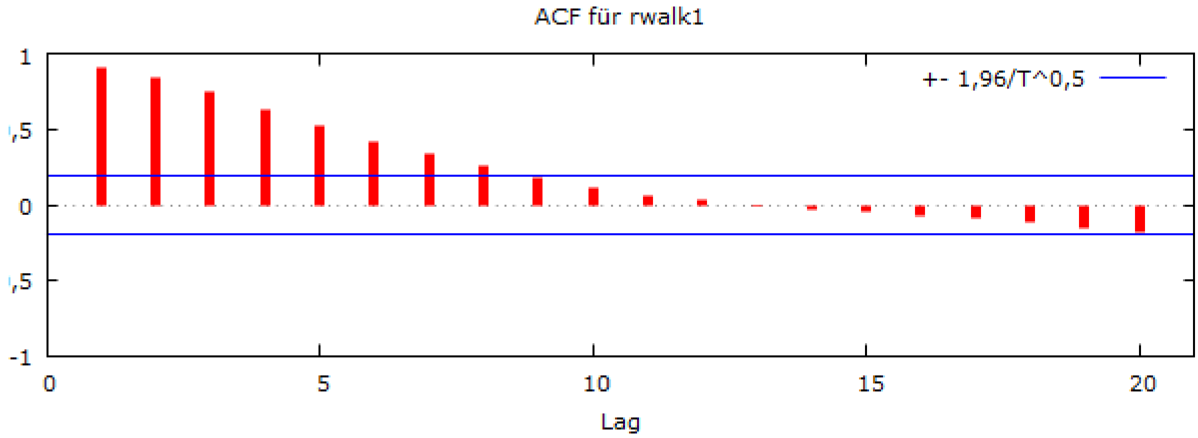
H_0: r_1 = ...=r_{20} = 0

H_0 nicht verwerfen, da p-Wert > α = 0.05

(u_t) ist ein reiner Zufallsprozess

Die Autokorrelationskoeffizienten bleiben innerhalb des Konfidenzintervalls.

2. Analysieren Sie das Korrelogramm der Variable walk1



LAG	ACF		PACF		Q-Stat.	[p-Wert]
1	0,9170	***	0,9170	***	86,6284	[0,000]
2	0,8437	***	0,0180		160,7120	[0,000]
3	0,7518	***	-0,1532		220,1482	[0,000]
18	-0,1120		-0,0213		341,7621	[0,000]
19	-0,1472		-0,1177		344,4895	[0,000]
20	-0,1815	*	-0,0821		348,6909	[0,000]

H_0: $r_1 = ... = r_{20} = 0$

H_0 verwerfen,

da p-Wert < α = 0.05

(rwalk1) ist kein reiner Zufallsprozess