ANALIZA
MATEMATYCZNA 2

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste zmienione

GiS

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2019

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–63–1

Wydanie XX zmienione, Wrocław 2019
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS, sp. z o.o., A.Bieroński, P.Bieroński, sp. jawna

Spis treści

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest drugą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik, ale mogą z nich korzystać także studenci uczelni ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Przykłady i zadania z tego zbioru obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe, potęgowe i Fouriera oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami. Ilustrują one materiał teoretyczny przedstawiony w pierwszej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*”. Zbiór zawiera przykładowe zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady poprzedzono wiadomościami i wzorami potrzebnymi do ich rozwiązania. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki.

Przykłady i zadania w zbiorze są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci rozwiązują zwykle na kolokwiach i egzaminach. Oryginalne zestawy zadań ze sprawdzianów z poprzednich lat można znaleźć w trzeciej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*”. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*”.

Do obecnego wydania dodano przykłady i zadania dotyczące szeregów Fouriera oraz metody najmniejszych kwadratów. Ponadto zmieniono układ typograficzny książki, dołączono wiele nowych rysunków i poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o poprzednich wydaniach. Dziękujemy również naszym Studentom za wskazanie błędów w odpowiedziach do zadań. Czytelników prosimy o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach i usterkach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

1 Całki niewłaściwe

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.1.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^4}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2+4}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$; (d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9}$;

(e) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-2x}\,dx$; (f) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\pi}}^\infty x\cos x^2\,dx$; (g) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; (h) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty x\ln\left(x^2+1\right)\,dx$.

Rozwiązanie. Całkę niewłaściwą funkcji f na przedziale nieograniczonym $[a,\infty)$ lub $(-\infty,b]$ określamy odpowiednio wzorami:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_a^T f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{S\to-\infty}\int\limits_S^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Całkę niewłaściwą funkcji f na prostej $(-\infty,\infty)$ definujemy jako sumę całek niewłaściwych na przedziałach $(-\infty,a]$, $[a,\infty)$, gdzie a oznacza dowolną liczbę. Zbieżność tej całki ustalamy w zależności od zbieżności całek na półprostych. Jeżeli obie całki są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞, a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞, to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

► (a) Mamy

$$\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_3^T \frac{dx}{x^4} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{3x^3}\right]_3^T = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{3T^3}+\frac{1}{81}\right) = \frac{1}{81},$$

zatem rozważana całka jest zbieżna.

▶ (b) Mamy

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2+4} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{x\,dx}{x^2+4}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=x^2+4;\ \ dt=2x\,dx\\ x=0,\ t=4;\ \ x=T,\ t=T^2+4\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\int_4^{T^2+4}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\big[\ln|t|\big]_4^{T^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\ln\left(T^2+4\right)-\ln 4\right] = \frac{1}{2}(\infty-\ln 4)=\infty.$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą ∞, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞.

▶ (c) Mamy

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}} = \lim_{S\to-\infty}\int_S^{-1}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=3x-5;\ \ dt=3\,dx\\ x=S,\ t=3S-5;\ \ x=-1,\ t=-8\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{S\to-\infty}\int_{3S-5}^{-8}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\lim_{S\to-\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\right]_{3S-5}^{-8}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{S\to-\infty}\left[\sqrt[3]{(-8)^2}-\sqrt[3]{(3S-5)^2}\right] = \frac{1}{2}(4-\infty)=-\infty.$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą $-\infty$, więc rozważana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

▶ (d) Przyjmując $a=0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty,\infty)$, otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+9} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9} + \int_0^\infty\frac{dx}{x^2+9}.$$

Ponieważ

$$\int\frac{dx}{x^2+9}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ x=3t;\ \ dx=3\,dt\end{array}\right] = \int\frac{3\,dt}{9t^2+9}$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C,$$

więc

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9} + \int_0^\infty\frac{dx}{x^2+9} = \lim_{S\to-\infty}\int_S^0\frac{dx}{x^2+9} + \lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{dx}{x^2+9}$$

$$= \lim_{S\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right]_S^0 + \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{S\to-\infty}\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{S}{3}\right) + \frac{1}{3}\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{T}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna.

► (e) Przyjmując jak powyżej $a = 0$, otrzymamy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2x}\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{S\to-\infty}\int\limits_{S}^{0} e^{-2x}\,dx + \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T} e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{S\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_S^0 + \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^T$$

$$= \lim_{S\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2S}-\frac{1}{2}\right) + \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2T}\right) = \left(\infty-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right) = \infty.$$

Ponieważ pierwsza z granic jest równa ∞, a druga jest skończona, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞.

► (f) Mamy

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x\cos x^2\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{T} x\cos x^2\,dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t = x^2;\ \ dt = 2x\,dx\\ x=\sqrt{\pi},\ t=\pi;\ \ x=T,\ t=T^2\end{array}\right] = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\pi}^{T^2}\frac{1}{2}\cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\Big[\sin t\,\Big]_{\pi}^{T^2} = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left(\sin T^2-\sin\pi\right) = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sin T^2.$$

Granica $\lim\limits_{T\to\infty}\sin T^2$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $T_n^{'} = \sqrt{n\pi}$, $T_n^{''} = \sqrt{(\pi/2)+2n\pi}$, rozbieżnych do ∞, mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(T_n^{'}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sin\left(T_n^{''}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna.

► (g) Mamy

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=e^x;\ \ dt=e^x\,dx\\ x=0,\ t=1;\ \ x=T,\ t=e^T\end{array}\right] = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{1}^{e^T}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\Big[\operatorname{arc\,tg} t\,\Big]_1^{e^T} = \lim_{T\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} e^T - \operatorname{arc\,tg} 1\right] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem badana całka jest zbieżna.

► (h) Przyjmując $a = 0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty,\infty)$, otrzymamy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ln\left(x^2+1\right)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\ln\left(x^2+1\right)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x\ln\left(x^2+1\right)\,dx.$$

Pokażemy, że druga z całek jest rozbieżna do ∞. Mamy

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x\ln\left(x^2+1\right)\,dx &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T x\ln\left(x^2+1\right)\,dx \begin{bmatrix} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t=x^2+1;\ \ dt=2x\,dx \\ x=0,\ t=1;\ \ x=T,\ t=T^2+1 \end{bmatrix} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^{T^2+1}\ln t\,dt \begin{bmatrix} \text{całkowanie przez części} \\ u(t)=\ln t,\ v'(t)=1 \\ u'(t)=1/t,\ v(t)=t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left(\Big[t\ln t\Big]_1^{T^2+1} - \int_1^{T^2+1} dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\left(T^2+1\right)\ln\left(T^2+1\right) - T^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left\{\left(T^2+1\right)\left[\ln\left(T^2+1\right)-1\right]+1\right\} = \infty.
\end{aligned}$$

Z nieparzystości funkcji podcałkowej wynika, że

$$\int_{-\infty}^0 x\ln\left(x^2+1\right)\,dx = -\infty.$$

Otrzymaliśmy wyrażenie nieoznaczone $-\infty+\infty$, zatem badana całka niewłaściwa jest rozbieżna.

▷ **Zadanie 1.1.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)^2}$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty 2^{-x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_\pi^\infty x\sin x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}$; (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-4x+13}$;

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}\,dx$; (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^6+1}$; (i*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} (\pi-\operatorname{arc\,ctg} x)\,dx$.

Odpowiedzi. (a) $1/3$; (b) $1/\ln 2$; (c) rozbieżna; (d) $\pi/4$; (e) ∞; (f) $\pi/3$; (g) ∞; (h*) $\pi/6$; (i*) ∞.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.2.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx$; (b) $\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x}$; (c) $\int\limits_0^\infty \frac{(2^x+1)\,dx}{4^x+1}$; (d) $\int\limits_1^\infty \frac{x^2+2x+3}{x^4+x^3+1}\,dx$.

Rozwiązanie. *Kryterium porównawcze.* Niech funkcje całkowalne f i g spełniają dla każdego $x \geqslant a$ nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas:

(1) jeżeli całka $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ także jest zbieżna;

(2) jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞, to całka $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ także jest rozbieżna do ∞.

Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy fakt, że całka niewłaściwa postaci $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ jest zbieżna dla $p>1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \leqslant 1$.

► (a) Dla każdego $x \geqslant 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant e^{-x}\sin^2 x \leqslant e^{-x}.$$

Ponadto całka $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$ jest zbieżna, gdyż

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\left[1-e^{-T}\right] = 1.$$

Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika zbieżność badanej całki.

► (b) Dla każdego $x \geqslant 2$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{x}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x} \geqslant \frac{x}{x^2-0} = \frac{1}{x} \geqslant 0.$$

Ponadto z podanego na wstępie faktu wynika, że całka $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞.

Zatem z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika rozbieżność badanej całki do ∞.

► (c) Dla każdego $x \geqslant 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{2^x+1}{4^x+1} \leqslant \frac{2^x+1}{4^x} = 2^{-x}+4^{-x}.$$

Całki niewłaściwe $\int\limits_0^\infty 2^{-x}\,dx$, $\int\limits_0^\infty 4^{-x}\,dx$ są zbieżne, gdyż

$$\int\limits_0^\infty 2^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T 2^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\ln 2}\left[1-2^{-T}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

oraz

$$\int\limits_0^\infty 4^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T 4^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{4^{-x}}{\ln 4}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\ln 4}\left[1-4^{-T}\right] = \frac{1}{\ln 4}.$$

Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika zbieżność badanej całki.

► (d) Dla każdego $x \geqslant 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{x^2+2x+3}{x^4+x^3+1} \leqslant \frac{x^2+2x^2+3x^2}{x^4+0+0} = \frac{6}{x^2}.$$

Z podanego na wstępie faktu wynika, że całka $\int\limits_1^\infty \frac{6\,dx}{x^2}$ jest zbieżna. Zatem na mocy kryterium porównawczego zbieżności (1) rozważana całka także jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.2.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\int\limits_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; (b) $\int\limits_2^\infty \frac{(x-1)\,dx}{x^4+x+1}$; (c) $\int\limits_\pi^\infty \frac{(1+\sin x)\,dx}{x^3}$;

(d) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{2^x\,dx}{x-1}$; (e) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^7+1}}$; (f) $\int\limits_2^\infty \frac{\left(\sqrt{2}+\cos x\right)\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

Odpowiedzi. (a); (f) rozbieżna; (b); (c); (d); (e); zbieżna;

► **Przykład 1.3.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{e^{3x}\,dx}{3e^{4x}-5}$; (b) $\int\limits_\pi^\infty \frac{x\,dx}{x^2+\cos x}$; (c) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x+1}$; (d) $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4}$.

Rozwiązanie. *Kryterium ilorazowe.* Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na półprostej $[a,\infty)$ oraz niech spełniają warunek

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe funkcji f, g są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $\infty\,(-\infty)$.

► (a) Zauważmy, że dla dużych x mamy

$$\frac{e^{3x}}{3e^{4x}-5} \approx \frac{e^{3x}}{3e^{4x}} = \frac{1}{3e^{x}}.$$

Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{3e^{4x}-5} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{1}{3e^{x}},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^{3x}}{3e^{4x}-5}}{\dfrac{1}{3e^{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3e^{4x}}{3e^{4x}-5} \overset{:e^{4x}}{\underset{:e^{4x}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{3}{3-5e^{-4x}} = \frac{3}{3-0} = 1.$$

Ponieważ całka $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^x}$ jest zbieżna (Przykład 1.2 (a)) oraz $0 < k < \infty$, więc na mocy kryterium ilorazowego badana całka także jest zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla dużych x mamy

$$\frac{x}{x^2+\cos x} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Zatem w kryterium ilorazowym przyjmujemy

$$f(x) = \frac{x}{x^2+\cos x} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x^2+\cos x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\cos x} \overset{:x^2}{\underset{:x^2}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\cos x}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Ponieważ całka $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ (Przykład 1.2 (b)) oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

► (c) Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi/2$, więc dla dużych x mamy

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x+1} \approx \frac{\dfrac{\pi}{2}}{x+1} = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Zatem przyjmujemy

$$f(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x+1} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x+1}}{\dfrac{\pi}{2(x+1)}} = 2 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\pi} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = 1.$$

Całka $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$ jest rozbieżna do ∞, gdyż

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x+1} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{x+1} = \lim_{T\to\infty} \Big[\ln|x+1|\Big]_0^T = \lim_{T\to\infty} \ln(T+1) = \infty.$$

Ponadto $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

► (d) Zauważmy, że dla dużych x mamy

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+4} \approx \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Zatem przyjmując

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+4} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+4}}{\dfrac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+4} \overset{:x^2}{\underset{:x^2}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Z faktu podanego na wstępie Przykładu 1.2 wynika, że całka postaci $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_2^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ jest zbieżna. Ponadto $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wnioskujemy, że badana całka także jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.3.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\left(e^{2x}+1\right)\,dx}{e^x-1}$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$; (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(2^x-1)\,dx}{x^2 2^x+1}$; (f) $\displaystyle\int_0^\infty 2^x \sin 3^{-x}\,dx$.

Odpowiedzi. (b) rozbieżna do $-\infty$; (d) rozbieżna do ∞; (a); (c); (e); (f) zbieżna.

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.4.** Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^3 x\,dx}{x^2}$; (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x\cos x\,dx}{\left(x^2-1\right)^3}$; (c) $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty x\cos x\,dx$; (d*) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin x\,dx}{x}$.

Rozwiązanie. Mówimy, że całka $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, jeżeli $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ jest zbieżna. Dowodzi się, że jeżeli całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna.

► (a) Dla każdego $x \geqslant 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Ponadto całka $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna. Z kryterium porównawczego zbieżności (1, str. 13) wynika, że całka $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| dx$ jest zbieżna. Stąd całka $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^3 x\,dx}{x^2}$ jest zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla każdego $x \geqslant 2$ zachodzą nierówności

$$0 \leqslant \left|\frac{x\cos x}{\left(x^2-1\right)^3}\right| \leqslant \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Ponadto całka $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)^3}$ jest zbieżna, gdyż

$$\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)^3} = \lim_{T\to\infty}\int_2^T \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)^3}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=x^2-1;\ dt=2x\,dx\\ x=2,\ t=3;\ x=T,\ t=T^2-1\end{array}\right] = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\int_3^{T^2-1}\frac{dt}{t^3}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_3^{T^2-1} = \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{\left(T^2-1\right)^2}\right) = \frac{1}{36}.$$

Zatem, analogicznie jak w poprzednim przykładzie, na mocy kryterium porównawczego, badana całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.

► (c) Pokażemy, że badana całka jest rozbieżna. Mamy

$$\int_{\pi/2}^{\infty} x\cos x\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_{\pi/2}^{T} x\cos x\,dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez części}\\ u(x)=x,\ v'(x)=\cos x\\ u'(x)=1,\ v(x)=\sin x\end{array}\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left(\left[x\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{T} - \int_{\pi/2}^{T}\sin x\,dx\right) =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left[x\sin x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{T} = \lim_{T\to\infty}\left[(T\sin T+\cos T)-\frac{\pi}{2}\right].$$

Zauważmy teraz, że granica $\lim\limits_{T\to\infty}(T\sin T+\cos T)$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $T_n^{'}=2n\pi$, $T_n^{''}=(2n+1)\pi$, rozbieżnych do ∞, mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty}\left(T_n^{'}\sin T_n^{'}+\cos T_n^{'}\right) = \lim_{n\to\infty}\Big(2n\pi\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1}\Big) = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\left(T_n^{''}\sin T_n^{''}+\cos T_n^{''}\right) = \lim_{n\to\infty}\Big((2n+1)\pi\underbrace{\sin\left((2n+)\pi\right)}_{=0}+\underbrace{\cos\left((2n+1)\pi\right)}_{=-1}\Big) = -1,$$

więc badana całka jest rozbieżna. Pokażemy, że również całka $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}|x\cos x|\,dx$ nie jest zbieżna. Gdyby bowiem całka ta była zbieżna, to wobec podanego na wstępie faktu byłaby zbieżna także całka $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}x\cos x\,dx$, co jak pokazaliśmy powyżej nie zachodzi.

► (d*) Pokażemy, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie, ale jest zbieżna. W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$ zachodzącą dla każdego $x\in\mathbb{R}$ oraz okresowość funkcji $\sin^2 x$. Stosując tę nierówność otrzymamy

$$\int_{\pi}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqslant \int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx+\ldots$$
$$\geqslant \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{2\pi}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin^2 x}{3\pi}\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{\sin^2 x}{4\pi}\,dx+\ldots$$
$$= \left(\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 x\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{4\pi}+\ldots\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \infty.$$

To oznacza, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie. Uzasadnienie jej zbieżności jest bardziej skomplikowane. Wymaga zastosowania twierdzenia Dirichleta. Twierdzenie to orzeka, że jeżeli funkcja g ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,\infty)$ oraz maleje do 0, gdy $x\to\infty$, a funkcja ciągła f ma ograniczoną funkcję pierwotną na $[a,\infty)$, to całka niewłaściwa $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ jest zbieżna. Łatwo sprawdzić, że funkcje $g(x)=1/x$, $f(x)=\sin x$ spełniają na przedziale $[\pi,\infty)$ założenia twierdzenia Dirichleta. Zatem rozważana całka jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.4.** Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin 3x\,dx}{e^{2x}+1}$; (b) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty x\cos 2x\,dx$; (c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2\sin x\,dx}{x^4+1}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\cos x\,dx}{x^2+1}$; (e*) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{2^x\cos x\,dx}{4^x+\sin x}$; (f*) $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$.

Odpowiedzi. (a); (c); (d); (e*) zbieżna bezwzględnie; (b) rozbieżna; (f*) zbieżna, ale nie zbieżna bezwzględnie.

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

▶ **Przykład 1.5.** Korzystając z defnicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_\pi^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$; (e) $\displaystyle\int\limits_0^{3/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$; (f) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie. Niech funkcja f określona na przedziale $(a,b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Całkę funkcji f na przedziale $(a,b]$ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+}\int\limits_A^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Analogicznie definiuje się całkę funkcji f określonej na przedziale $[a,b)$ i nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b.

Niech funkcja f określona na przedziale (a, b) jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i na lewostronnym sąsiedztwie punktu b. Wtedy całkę funkcji f na przedziale (a, b) definiujemy wzorem

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^d f(x)\,dx + \int\limits_d^b f(x)\,dx,$$

gdzie d jest dowolnym punktem przedziału (a, b). Zbieżność tej całki ustalamy w zależności od zbieżności całek na przedziałach $(a, d]$, $[d, b)$. Jeżeli obie całki są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞, a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞, to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Niech teraz funkcja f określona na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ będzie nieograniczona tylko na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c. Wtedy całkę funkcji f na przedziale $[a, b]$ określamy wzorem

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Zbieżność tej całki ustalamy tak samo jak zbieżność całki na przedziale (a, b).

► (a) W przedziale $(\pi, 3\pi/2]$ funkcja $f(x) = 1/\sin^2 x$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu π. Mamy bowiem $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{1}{\sin^2 x} = \infty$. Zatem

$$\int\limits_\pi^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A\to\pi^+} \int\limits_A^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A\to\pi^+} \left[-\operatorname{ctg} x\right]_A^{3\pi/2} = \lim_{A\to\pi^+} (0 + \operatorname{ctg} A) = \infty,$$

czyli badana całka jest rozbieżna do ∞.

► (b) W przedziale $[0, 1)$ funkcja $f(x) = 1/\sqrt[3]{1-x}$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1. Mamy bowiem $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \infty$. Zatem

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{B\to 1^-} \int\limits_0^B \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = 1-x;\ dt = -\,dx \\ x = 0,\ t = 1;\ x = B,\ t = 1-B \end{array}\right] = \lim_{B\to 1^-} \int\limits_1^{1-B} \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}}$$

$$= \lim_{B\to 1^-} \int\limits_{1-B}^1 t^{-1/3} dt = \lim_{B\to 1^-} \left[\frac{3}{2} t^{2/3}\right]_{1-B}^1 = \frac{3}{2} \lim_{B\to 1^-} \left(1 - \sqrt[3]{(1-B)^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Badana całka jest zbieżna.

► (c) W przedziale $(-1, 1)$ funkcja podcałkowa $f(x) = 1/\left(x^2 - 1\right)$ jest nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie punktu -1 oraz na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1, gdyż mamy

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty.$$

Zatem przyjmując w określeniu całki niewłaściwej za miejsce podziału $a = 0$ otrzymamy

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1}.$$

Zbadamy z definicji zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Mamy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{B\to 1^-} \int_0^B \frac{dx}{x^2-1} \left[\begin{array}{c} \text{rozkład na ułamki proste} \\ \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \int_0^B \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_0^B$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right| = \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \ln\frac{1-B}{1+B} = -\infty.$$

Z parzystości funkcji podcałkowej wynika, że także

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} = -\infty.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

► (d) W przedziale $[0, \pi/2]$ funkcja podcałkowa $f(x) = \cos x / \sqrt[3]{1-2\sin x}$ jest nieograniczona na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu $\pi/6$. Mamy bowiem

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}^-} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \infty, \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}^+} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\infty.$$

Więc rozważana całka niewłaściwa jest określona wzorem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}.$$

Zbadamy zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Najpierw jednak obliczymy całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$. Mamy

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie} \\ \text{przez podstawienie} \\ t = 1-2\sin x; \\ dt = -2\cos x\, dx \end{array} \right] = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + C$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-2\sin t)^2} + C.$$

Zatem dla pierwszej całki niewłaściwej mamy

$$\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \int\limits_0^{B} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\frac{3}{4} \lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2}\right]_0^B$$

$$= -\frac{3}{4} \lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin B)^2} - 1\right] = \frac{3}{4}.$$

Dla drugiej całki niewłaściwej mamy

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \int\limits_A^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\frac{3}{4} \lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2}\right]_A^{\pi/2}$$

$$= -\frac{3}{4} \lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \left[1 - \sqrt[3]{(1-2\sin A)^2}\right] = -\frac{3}{4}.$$

Stąd badana całka jest zbieżna do $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0.$

► (e) Funkcja $f(x) = \left(1/x^2\right)\sin\left(1/x\right)$ na przedziale $(0, 3/\pi]$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, bo dla ciągu $x_n = \dfrac{2}{\pi(1+4n)} \longrightarrow 0^+$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{2}{\pi(1+4n)}\right)^2} \sin \frac{1}{\dfrac{2}{\pi(1+4n)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi(1+4n)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)^2 = \infty.$$

Zatem badaną całkę określamy wzorem

$$\int\limits_0^{3/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to 0^+} \int\limits_A^{3/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = 1/x;\ \ dt = -\left(1/x^2\right)\,dx \\ x = A,\ t = 1/A;\ \ x = 3/\pi,\ t = \pi/3 \end{array}\right]$$

$$= -\int\limits_{1/A}^{\pi/3} \sin t\,dt = \lim_{A\to 0^+} \Big[\cos t\Big]_{1/A}^{\pi/3} = \frac{1}{2} - \lim_{A\to 0^+} \cos\frac{1}{A}.$$

Ponieważ granica $\lim\limits_{A\to 0^+} \cos(1/A)$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $A_n' = 1/(2n\pi)$, $A_n'' = 2/(\pi + 2n\pi)$, zbieżnych do 0^+, mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{A_n'} = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{A_n''} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0,$$

więc badana całka jest rozbieżna.

► (f) W przedziale $[1,4)$ funkcja $f(x) = 1/\left(2-\sqrt{x}\right)$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 4. Mamy bowiem

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = \infty.$$

Zgodnie z definicją całki niewłaściwej otrzymamy

$$\int_1^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}} = \lim_{B\to 4^-} \int_1^B \frac{dx}{2-\sqrt{x}} \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ x=t^2\ (t\geqslant 0);\ \ dx = 2t\,dt\\ x=1,\ t=1;\ \ x=B,\ t=\sqrt{B}\end{array}\right] = \lim_{B\to 4^-} \int_1^{\sqrt{B}} \frac{2t\,dt}{2-t}$$

$$= \lim_{B\to 4^-} 2\int_1^{\sqrt{B}} \left(\frac{-2}{t-2}-1\right) dt = 2\lim_{B\to 4^-} \Big[-2\ln|t-2|-t\Big]_1^{\sqrt{B}}$$

$$= 2\lim_{B\to 4^-}\left(-2\ln\left|\sqrt{B}-2\right| - \sqrt{B}+1\right) = \infty.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do ∞.

▷ **Zadanie 1.5.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$; (c) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{x(x-3)}$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{e} \frac{\ln x\,dx}{x}$; (e) $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{2^x\,dx}{2^x-8}$; (f*) $\displaystyle\int_{0}^{e} \frac{\sin\ln x\,dx}{x}$.

Odpowiedzi. (a) $5/3$; (b) ∞; (c) $-\infty$; (d) $-\infty$; (e) ∞; (f*) rozbieżna.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

► **Przykład 1.6.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x}}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{(x-1)^2}$; (d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\,\mathrm{tg}\,x\,dx$.

Rozwiązanie. *Kryterium porównawcze.* Niech funkcje f i g będą nieograniczone w przedziale $(a,b]$ tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz niech dla każdego x z tego przedziału spełniają nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas:

(1) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ jest zbieżna, to także całka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna;

(2) jeżeli całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞, to także całka $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞.

Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy fakt, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju postaci $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$ $(b > 0)$ jest zbieżna dla $0 < p < 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \geqslant 1$.

► (a) W przedziale $(0, 1]$ funkcja $(1 + \sin x)/\sqrt{x}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zauważmy, że dla każdego $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1 + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ponadto, całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna, co wynika z podanego na wstępie faktu. Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika, że badana całka jest także zbieżna.

► (b) W przedziale $(0, 2]$ funkcja $1/\sqrt[3]{x^4 + x}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zauważmy, że dla $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{0 + x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ponieważ z podanego na wstępie faktu wynika, że całka $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ jest zbieżna, więc wobec kryterium porównawczego zbieżności (1) także badana całka jest zbieżna.

► (c) W przedziale $(0, 1]$ funkcja $e^x/(x-1)^2$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1. Dla każdego $0 \leqslant x < 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{e^0}{(x-1)^2} \leqslant \frac{e^x}{(x-1)^2}.$$

Ponadto, całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ jest rozbieżna do ∞, gdyż

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{B\to1^-} \int\limits_0^B \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{B\to1^-} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^B = \lim_{B\to1^-} \left(\frac{-1}{B-1} - 1\right) = \infty.$$

Zatem z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika, że badana całka jest także rozbieżna do ∞.

► (d) W przedziale $[\pi/4, \pi/2)$ funkcja $x \operatorname{tg} x$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu $\pi/2$. Zauważmy, że dla $\pi/4 \leqslant x < \pi/2$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x \leqslant x \operatorname{tg} x.$$

Uzasadnimy teraz rozbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$. Mamy

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{B \to \frac{\pi}{2}-} \int\limits_{\pi/4}^{B} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\lim_{B \to \frac{\pi}{2}-} \int\limits_{\pi/4}^{B} \frac{(\cos x)' \, dx}{\cos x}$$

$$= -\lim_{B \to \frac{\pi}{2}-} \left[\ln|\cos x|\right]_{\pi/4}^{B} = \lim_{B \to \frac{\pi}{2}-} \left[\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln|\cos B|\right] = \infty.$$

Z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika rozbieżność badanej całki do ∞.

▷ **Zadanie 1.6.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \, dx$; (b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{e^x \, dx}{x^3}$; (c) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$;

(d) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$; (e*) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16-x^4}}$; (f*) $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^6 \, dx}{(x-1)^2}$.

Odpowiedzi. (a); (c); (d); (e*) zbieżna; (b); (f*) rozbieżna do ∞.

► **Przykład 1.7.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x^3}}$; (b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{(e^x-1) \, dx}{x^4}$; (c) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$; (d) $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sqrt{x} \, dx}{\ln(1+3x)}$.

Rozwiązanie. *Kryterium ilorazowe.* Niech funkcje dodatnie (ujemne) f i g będą nieograniczone w przedziale $(a, b]$ tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Ponadto niech spełniają warunek

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe drugiego rodzaju funkcji f, g na przedziale $(a, b]$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ $(-\infty)$. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a, b)$.

Ponadto ponownie przypomnijmy fakt, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju postaci

$$* \qquad \int_0^b \frac{dx}{x^p} \quad (b>0) \text{ jest zbieżna dla } 0<p<1 \text{ i rozbieżna do } \infty \text{ dla } p \geqslant 1.$$

► (a) W przedziale całkowania funkcja $\sin x/\sqrt{x^3}$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, mamy bowiem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{3x^2} = \infty.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, więc dla x bliskich 0 mamy

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Funkcja $1/\sqrt{x}$ jest w przedziale całkowania dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $g(x) = 1/\sqrt{x}$, otrzymamy

$$k = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ponieważ całka $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna (*) oraz $0<k<\infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest zbieżna.

► (b) W przedziale całkowania funkcja $(e^x-1)/x^4$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, mamy bowiem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{4x^3} = \infty.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, więc dla x bliskich 0 mamy

$$f(x) = \frac{e^x-1}{x^4} = \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{1}{x^3} \approx 1 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}.$$

Funkcja $1/x^3$ jest w przedziale całkowania dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $g(x) = 1/x^3$, otrzymamy

$$k = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x-1}{x^4}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Ponieważ całka $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$ jest rozbieżna do ∞ (∗) oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

► (c) W przedziale całkowania funkcja $1/(1+\cos x)$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu π. Przekształcimy całkę niewłaściwą w ten sposób, aby funkcja podcałkowa była nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0 zamiast lewostronnym π. Podstawiając $t = \pi - x$ otrzymamy

$$\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\cos x} = \int\limits_0^\pi \frac{dt}{1-\cos t}.$$

Funkcja $f(t) = 1/(1-\cos t)$ jest na przedziale całkowania dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Ze wzoru Maclaurina funkcji $\cos t$ i $n = 3$ dla t bliskich 0 mamy $\cos t \approx 1 - \frac{t^2}{2}$. Funkcja $1/t^2$ w przedziale całkowania jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $g(t) = 1/t^2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} k &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-\cos t}}{\frac{1}{t^2}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{1-\cos t} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sin t} = 2 \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sin t} = 2\cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Ponieważ całka $\int\limits_0^\pi \frac{dt}{t^2}$ jest rozbieżna do ∞ (∗) oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wnioskujemy, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

(d) W przedziale całkowania funkcja $\sqrt{x}/\ln(1+3x)$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, mamy bowiem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{1+3x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+3x}{6\sqrt{x}} = \infty.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, więc dla dodatnich x bliskich 0 mamy

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)} = \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} \approx 1 \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

Funkcja $1/\left(3\sqrt{x}\right)$ w przedziale całkowania jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym

$g(x) = 1/\left(3\sqrt{x}\right)$, otrzymamy

$$k = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)}}{\dfrac{1}{3\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{\ln(1+3x)} = 1$$

Ponieważ $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{3\sqrt{x}}$ jest zbieżna $(*)$ oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.7.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{\sin^3 x\,dx}{x^4}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\left(e^{2x}-1\right)dx}{\sqrt[3]{x^4}}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^\pi \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(\arcsin x)^2}$; (e*) $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^{2x}}}$; (f*) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{dx}{x-\sin x}$;

(g*) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$; (h*) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$; (i*) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{2^x-x^2}$.

Odpowiedzi. (b); (c); (e*) zbieżna; (a); (d); (f*); (g*); (h*); (i*) rozbieżna.

► **Przykład 1.8.** Obliczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+(x+1)^2}$; (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn}(x-2)\,dx$; (e) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{\sin x\,dx}{x^4}$; (f) $\displaystyle\int\limits_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

Rozwiązanie. Wartość główną całki niewłaściwej pierwszego rodzaju funkcji f na prostej definiujemy wzorem

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^T f(x)\,dx.$$

Z kolei wartość główną całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji f określonej na $[a,b]\setminus\{c\}$ i nieograniczonej jedynie na obustronnym sąsiedztwie punktu c definiujemy wzorem:

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right].$$

Jeżeli w definicjach granica nie istnieje, to mówimy, że całki niewłaściwe (pierwszego lub drugiego rodzaju) nie mają wartości głównej. Jeżeli całka niewłaściwa (pierwszego lub drugiego rodzaju) jest zbieżna do w, to wartość główna całki także się równa w.

▶ (a) Mamy

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \lim_{T\to\infty} \big[\operatorname{arc\,tg}(x+1)\big]_{-T}^{T}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \operatorname{arc\,tg}\left[(T+1) - \operatorname{arc\,tg}(-T)\right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

▶ (b) Mamy

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} e^{-x}\,dx$$
$$= -\lim_{T\to\infty} \left[e^{-x}\right]_{-T}^{T} = -\lim_{T\to\infty} \left(e^{-T} - e^{T}\right) = -(0-\infty) = \infty.$$

▶ (c) Mamy

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) dx = -\lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_{-T}^{T}$$
$$= -\lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(T-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-T-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(T+\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(T-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

A dalej korzystając ze wzoru $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left((\alpha+\beta)/2\right)\sin\left((\alpha-\beta)/2\right)$ otrzymamy

$$\lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(T+\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(T-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -2\lim_{T\to\infty} \sin T \sin\frac{\pi}{6} = -\lim_{T\to\infty} \sin T.$$

Ponieważ granica $\lim\limits_{T\to\infty} \sin T$ nie istnieje, więc wartość główna całki także nie istnieje.

▶ (d) Funkcja podcałkowa jest określona wzorem

$$\operatorname{sgn}(x-2) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x<2, \\ \ \ 0 & \text{dla } x=2, \\ \ \ 1 & \text{dla } x>2. \end{cases}$$

Zatem

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-2)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \operatorname{sgn}(x-2)\,dx$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left(\int\limits_{-T}^{2} \operatorname{sgn}(x-2)\,dx + \int\limits_{2}^{T} \operatorname{sgn}(x-2)\,dx \right) =$$

$$\overset{T>2}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\left(\int\limits_{-T}^{2}(-1)\,dx+\int\limits_{2}^{T}1\,dx\right)$$
$$=\lim_{T\to\infty}\left(\left[-x\right]_{-T}^{2}+\left[x\right]_{2}^{T}\right)=\lim\left[-2-T+T-2\right]=-4.$$

Zauważmy, że wartość główna całki istnieje mimo, że całka niewłaściwa na przedziale $(-\infty,\infty)$ nie istnieje.

► (e) Funkcja $f(x)=(\sin x)/x^4$ jest określona dla $x\neq 0$ i tylko na obustronnym sąsiedztwie punktu 0 jest nieograniczona. Zatem

$$\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\sin x\,dx}{x^4}+\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}\right)$$

Z nieparzystości funkcji f wynika, że

$$\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\sin x\,dx}{x^4}=-\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}.$$

Stąd

$$\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}+\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}\right)=0.$$

► (f) Funkcja $f(x)=1/\sqrt{|x|}$ jest określona dla $x\neq 0$ i tylko na obustronnym sąsiedztwie punktu 0 jest nieograniczona. Zatem

$$\text{v.p.}\int\limits_{-4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-4}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}+\int\limits_{\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-4}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{-x}}+\int\limits_{\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\left[-\sqrt{-x}\right]_{-4}^{-\varepsilon}+\left[\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{9}\right\}=2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(-\sqrt{\varepsilon}+2\right)+\left(3-\sqrt{\varepsilon}\right)\right]=10.$$

▷ **Zadanie 1.8.** Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\cos x\,dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^x+1}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x+5|}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x^3-x^2\right)\,dx$; (e) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^2}$; (f) $\displaystyle\int\limits_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}$.

Odpowiedzi. (a) 0; (b) ∞; (c) 2; (d) $-\infty$; (e) 0; (f) 39/2.

2 Szeregi liczbowe, potęgowe i Fouriera

Definicje i podstawowe twierdzenia

▶ **Przykład 2.1.** Znaleźć sumy częściowe szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-1}{5^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)$; (f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{3^n}\cos\frac{4\pi}{3^n}$.

Rozwiązanie. Sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazywamy n-tą sumą częściową szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ Analogicznie określamy sumę częściową szeregu rozpoczynającego się od wyrazu a_{n_0}, gdzie $n_0 \geqslant 0$. Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli istnieje granica właściwa ciągu (S_n) sum częściowych. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ albo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, to mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny odpowiednio do $-\infty$ albo do ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że szereg jest rozbieżny. Sumą szeregu zbieżnego nazywamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ i oznaczamy ją tym samym symbolem co szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

▶ (a) Dla każdego $n \geqslant 0$ mamy

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{3^k-1}{5^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k \stackrel{(*)}{=} \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right] - \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right].$$

W miejscu oznaczonym $(*)$ korzystaliśmy ze wzoru na sumę $n+1$ wyrazów ciągu geometrycznego

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{gdzie } q \neq 1.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right] - \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]\right\} = \frac{5}{2}(1-0) - \frac{5}{4}(1-0) = \frac{5}{4},$$

więc badany szereg jest zbieżny i ma sumę $5/4$.

► (b) Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = \frac{3}{1\cdot 2} + \frac{7}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \\ &= \left(1+\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(1+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(1+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right) = n+1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) = \infty.$$

To oznacza, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

► (c) Dla każdego $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\ln\frac{(k+1)}{k} + \ln\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{(k+1)}{k} + \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k-1}{k} \\ &= \left(\ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n}\right) + \left(\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ldots + \ln\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{2} + \ln\frac{1}{n} = \ln\frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\dfrac{n+1}{2n} = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$, więc badany szereg jest zbieżny do $-\ln 2$.

► (d) Dla każdego $n \geqslant 1$ mamy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(2k-1) = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^{n+1}(2n-1) = (-1)^{n+1}n.$$

Granica

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}n$$

nie istnieje, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1}2n = \lim_{n\to\infty} (-2n) = -\infty$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}2n = \lim_{n\to\infty} (2n) = \infty.$$

Tak więc badany szereg jest rozbieżny.

► (e) Dla każdego $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\sqrt[k]{k} - \sqrt[k+1]{k+1} \right) \\ &= \left(\sqrt{2} - \cancel{\sqrt[3]{3}} \right) + \left(\cancel{\sqrt[3]{3}} - \cancel{\sqrt[4]{4}} \right) + \left(\cancel{\sqrt[4]{4}} - \cancel{\sqrt[5]{5}} \right) + \ldots + \left(\cancel{\sqrt[n]{n}} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt[n+1]{n+1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = \sqrt{2} - 1.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny i ma sumę $\sqrt{2} - 1$.

► (f*) W rozwiązaniu wykorzystamy tożsamość

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).$$

Przyjmując w niej $\alpha = 2\pi/3^n$ oraz $\beta = 4\pi/3^n$ otrzymamy

$$\sin\frac{2\pi}{3^n}\cos\frac{4\pi}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3^{n-1}} - \sin\frac{2\pi}{3^n} \right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2\pi}{3^k}\cos\frac{4\pi}{3^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2\pi}{3^{k-1}} - \sin\frac{2\pi}{3^k} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{2\pi}{3^0} - \cancel{\sin\frac{2\pi}{3^1}} \right) + \left(\cancel{\sin\frac{2\pi}{3^1}} - \cancel{\sin\frac{2\pi}{3^2}} \right) + \ldots + \left(\cancel{\sin\frac{2\pi}{3^{n-1}}} - \sin\frac{2\pi}{3^n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 2\pi - \sin\frac{2\pi}{3^n} \right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3^n}. \end{aligned}$$

Wyznaczymy teraz sumę szeregu. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sin\frac{2\pi}{3^n} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 = 0,$$

ponieważ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Zatem badany szereg jest zbieżny i ma sumę 0.

▷ **Zadanie 2.1.** Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}$; (f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Uwaga. W (a) przyjąć, że $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, gdzie $n \geqslant 0$, a w (b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$, gdzie $n \geqslant 2$.

Odpowiedzi. (a) $S_n = 6 - 6\,(5/6)^{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 6$; (b) $S_n = 1 - 1/n!$, gdzie $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; (c) $S_n = n/(2n+1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1/2$; (d) $S_n = \sqrt{n+1}-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; (e*) $S_n = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}\,(1/(2n+1))$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi/4$. Wsk. Udowodnić i wykorzystać tożsamość $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n^2} = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n-1} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n+1}$; (f*) $S_n = 2-(n+2)/2^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$.

Kryteria zbieżności szeregów

► **Przykład 2.2.** Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$.

Rozwiązanie. *Kryterium całkowe.* Niech funkcja f będzie nieujemna oraz nierosnąca na przedziale $[n_0,\infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$. Wówczas szereg $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ i całka niewłaściwa $\displaystyle\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞.

► (a) Niech $f(x) = 1/\,(x\ln x)$. Na przedziale $[2,\infty)$ funkcja $x\ln x$ jest rosnąca, bo jest iloczynem dodatnich funkcji rosnących. Zatem na przedziale $[2,\infty)$ funkcja f jest malejąca oraz przyjmuje tam wartości dodatnie, więc możemy stosować kryterium całkowe. Zbadamy z definicji zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. Mamy

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_2^T \frac{dx}{x\ln x}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=\ln x;\ \ dt=dx/x\\ x=2,\ t=\ln 2;\ \ x=T,\ t=\ln T\end{array}\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln T}\frac{dt}{t} = \lim_{T\to\infty}\Big[\ln|t|\Big]_{\ln 2}^{\ln T} = \lim_{T\to\infty}\Big[\ln(\ln T)-\ln(\ln 2)\Big] = \infty.$$

To oznacza, że całka $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ jest rozbieżna do ∞. Zatem z kryterium całkowego wynika, że szereg $\sum\limits_{n=2}^\infty f(n) = \sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$ także jest rozbieżny do ∞.

► (b) Niech $f(x) = 1/\left(x^2+2\right)$. Funkcja f jest malejąca na przedziale $[1,\infty)$ oraz przyjmuje tam wartości dodatnie, więc możemy stosować kryterium całkowe. Zbadamy z definicji zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2}$. Ponieważ

$$\int\frac{dx}{x^2+2}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ x=\sqrt{2}t;\\ dx=\sqrt{2}\,dt\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C,$$

więc

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T\frac{dx}{x^2+2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_1^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{T}{\sqrt{2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

To oznacza, że rozważana całka jest zbieżna. Zatem z kryterium całkowego wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+2}$ także jest zbieżny.

► (c) Niech $f(x) = x^2/e^{x^3}$. Na przedziale $[1,\infty)$ funkcja f ma wartości dodatnie. Ponadto na tym przedziale jest malejąca. Wynika to z badania znaku jej pochodnej. Rzeczywiście

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{e^{x^3}}\right)' = \left(x^2e^{-x^3}\right)' = 2xe^{-x^3} + x^2e^{-x^3}\cdot\left(-3x^2\right) = xe^{-x^3}\left(2-3x^3\right) < 0$$

dla $x \geqslant 1$. Zatem możemy stosować kryterium całkowe. Korzystając z definicji zbadamy zbieżność całki niewłaściwej

$$\int\limits_1^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x^3}} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T \frac{x^2\,dx}{e^{x^3}} \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ u=x^3;\ \ du=3x^2\,dx\\ x=1,\ u=1;\ \ x=T,\ u=T^3\end{array}\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^{T^3}\frac{1}{3}e^{-u}\,du = \frac{1}{3}\lim_{T\to\infty}\left[-e^{-u}\right]_1^{T^3} = \frac{1}{3}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{T^3}}\right) = \frac{1}{3e}.$$

Ponieważ całka niewłaściwa jest zbieżna, więc z kryterium całkowego wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$ także jest zbieżny.

► (d) Niech $f(x)=\sqrt{x}/(x+1)$. Na przedziale $[1,\infty)$ funkcja f ma wartości dodatnie. Badając znak pochodnej tej funkcji pokażemy, że jest ona malejąca na przedziale $[1,\infty)$. Rzeczywiście dla $x\geqslant 1$ mamy

$$f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\leqslant 0.$$

Zatem możemy stosować kryterium całkowe. Zbadamy z definicji zbieżność całki niewłaściwej. Mamy

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T\frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ x=u^2\ (u\geqslant 0);\ \ dx=2u\,du\\ x=1,\ u=1;\ \ x=T,\ u=\sqrt{T}\end{array}\right] = \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{T}}\frac{2u^2\,du}{u^2+1}$$

$$= \lim_{T\to\infty}2\int\limits_1^{\sqrt{T}}\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du = 2\lim_{T\to\infty}\left[u-\operatorname{arc\,tg}u\right]_1^{\sqrt{T}}$$

$$= 2\lim_{T\to\infty}\left(\sqrt{T}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{T}-1+\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\infty-\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{4}\right)=\infty.$$

Ponieważ całka niewłaściwa jest rozbieżna do ∞, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ także jest rozbieżny do ∞.

► (e) Niech $f(x)=1/\left(x\ln^2 x\right)$. Na przedziale $[2,\infty)$ funkcja $x\ln^2 x$ jest rosnąca, bo jest iloczynem dodatnich funkcji rosnących. Zatem na przedziale $[2,\infty)$ funkcja f jest malejąca oraz przyjmuje tam wartości dodatnie. Możemy więc stosować kryterium całkowe. Mamy

$$\int\limits_2^\infty\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_2^T\frac{dx}{x\ln^2 x}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ u=\ln x;\ \ du=dx/x\\ x=2,\ u=\ln 2;\ \ x=T,\ u=\ln T\end{array}\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln T}\frac{du}{u^2} = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln T} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln T}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Ponieważ całka niewłaściwa $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$ jest zbieżna, więc szereg $\sum\limits_{n=2}^\infty f(n) = \sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^2 n}$ także jest zbieżny.

► (f) Niech $f(x) = x/e^x$. Na przedziale $[1,\infty)$ funkcja f ma wartości dodatnie. Ponadto na tym przedziale jest malejąca. Wynika to z badania znaku jej pochodnej. Rzeczywiście

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \left(xe^{-x}\right)' = e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\,(1-x) \leqslant 0$$

dla $x \geqslant 1$. Zatem możemy stosować kryterium całkowe. Zbadamy, korzystając z definicji, zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_1^\infty \frac{x\,dx}{e^x}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^\infty \frac{x\,dx}{e^x} &= \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T xe^{-x}\,dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez części}\\ u(x)=x,\;\; v'(x)=e^{-x}\\ u'(x)=1,\;\; v(x)=-e^{-x}\end{array}\right]\\
&= \lim_{T\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_1^T - \int\limits_1^T\left(-e^{-x}\right)\,dx\right)\\
&= -\lim_{T\to\infty}\left[e^{-x}(x+1)\right]_1^T = \frac{2}{e} - \lim_{T\to\infty}\frac{T+1}{e^T}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \frac{2}{e} - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{e^T} = \frac{2}{e},
\end{aligned}$$

czyli badana całka niewłaściwa jest zbieżna. Z kryterium całkowego wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{e^n}$ także jest zbieżny.

▷ **Zadanie 2.2.** Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2+4}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^2}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^\infty \sqrt{n}\,2^{-\sqrt{n}}$; (f*) $\sum\limits_{n=3}^\infty \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

Odpowiedzi. (a); (c); (d); (e) zbieżny; (b); (f*) rozbieżny.

► **Przykład 2.3.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{n^3+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^\infty n\sin\frac{1}{n^2}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \operatorname{tg}^2\frac{1}{\sqrt{n}}$;

(d) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2^n+1}{3^n-1}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2+\cos n!}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie. *Kryterium porównawcze.* Niech $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \geqslant n_0$. Wówczas

(1) jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ również jest zbieżny;

(2) jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do ∞, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny do ∞.

Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy fakt:

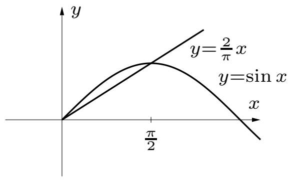
$*$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $p \leqslant 1$.

► (a) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 < \frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3+0} = \frac{1}{n^2}.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny $(*)$, więc z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika, że badany szereg także jest zbieżny.

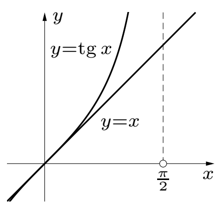
► (b) Zauważmy, że dla $x \in (0, \pi/2)$ prawdziwa jest nierówność $\sin x > (2/\pi)x$. Zatem dla $n \in \mathbb{N}$ mamy



$$n \sin \frac{1}{n^2} > n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} > 0.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ $(*)$, więc z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika, że badany szereg także jest rozbieżny do ∞.

► (c) Wykorzystując nierówność $\operatorname{tg} x > x$, prawdziwą dla każdego $x \in (0, \pi/2)$, otrzymamy



$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}} > \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n} > 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ $(*)$, więc z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika, że także badany szereg jest rozbieżny do ∞.

► (d) Łatwo sprawdzić, że badany szereg ma wyrazy nieujemne. Ponieważ $\frac{n^2}{2} > 3$ dla $n \geqslant 3$, więc prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3} \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{4\sqrt{n}}{n^2} = \frac{4}{n\sqrt{n}}.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ jest zbieżny $(*)$, więc z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika zbieżność badanego szeregu.

► (e) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}$ ma wyrazy dodatnie. Ponieważ $\frac{3^n}{2} > 1$ dla $n \geqslant 1$, więc prawdziwa jest nierówność

$$\frac{2^n+1}{3^n-1} < \frac{2^n+2^n}{3^n-\frac{3^n}{2}} = 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ jest zbieżny. Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika, że badany szereg także jest zbieżny.

► (f) Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są nierówności

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2+\cos n!}{\sqrt{n}}.$$

Ponadto szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny do ∞ $(*)$, więc z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika, że także badany szereg jest rozbieżny do ∞.

▷ **Zadanie 2.3.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$;

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+\sin n!}{3^n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-2\cos n^2}{\sqrt{n}}$; (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n3^n+2^n}$; (h*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; (i*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Odpowiedzi. (a); (c); (d); (i*) zbieżny; (b); (e); (f); (g); (h*) rozbieżny do ∞. Wsk. do (i*). Wykorzystać nierówność $\ln n \geqslant e^2$ zachodzącą dla $n \geqslant e^{e^2}$.

► **Przykład 2.4.** Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)(3n)!}{[(2n)!]^2}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$; (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{100}}{5^n+1}$.

Rozwiązanie. *Kryterium d'Alemberta.* Niech $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$, będzie szeregiem o dodatnich wyrazach oraz niech $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Wówczas, jeżeli $q < 1$, to szereg

$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jeżeli $1 < q \leqslant \infty$, to szereg jest rozbieżny do ∞.

► (a) Ponieważ $a_n = \dfrac{3^n}{n^3} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\dfrac{3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \left[3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right] = 3 \cdot 1^3 = 3 > 1,$$

więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

► (b) Ponieważ $a_n = \dfrac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{5^{n+1} - 4^{n+1}}}{\dfrac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(5^n - 4^n\right)}{\left(3^n - 2^n\right)\left(5^{n+1} - 4^{n+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(3 - \dfrac{2^{n+1}}{3^n}\right) \cdot 5^n\left(1 - \dfrac{4^n}{5^n}\right)}{3^n\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right) \cdot 5^n\left(5 - \dfrac{4^{n+1}}{5^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[3 - 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]\left[1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]}{\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]\left[5 - 4 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]} = \frac{(3 - 2 \cdot 0)(1 - 0)}{(1 - 0)(5 - 4 \cdot 0)} = \frac{3}{5} < 1,$$

więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest zbieżny.

► (c) Dla $n \geqslant 2$ mamy $a_n = n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n} > 0$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \cdot \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n}} \right).$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = 1 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n}} = 1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \cdot \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest zbieżny.

▶ (d) Ponieważ $a_n = \dfrac{n!(3n)!}{[(2n)!]^2}$, więc

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{(n+1)!\,[3(n+1)]!}{\{[2(n+1)]!\}^2} = \frac{n!(n+1)(3n+3)!}{[(2n+2)!]^2} \\
&= \frac{n!(n+1)(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{[(2n)!]^2\,(2n+1)^2(2n+2)^2} \\
&= \frac{n!\cancel{(n+1)}(3n)!(3n+1)(3n+2)3\cancel{(n+1)}}{[(2n)!]^2\,(2n+1)^2 4\cancel{(n+1)^2}} = \frac{3n!(3n)!(3n+1)(3n+2)}{4\,[(2n)!]^2\,(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{n!}\cancel{(3n)!}(3n+1)(3n+2)}{4\cancel{[(2n)!]^2}(2n+1)^2} \cdot \frac{\cancel{[(2n)!]^2}}{\cancel{n!}\cancel{(3n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3(3n+1)(3n+2)}{4(2n+1)^2} \overset{:n^2}{\underset{:n^2}{=\!=}} \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)}{4\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} \\
&= \frac{3(3+0)(3+0)}{4(2+0)^2} = \frac{27}{16} > 1.
\end{aligned}$$

Zatem z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

▶ (e) W badanym szeregu mamy

$$a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}, \quad a_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)^{2(n+1)}} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} = \frac{2(2n)!(2n+1)}{(n+1)^{2n}(n+1)}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2(2n)!(2n+1)}{(n+1)^{2n}(n+1)}}{\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{(2n)!}(2n+1)}{(n+1)^{2n}(n+1)} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)n^{2n}}{(n+1)^{2n}(n+1)} = 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{2n+1}{n+1} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2} \cdot \frac{2n+1}{n+1} = 2\cdot\frac{1}{e^2}\cdot 2 = \frac{4}{e^2}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $4/e^2 < 1$, więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest zbieżny.

► (f) Ponieważ $a_n = \dfrac{n^{100}}{5^n+1} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{100}}{5^{n+1}+1}}{\dfrac{n^{100}}{5^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{100}\,(5^n+1)}{n^{100}\,(5^{n+1}+1)}$$

$$\overset{:5^n}{\underset{:5^n}{=\!=}} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} \frac{\left(1+\dfrac{1}{5^n}\right)}{\left(5+\dfrac{1}{5^n}\right)} = (1+0)^{100}\cdot\frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5} < 1,$$

więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest zbieżny.

▷ **Zadanie 2.4.** Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n^5+1}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n+1)^3}{(5^n+1)^2}$; (h*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\sqrt[k]{2}\right)$; (i*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}$.

Odpowiedzi. (a); (b); (c); (d); (e); (h*); (i*) zbieżny; (f); (g) rozbieżny do ∞.

► **Przykład 2.5.** Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\pi}\right)^n$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-5)^n}{\sqrt{n^n}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n\pi+1}{4n+1}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt{9^n+1}}$.

Rozwiązanie. *Kryterium Cauchy'ego.* Niech $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$, będzie szeregiem o nieujemnych wyrazach oraz niech $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Wówczas, jeżeli $q < 1$, to szereg $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jeżeli $1 < q \leqslant \infty$, to jest rozbieżny do ∞.

► (a) Ponieważ $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

więc z kryterium Cauchy'ego wynika, że badany szereg jest zbieżny.

► (b) Ponieważ $a_n = \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} > 0$ dla $n > 1$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \pi \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \pi \cdot \frac{1}{e} = \frac{\pi}{e} > 1,$$

więc z kryterium Cauchy'ego wynika, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

► (c) Mamy $a_n = \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\pi}\right)^n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\pi}\right)^n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \operatorname{arc\,tg} n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $1/2 < 1$, więc badany szereg jest zbieżny.

► (d) Dla $n \geqslant 5$ mamy $a_n = \frac{(n-5)^n}{\sqrt{n^n}} \geqslant 0$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n-5)^n}{\sqrt{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-5)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \frac{5}{\sqrt{n}}\right) = \infty.$$

Ponieważ granica jest większa od jedności, więc szereg $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n-5)}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny do ∞. Zatem również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-5)}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny do ∞.

► (e) Ponieważ $0 < \frac{\pi n + 1}{4n+1} < 1 < \pi$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $a_n = \sin^n \frac{\pi n + 1}{4n+1} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{n\pi + 1}{4n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{n\pi + 1}{4n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi + \frac{1}{n}}{4 + \frac{1}{n}} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

więc z kryterium Cauchy'ego wynika, że badany szereg jest zbieżny.

► (f) Mamy $a_n = \frac{\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt{9^n+1}} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt{9^n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sqrt[n]{8^n+1}}}{\sqrt{\sqrt[n]{9^n+1}}}.$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$8 = \sqrt[n]{8^n + 0} \leqslant \sqrt[n]{8^n + 1} \leqslant \sqrt[n]{8^n + 8^n} = 8\sqrt[n]{2}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} 8 = 8$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} 8\sqrt[n]{2} = 8 \cdot 1 = 8$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 1} = 8$. Podobnie można pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n + 1} = 9$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sqrt[n]{8^n + 1}}}{\sqrt{\sqrt[n]{9^n + 1}}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego wynika, że badany szereg jest zbieżny.

$\triangleright$ **Zadanie 2.5.** Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2+1)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1}{n^2}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{n}\right)$; (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^n$.

Odpowiedzi. (a); (b); (f) zbieżny; (c); (d); (e) rozbieżny do ∞.

$\blacktriangleright$ **Przykład 2.6.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^4+n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!+1}{(n+2)!}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$; (f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,ctg} n$.

Rozwiązanie. *Kryterium ilorazowe.* Niech $a_n, b_n > 0$ dla każdego $n \geqslant n_0$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad \text{gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas szeregi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞.

$\blacktriangleright$ (a) Oczywiście $a_n = \dfrac{3n+2}{n^4+n+1} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla dużych n mamy

$$a_n = \frac{3n+2}{n^4+n+1} \approx \frac{3n}{n^4} = \frac{3}{n^3}.$$

Dlatego przyjmując w kryterium ilorazowym $b_n = 3/n^3 > 0$ otrzymamy

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(3n+2)}{3\,(n^4+n+1)} \overset{:n^4}{\underset{:n^4}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \dfrac{2}{n}}{3\left(1 + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}\right)} = \frac{3+0}{3\,(1+0+0)} = 1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest zbieżny (*, Przykład 2.3) oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badany szereg jest również zbieżny.

► (b) Ponieważ $1 + \frac{1}{2^n} > 1$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $a_n = \log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z kolei z równości

$$(\bullet) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

wynika, że dla x bliskich 0 mamy $\log_2(1+x) \approx \frac{x}{\ln 2}$. Stąd dla dużych n otrzymamy

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \approx \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $b_n = 1/\left(2^n \ln 2\right) > 0$ mamy

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n \ln 2}} = \ln 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} \overset{(\bullet)}{=\!=} \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 2} = 1.$$

Ponieważ $0 < k < \infty$, a szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbieżny, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badany szereg także jest zbieżny.

► (c) Ponieważ

$$0 < a_n = \frac{2 \cdot n! + 1}{(n+2)!} = \frac{2 \cdot n! + 1}{n!(n+1)(n+2)},$$

więc dla dużych n mamy

$$a_n \approx \frac{2 \cdot n!}{n!(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \approx \frac{2}{n^2}.$$

Zatem w kryterium ilorazowym przyjmujemy $b_n = 2/n^2 > 0$. Wtedy

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2n! + 1\right)}{2n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n!}}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1.$$

Ponieważ $0 < k < \infty$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (*, Przykład 2.3), więc także badany szereg jest zbieżny.

► (d) Ponieważ $\sqrt[n]{2} > 1$, więc $a_n = \sqrt[n]{2} - 1 > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z kolei z równości

$$(\bullet) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

wynika, że dla x bliskich 0 mamy $a^x - 1 \approx x \ln a$. Stąd dla dużych n otrzymamy

$$\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n} \cdot \ln 2.$$

Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $b_n = \ln 2/n > 0$ mamy

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\frac{\ln 2}{n}} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} \overset{(\bullet)}{=\!=} \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln 2 = 1.$$

Ponieważ $0 < k < \infty$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ ($*$, Przykład 2.3), więc z kryterium ilorazowego wynika, że badany szereg jest również rozbieżny do ∞.

► (e) Wyrazy badanego szeregu są dodatnie. Ze wzoru Maclaurina dla funkcji $\cos x$ wynika, że dla x bliskich 0 mamy $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Zatem dla dużych n otrzymamy $1 - \cos\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi^2}{2n^2}$. Przyjmując w kryterium ilorazowym $b_n = \pi^2/2n^2 > 0$ oraz wykorzystując wzór $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ i równość $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, mamy

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi^2}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi^2}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 = 1.$$

Ponieważ $0 < k < \infty$, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny ($*$, Przykład 2.3), więc badany szereg jest także zbieżny.

► (f*) Badany szereg ma wyrazy dodatnie. Wyznaczamy granicę

$$(\bullet)\quad \lim_{x\to\infty} x \operatorname{arc\,ctg} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,ctg} x}{\frac{1}{x}} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

Stąd wynika, że dla dużych x mamy $x \operatorname{arc\,ctg} x \approx 1$, czyli $\operatorname{arc\,ctg} x \approx 1/x$. Zatem $\operatorname{arc\,ctg} n \approx 1/n$ dla dużych n. Przyjmując w kryterium ilorazowym $b_n = 1/n > 0$ i korzystając z równości ($\bullet$) mamy

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,ctg} n}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ ($*$, Przykład 2.3) oraz $0 < k < \infty$, więc badany szereg także jest rozbieżny do ∞.

$\triangleright$ **Zadanie 2.6.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^3-1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n-1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+3}$.

Odpowiedzi. (a); (e); (f) rozbieżny do ∞; (b); (c); (d) zbieżny.

▶ **Przykład 2.7.** Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić równości:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n+1}} = 0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)(2n)!}{(3n)!} = 0$; (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n} = \infty$.

Rozwiązanie. *Warunek konieczny zbieżności szeregów.* Jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

▸ (a) Rozważmy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n+1}}$. Do zbadania zbieżności tego szeregu wykorzystamy kryterium d'Alemberta. Mamy

$$
\begin{aligned}
q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n!}{(n+1)^{n+2}}}{\dfrac{(n-1)!}{n^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n-1)!}\, n}{\cancel{(n-1)!}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}
$$

Tak więc rozważany szereg jest zbieżny. Z warunku koniecznego zbieżności szeregów wynika żądana równość.

▸ (b) Rozważmy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)(2n)!}{(3n)!}$. Do zbadania zbieżności tego szeregu także wykorzystamy kryterium d'Alemberta. Mamy

$$
\begin{aligned}
q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\dfrac{(n)!(2n)!}{(3n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}(n+1)\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)}{\cancel{(3n)!}(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \cdot \frac{\cancel{(3n)!}}{\cancel{n!}\cancel{(2n)!}} =
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)\,(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \overset{:n^3}{\underset{:n^3}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \frac{(1+0)(2+0)(2+0)}{(3+0)(3+0)(3+0)} = \frac{4}{27} < 1.$$

Zatem szereg jest zbieżny. Jak w przykładzie (a) żądana równość wynika z warunku koniecznego zbieżności szeregów.

► (c) W tym przykładzie rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$. Zbieżność tego szeregu także wynika z kryterium d'Alemberta, gdyż mamy

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000^{n+1}}{1000^n} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(n+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1.$$

Zatem z warunku koniecznego zbieżności szeregów oraz faktu, że $\frac{1000^n}{n!} > 0$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000^n}{n!} = 0^+$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000^n}{n!}} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

▷ **Zadanie 2.7.** Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{7^n} = 0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; (d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5n)!(2n)!}{(3n)!(4n)!} = \infty$.

► **Przykład 2.8.** Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+4}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$;

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n\pi}{n+1}$; (d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Rozwiązanie. *Twierdzenie Leibniza.* Jeżeli ciąg (b_n) jest nierosnący od numeru $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

jest zbieżny.

► (a) Szereg rozważany w zadaniu jest naprzemienny. Mamy tu $b_n = (n+3)/\left(n^2+4\right)$. Ciąg (b_n) ma granicę 0, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+4} \overset{:n^2}{\underset{:n^2}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

Pozostała do sprawdzenia monotoniczność tego ciągu. W tym celu zbadamy znak różnicy $b_{n+1} - b_n$. Mamy

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{n+4}{(n+1)^2+4} - \frac{n+3}{n^2+4} = \frac{(n+4)\left(n^2+4\right) - (n+3)\left((n+1)^2+4\right)}{((n+1)^2+5)\,(n^2+4)} \\ &= \frac{-n^2-7n+1}{((n+1)^2+5)\,(n^2+4)} < 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

To oznacza, że ciąg (b_n) jest malejący. Zatem z twierdzenia Leibniza wynika, że badany szereg jest zbieżny.

► (b) Także tu rozważany szereg jest naprzemienny. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right) = 0$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$, więc pierwsze założenie twierdzenia Leibniza jest spełnione. Sprawdzimy teraz monotoniczność ciągu $b_n = \sqrt[n]{3} - 1$. Ponieważ funkcja $y = 3^x - 1$ jest rosnąca, więc skoro $1/(n+1) < 1/n$, to $3^{1/(n+1)} - 1 < 3^{1/n} - 1$, czyli $b_{n+1} < b_n$. To oznacza, że ciąg (b_n) jest malejący. Zatem spełnione są założenia twierdzenia Leibniza. Badany szereg jest więc zbieżny.

► (c) Najpierw zauważmy, że $\cos n\pi = (-1)^n$. Zatem badany szereg jest naprzemienny. Pokażemy, że ciąg $b_n = \sqrt{n}/(n+1)$ jest zbieżny do 0. Rzeczywiście, mamy

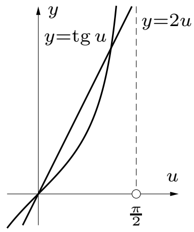
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \overset{:n}{\underset{:n}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Aby zbadać monotoniczność ciągu (b_n) rozważmy funkcję $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ $(x \geqslant 1)$. Pochodna tej funkcji ma postać

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

i jest ujemna dla $x > 1$. Zatem funkcja $f(x)$ jest malejąca na przedziale $[1, \infty)$. Tym samym ciąg $b_n = f(n)$ też jest malejący. Z twierdzenia Leibniza wynika, że rozważany szereg jest zbieżny.

(d*) Z nieparzystości funkcji sinus wynika, że $\sin\dfrac{(-1)^n}{n^2} = (-1)^n \sin\dfrac{1}{n^2}$, więc rozważany szereg przyjmuje postać $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\frac{1}{n^2}$. Zatem jest on naprzemienny. Pokażemy, że ciąg $b_n = n\sin\frac{1}{n^2}$ jest malejący i ma granicę 0. Aby uzasadnić jego monotoniczność rozważmy funkcję $f(x) = x\sin\frac{1}{x^2}$ dla $x \geqslant 1$. Obliczamy jej pochodną



$$f'(x) = \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} = \cos\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right).$$

Ponieważ dla małych dodatnich u prawdziwa jest nierówność $\operatorname{tg} u < 2u$ (rysunek), więc $\operatorname{tg}\frac{1}{x^2} < \frac{2}{x^2}$ dla dużych x. To oznacza, że $f'(x) < 0$ dla dostatecznie dużych x. A zatem funkcja f i co za tym idzie ciag $a_n = f(n)$ są malejące. Pozostała do pokazania równość $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n^2} = 0$. Dla małych dodatnich u prawdziwa jest nierówność $\sin u < u$, więc dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant n\sin\frac{1}{n^2} \leqslant n\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n^2} = 0$. Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia Leibniza, więc badany szereg naprzemienny jest zbieżny.

▷ **Zadanie 2.8.** Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{4^n+5^n}$; (c) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)\cos n\pi$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$; (e) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$; (f*) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Wsk. do zad. (f*). $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{n-1}$ dla $n \geqslant 2$.

Zbieżność bezwzględna szeregów

► **Przykład 2.9.** Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$.

Rozwiązanie. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny. Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

► (a) Zbadamy najpierw zbieżność szeregu naprzemiennego $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$. Ciąg $b_n = \sin(1/n)$ jest malejący i zbieżny do 0. To wynika z monotoniczności i ciągłości funkcji $\sin x$. Zatem, z twierdzenia Leibniza o zbieżności szeregów naprzemiennych (str. 48) wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$ jest zbieżny. Zbadamy zbieżność bezwzględną rozważanego szeregu. Zauważmy, że dla $0 < x < \pi/2$ prawdziwa jest nierówność $2x/\pi < \sin x$ (rys., str. 38). Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n} \leqslant \sin\frac{1}{n}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞, więc z kryterium porównawczego rozbieżności (2, str. 38) wynika, że także szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞. Rozważany szereg jest zatem zbieżny warunkowo.

► (b) W tym przypadku zbadamy najpierw zbieżność bezwzględną, czyli zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}.$$

W tym celu wykorzystamy kryterium Cauchy'ego (str. 42). Mamy

$$q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{e}} = \frac{e}{3} < 1.$$

Tak więc szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$ jest zbieżny. To oznacza, że badany szereg jest zbieżny bezwzględnie, a więc także zbieżny.

► (c) Zbadamy najpierw zbieżność szeregu naprzemiennego $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$. Wykorzystamy twierdzenie Leibniza (str. 48). Pokażemy, że ciąg $b_n = \sqrt{n+1}/(n+2)$ jest malejący. Mamy

$$b_n > b_{n+1} \iff \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} > \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony ostatniej nierówności otrzymamy kolejno nierówności równoważne

$$(n+1)(n+3)^2 > (n+2)^3 \iff n^3+7n^2+15n+9 > n^3+6n^2+12n+8 \iff n^2+3n+1 > 0.$$

Ostatnia nierówność jest oczywista, a to oznacza, że ciąg (b_n) jest malejący. Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0.$$

Zatem z twierdzenia Leibniza wynika, że szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ jest zbieżny. Zbadamy jego bezwzględną zbieżność. Pokażemy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ jest rozbieżny do ∞. Wynika to z kryterium porównawczego rozbieżności szeregów (2, str. 38). Rzeczywiście, dla $n>1$ mamy

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}>\frac{\sqrt{n}}{n+n}=\frac{\sqrt{n}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{n}}>0.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny do ∞, więc także szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ jest rozbieżny do ∞.

▷ **Zadanie 2.9.** Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$;

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$; (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n+1}$; (f*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{n+1}$.

Odpowiedzi. (a); (b); (e) zbieżny bezwzględnie; (c); (d); (f*) zbieżny warunkowo.

Szeregi potęgowe

► **Przykład 2.10.** Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2n+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{x^n}{2^n}$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(x+2)^n$;

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(6-3x)^n$; (e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}-1}$; (f*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{4n}$.

Rozwiązanie. Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n$ obliczamy ze wzorów:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad \text{lub} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

o ile powyższe granice istnieją. Wybieramy ten ze wzorów, który jest łatwiejszy do stosowania. Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest (x_0-R,x_0+R), ewentualnie wraz z końcami, w których zbieżność szeregu należy osobno zbadać. Badając zbieżność szeregu w punktach x_0-R, x_0+R nie należy korzystać z kryterium d'Alemberta ani Cauchy'ego, gdyż nie uzyskamy rozstrzygnięcia.

► (a) Ponieważ $c_n = 1/(2n+1)$, więc $c_{n+1} = 1/(2n+3)$, zatem promień zbieżności jest równy

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

Ponieważ $x_0 = 1$ jest środkiem szeregu potęgowego, więc jest on zbieżny w przedziale $(x_0 - R, x_0 + R) = (1-1, 1+1) = (0,2)$. Zbadamy teraz jego zbieżność na końcach przedziału, tj. w punktach $x = 0$ i $x = 2$. Dla $x = 0$ szereg przyjmuje postać $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Zbieżność tego szeregu wynika z twierdzenia Leibniza o szeregu naprzemiennym (str. 48). Z kolei dla $x = 2$ szereg przyjmuje postać $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$. Szereg ten jest rozbieżny do ∞, co łatwo uzasadnić korzystając z kryterium porównawczego rozbieżności (2, str. 38). Zatem $[0,2)$ jest przedziałem zbieżności badanego szeregu.

► (b) Mamy $c_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\dfrac{1}{2^n}$, więc $c_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^2\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Wyznaczamy promień zbieżności szeregu potęgowego. Mamy

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\dfrac{1}{2^n}}{\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^2\dfrac{1}{2^{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^2\frac{2^{n+1}}{2^n}\ \overset{:n^4}{\underset{:n^4}{=}}\ 2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4} = 2.$$

Ponieważ $x_0 = 0$ jest środkiem szeregu potęgowego, więc jest on zbieżny w przedziale $(x_0 - R, x_0 + R) = (0-2, 0+2) = (-2,2)$. Określimy teraz jego zbieżność na końcach przedziału, tj. w punktach $x = -2$ i $x = 2$. Podstawiając w szeregu potęgowym $x = -2$ otrzymamy szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Szereg ten jest rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregów (str. 47) – granica $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$ nie istnieje. Podobna sytuacja występuje w punkcie $x = 2$. Zatem przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział $(-2,2)$.

► (c) Mamy $c_n = \dfrac{3^n}{n!}$ oraz $c_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}$. Wyznaczamy promień zbieżności szeregu potęgowego. Mamy

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n}{n!}}{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}\,(n+1)}{3\,\cancel{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

► (d) Ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(6-3x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n(x-2)^n,$$

więc $c_n=(-3)^n$ oraz $x_0=2$. Zatem

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|(-3)^n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3^n}}=\frac{1}{3}.$$

Tak więc, rozważany szereg potęgowy jest zbieżny na przedziale

$$(x_0-R,x_0+R)=\left(2-\frac{1}{3},2+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right).$$

Zbadamy zbieżność szeregu potęgowego na końcach przedziału. Przyjmując $x=5/3$ otrzymamy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$, który jest rozbieżny do ∞. Podobnie przyjmując $x=7/3$ otrzymamy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, który jest rozbieżny. Zatem przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest $(5/3,7/3)$.

► (e) Mamy $c_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$, więc $c_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}$. Zatem

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1}\;\underset{:\sqrt{n}}{\overset{:\sqrt{n}}{=\!=}}\;\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

Ponieważ $x_0=-1$ jest środkiem szeregu potęgowego, więc jest on zbieżny na przedziale

$$(x_0-R,x_0+R)=(-1-1,-1+1)=(-2,0).$$

Zbadamy teraz zbieżność tego szeregu na końcach wyznaczonego przedziału. Przyjmując $x=-2$ otrzymamy szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}$. Szereg ten jest zbieżny, co wynika z twierdzenia Leibniza o szeregach naprzemiennych (str. 48). Z kolei przyjmując $x=0$

otrzymamy szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$, który jest rozbieżny do ∞. Wynika to z nierówności

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}-1}$$

dla $n \geqslant 2$, rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ oraz kryterium porównawczego rozbieżności (2, str. 38). Przedział zbieżności szeregu potęgowego ma zatem postać $[-2, 0)$.

► (f*) Podstawmy $x^4 = u$ $(u \geqslant 0)$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} nu^n.$$

Zbadamy zbieżność otrzymanego szeregu. Ponieważ $c_n = n$ oraz $u_0 = 0$, więc jego promień zbieżności jest równy

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

a w konsekwencji szereg jest zbieżny dla $u \in (u_0 - R, u_0 + R) = (-1, 1)$ oraz ewentualnie w punktach $u = -1$ i $u = 1$. Dla $u = -1$ szereg ma postać $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$. Szereg ten jest rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregów (str. 47) – granica $\lim_{n\to\infty} n(-1)^n$ nie istnieje. Dla $u = 1$ szereg ma postać $\sum_{n=1}^{\infty} n$ i z definicji jest rozbieżny do ∞. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nu^n$ jest zbieżny dla $u \in (-1, 1)$. Stąd szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{4n}$ jest zbieżny, gdy $x^4 \in (-1, 1)$, czyli dla $x \in (-1, 1)$.

▷ **Zadanie 2.10.** Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$; (f*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.

Odpowiedzi. (a) $[-2, 2)$; (b) $(1, 3)$; (c) $[-4, -2]$; (d) $(-3, 3)$; (e) $[-2, 0)$; (f*) $(-e, e)$.

► **Przykład 2.11.** Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i wyznaczyć przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{4x}{x+2}$; (b) $x\sin 3x$; (c) $\frac{3}{1+x-2x^2}$; (d) $\cos^2 x$;

(e) $\frac{e^{2x}-1}{x}$; (f) $\frac{1-x}{1+x^3}$; (g) $\ln\left(4+x^2\right)$; (h*) $\operatorname{arc\,tg} x$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach wykorzystamy następujące rozwinięcia Maclaurina:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \quad \text{dla } |u| < 1; \tag{2.1}$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \text{dla } u \in \mathbb{R}; \tag{2.2}$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dla } u \in \mathbb{R}; \tag{2.3}$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{dla } u \in \mathbb{R}; \tag{2.4}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} \quad \text{dla } -1 < x \leqslant 1. \tag{2.5}$$

► (a) Ponieważ

$$\frac{4x}{x+2} = 4 - \frac{8}{x+2} = 4 - 4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2}\right)},$$

więc korzystając ze wzoru (2.1) dla $u = x/2$, otrzymamy

$$4 - 4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2}\right)} = 4 - 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = 4 - 4 - 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-2}} x^n,$$

gdzie $|u| = |-x/2| < 1$. Ostatecznie mamy

$$\frac{4x}{x+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}} x^n \quad \text{dla } |x| < 2.$$

► (b) Korzystając ze wzoru (2.4), gdzie $u = 3x$, otrzymamy

$$x \sin 3x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (3x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+21}$$

dla $u = 3x \in \mathbb{R}$, czyli $x \in \mathbb{R}$.

► (c) Rozkładając funkcję $3/\left(1 + x - x^2\right)$ na ułamki proste mamy

$$\frac{3}{1+x-2x^2} = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Korzystając ze wzoru (2.1) dla $u = -2x$, otrzymamy

$$\frac{2}{1+2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-(-2x)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n,$$

gdzie $|u| = |-2x| = 2|x| < 1$. Ponieważ

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

dla $|x| < 1$, więc ostatecznie

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-2)^{n+1}\right)x^n$$

dla $|x| < 1$ i $2|x| < 1$, czyli dla $|x| < 1/2$.

► (d) Korzystając z tożsamości $\cos^2 x = (1/2)\,(1+\cos 2x)$ oraz rozwinięcia (2.3) dla $u = 2x$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\end{aligned}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

► (e) Korzystając z tożsamości (2.2) dla $u = 2x$ mamy

$$e^{2x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} - 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Ostatecznie dla $x \neq 0$ mamy

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}x^n.$$

Uwaga. Zakładamy tutaj, że w punkcie $x = 0$ rozważana funkcja przyjmuje wartość 2 równą granicy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

► (f) Korzystając z rozwinięcia (2.1) dla $u = -x^3$, otrzymamy

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n},$$

gdzie $|u| = \left|-x^3\right| < 1$, czyli $|x| < 1$. Ostatecznie

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1+x^3} &= \frac{1}{1-(-x^3)} - \frac{x}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1} \\ &= \left(1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots\right) - \left(x - x^4 + x^7 - x^{10} + \ldots\right) \\ &= 1 - x - x^3 + x^4 + x^6 - x^7 - x^9 + x^{10} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\end{aligned}$$

gdzie $|x| < 1$ oraz

$$c_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{dla } n = 3k, \\ (-1)^{k+1} & \text{dla } n = 3k+1, \\ 0 & \text{dla } n = 3k+2 \end{cases} \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(g) Ponieważ

$$\ln\left(4 + x^2\right) = \ln 4\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{x^2}{4}\right),$$

więc korzystając z rozwinięcia (2.5) dla $u = x^2/4$ mamy

$$\begin{aligned}\ln\left(4 + x^2\right) &= \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n \\ &= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\end{aligned}$$

gdzie

$$c_n = \begin{cases} \ln 4 & \text{dla} \quad n = 0, \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k-1, \\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{k4^k} & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$ Szereg ten jest zbieżny dla x spełniających nierówność $-1 < x^2/4 \leqslant 1$, tj. dla $x \in [-2, 2]$.

(h*) Zauważmy, że

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Zatem korzystając z rozwinięcia (2.1) dla $u = -t^2$ oraz z twierdzenia o całkowaniu szeregów potęgowych otrzymamy

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{dt}{1-(-t^2)} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

gdzie $|x| < 1$.

▷ **Zadanie 2.11.** Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i wyznaczyć przedziały ich zbieżności:

(a) $\dfrac{2}{1-3x}$; (b) $\cos\dfrac{x}{2}$; (c) xe^{-2x};

(d) $\dfrac{x}{9+x^2}$; (e) $\operatorname{sh} x$; (f*) $\sin^4 x$.

Odpowiedzi. (a) $2+2\cdot 3x+2\cdot 3^2x^2+\ldots+2\cdot 3^nx^n+\ldots$, $R=1/3$; (b) $1-\dfrac{x^2}{2!2^2}+\dfrac{x^4}{4!2^4}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!2^{2n}}+\ldots$, $R=\infty$; (c) $x-2x^2+\dfrac{2^2}{2!}x^3+\ldots+(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}x^{n+1}+\ldots$, $R=\infty$; (d) $\dfrac{x}{3^2}-\dfrac{x^3}{3^4}+\dfrac{x^5}{3^6}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{3^{2(n+1)}}+\ldots$, $R=3$; (e) $x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$, $R=\infty$; (f*) Wsk. Wykorzystać tożsamość $\sin^4 x=\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{8}$. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{16^n-4\cdot 4^n}{8\cdot(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$.

▶ **Przykład 2.12.** Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć pochodne:

(a) $f^{(100)}(0)$, gdzie $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$; (b) $f^{(20)}(0)$, gdzie $f(x)=x^2e^{2x}$;

(c) $f^{(50)}(0)$, gdzie $f(x)=\cos^4 x$; (d) $f^{(22)}(0)$, gdzie $f(x)=\ln\left(4-x^2\right)$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach zastosujemy wzór $f^{(n)}(0)=n!\,c_n$, gdzie c_n jest współczynnikiem przy x^n w rozwinięciu Maclaurina funkcji f. Ponadto wykorzystamy rozwinięcia Maclaurina podane w poprzednim przykładzie.

▶ (a) Korzystając z rozwinięcia (2.1) dla $u=x^2$ otrzymamy

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1},$$

gdzie $|u|=\left|x^2\right|<1$, czyli $|x|<1$. Stąd wynika, że

$$c_n=\begin{cases}1 \text{ dla } n=2k+1,\\ 0 \text{ dla } n=2k\end{cases}$$

gdzie $k=0,1,2,\ldots$ Zatem $f^{(100)}(0)=100!\cdot c_{100}=100!\cdot 0=0$.

▶ (b) Korzystając z rozwinięcia (2.2) dla $u=2x$ otrzymamy

$$f(x)=x^2e^{2x}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+2}\overset{k=n+2}{=\!=\!=}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k-2}}{(k-2)!}x^k,$$

gdzie $u = 2x \in \mathbb{R}$, czyli $x \in \mathbb{R}$. Stąd wynika, że

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, 1, \\ \dfrac{2^{n-2}}{(n-2)!} & \text{dla } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Zatem $f^{(20)}(0) = 20! \cdot c_{20} = 20! \cdot \dfrac{2^{18}}{18!} = 20 \cdot 19 \cdot 2^{18}$.

► (c) Przekształcamy funkcję f do dogodniejszej postaci. Stosując dwukrotnie tożsamość $\cos^2 u = (1 + \cos 2u)/2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x. \end{aligned}$$

Korzystając teraz rozwinięcia Maclaurina (2.3) funkcji $\cos u$ dla $u = 2x$ i $u = 4x$, otrzymamy

$$\begin{aligned} f(x) = \cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{3}{8} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{4n-3}}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \frac{3}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2^{2n-1} + 2^{4n-3}\right)}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{2^{-1} + 2^{-3}}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2^{2n-1} + 2^{4n-3}\right)}{(2n)!}x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2^{2n-1} + 2^{4n-3}\right)}{(2n)!}x^{2n}, \end{aligned}$$

gdzie $u = 2x \in \mathbb{R}$ i $u = 4x \in \mathbb{R}$, czyli $x \in \mathbb{R}$. Stąd wynika, że

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ 0 & \text{dla } n = 2k-1, \\ \dfrac{(-1)^k \left(2^{2k-1} + 2^{4k-3}\right)}{(2k)!} & \text{dla } n = 2k, \end{cases}$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Zatem

$$f^{(50)}(0) = 50! \cdot c_{50} = 50! \frac{(-1)^{25}\left(2^{49} + 2^{97}\right)}{50!} = -2^{49}\left(1 + 2^{48}\right).$$

► (d) Także tu przekształcemy funkcję f do dogodniejszej postaci. Mamy

$$f(x) = \ln\left(4 - x^2\right) = \ln\left[4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\right] = \ln 4 + \ln\left[1 + \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right].$$

Korzystając teraz z rozwinięcia Maclaurina (2.5) funkcji $\ln(1+u)$ dla dla $u = -x^2/4$, otrzymamy

$$f(x) = \ln 4 + \ln\left[1 + \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right] = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n4^n},$$

gdzie $|u| = \left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1$, czyli $|x| < 2$. Stąd wynika, że

$$c_n = \begin{cases} \ln 4 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 2k-1, \\ -\dfrac{1}{k4^k} & \text{dla } n = 2k, \end{cases}$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Zatem $f^{(22)}(0) = 22! \cdot c_{22} = -22!/(11 \cdot 4^{11})$.

▷ **Zadanie 2.12.** Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć pochodne:

(a) $f^{(50)}(0)$, gdzie $f(x) = x \sin x$; (b) $f^{(2000)}(0)$, gdzie $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

(c) $f^{(21)}(0)$, gdzie $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0)$, gdzie $f(x) = \sin^2 3x$;

(e) $f^{(25)}(0)$, gdzie $f(x) = x^2 \ln(1-x)$; (f*) $f^{(30)}(1)$, gdzie $f(x) = xe^x$.

Odpowiedzi. (a) 50; (b) -2000; (c) $-21!$; (d) $3 \cdot 6^9$; (e) $-25!/23$; (f*) $31e$. Wsk. Podstawić $x = t + 1$.

► **Przykład 2.13.** Stosując twierdzenia o całkowaniu i/lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - n2^{n+2}}{6^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n}$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)5^n}$; (f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)27^n}$.

Rozwiązanie. *Twierdzenie o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych.* Niech R ($0 < R \leqslant \infty$) będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
Wtedy dla $x \in (-R, R)$ mamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}; \qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Na wstępie, korzystając z powyższych twierdzeń, wyprowadzimy dwa wzory:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad \text{gdzie } |x| < 1; \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{gdzie } |x| < 1. \tag{2.7}$$

Całkując obustronnie na przedziale $[0, x]$, gdzie $x \in (-1, 1)$,w równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \dfrac{1}{1-t}$ mamy

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}.$$

Stosując do lewej strony równości twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych, czyli całkując wyraz po wyrazie tego szeregu, otrzymamy

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \overset{k+1=n}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Z drugiej strony

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

więc ostatecznie mamy wzór (2.6).

Z kolei różniczkując na przedziale $(-1, 1)$ obustronnie równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ mamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

Stosując do lewej strony tej równości twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych, czyli różniczkując wyraz po wyrazie tego szeregu, otrzymamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Z drugiej strony

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

Zatem na przedziale $(-1, 1)$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Stąd po pomnożeniu obu stron równości przez x otrzymamy wzór (2.7).

► (a) Przyjmując we wzorze (2.6) $x = -1/2$ otrzymamy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} = \ln \frac{2}{3}$.

► (b) Przyjmując we wzorze (2.7) $x = 1/3$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

► (c) Skorzystamy z liniowości szeregów zbieżnych. Mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - n2^{n+2}}{6^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Teraz, ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $|x| < 1$ oraz przyjmując $x = 1/2$ we wzorze (2.7), otrzymamy

$$3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = 3.$$

► (d) Różniczkując obustronnie równość (2.7) na przedziale $(-1, 1)$, otrzymamy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'.$$

Stosując do lewej strony twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych, otrzymamy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (nx^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}.$$

Z drugiej strony

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Zatem na przedziale $(-1, 1)$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Stąd po pomnożeniu obu stron równości przez x mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad \text{dla } x \in (-1, 1).$$

Przyjmując w powyższej tożsamości $x = 1/7$ dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n} = \frac{\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7}\right)}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^3} = \frac{7}{27}.$$

► (e*) Korzystając z linowości szeregów zbieżnych otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)5^k} \overset{k+2=n}{=\!=\!=} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{n5^{n-2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right) \frac{5^2}{5^n} = 25 \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n5^n}\right).$$

Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego mamy

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{100}.$$

Z kolei korzystając ze wzoru (2.6) dla $x = 1/5$ otrzymamy

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2\cdot 5^2} = -\ln\left(1-\frac{1}{5}\right) - \frac{11}{50} = -\left(\ln\frac{4}{5} + \frac{11}{50}\right).$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)5^n} = 25\left(\frac{1}{100} + 2\left(\ln\frac{4}{5} + \frac{11}{50}\right)\right) = \frac{45}{4} + 50\ln\frac{4}{5}.$$

► (f*) Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{3n} = \frac{t^3}{1-t^3}, \quad \text{gdzie } |t| < 1.$$

Całkując obustronie powyższą tożsamość po odcinku $[0, x]$, gdzie $x \in (-1, 1)$, otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{18} - x + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln \frac{(1-x)^2}{x^2+x+1}.$$

Dzieląc obie strony ostatniej równości przez $x \neq 0$ dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n+1} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{18x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}x} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6x} \ln \frac{(1-x)^2}{x^2+x+1} \quad \text{dla } 0 < |x| < 1^*.$$

Aby wyznaczyć sumę rozważanego szeregu wystarczy w otrzymanej równości podstawić $x = 1/3$.

*Dla $x = 0$ po prawej stronie należy zastosować przejście graniczne $x \to 0$.

▷ **Zadanie 2.13.** Stosując twierdzenia o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$;

(d*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$; (e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{25^n}$; (f*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$.

Odpowiedzi. (a) $2\ln 2$; (b) $32/27$; (c) $2/3$; (d*) $6-8\ln 2$; (e*) $325/6912$; (f*) $\ln 3$.

Szeregi Fouriera

► **Przykład 2.14.** Wyznaczyć szeregi Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcji f. Wskazać punkty, w których te szeregi są zbieżne do wartości funkcji f:

(a) $f(x) = x$; (b) $f(x) = x^2$; (c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$; (d) $f(x) = |\sin x|$.

Następnie korzystając z programu komputerowego do rysowania wykresów przedstawić na jednym rysunku funkcję f oraz kilka początkowych sum częściowych odpowiadającego jej szeregu Fouriera.

Rozwiązanie. Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[-\pi, \pi]$. Szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Przy czym, jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Jeżeli natomiast funkcja f jest nieparzysta, to $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Fakt, że szereg trygonometryczny jest szeregiem Fouriera funkcji f zapisujemy symbolicznie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Kryterium Dirichleta. Jeżeli funkcja f na $[-\pi,\pi]$ jest przedziałami monotoniczna i przedziałami ciągła, przy czym w każdym punkcie nieciągłości x spełnia warunek

$$(1)\ \ f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x_-)+f(x_+)\right],$$

a na końcach przedziału zachodzą równości

$$(2)\ \ f(-\pi)=f(\pi)=\frac{1}{2}\left[f(\pi_-)+f(-\pi_+)\right],$$

to jest sumą swojego szeregu Fouriera, tzn. dla każdego $x\in[-\pi,\pi]$ mamy

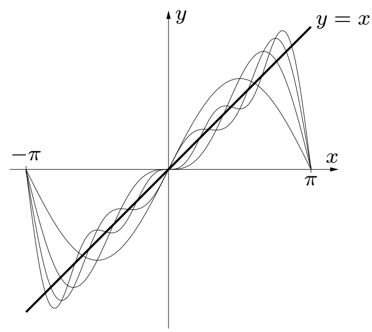
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

► (a) Ponieważ funkcja $f(x)=x$ jest nieparzysta, więc $a_n=0$ dla $n=0,1,2,\ldots$ Ponadto całkując przez części otrzymamy

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez części}\\ u(x)=x,\ \ v'(x)=\sin nx\\ u'(x)=1,\ v(x)=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right]\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{2\cos n\pi}{n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

dla $n=1,2,3,\ldots$ Zatem

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$



Funkcja f jest ciągła i rosnąca w przedziale $[-\pi,\pi]$, ale na jego końcach nie spełnia warunku (2) więc równość

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

zachodzi tylko dla $x\in(-\pi,\pi)$. Na rysunku poniżej pokazano przybliżenia funkcji $f(x)=x$ przez sumy częściowe odpowiadającego jej szeregu Fouriera złożone z jednego, dwóch, trzech oraz czterech składników.

► (b) Ponieważ funkcja $f(x)=x^2$ jest parzysta, więc $b_n=0$ dla $n=1,2,3,\ldots$ Ponadto

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3\pi}\left[x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

oraz

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez części} \\ u(x) = x^2, \quad v'(x) = \cos nx \\ u'(x) = 2x, \ v(x) = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right)$$
$$= -\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez części} \\ u(x) = x, \quad v'(x) = \sin nx \\ u'(x) = 1, \ v(x) = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right]$$
$$= -\frac{4}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

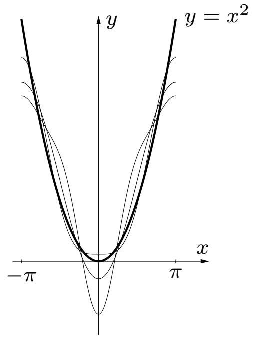
dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Zatem

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

Funkcja $f(x) = x^2$ spełnia w przedziale $[-\pi, \pi]$ warunki kryterium Dirichleta, więc równość

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

zachodzi dla każdego $x \in [-\pi, \pi]$. Na rysunku obok pokazano przybliżenia funkcji $f(x) = x^2$ przez sumy częściowe odpowiadającego jej szeregu Fouriera złożone z jednego, dwóch oraz trzech składników.



► (c) Ponieważ funkcja $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ jest nieparzysta, więc $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ponadto mamy

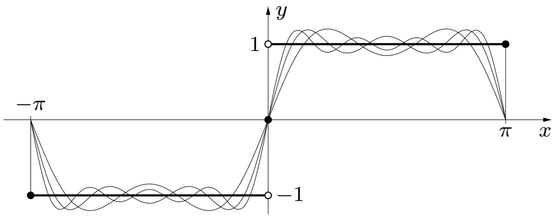
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\operatorname{sgn}(x)\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Zatem

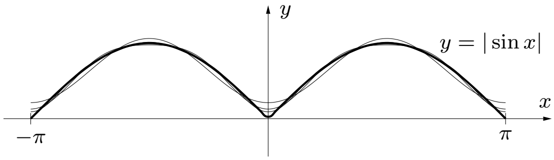
$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x.$$

Funkcja f jest ciągła i niemalejąca w przedziale $[-\pi, \pi]$. W punkcie nieciągłości 0 spełnia warunek (1), jednakże na końcach przedziału $[-\pi, \pi]$ nie spełnia warunku (2).

Zatem równość
$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$
zachodzi tylko w przedziale $(-\pi,\pi)$. Na rysunku poniżej pokazano przybliżenia funkcji $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ przez sumy częściowe odpowiadającego jej szeregu Fouriera złożone z jednego, dwóch oraz trzech składników.



► (d) Ponieważ funkcja $f(x)=|\sin x|$ jest parzysta, więc $b_n=0$ dla $n=1,2,3,\ldots$ Ponadto mamy
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\frac{2}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$
oraz
$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[-\cos 2x\right]_0^{\pi}=0.$$
Korzystając ze wzoru $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$ otrzymamy kolejno dla $n\geqslant 2$
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\right)\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_0^{\pi}=\begin{cases}0 & \text{dla}\,n\,\text{nieparzystych},\\ \dfrac{-4}{\pi\,(n^2-1)} & \text{dla}\,n\,\text{parzystych}.\end{cases}\end{aligned}$$
Zatem
$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\,(4k^2-1)}\cos 2kx.$$
Ponieważ funkcja f spełnia w przedziale $[-\pi,\pi]$ założenia kryterium Dirichleta, więc równość
$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\,(4k^2-1)}\cos 2kx$$
zachodzi dla każdego $x\in[-\pi,\pi]$. Na rysunku poniżej pokazano przybliżenia funkcji $f(x)=|\sin x|$ przez sumy częściowe odpowiadającego jej szeregu Fouriera złożone z jednego, dwóch oraz trzech składników.



▷ **Zadanie 2.14.** Wyznaczyć szeregi Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcji f. Wskazać punkty, w których te szeregi są zbieżne do wartości funkcji f:

(a) $f(x) = |x|$; (b) $f(x) = x \sin x$; (c) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\pi \leqslant x < 0, \\ 1 \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$ (d) $f(x) = \pi^2 - x^2$.

Następnie korzystając z programu komputerowego do rysowania wykresów przedstawić na jednym rysunku funkcję f oraz kilka początkowych sum częściowych odpowiadającego jej szeregu Fouriera.

Odpowiedzi. (a) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$ dla $x \in [-\pi, \pi]$; (b) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi\,(4n^2-1)} \cos 2nx$ dla $x \in [-\pi, \pi]$; (c) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\,(2n-1)} \sin(2n-1)x$ dla $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$; (d) $f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

▶ **Przykład 2.15.** Korzystając z rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ uzasadnić równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Rozwiązanie. Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$ (rozwiązanie Przykładu 2.14 (b)) ma postać

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \quad \text{dla } x \in [-\pi, \pi].$$

Przyjmując w tym wzorze $x = 0$, mamy

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Stąd otrzymamy żądany wzór.

▷ **Zadanie 2.15.** Korzystając z rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ uzasadnić równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

► **Przykład 2.16.** (a) Funkcję $f(x) = \pi - x$ na przedziale $[0, \pi]$ rozwinąć w szereg Fouriera samych cosinusów.

(b) Funkcję $f(x) = \cos x$ na przedziale $(0, \pi)$ rozwinąć w szereg Fouriera samych sinusów.

Rozwiązanie. (a) Wykorzystamy fakt, że rozwinięcie funkcji parzystej w przedziale $[-\pi, \pi]$ w szereg Fouriera zawiera tylko funkcje cosinus. Rozważmy funkcję f^* określoną wzorem

$$f^*(x) = \begin{cases} \pi + x \text{ dla } -\pi \leqslant x < 0, \\ \pi - x \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Funkcja f^* w przedziale $[-\pi, \pi]$ jest parzysta, więc $b_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Obliczymy współczynniki a_n. Mamy

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^*(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x)\ dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \pi$$

oraz

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^*(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi \pi \cos nx\, dx - \int_0^\pi x \cos nx\, dx \right) \\ &= 2 \int_0^\pi \cos nx\, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\, dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez części} \\ u(x) = x,\ \ v'(x) = \cos nx \\ u'(x) = 1,\ \ v(x) = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx\, dx \right) \\ &= 0 - \frac{2}{\pi} \left(0 - \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^\pi \right) = -\frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ Funkcja f^* spełnia w przedziale $[-\pi, \pi]$ warunki kryterium Dirichleta, więc

$$f^*(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \cos nx$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$. Ponieważ $f(x) = f^*(x)$ dla $x \in [0, \pi]$, więc rozwinięcie funkcji f w cosinusowy szereg Fouriera ma postać

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \cos nx$$

dla $x \in [0, \pi]$. Zauważmy jeszcze, że współczynniki parzyste szeregu Fouriera funkcji f są równe 0, więc ostatnią równość możemy przepisać w postaci

$$f(x) = \pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

(b) Wykorzystamy fakt, że rozwinięcie funkcji nieparzystej w przedziale $[-\pi, \pi[$ w szereg Fouriera zawiera tylko funkcje sinus. Rozważmy funkcję f^* określoną wzorem

$$f^*(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{dla } -\pi \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \cos x & \text{dla } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Funkcja f^* w przedziale $[-\pi, \pi]$ jest nieparzysta, więc $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Obliczymy współczynniki b_n. Mamy

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f^*(x)\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos x \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin 2x\,dx = 0.$$

Korzystając ze wzoru $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$ wyznaczymy współczynniki b_n dla $n \geqslant 2$. Mamy

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f^*(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos x \sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\left(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^\pi \sin(n+1)x\,dx + \int\limits_0^\pi \sin(n-1)x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\left[\cos(n+1)x\right]_0^\pi - \frac{1}{n-1}\left[\cos(n-1)x\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\left((-1)^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{n-1}\left((-1)^{n-1} - 1\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(1 - (-1)^{n+1}\right)\frac{2n}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

Funkcja f^* spełnia w przedziale $(-\pi, \pi)$ warunki kryterium Dirichleta, więc

$$f^*(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left(1 - (-1)^{n+1}\right)}{n^2-1}\sin nx$$

dla $x \in (-\pi, \pi)$. Ponieważ $f(x) = f^*(x)$ dla $x \in (0, \pi)$, więc rozwinięcie funkcji f w sinusowy szereg Fouriera ma postać

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - (-1)^{n+1}\right)n}{n^2-1}\sin nx$$

dla $x \in (0, \pi)$. Zauważmy jeszcze, że współczynniki nieparzyste otrzymanego szeregu Fouriera funkcji f są równe 0, więc ostatnią równość możemy przepisać w postaci

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

▷ **Zadanie 2.16.** (a) Funkcję $f(x) = \pi - x$ na przedziale $(0, \pi)$ rozwinąć w szereg Fouriera samych sinusów.

(b) Funkcję $f(x) = \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$ rozwinąć w szereg Fouriera samych cosinusów.

Odpowiedzi. (a) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n}$ dla $x \in (0, \pi)$; (b) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(4n^2 - 1)}$ dla $x \in [0, \pi]$.

3 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych

Funkcje dwóch i trzech zmiennych

► **Przykład 3.1.** Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{y^2-1}}$; (b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$; (c) $f(x,y)=\ln(9-y)+\sqrt[4]{y-x^2}$;

(d) $f(x,y)=\sqrt{x\sin y}$; (e) $f(x,y)=\ln\left(3-\sqrt{x+y}\right)$; (f) $f(x,y)=\arcsin\sqrt{y-\sqrt{x}}$.

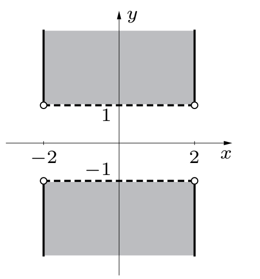
Rozwiązanie. Dziedziną naturalną funkcji $z=f(x,y)$ nazywamy zbiór tych punktów $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dla których można wyznaczyć wartość wyrażenia $f(x,y)$.

► (a) Dziedzinę funkcji f określają warunki:

$$4-x^2\geqslant 0, \quad y^2-1>0.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy równoważną postać tych nierówności:

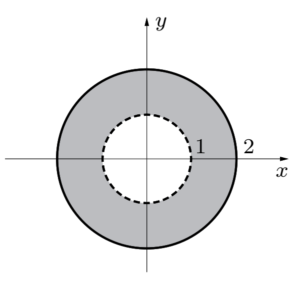
$$-2\leqslant x\leqslant 2, \quad (y<-1 \text{ lub } y>1).$$



Pierwszy zbiór jest pasem domkniętym ograniczonym prostymi $x=-2$ oraz $x=2$, a drugi zewnętrzem pasa ograniczonego prostymi $y=-1$ oraz $y=1$. Wspólną część tych zbiorów, czyli dziedzinę funkcji f, przedstawiono obok.

► (b) Dziedzinę funkcji f określają warunki:

$$4-x^2-y^2\geqslant 0, \quad x^2+y^2-1>0.$$

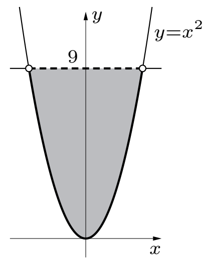


Pierwszy z nich spełniają punkty (x,y) należące do koła domkniętego o środku w początku układu współrzędnych oraz promieniu 2. Z kolei drugi warunek spełniają punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ położone zewnątrz koła domkniętego o takim samym środku, ale o promieniu 1. Wspólną część opisanych zbiorów, czyli dziedzinę funkcji f, przedstawiono na rysunku.

► (c) Dziedzina funkcji f jest określona przez warunki:

$$9 - y > 0, \quad y - x^2 \geqslant 0.$$

Pierwszy z nich spełniają punkty $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ należące do półpłaszczyzny otwartej $y < 9$. Z kolei drugi warunek spełniają punkty $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ należące do paraboli $y = x^2$ oraz punkty położone powyżej niej. Wspólną część tych zbiorów, czyli dziedzinę funkcji f, przedstawiamy obok.

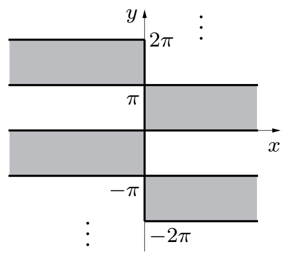


► (d) Dziedzina naturalna funkcji f jest zbiorem par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających nierówność: $x \sin y \geqslant 0$. Mamy

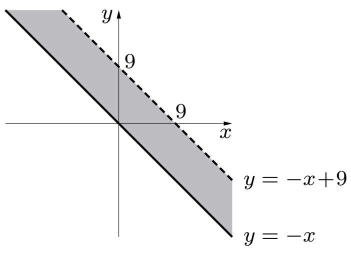
$$x \sin y \geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sin y \geqslant 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x < 0, \\ \sin y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2k\pi \leqslant y \leqslant \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{lub} \begin{cases} x < 0, \\ -\pi + 2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$



Dziedzina naturalna funkcji f jest zaznaczona na rysunku.



► (e) Dziedzina funkcji f jest określona przez warunki:

$$x + y \geqslant 0, \quad 3 - \sqrt{x + y} > 0.$$

Pierwsza z nierówności jest spełniona przez punkty (x, y) należące do górnej półpłaszczyzny domkniętej o brzegu $y = -x$. Z kolei druga jest spełniona przez punkty należące do dolnej półpłaszczyzny otwartej o brzegu $y = -x + 9$. Wspólną część tych półpłaszczyzn, czyli dziedzinę funkcji f, przedstawiono na rysunku.

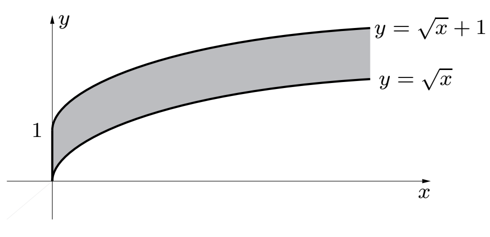
► (f) Dziedzina funkcji f jest określona przez nierówności:

$$0 \leqslant y - \sqrt{x} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0.$$

Nierówności te po przekształceniu przyjmują postać:

$$\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{x}, \quad x \geqslant 0.$$

Na rysunku zaznaczono dziedzinę funkcji f



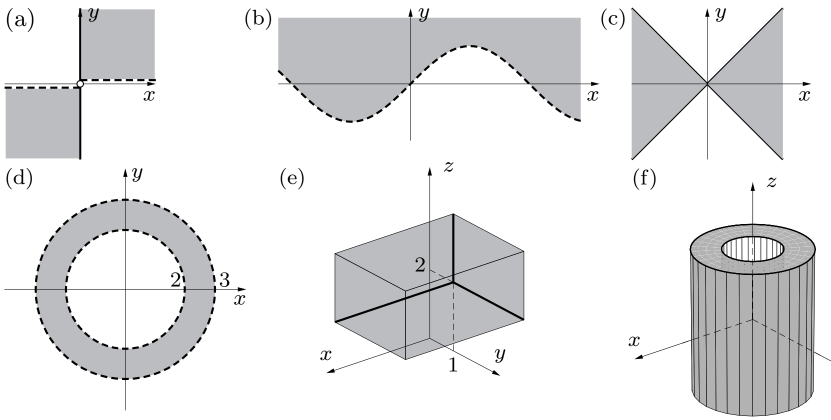
▷ **Zadanie 3.1.** Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; (b) $f(x,y)=\ln(y-\sin x)$;

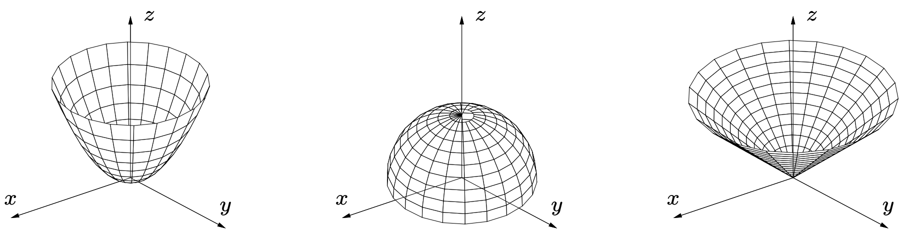
(c) $f(x,y)=\sqrt[4]{x^4-y^4}$; (d) $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}$;

(e) $g(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}$; (f) $g(x,y,z)=\arcsin\left(x^2+y^2-2\right)$.

Odpowiedzi. (a) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x\geqslant 0 \text{ i } y>0) \text{ lub } (x\leqslant 0 \text{ i } y<0)\right\}$;
(b) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>\sin x\right\}$; (c) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|\geqslant|y|\right\}$;
(d) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4<x^2+y^2<9\right\}$; (e) $D_g=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geqslant 0, y\geqslant 1, z\geqslant 2\right\}$;
(f) $D_g=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\right\}$.



► **Przykład 3.2.** Korzystając z wykresów funkcji



paraboloida obrotowa: $z=x^2+y^2$ górna półsfera: $z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$ stożek: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

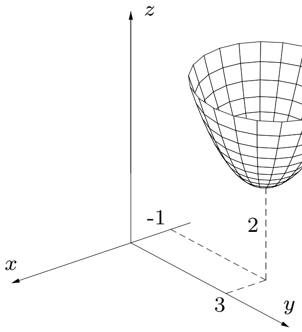
narysować wykresy funkcji:

(a) $z=x^2+y^2+2x-6y+12$; (b) $z=5-\sqrt{4-(x^2+y^2)}$;

(c) $z=1-\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$; (d*) $z=\sqrt{y-x^2}$.

Rozwiązanie. ► (a) Mamy

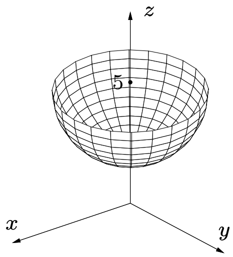
$$
\begin{aligned}
z &= x^2 + 2x + y^2 + 12 \\
&= (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 12 \\
&= (x+1)^2 + (y-3)^2 + 2.
\end{aligned}
$$



Zatem aby otrzymać wykres podanej funkcji należy przesunąć wykres funkcji $z = x^2+y^2$ o wektor $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 2)$ (rysunek).

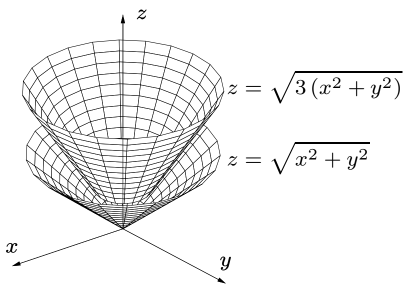
► (b) Mamy

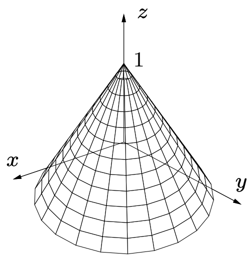
$$z = 5 - \sqrt{4 - (x^2+y^2)} = -\sqrt{2^2 - (x^2+y^2)} + 5.$$



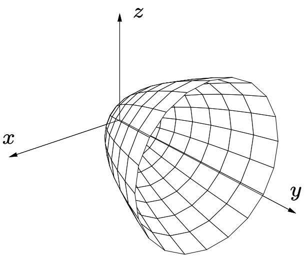
Zatem wykresem podanej funkcji jest dolna półsfera o promieniu 2 i środku w początku układu współrzędnych przesunięta o wektor $\boldsymbol{v} = (0, 0, 5)$, czyli wzdłuż osi Oz o 5 (rysunek).

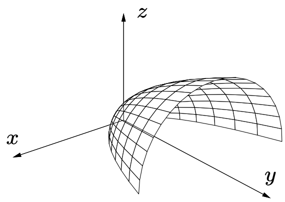
► (c) Przede wszystkim zauważmy, że wykres funkcji $z = \sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ jest stożkiem, którego tangens kąta nachylenia α tworzącej do płaszczyzny xOy jest równy $\sqrt{3}$, czyli $\alpha = \pi/3$ (rysunek lewy). Z kolei wykres funkcji $z = -\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ jest „odwróconym" stożkiem. Zatem wykresem funkcji $z = 1 - \sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ jest odwrócony stożek, który został przesunięty wzdłuż osi Oz o 1 w górę (rysunek prawy).





► (d*) Zauważmy, że powierzchnia opisana równaniem $y = x^2 + z^2$ jest paraboloidą obrotową, której osią symetrii jest oś Oy (rysunek lewy). Zatem wykresem funkcji $z = \sqrt{y - x^2}$ jest górna połowa tej paraboloidy (rysunek prawy).



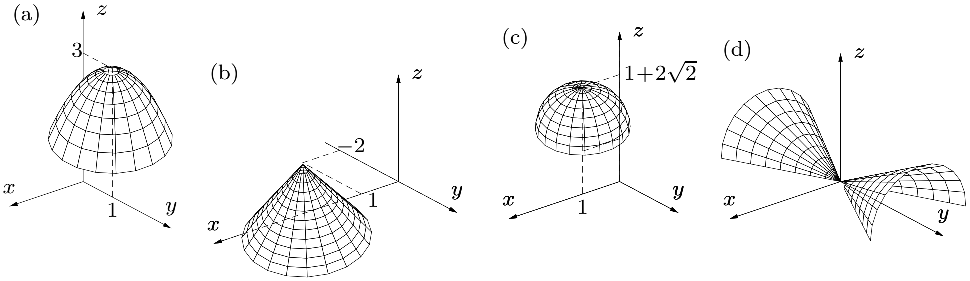


▷ **Zadanie 3.2.** Korzystając z wykresów funkcji $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ $(R > 0)$ narysować wykresy funkcji:

(a) $z = 2 - x^2 + 2y - y^2$; (b) $z = -\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 4y - 5}$;

(c) $z = 1 + \sqrt{7 - x^2 + 2x - y^2}$; (d*) $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

Odpowiedzi. (a) $z = 3 - \left(x^2 + (y-1)^2\right)$ – paraboloida $z = x^2 + y^2$ obrócona „do góry nogami", następnie przesunięta o wektor $\boldsymbol{v} = (0, 1, 3)$; (b) $z = -\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ – stożek $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ przesunięty o wektor $\boldsymbol{v} = (1, -2, 0)$, następnie obrócony „do góry nogami"; (c) $z = 1 + \sqrt{8 - ((x-1)^2 + y^2)}$ – górna półsfera o promieniu $2\sqrt{2}$ przesunięta o wektor $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$; (d*) górne części dwóch stożków połączonych wierzchołkami



Granice funkcji w punkcie

► **Przykład 3.3.** Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x + y}$; (d*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y}$.

Rozwiązanie. Aby uzasadnić, że nie istnieje granica funkcji w punkcie $(0, 0)$ wystarczy wskazać dwa ciągi punktów z dziedziny funkcji, zbieżne do punktu $(0, 0)$ takie, że wartości funkcji dla wyrazów tych ciągów mają różne granice.

► (a) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 0 i niech $y_n = \alpha x_n$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy ciąg $(x_n, y_n) = (x_n, \alpha x_n)$ jest zbieżny do $(0, 0)$, gdy $n \to \infty$. Pokażemy, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}$$

zależy od parametru α. Stąd będzie wynikało, że badana granica funkcji nie istnieje. Rzeczywiście dla $x_n \neq 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot \alpha x_n}{x_n^2 + (\alpha x_n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha \cancel{x_n^2}}{\cancel{x_n^2}\,(1 + \alpha^2)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Zatem rozważana granica nie istnieje.

► (b) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 0 i niech $y_n = \alpha x_n^2$, gdzie

$\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy ciąg $(x_n, y_n) = \left(x_n, \alpha x_n^2\right)$ jest zbieżny do $(0,0)$, gdy $n \to \infty$. Pokażemy, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n}$$

zależy od parametru α. Stąd będzie wynikało, że badana granica nie istnieje. Rzeczywiście dla $x_n \neq 0$ oraz $\alpha \neq -1$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 + \alpha x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x_n^2}}{\cancel{x_n^2}\,(1+\alpha)} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Zatem rozważana granica nie istnieje.

► (c) Niech $\left(x_n', y_n'\right) = (0, 1/n)$ oraz $\left(x_n'', y_n''\right) = (1/n, 0)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście ciągi te są zbieżne do $(0,0)$, gdy $n \to \infty$. Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n'}{x_n' + y_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{0 + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n''}{x_n'' + y_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 0} = 1.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem granica rozważana w zadaniu nie istnieje.

► (d*) Rozważmy ciągi

$$\left(x_n', y_n'\right) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \qquad \left(x_n'', y_n''\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n(1-2n)}\right).$$

Każdy z nich jest zbieżny do $(0,0)$, gdy $n \to \infty$. Jednakże

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n' y_n'}{3\left(x_n'\right)^2 + 2y_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{n}}{3 \cdot 0^2 + \frac{2}{n}} = 0.$$

Zaś

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n'' y_n''}{3\left(x_n''\right)^2 + 2y_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n(1-2n)}}{3\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{n(1-2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{3}{n^2(1-2n)}}}{\cancel{\frac{3}{n^2(1-2n}}} = 1.$$

To oznacza, że badana granica nie istnieje.

▷ **Zadanie 3.3.** Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$; (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$; (e*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y}$; (f*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^3}$.

Odpowiedzi. Rozważyć ciągi:
(a) $\left(x_n', y_n'\right) = (1/n, 0)$, $\left(x_n'', y_n''\right) = (1/n, 1/n)$; (b) $\left(x_n', y_n'\right) = (0, 1/n)$, $\left(x_n'', y_n''\right) = (1/n, 1/n)$; (c) $\left(x_n', y_n'\right) = (0, 1/n)$, $\left(x_n'', y_n''\right) = \left(1/\sqrt{n}, 1/n\right)$; (d) $\left(x_n', y_n'\right) = (1+1/n, 1)$, $\left(x_n'', y_n''\right) = (1+1/n, 1-1/n)$; (e*) $\left(x_n', y_n'\right) = (0, 1/n)$, $\left(x_n'', y_n''\right) = \left(\sqrt{n+1}/n, -1/n\right)$; (f*) $\left(x_n', y_n'\right) = (1/n, 0)$, $\left(x_n'', y_n''\right) = \left(1/n, -\sqrt[3]{n+1}/n\right)$.

► **Przykład 3.4.** Obliczyć granice:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2y-xy^2-y^3}{x-y}$; (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{x+2}{xy^2+2y^2-xy-2y}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(x^2-y^2\right)}{x+y}$; (f*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+4y^6}$.

Uwaga. Wszystkie granice rozpatrujemy w obszarze określoności funkcji.

Rozwiązanie. Do znajdowania granic funkcji wielu zmiennych można stosować twierdzenia o arytmetyce granic oraz twierdzenia o dwóch i trzech funkcjach, analogiczne do takich twierdzeń dla funkcji jednej zmiennej.

► (a) Zastosujemy twierdzenie o trzech funkcjach. Dla każdego punktu $(x,y) \neq (0,0)$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2\frac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant x^2 \cdot 1 = x^2.$$

Ponieważ dla funkcji ograniczających mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0,$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

► (b) Wyznaczenie szukanej granicy sprowadzimy do znalezienia granicy funkcji jednej zmiennej. Podstawiając $u = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ mamy $(x,y) \longrightarrow (0,0) \Longleftrightarrow u \longrightarrow \infty$. Zatem rozważana granica przyjmuje równoważną postać $\lim\limits_{u\to\infty} u/e^u$. Stosując do otrzymanej nieoznaczoności ∞/∞ regułę de L'Hospitala mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} \overset{H}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^u} = 0.$$

Zatem szukana granica jest także równa 0.

► (c) Dla $x \neq y$ mamy

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2y-xy^2-y^3}{x-y} = \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x+y)-y^2(x+y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2-y^2\right)(x+y)}{x-y} \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x-y)}\,(x+y)\,(x+y)}{\cancel{x-y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)^2 = (0+0)^2 = 0.
\end{aligned}$$

► (d) Dla $xy^2+2y^2-xy-2y \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{x+2}{xy^2+2y^2-xy-2y} &= \lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{x+2}{y^2(x+2)-y(x+2)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{\cancel{x+2}}{y(y-1)\,\cancel{(x+2)}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

► (e) Zauważmy, że dla $x+y \neq 0$, mamy

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(x^2-y^2\right)}{x+y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(x^2-y^2\right)}{(x+y)(x-y)} \cdot (x-y)\right] \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(x^2-y^2\right)}{x^2-y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y),
\end{aligned}$$

Po podstawieniu $u = x^2-y^2$ w pierwszej z granic otrzymamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(x^2-y^2\right)}{x^2-y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} u}{u} = 1.$$

Ponadto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0-0 = 0.$$

Zatem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(x^2-y^2\right)}{x+y} = 1 \cdot 0 = 0.$$

(f*) Uzasadnimy, że rozważana granica jest równa 0. Najpierw zauważmy, że dla $(x,y) \neq (0,0)$ mamy

$$\left|\frac{xy^4}{x^2+4y^6}\right| = \frac{4|x||y|^3}{x^2+4y^6} \cdot \frac{|y|}{4}.$$

Pokażemy, że dla $(x,y) \neq (0,0)$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{4|x||y|^3}{x^2+4y^6} \leqslant 1.$$

Ponieważ $\left(|x|-2|y|^3\right)^2 \geqslant 0$, więc $|x|^2+4|y|^6-4|x||y|^3 \geqslant 0$. Stąd $x^2+4y^6 \geqslant 4|x||y|^3$. Po podzieleniu obu stron relacji przez $x^2+4y^6 \neq 0$ dostajemy żądaną nierówność. Zatem

$$0 \leqslant \left|\frac{xy^4}{x^2+4y^6}\right| = \frac{4|x||y|^3}{x^2+4y^6} \cdot \frac{|y|}{4} \leqslant \frac{|y|}{4}.$$

Ponieważ dla funkcji ograniczających mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{4} = 0,$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^4}{x^2+4y^6}\right| = 0,$$

a co za tym idzie również

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+4y^6} = 0.$$

▷ **Zadanie 3.4.** Obliczyć granice:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^4+y^4}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y^2-4x^2-y^2+4}{xy-2x-y+2}$; (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$;

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}\left(x^3-y^3\right)}{x-y}$; (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (1+xy)^{\frac{1}{x}}$;

(i*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$; (j*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Uwaga. Wszystkie granice rozpatrujemy w obszarze określoności funkcji.

Odpowiedzi. (a) 0; (b) 0; (c) 1/2; (d) 0; (e) 8; (f) 1; (g) 0; (h) e; (i*) 0. Wsk. Wykorzystać nierówność $\dfrac{2|u|\cdot|v|}{u^2+v^2} \leqslant 1$; (j*) 0. Wsk. Zauważyć, że dla $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2<1$ zachodzą nierówności $y\ln\left(0+y^2\right) < y\ln\left(x^2+y^2\right) < 0$.

Pochodne cząstkowe funkcji

► **Przykład 3.5.** Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji f i g we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$, $(x_0,y_0)=(0,1)$; (b) $f(x,y)=x\sin xy$, $(x_0,y_0)=(\pi,1)$;

(c) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$, $\quad (x_0,y_0)=(0,0)$;

(d) $g(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y}{x^2+y^2+z^2} & \text{dla} \quad (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y,z)=(0,0,0),\end{cases} \qquad (x_0,y_0,z_0)=(0,0,0).$

Rozwiązanie. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) określa się wzorami:

$$f'_x\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x},$$

$$f'_y\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta y}.$$

Pochodne te oznaczamy także odpowiednio symbolami $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego dla funkcji trzech zmiennych definiujemy i oznaczamy analogicznie.

► (a) Mamy

$$f'_x(0,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(0+\Delta x,1\right)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\Delta x\right)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

oraz

$$f'_y(0,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(0,1+\Delta y\right)-f(0,1)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

► (b) Mamy

$$\begin{aligned}f'_x(\pi,1) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\pi+\Delta x,1\right)-f(\pi,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\pi+\Delta x)\sin(\pi+\Delta x)-\pi\sin\pi}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[(\pi+\Delta x)\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}\right]=\pi\cdot(-1)=-\pi\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}f'_y(\pi,1) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(\pi,1+\Delta y\right)-f(\pi,1)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\pi\sin\left(\pi(1+\Delta y)\right)-\pi\sin\pi}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\pi\sin\left(\pi\Delta y\right)}{\Delta y}=-\pi^2\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sin(\pi\Delta y)}{\pi\Delta y}=-\pi^2\cdot 1=-\pi^2.\end{aligned}$$

► (c) Mamy

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\Delta x,0\right)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\left(\Delta x\right)^3}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

W podobny sposób można pokazać, że $f'_y(0,0)=-1$.

► (d) Mamy

$$g'_x(0,0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(\Delta x,0,0)-g(0,0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$g'_y(0,0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{g(0,\Delta y,0)-g(0,0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{1}{\Delta y} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{(\Delta y)^2} = \infty,$$

$$g'_z(0,0,0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{g(0,0,\Delta z)-g(0,0,0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{0-0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} 0 = 0.$$

Zauważmy, że druga z obliczonych pochodnych cząstkowych jest niewłaściwa.

▷ **Zadanie 3.5.** Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji f i g we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = 2x - y^2 + 3, \quad (x_0,y_0) = (0,-1)$; (b) $f(x,y) = xy^3, \quad (x_0,y_0) = (0,1)$;

(c) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^4+z^6}, \quad (x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$.

Odpowiedzi. (a) $f'_x(0,1) = 2,\ f'_y(0,1) = 2$; (b) $f'_x(0,1) = 1,\ f'_y(0,1) = 0$; (c) $g'_x(0,0,0)$ nie istnieje, $g'_y(0,0,0) = g'_z(0,0,0) = 0$.

► **Przykład 3.6.** Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g:

(a) $f(x,y) = xy^3 + \dfrac{2}{x^2y}$; (b) $f(x,y) = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; (c) $f(x,y) = \dfrac{3x}{x+\ln y}$;

(d) $f(x,y) = x\sqrt{x^2-y^2}$; (e) $f(x,y) = e^{x^2\sin y}$; (f) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\big(\sin\big(xy^2\big)\big)$;

(g) $g(x,y,z) = \left(5x - xy^2 + \dfrac{y}{z}\right)^4$; (h) $g(x,y,z) = x^y - z^x$; (i) $g(x,y,z) = y + \ln\big(z^2+2x\big)$.

Rozwiązanie. Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem jednej zmiennej pozostałe zmienne traktujemy jak stałe. Do wyznaczania pochodnych cząstkowych stosujemy reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej, tj. wzory na pochodne sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu oraz złożenia funkcji. Operację obliczania pochodnych cząstkowych po x, y funkcji $f(x,y)$ oznaczamy odpowiednio przez $[f(x,y)]'_x$, $[f(x,y)]'_y$ albo tradycyjnie $\dfrac{\partial}{\partial x}(f(x,y))$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(f(x,y))$.

► (a) Dla punktów $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $x^2y \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned} f'_x &= \left[xy^3 + \frac{2}{x^2y}\right]'_x = \left[xy^3\right]'_x + \left[\frac{2}{x^2y}\right]'_x \\ &= y^3\cdot[x]'_x + \frac{2}{y}\cdot\left[\frac{1}{x^2}\right]'_x = y^3\cdot 1 + \frac{2}{y}\cdot\frac{-2}{x^3} = y^3 - \frac{4}{x^3y} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'_y &= \left[xy^3 + \frac{2}{x^2y}\right]'_y = \left[xy^3\right]'_y + \left[\frac{2}{x^2y}\right]'_y \\ &= x\cdot\left[y^3\right]'_y + \frac{2}{x^2}\cdot\left[\frac{1}{y}\right]'_y = x\cdot 3y^2 + \frac{2}{x^2}\cdot\frac{-1}{y^2} = 3xy^2 - \frac{2}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

► (b) Dla punktów (x, y) spełniających warunki $y/x \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x \neq 0$ mamy

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \left[x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right]'_x = [x]'_x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x} + x \cdot \left[\operatorname{tg} \frac{y}{x}\right]'_x \\
&= 1 \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x} + x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \left[\frac{y}{x}\right]'_x = \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \frac{x}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x \cos^2 \frac{y}{x}}
\end{aligned}
$$

oraz

$$
f'_y = \left[x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right]'_y = x \cdot \left[\operatorname{tg} \frac{y}{x}\right]'_y = x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \left[\frac{y}{x}\right]'_y = \frac{x}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}}.
$$

► (c) Dla punktów (x, y) spełniających warunki $x + \ln y \neq 0$, $y > 0$ mamy

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \left[\frac{3x}{x + \ln y}\right]'_x = \frac{[3x]'_x \cdot (x + \ln y) - 3x \cdot [x + \ln y]'_x}{(x + \ln y)^2} \\
&= \frac{3(x + \ln y) - 3x \cdot (1 + 0)}{(x + \ln y)^2} = \frac{3 \ln y}{(x + \ln y)^2}
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
f'_y &= \left[\frac{3x}{x + \ln y}\right]'_y = 3x \left[(x + \ln y)^{-1}\right]'_y \\
&= 3x \cdot (-1) (x + \ln y)^{-2} [x + \ln y]'_y = -3x (x + \ln y)^{-2} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{3x}{y(x + \ln y)^2}.
\end{aligned}
$$

► (d) W punktach (x, y), których współrzędne spełniają nierówność $x^2 - y^2 > 0$, mamy

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \left[x\sqrt{x^2 - y^2}\right]'_x = [x]'_x \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + x \cdot \left[\sqrt{x^2 - y^2}\right]'_x \\
&= 1 \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left[x^2 - y^2\right]'_x = \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (2x - 0) \\
&= \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
f'_y &= \left[x\sqrt{x^2 - y^2}\right]'_y = x \cdot \left[\sqrt{x^2 - y^2}\right]'_y \\
&= x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left[x^2 - y^2\right]'_y = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (0 - 2y) = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.
\end{aligned}
$$

► (e) Dla punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \left[e^{x^2 \sin y}\right]'_x = e^{x^2 \sin y} \cdot \left[x^2 \sin y\right]'_x \\
&= e^{x^2 \sin y} \cdot \sin y \cdot \left[x^2\right]'_x = e^{x^2 \sin y} \cdot \sin y \cdot 2x = 2x \sin y e^{x^2 \sin y}
\end{aligned}
$$

oraz

$$f'_y = \left[e^{x^2 \sin y}\right]'_y = e^{x^2 \sin y} \cdot \left[x^2 \sin y\right]'_y = e^{x^2 \sin y} \cdot x^2 \cdot [\sin y]'_y = e^{x^2 \sin y} \cdot x^2 \cdot \cos y.$$

► (f) Dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$\begin{aligned} f'_x &= \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sin\left(xy^2\right)\right)\right]'_x = \frac{1}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \cdot \left[\sin\left(xy^2\right)\right]'_x \\ &= \frac{1}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \cdot \cos\left(xy^2\right) \cdot \left[xy^2\right]'_x = \frac{\cos\left(xy^2\right)}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \cdot y^2 = \frac{y^2\cos\left(xy^2\right)}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'_y &= \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sin\left(xy^2\right)\right)\right]'_y = \frac{1}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \cdot \left[\sin\left(xy^2\right)\right]'_y \\ &= \frac{1}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \cdot \cos\left(xy^2\right) \cdot \left[xy^2\right]'_y = \frac{\cos\left(xy^2\right)}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2} \cdot 2xy = \frac{2xy\cos\left(xy^2\right)}{1+\left(\sin\left(xy^2\right)\right)^2}. \end{aligned}$$

► (g) W punktach (x, y, z), dla których $z \neq 0$, mamy

$$\begin{aligned} g'_x &= \left[\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^4\right]'_x = 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left[5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right]'_x \\ &= 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left([5x]'_x - \left[xy^2\right]'_x + \left[\frac{y}{z}\right]'_x\right) \\ &= 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left(5 - y^2 + 0\right) = 4\left(5 - y^2\right)\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_y &= \left[\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^4\right]'_y = 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left[5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right]'_y \\ &= 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left([5x]'_y - \left[xy^2\right]'_y + \left[\frac{y}{z}\right]'_y\right) \\ &= 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left(0 - 2xy + \frac{1}{z}\right) = 4\left(\frac{1}{z} - 2xy\right)\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} g'_z &= \left[\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^4\right]'_z = 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left[5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right]'_x \\ &= 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left([5x]'_z - \left[xy^2\right]'_z + \left[\frac{y}{z}\right]'_z\right) \\ &= 4\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3 \cdot \left(0 - 0 + \left(-\frac{y}{z^2}\right)\right) = -\frac{4y}{z^2}\left(5x - xy^2 + \frac{y}{z}\right)^3. \end{aligned}$$

► (h) W punktach (x, y, z), których współrzędne spełniają nierówności $x > 0$, $z > 0$, mamy:

$$g'_x = \left[x^y - z^x\right]'_x = \left[x^y\right]'_x - \left[z^x\right]'_x = yx^{y-1} - z^x \ln z,$$

$$g'_y = [x^y - z^x]'_y = [x^y]'_y - [z^x]'_y = x^y \ln x - 0 = x^y \ln x$$

oraz

$$g'_z = [x^y - z^x]'_z = [x^y]'_z - [z^x]'_z = 0 - xz^{x-1} = -xz^{x-1}.$$

► (i) W punktach (x, y, z), których współrzędne spełniają nierówność $z^2 + 2x > 0$, mamy:

$$\begin{aligned} g'_x &= \left[y + \ln\left(z^2 + 2x\right)\right]'_x = [y]'_x + \left[\ln\left(z^2 + 2x\right)\right]'_x \\ &= 0 + \frac{1}{z^2 + 2x} \cdot \left[z^2 + 2x\right]'_x = \frac{1}{z^2 + 2x} \cdot 2 = \frac{2}{z^2 + 2x}, \end{aligned}$$

$$g'_y = \left[y + \ln\left(z^2 + 2x\right)\right]'_y = [y]'_y + \left[\ln\left(z^2 + 2x\right)\right]'_y = 1 + 0 = 1$$

oraz

$$\begin{aligned} g'_z &= \left[y + \ln\left(z^2 + 2x\right)\right]'_z = [y]'_z + \left[\ln\left(z^2 + 2x\right)\right]'_z \\ &= 0 + \frac{1}{z^2 + 2x} \cdot \left[z^2 + 2x\right]'_z = \frac{1}{z^2 + 2x} \cdot 2z = \frac{2z}{z^2 + 2x}. \end{aligned}$$

▷ **Zadanie 3.6.** Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g:

(a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$; (b) $g(x, y, z) = x^2 + \dfrac{xz}{y} + yz^3$;

(c) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1 - xy}{x + y}$; (d) $g(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$;

(e) $f(x, y) = e^{\sin y/x}$; (f) $g(x, y, z) = \sin(x \cos(y \sin z))$.

Odpowiedzi. (a) $f'_x = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 y}$, $f'_y = \dfrac{y^2 - x^2}{xy^2}$; (b) $g'_x = 2x + \dfrac{z}{y}$, $g'_y = -\dfrac{xz}{y^2} + z^3$; $g'_z = \dfrac{x}{y} + 3yz^2$; (c) $f'_x = -\dfrac{1}{1 + x^2}$, $f'_y = -\dfrac{1}{1 + y^2}$; (d) $g'_x = \dfrac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, $g'_y = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, $g'_z = \dfrac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; (e) $f'_x = -\dfrac{y}{x^2} \cos \dfrac{y}{x} e^{\sin y/x}$, $f'_y = \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{y}{x} e^{\sin y/x}$; (f) $g'_x = \cos(x \cos(y \sin z)) \cdot \cos(y \sin z)$, $g'_y = -\cos(x \cos(y \sin z)) \cdot x \sin(y \sin z) \cdot \sin z$, $g'_z = -\cos(x \cos(y \sin z)) \cdot x \sin(y \sin z) \cdot y \cos z$.

► **Przykład 3.7.** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego podanych funkcji. Sprawdzić, że odpowiednie pochodne mieszane są równe:

(a) $f(x, y) = xy + \dfrac{x^2}{y^3}$; (b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} xy$; (c) $g(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$.

Rozwiązanie. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f dwóch zmiennych są określone wzorami:

$$f''_{xx} = [f'_x]'_x, \quad f''_{xy} = \left[f'_y\right]'_x, \quad f''_{yx} = [f'_x]'_y, \quad f''_{yy} = \left[f'_y\right]'_y.$$

Analogicznie określa się pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji trzech zmiennych.

► (a) W punktach $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gdzie $y \neq 0$, mamy

$$f'_x = \left[xy + \frac{x^2}{y^3}\right]'_x = y + \frac{2x}{y^3}, \qquad f'_y = \left[xy + \frac{x^2}{y^3}\right]'_y = x - \frac{3x^2}{y^4}.$$

Obliczając kolejne pochodne cząstkowe otrzymamy:

$$f''_{xx} = \left[y + \frac{2x}{y^3}\right]'_x = 0 + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{y^3}, \; f''_{xy} = \left[x - \frac{3x^2}{y^4}\right]'_x = 1 - \frac{6x}{y^4},$$

$$f''_{yx} = \left[y + \frac{2x}{y^3}\right]'_y = 1 - \frac{6x}{y^4}, \; f''_{yy} = \left[x - \frac{3x^2}{y^4}\right]'_y = 0 + \frac{12x^2}{y^5} = 12\frac{x^2}{y^5}.$$

Pochodne cząstkowe mieszane f''_{xy}, f''_{yx} są równe.

► (b) W punktach $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$f'_x = [\operatorname{arc\,tg} xy]'_x = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot [xy]'_x = \frac{1}{1 + x^2y^2} \cdot y = \frac{y}{1 + x^2y^2},$$

$$f'_y = [\operatorname{arc\,tg} xy]'_y = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot [xy]'_y = \frac{1}{1 + x^2y^2} \cdot x = \frac{x}{1 + x^2y^2}.$$

Obliczając kolejne pochodne cząstkowe otrzymamy:

$$f''_{xx} = \left[\frac{y}{1 + x^2y^2}\right]'_x = \frac{[y]'_x \cdot \left(1+x^2y^2\right) - y \cdot \left[1+x^2y^2\right]'_x}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{0 - y \cdot 2xy^2}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{-2xy^3}{\left(1 + x^2y^2\right)^2},$$

$$\begin{aligned} f''_{yx} &= \left[\frac{y}{1 + x^2y^2}\right]'_y = \frac{[y]'_y \cdot \left(1 + x^2y^2\right) - y \cdot \left[1 + x^2y^2\right]'_y}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} \\ &= \frac{1 \cdot \left(1 + x^2y^2\right) - y \cdot 2x^2y}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2y^2}{\left(1 + x^2y^2\right)^2}, \\ f''_{xy} &= \left[\frac{x}{1 + x^2y^2}\right]'_x = \frac{[x]'_x \cdot \left(1 + x^2y^2\right) - x \cdot \left[1 + x^2y^2\right]'_x}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} \\ &= \frac{1 \cdot \left(1 + x^2y^2\right) - x \cdot 2xy^2}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2y^2}{\left(1 + x^2y^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$f''_{yy} = \left[\frac{x}{1 + x^2y^2}\right]'_y = \frac{[x]'_y \cdot \left(1+x^2y^2\right) - x \cdot \left[1+x^2y^2\right]'_y}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{0 - x \cdot 2x^2y}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{-2x^3y}{\left(1+x^2y^2\right)^2}.$$

Pochodne cząstkowe mieszane f''_{xy}, f''_{yx} są równe.

► (c) W punktach $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mamy

$$\begin{aligned} g'_x &= \left[e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_x = e^{4y}\cos 5z \cdot \left[e^{3x}\right]'_x = e^{4y}\cos 5z \cdot 3e^{3x} = 3e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\ g'_y &= \left[e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_y = e^{3x}\cos 5z \cdot \left[e^{4y}\right]'_y = e^{3x}\cos 5z \cdot 4e^{4y} = 4e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\ g'_z &= \left[e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_z = e^{3x}e^{4y} \cdot [\cos 5z]'_z = e^{3x}e^{4y} \cdot (-5\sin 5z) = -5e^{3x}e^{4y}\sin 5z. \end{aligned}$$

Obliczając kolejne pochodne cząstkowe otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
g''_{xx} &= \left[3e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_x = 3e^{4y}\cos z\cdot\left[e^{3x}\right]'_x = 9e^{3x}e^{4y}\cos 5z,\\
g''_{xy} &= \left[4e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_x = 4e^{4y}\cos z\cdot\left[e^{3x}\right]'_x = 12e^{3x}e^{4y}\cos 5z,\\
g''_{xz} &= \left[-5e^{3x}e^{4y}\sin 5z\right]'_x = -5e^{4y}\sin 5z\cdot\left[e^{3x}\right]'_x = -15e^{3x}e^{4y}\sin 5z,\\
g''_{yx} &= \left[3e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_y = 3e^{3x}\cos 5z\cdot\left[e^{4y}\right]'_y = 12e^{3x}e^{4y}\cos 5z,\\
g''_{yy} &= \left[4e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_y = 4e^{3x}\cos 5z\cdot\left[e^{4y}\right]'_y = 16e^{3x}e^{4y}\cos 5z,\\
g''_{yz} &= \left[-5e^{3x}e^{4y}\sin 5z\right]'_y = -5e^{3x}\sin 5z\cdot\left[e^{4y}\right]'_y = -20e^{3x}e^{4y}\sin 5z,\\
g''_{zx} &= \left[3e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_z = 3e^{3x}e^{4y}\cdot[\cos 5z]'_z = -15e^{3x}e^{4y}\sin 5z,\\
g''_{zy} &= \left[4e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right]'_z = 4e^{3x}e^{4y}\cdot[\cos 5z]'_z = -20e^{3x}e^{4y}\sin 5z,\\
g''_{zz} &= \left[-5e^{3x}e^{4y}\sin 5z\right]'_z = -5e^{3x}e^{4y}\cdot[\sin 5z]'_z = -25e^{3x}e^{4y}\cos 5z.
\end{aligned}
$$

Odpowiadające sobie pochodne mieszane g''_{xy} i g''_{yx}, g''_{xz} i g''_{zx}, g''_{yz} i g''_{zy} są równe.

▷ **Zadanie 3.7.** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego podanych funkcji. Sprawdzić, że odpowiednie pochodne mieszane są równe:

(a) $f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y)=xe^{xy}$;

(c) $g(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (d) $g(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^4+z^6+1\right)$.

Odpowiedzi. (a) $f''_{xy}=f''_{yx}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f''_{xy}=f''_{yx}=xe^{xy}(2+xy)$; (c) $g''_{xy}=g''_{yx}=\dfrac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $g''_{xz}=g''_{zx}=\dfrac{3xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $g''_{yz}=g''_{zy}=\dfrac{3yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (d) $g''_{xy}=g''_{yx}=\dfrac{-8xy^3}{\left(x^2+y^4+z^6+1\right)^2}$, $g''_{xz}=g''_{zx}=\dfrac{-12xz^5}{\left(x^2+y^4+z^6+1\right)^2}$, $g''_{yz}=g''_{zy}=\dfrac{-24y^3z^5}{\left(x^2+y^4+z^6+1\right)^2}$.

► **Przykład 3.8.** Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe funkcji:

(a) $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}$, $f(x,y)=xe^{-y}$; (b) g'''''_{zzxyy}, $g(x,y,z)=\ln\left(x^2+2y-z\right)$.

Rozwiązanie.

► (a) W punktach $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ obliczamy kolejno pochodne

$$\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},\quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\quad \frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}.$$

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-y}\right)=x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right)=-xe^{-y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-xe^{-y}\right)=-x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right)=xe^{-y},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-y}\right)=x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right)=-xe^{-y},$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-xe^{-y}\right)=-x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right)=xe^{-y},$$
$$\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{-y}\right)=e^{-y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x)=e^{-y}.$$

► (b) W punktach $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ spełniających warunek $x^2+2y-z>0$ kolejno mamy

$$g'_y=\left[\ln\left(x^2+2y-z\right)\right]'_y=\frac{2}{x^2+2y-z},$$
$$g''_{yy}=\left[\frac{2}{x^2+2y-z}\right]'_y=\frac{-4}{\left(x^2+2y-z\right)^2},$$
$$g'''_{xyy}=\left[\frac{-4}{\left(x^2+2y-z\right)^2}\right]'_x=\frac{16x}{\left(x^2+2y-z\right)^3},$$
$$g''''_{zxyy}=\left[\frac{16x}{\left(x^2+2y-z\right)^3}\right]'_z=\frac{48x}{\left(x^2+2y-z\right)^4},$$
$$g'''''_{zzxyy}=\left[\frac{48x}{\left(x^2+2y-z\right)^4}\right]'_z=\frac{192x}{\left(x^2+2y-z\right)^5}.$$

▷ **Zadanie 3.8.** Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe funkcji:

(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}$, $f(x,y)=\sin xy$; (b) f''''_{yyxy}, $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$;

(c) $\dfrac{\partial^3 g}{\partial x\partial y\partial z}$, $g(x,y,z)=\dfrac{x^2y^3}{z}$; (d) g'''''_{xyyzz}, $g(x,y,z)=e^{xy+z}$.

Odpowiedzi. (a) $-x(2\sin xy+xy\cos xy)$; (b) $\dfrac{-12(3x+y)}{(x-y)^5}$; (c) $-6x\left(\dfrac{y}{z}\right)^2$; (d) $xe^{xy+z}(2+xy)$.

Różniczka funkcji

► **Przykład 3.9.** Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji:

(a) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ w punkcie $\left(\sqrt{2},-\sqrt{3},z_0\right)$;

(b) $f(x,y)=y\ln\left(2+x^2y-y^2\right)$ w punkcie $(2,1,z_0)$;

(c) $f(x,y)=(2+x-3y)^4$ w punkcie przecięcia wykresu z osią Oz;

(d) $f(x,y)=e^{x+y}-e^{4-y}$ w punkcie przecięcia wykresu z osią Ox.

Rozwiązanie. Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0,z_0) należącym do wykresu ma postać

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\,,\ \text{ gdzie } z_0=f(x_0,y_0).$$

► (a) Dla funkcji $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ mamy

$$f'_x=\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]'_x=\frac{1}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},$$

$$f'_y=\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]'_y=\frac{1}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Zatem

$$f'_x\left(\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{9-\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'_y\left(\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)=\frac{-\left(-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{9-\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ponadto $z_0=f\left(\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)=2$. Równanie płaszczyzny stycznej ma więc postać

$$z-2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y+\sqrt{3}\right),$$

czyli $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+2z-9=0$.

► (b) Dla funkcji $f(x,y)=y\ln\left(2+x^2y-y^2\right)$ mamy

$$\begin{aligned}f'_x=\left[y\ln\left(2+x^2y-y^2\right)\right]'_x &= y\cdot\left[\ln\left(2+x^2y-y^2\right)\right]'_x\\ &= y\cdot\frac{1}{2+x^2y-y^2}\cdot 2xy=\frac{2xy^2}{2+x^2y-y^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'_y=\left[y\ln\left(2+x^2y-y^2\right)\right]'_y &= [y]'_y\cdot\ln\left(2+x^2y-y^2\right)+y\cdot\left[\ln\left(2+x^2y-y^2\right)\right]'_y\\ &= 1\cdot\ln\left(2+x^2y-y^2\right)+y\cdot\frac{1}{2+x^2y-y^2}\cdot\left(x^2-2y\right)\\ &= \ln\left(2+x^2y-y^2\right)+\frac{y\left(x^2-2y\right)}{2+x^2y-y^2}.\end{aligned}$$

Zatem

$$f'_x(2,1)=\frac{2\cdot 2\cdot 1^2}{2+2^2\cdot 1-1^2}=\frac{4}{5},$$

$$f'_y(2,1)=\ln\left(2+2^2\cdot 1-1^2\right)+\frac{1\cdot\left(2^2-2\cdot 1\right)}{2+2^2\cdot 1-1^2}=\ln 5+\frac{2}{5}.$$

Ponadto $z_0 = f(2,1) = \ln 5$. Równanie płaszczyzny stycznej ma zatem postać

$$z - \ln 5 = \frac{4}{5}(x-2) + \left(\ln 5 + \frac{2}{5}\right)(y-1),$$

a po przekształceniach postać

$$z = \frac{4}{5}x + \left(\ln 5 + \frac{2}{5}\right) y - 2.$$

► (c) Punkt przecięcia wykresu funkcji $f(x,y) = (2+x-3y)^4$ z osią Oz ma współrzędne $(0,0,f(0,0)) = (0,0,16)$. Zatem należy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0,0)$. Mamy

$$f'_x = \left[(2+x-3y)^4\right]'_x = 4(2+x-3y)^3 \cdot [2+x-3y]'_x = 4(2+x-3y)^3,$$

$$f'_y = \left[(2+x-3y)^4\right]'_y = 4(2+x-3y)^3 \cdot [2+x-3y]'_y = -12(2+x-3y)^3.$$

Zatem

$$f'_x(0,0) = 4(2+0-3\cdot 0)^3 = 32, \quad f'_y(0,0) = -12(2+0-3\cdot 0)^3 = -96.$$

Równanie płaszczyzny stycznej ma więc postać

$$z - 16 = 32(x-0) + (-96)(y-0),$$

czyli $z = 32x - 96y + 16$.

► (d) Współrzędne punktu (x_0, y_0, z_0) przecięcia wykresu funkcji $f(x,y) = e^{x+y} - e^{4-y}$ z osią Ox wyznaczymy z układu równań:

$$y = 0, \quad z = 0, \quad z = e^{x+y} - e^{4-y}.$$

Rozwiązaniem układu jest $(x_0, y_0, z_0) = (4,0,0)$. Zatem należy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(4,0,0)$. Mamy

$$f'_x = \left[e^{x+y} - e^{4-y}\right]'_x = \left[e^{x+y}\right]'_x - \left[e^{4-y}\right]'_x = e^{x+y} \cdot [x+y]'_x - 0 = e^{x+y},$$

$$\begin{aligned} f'_y = \left[e^{x+y} - e^{4-y}\right]'_y &= \left[e^{x+y}\right]'_y - \left[e^{4-y}\right]'_y \\ &= e^{x+y} \cdot [x+y]'_y - e^{4-y} \cdot [4-y]'_y = e^{x+y} + e^{4-y}. \end{aligned}$$

Stąd

$$f'_x(4,0) = e^{4+0} = e^4, \quad f'_y(4,0) = e^{4+0} + e^{4-0} = 2e^4.$$

Równanie płaszczyzny stycznej ma postać

$$z - 0 = e^4(x-4) + 2e^4(y-0).$$

Po uproszczeniu otrzymamy $z = e^4(x + 2y - 4)$.

▷ **Zadanie 3.9.** Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie $P = (x_0, y_0, z_0)$:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $\quad P = (1,3,2)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $\quad P = (2,-1,1)$;

(c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\quad P = \left(-1/2, \sqrt{3}/2, -1\right)$; (d) $z = x^y$, $\quad P = (2,4,16)$.

Odpowiedzi. (a) $z - 2 = 4(x-1) + \dfrac{1}{4}(y-3)$; (b) $z - 1 = (x-2) + 2(y+1)$;
(c) $z + 1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{12}{\pi}\left(y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (d) $z - 16 = 32(x-2) + 16(y-4)\ln 2$.

► **Przykład 3.10.** (a) Wyznaczyć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji $f(x,y) = xe^{x-y}$, które są równoległe do płaszczyzny $\pi :\ z = 2x - y + 3$.

(b) Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni $z = 2x^2 - 3y^2$, które są prostopadłe do prostej $l :\ x = 1 + 4t,\ y = 6t,\ z = 2 + t$ $(t \in \mathbb{R})$.

(c) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni o równaniu $2x^2 + 3y^2 + x^2 = 31$ w punkcie $(3, 2, -1)$.

Rozwiązanie.
Wektor normalny płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma postać

$$\boldsymbol{n}_f = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1\right).$$

► (a) Wektor normalny płaszczyzny π ma postać $\boldsymbol{n} = (2,-1,-1)$. Zatem płaszczyzna styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do płaszczyzny π, w tych punktach, w których wektory $\boldsymbol{n}_f$, $\boldsymbol{n}$ są równoległe, czyli w punktach, w których spełniona jest równość $\boldsymbol{n}_f = \alpha\boldsymbol{n}$ dla pewnego $\alpha \neq 0$. Ponieważ współrzędne z wektorów $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_f$ są takie same, więc $\alpha = 1$. Równość $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_f$ będzie spełniona, jeżeli

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2, \\ f'_y(x,y) = -1. \end{cases}$$

Mamy

$$f'_x = \left[xe^{x-y}\right]'_x = [x]'_x \cdot e^{x-y} + x \cdot \left[e^{x-y}\right]'_x = e^{x-y} + xe^{x-y} = (1+x)e^{x-y},$$
$$f'_y = \left[xe^{x-y}\right]'_y = x \cdot \left[e^{x-y}\right]'_y = x \cdot e^{x-y} \cdot (-1) = -xe^{x-y}.$$

Powyższy układ równań przyjmie postać

$$\begin{cases} (1+x)e^{x-y} = 2, \\ -xe^{x-y} = -1. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest para $(1,1)$. Ponieważ $f(1,1) = 1$, więc równanie płaszczyzny stycznej ma postać

$$z - 1 = 2(x-1) - (y-1),$$

a stąd $z = 2x - y$.

► (b) Wektor kierunkowy prostej l ma postać $\boldsymbol{v} = (4, 6, 1)$. Zatem płaszczyzna styczna do wykresu funkcji f będzie prostopadła do prostej l w tych punktach, w których wektory $\boldsymbol{n}_f$, $\boldsymbol{v}$ są równoległe, czyli w punktach, w których spełniona jest równość $\boldsymbol{n}_f = \alpha \boldsymbol{v}$ dla pewnego $\alpha \neq 0$. Ponieważ współrzędne z wektorów $\boldsymbol{n}_f$, $\boldsymbol{v}$ są równe odpowiednio -1, 1, więc $\alpha = -1$. Równość $\boldsymbol{n}_f = -\boldsymbol{v}$ będzie spełniona, jeżeli

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -4, \\ f'_y(x, y) = -6. \end{cases}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} f'_x &= \left[2x^2 - 3y^2\right]'_x = 2 \cdot \left[x^2\right]'_x - 3 \cdot \left[y^2\right]'_x = 2 \cdot 2x - 3 \cdot 0 = 4x, \\ f'_y &= \left[2x^2 - 3y^2\right]'_y = 2 \cdot \left[x^2\right]'_y - 3\left[y^2\right]'_y = x \cdot 0 - 3 \cdot 2y = -6y, \end{aligned}$$

więc powyższy układ ma postać

$$\begin{cases} 4x = -4, \\ -6y = -6. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest para $(-1, 1)$. Ponieważ $f(-1, 1) = -1$, więc płaszczyzna styczna ma postać

$$z + 1 = -4(x + 1) - 6(y - 1),$$

stąd po uproszczeniu $4x + 6y + z - 1 = 0$.

► (c) Powierzchnia o równaniu $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 31$ (elipsoida) składa się z dwóch płatów, które są wykresami funkcji dwóch zmiennych. Płat górny jest wykresem funkcji $z = \sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}$, a dolny funkcji $z = -\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}$. Punkt $(3, 2, -1)$ należy do wykresu funkcji $f(x, y) = -\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}$, bo $f(3, 2) = -1$. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f. Mamy

$$f'_x = \left[-\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}\right]'_x = \frac{-1}{2\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}} \cdot (-4x) = \frac{2x}{\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}},$$

$$f'_y = \left[-\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}\right]'_y = \frac{-1}{2\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}} \cdot (-6y) = \frac{3y}{\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}}.$$

Stąd $f'_x(3, 2) = 6$ oraz $f'_y(3, 2) = 6$. Po wstawieniu do równania płaszczyzny stycznej (str. 90) otrzymamy $z - (-1) = 6(x - 3) + 6(y - 2)$, czyli $z = 6x + 6y - 29$.

▷ **Zadanie 3.10.** (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x + y - z = 5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $x = 3 + 2t$, $y = 1 - 4t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni o równaniu $z^2 = x^4 + y^4$ w punkcie $\left(-\sqrt{3}, 2, -5\right)$.

Odpowiedzi. (a) $z=x+y-\pi/2$; (b) $z=-2x+4y-5$; (c) $z+5=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\left(x+\sqrt{3}\right)-\dfrac{16}{5}(y-2)$.

► **Przykład 3.11.** Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $1.98^2\cdot e^{-0.03}$; (b) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 0.9}{\sqrt{4.02}}$; (c) $0.997^{3.05}$; (d) $\sqrt{13.03^2-2.99^2-4.06^2}$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy wzór przybliżony

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y$$

oraz

$$g\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z\right)\approx \\ g\left(x_0,y_0,z_0\right)+g'_x\left(x_0,y_0,z_0\right)\Delta x+g'_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\Delta y+g'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\Delta z.$$

► (a) Przyjmujemy $f(x,y)=x^2e^y, (x_0,y_0)=(2,0)$ oraz $\Delta x=-0.02, \Delta y=-0.03$. Zatem $f(2,0)=4$ oraz

$$f'_x=\left[x^2e^y\right]'_x=2xe^y,\ f'_x(2,0)=4,\ f'_y=\left[x^2e^y\right]'_y=x^2e^y,\ f'_y(2,0)=4.$$

Po podstawieniu do wzoru przybliżonego otrzymamy

$$1.98\cdot e^{-0.03}=f(1.98,-0.03)\approx 4+4(-0.02)+4(-0.03)=3.8.$$

Dokładna wartość tego wyrażenia jest równa 3.804534...

► (b) Przyjmujemy $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg} x/\sqrt{y}$, $(x_0,y_0)=(1,4)$ oraz $\Delta x=-0.1, \Delta y=0.02$. Zatem $f(1,4)=0.125\pi$ oraz

$$f'_x=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{y}}\right]'_x=\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\operatorname{arc\,tg} x\right]'_x=\frac{1}{\sqrt{y}\left(1+x^2\right)},\quad f'_x(1,4)=0.25,$$

$$f'_y=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{y}}\right]'_y=\operatorname{arc\,tg} x\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]'_y=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{-2y\sqrt{y}},\quad f'_y(1,4)=-0.015625\pi.$$

Po podstawieniu do wzoru przybliżonego otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{arc\,tg} 0.9}{\sqrt{4.02}}&=f(0.9,4.02)\approx 0.125\pi+0.25\cdot(-0.1)-0.015625\pi\cdot 0.02\\&=0.1246875\pi-0.025\approx 0.366717.\end{aligned}$$

Dokładna wartość tego wyrażenia jest równa 0.365495...

► (c) Przyjmujemy $f(x,y)=x^y$, $(x_0,y_0)=(1,3)$ oraz $\Delta x=-0.003$, $\Delta y=0.05$. Zatem $f(1,3)=1$ oraz

$$f'_x=\left[x^y\right]'_x=yx^{y-1},\ f'_x(1,3)=3,\quad f'_y=\left[x^y\right]'_y=x^y\ln x,\ f'_y(1,3)=0.$$

Po podstawieniu do wzoru przybliżonego otrzymamy

$$0.997^{3.05}=f(0.997,3.05)\approx 1+3\cdot(-0.003)+0\cdot 0.05=0.991.$$

Dokładna wartość wyrażenia jest równa $0.993860\ldots$

► (d) Przyjmujemy $g(x,y,z) = \sqrt{x^2-y^2-z^2}$, $(x_0,y_0,z_0) = (13,3,4)$ oraz $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.01$, $\Delta z = 0.06$. Zatem $g(13,3,4) = 12$ oraz

$$\begin{aligned} g'_x &= \left[\sqrt{x^2-y^2-z^2}\right]'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2-z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2-z^2}}, \\ g'_y &= \left[\sqrt{x^2-y^2-z^2}\right]'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2-z^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2-z^2}}, \\ g'_z &= \left[\sqrt{x^2-y^2-z^2}\right]'_z = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2-z^2}} \cdot (-2z) = \frac{-z}{\sqrt{x^2-y^2-z^2}} \end{aligned}$$

i stąd

$$g'_x(13,3,4) = \frac{13}{12}, \quad g'_y(13,3,4) = -\frac{1}{4}, \quad g'_z(13,3,4) = -\frac{1}{3}.$$

Po podstawieniu do wzoru przybliżonego otrzymamy

$$\sqrt{13.03^2-2.99^2-4.06^2} \approx 12 + \frac{13}{12}\cdot 0.03 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-0.01) + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 0.06 = 12.015.$$

Dokładna wartość tego wyrażenia jest równa $12.014874\ldots$

▷ **Zadanie 3.11.** Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

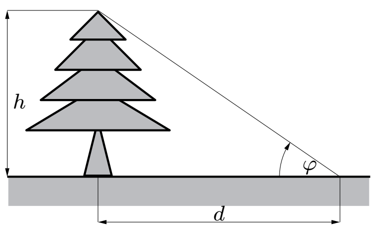
(a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$; (b) $\sqrt[3]{(2.93)^3+(4.05)^3+(4.99)^3}$;

(c) $2.97 \cdot e^{0.05}$; (d) $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

Odpowiedzi. (a) 1.054; (b) $5\frac{449}{450}$; (c) 3.12; (d) 0.51.

► **Przykład 3.12.**

(a) Kąt φ widzenia drzewa (rysunek) zmierzony z dokładnością $\Delta_\varphi = 0.01\,[\mathrm{rad}]$ jest równy $\pi/4$, a odległość d miejsca pomiaru od pnia drzewa zmierzona z dokładnością $\Delta_d = 0.1\,[\mathrm{m}]$ jest równa $30.00\,[\mathrm{m}]$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć wysokość tego drzewa?



(b) Boki prostokąta wynoszą $a = 10$ cm i $b = 24$ cm. Jak zmieni się w przybliżeniu przekątna p tego prostokąta, jeśli bok a zwiększy się o 4 mm, a bok b zmniejszy się o 1 mm?

Rozwiązanie.

► (a) Wysokość h drzewa wyraża się wzorem $h = h(\varphi, d) = d \operatorname{tg} \varphi$. Dokładność obliczeń można wyznaczyć ze wzoru przybliżonego

$$\Delta_h \approx \left|h'_\varphi\right| \Delta_\varphi + \left|h'_d\right| \Delta_d,$$

gdzie obie pochodne cząstkowe są obliczone w punkcie (φ, d), który jest wynikiem pomiarów. Mamy zatem

$$\Delta_h \approx \left|\frac{d}{\cos^2 \varphi}\right| \Delta_\varphi + |\operatorname{tg} \varphi| \Delta_d = \left|\frac{30.00}{\cos^2 \dfrac{\pi}{4}}\right| \cdot 0.01 + \left|\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right| \cdot 0.1 = 0.7.$$

Wysokość drzewa można wyznaczyć w przybliżeniu z dokładnością 0.7 [m] .

► (b) Przyrost ΔP wartości funkcji $P = P(a, b)$ w punkcie (a, b) odpowiadający przyrostom Δa zmiennej a i Δb zmiennej b można przybliżyć różniczką tej funkcji

$$\Delta P \approx P'_a(a, b)\Delta a + P'_b(a, b)\Delta b.$$

W zadaniu mamy $P(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = 100$ mm, $b = 240$ mm, $\Delta a = 4$ mm oraz $\Delta b = -1$ mm. Stąd

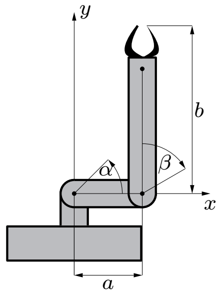
$$\Delta P \approx \left.\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|_{(100,240)} \cdot 4 + \left.\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|_{(100,240)} \cdot (-1) = \frac{4 \cdot 100 - 240 \cdot 1}{\sqrt{100^2 + 240^2}} = \frac{8}{13}.$$

Długość przekątnej prostokąta zwiększy się w przybliżeniu o 8/13 mm.

▷ **Zadanie 3.12.** (a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego stożka?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c*) Robot do zgrzewania karoserii samochodowych składa się z dwóch przegubowych ramion o długości $a = 1$ m, $b = 2$ m (rysunek). Położenie zgrzewarki jest określone przez kąty $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$. Obliczyć w przybliżeniu dokładność jej położenia, jeżeli kąty odchylenia ramion ustawiane są z dokładnością $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0,003$ rad.



Odpowiedzi. (a) $\Delta_V \approx \pi/3 \cdot 122525\,\mathrm{mm}^3 \approx 128308\,\mathrm{mm}^3$; (b) $\Delta_d \approx 19/650\,\mathrm{m} \approx 0.02923\,\mathrm{m}$; (c*) Wsk. Położenie zgrzewarki określone jest wzorem $\boldsymbol{r} = (x, y) = (a\cos\alpha + b\sin\beta, a\sin\alpha + b\cos\beta)$. Błąd położenia zgrzewarki $\Delta_{|r|} = \sqrt{(\Delta_x)^2+(\Delta_y)^2} = \sqrt{(-a\sin\alpha\cdot\Delta_\alpha+b\cos\beta\cdot\Delta_\beta)^2+(a\cos\alpha\cdot\Delta_\alpha-b\sin\beta\cdot\Delta_\beta)^2} \approx 0.0032\ [\,\mathrm{m}\,]$.

Pochodne cząstkowe funkcji złożonych

► Przykład 3.13.

Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne pierwszego rzędu względem t funkcji

(a) $z = f(x, y) = \dfrac{x}{y} + xy$, gdzie $x = e^t$, $y = te^t$,

(b) $w = f(x, y, z) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$, gdzie $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

Rozwiązanie.

► (a) Do obliczenia pochodnej funkcji złożonej $z(t) = f(x(t), y(t))$ wykorzystamy wzór:

$$z' = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y',$$

który w zapisie tradycyjnym ma postać

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
z' &= \left[\frac{x}{y} + xy\right]'_x \cdot \left[e^t\right]' + \left[\frac{x}{y} + xy\right]'_y \cdot \left[te^t\right]' \\
&= \left(\frac{1}{y} + y\right)\cdot e^t + \left(-\frac{x}{y^2} + x\right)\cdot\left(e^t + te^t\right) \\
&= \left(\frac{1}{te^t} + e^t\right)\cdot e^t + \left(-\frac{e^t}{(te^t)^2} + e^t\right)\cdot e^t(1+t) \\
&= \frac{1}{t} + e^{2t} - \frac{1}{t^2}(1+t) + e^{2t}(1+t) = \frac{1}{t} + e^{2t}(2+t) - \frac{1+t}{t^2}.
\end{aligned}$$

(b) Z kolei do obliczenia pochodnej funkcji złożonej $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ wykorzystamy wzór

$$w' = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' + f'_z \cdot z',$$

który w zapisie tradycyjnym ma postać

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych, funkcję w wygodnie jest przedstawić w postaci $w = z^2\left(x^2+y^2\right)^{-1}$. Mamy

$$\begin{aligned} w' &= \left[z^2\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x[\cos t]' + \left[z^2\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_y[\sin t]' + \left[z^2\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_z[t]' \\ &= -z^2\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot 2x\cdot(-\sin t) - z^2\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot 2y\cdot\cos t + 2z\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-1}\cdot 1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $x^2+y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, więc kontynuując rachunki mamy

$$= -t^2\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t) - t^2\cdot 2\sin t\cdot\cos t + 2t = 2t.$$

▷ **Zadanie 3.13.** Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne pierwszego rzędu względem t funkcji:

(a) $z = f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$, gdzie $x = e^{2t}-1$, $y = e^{2t}+1$;

(b) $z = f(x,y) = \ln\left(x^2+2xy\right)$, gdzie $x = t$, $y = e^t$;

(c) $w = f(x,y,z) = xy+yz+zx$, gdzie $x = \sinh t$, $y = \cosh t$, $z = t$.

Odpowiedzi. (a) $z' = 4e^{2t}/\left(2+e^{4t}\right)$; (b) $z' = 2\left(t+e^t(1+t)\right)/\left(t\left(t+2e^t\right)\right)$; (c) $w' = \cosh 2t + (t+1)(\sinh t + \cosh t)$.

► **Przykład 3.14.** Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem u i v funkcji

(a) $z = f(x,y) = e^{xy}$, gdzie $x = u+v^2$, $\quad y = u^2 - v$;

(b) $w = f(x,y,z) = x^2 - xy + yz$, gdzie $x = uv$, $\quad y = \dfrac{u}{v}$, $\quad z = u - v$.

Rozwiązanie.

► (a) Do obliczenia pochodnych cząstkowych funkcji złożonej $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ wykorzystamy wzory:

$$z'_u = f'_x\cdot x'_u + f'_y\cdot y'_u, \qquad z'_v = f'_x\cdot x'_v + f'_y\cdot y'_v,$$

które w zapisie tradycyjnym mają postać

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Obliczamy kolejno pochodne cząstkowe funkcji f względem zmiennych x, y i pochodne cząstkowe funkcji x, y względem zmiennych u, v. Mamy

$$f'_x = \left[e^{xy}\right]'_x = e^{xy}\cdot[xy]'_x = e^{xy}\cdot y = ye^{xy}, \quad f'_y = \left[e^{xy}\right]'_y = e^{xy}\cdot[xy]'_y = e^{xy}\cdot x = xe^{xy},$$

$$x'_u = \left[u+v^2\right]'_u = 1, \quad x'_v = \left[u+v^2\right]'_v = 2v,$$

$$y'_u = \left[u^2-v\right]'_u = 2u, \quad y'_v = \left[u^2-v\right]'_v = -1.$$

Podstawiając obliczone pochodne cząstkowe do podanego na wstępie wzoru otrzymamy

$$\begin{aligned}
z'_u &= ye^{xy}x'_u + xe^{xy}x'_v = (yx'_u + xx'_v)\, e^{xy} \\
&= \left[\left(u^2-v\right)\cdot 1 + \left(u+v^2\right)\cdot 2v\right] e^{\left(u+v^2\right)\left(u^2-v\right)} \\
&= \left(u^2 - v + 2uv - 2v^3\right) e^{u^3+u^2v^2-uv-v^3}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
z'_v &= ye^{xy}y'_u + xe^{xy}y'_v = (yy'_u + xy'_v)\, e^{xy} \\
&= \left[\left(u^2-v\right)\cdot 2u + \left(u+v^2\right)\cdot(-1)\right] e^{\left(u+v^2\right)\left(u^2-v\right)} \\
&= \left(2u^3 - 2uv - u - v^2\right) e^{u^3+u^2v^2-uv-v^3}.
\end{aligned}$$

► (b) Do obliczenia pochodnych cząstkowych funkcji złożonej

$$w(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

wykorzystamy wzory:

$$w'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u + f'_z \cdot z'_u, \qquad w'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v + f'_z \cdot z'_v,$$

które w zapisie tradycyjnym mają postać

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f względem zmiennych x, y, z i pochodne cząstkowe funkcji x, y, z względem zmiennych u, v. Mamy

$$\begin{aligned}
f'_x &= \left[x^2 - xy + yz\right]'_x = 2x - y, \\
f'_y &= \left[x^2 - xy + yz\right]'_y = -x + z, \\
f'_z &= \left[x^2 - xy + yz\right]'_z = y
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&x'_u = [uv]'_u = v, \quad x'_v = [uv]'_v = u, \\
&y'_u = \left[\frac{u}{v}\right]'_u = \frac{1}{v}, \quad y'_v = \left[\frac{u}{v}\right]'_v = -\frac{u}{v^2}, \\
&z'_u = [u-v]'_u = 1, \quad z'_v = [u-v]'_v = -1.
\end{aligned}$$

Podstawiając obliczone pochodne cząstkowe do podanego powyżej wzoru otrzymamy

$$\begin{aligned}
w'_u &= (2x - y)\, x'_u + (-x + z)\, y'_u + yz'_u \\
&= \left(2uv - \frac{u}{v}\right)\cdot v + (-uv + u - v)\cdot\frac{1}{v} + \frac{u}{v}\cdot 1 \\
&= 2uv^2 - u - u + \frac{u}{v} - 1 + \frac{u}{v} = 2uv^2 - 2u + \frac{2u}{v} - 1
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} w'_v &= (2x-y)\,x'_v + (-x+z)\,y'_v + yz'_v \\ &= \left(2uv - \frac{u}{v}\right)\cdot u + (-uv+u-v)\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{u}{v}\cdot(-1) \\ &= 2u^2v - \frac{u^2}{v} + \frac{u^2}{v} - \frac{u^2}{v^2} + \frac{u}{v} - \frac{u}{v} = 2u^2v - \frac{u^2}{v^2}. \end{aligned}$$

▷ **Zadanie 3.14.** Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem u i v funkcji:

(a) $z = f(x,y) = \ln\dfrac{x}{y+1}$, gdzie $x = u\sin v, y = u\cos v$;

(b) $z = g(x,y,z) = \arcsin\dfrac{x}{y+z}$, gdzie $x = e^{u/v}, y = u^2+v^2, z = 2uv$.

Odpowiedzi. (a) $z'_u = \dfrac{1}{u} - \dfrac{\cos v}{1+u\cos v}$, $z'_v = \operatorname{ctg} v + \dfrac{u\sin v}{1+u\cos v}$;

(b) $z'_u = \dfrac{(u-v)e^{u/v}}{v(u+v)\sqrt{(u+v)^4 - e^{2u/v}}}$; $z'_v = -\dfrac{\left(u^2+uv+2v^2\right)e^{u/v}}{v^2(u+v)\sqrt{(u+v)^4-e^{2u/v}}}$.

► **Przykład 3.15.** Funkcja f spełnia warunek $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ (równanie Laplace'a). Pokazać, że funkcja g określona wzorem $g(u,v) = f\left(u^2-v^2, 2uv\right)$ również spełnia warunek $g''_{uu} + g''_{vv} = 0$.

Rozwiązanie. Przyjmując $x = u^2 - v^2$ i $y = 2uv$ mamy $x'_u = 2u$, $x'_v = -2v$ i $y'_u = 2v$, $y'_v = 2u$. Korzystając dwukrotnie z pierwszego wzoru (3, str.98) mamy kolejno

$$g'_u = f'_x\cdot x'_u + f'_y\cdot y'_u = f'_x\cdot 2u + f'_y\cdot 2v = 2\left(uf'_x + vf'_y\right)$$

$$\begin{aligned} g''_{uu} &= 2\left[uf'_x + vf'_y\right]'_u = 2\left(f'_x + u\left[f'_x\right]'_u + v\left[f'_y\right]'_u\right) \\ &= 2\left(f'_x + u\left(f''_{xx}\cdot x'_u + f''_{yx}\cdot y'_u\right) + v\left(f''_{xy}\cdot x'_u + f''_{yy}\cdot y'_u\right)\right) = \\ &= 2\left(f'_x + u\left(f''_{xx}\cdot 2u + f''_{yx}\cdot 2v\right) + v\left(f''_{xy}\cdot 2u + f''_{yy}\cdot 2v\right)\right) \\ &= 2\left(f'_x + 2u^2f''_{xx} + 2v^2f''_{yy} + 2uv\left(f''_{yx} + f''_{xy}\right)\right) \end{aligned}$$

Korzystając teraz dwukrotnie z drugiego wzoru (3) mamy kolejno

$$g'_v = f'_x\cdot x'_v + f'_y\cdot y'_v = f'_x\cdot(-2v) + f'_y\cdot 2u = 2\left(-vf'_x + uf'_y\right)$$

$$\begin{aligned} g''_{vv} &= 2\left[-vf'_x + uf'_y\right]'_v \\ &= 2\left(-f'_x - v\left[f'_x\right]'_v + u\left[f'_y\right]'_v\right) \\ &= 2\left(-f'_x - v\left(f''_{xx}\cdot x'_v + f''_{yx}\cdot y'_v\right) + U\left(f''_{xy}\cdot x'_v + f''_{yy}\cdot y'_v\right)\right) \\ &= 2\left(-f'_x + -v\left(f''_{xx}\cdot(-2v) + f''_{yx}\cdot 2u\right) + u\left(f''_{xy}\cdot(-2v) + f''_{yy}\cdot 2u\right)\right) \\ &= 2\left(-f'_x + 2v^2f''_{xx} + 2u^2f''_{yy} - 2uv\left(f''_{yx} + f''_{xy}\right)\right) \end{aligned}$$

Dodając pochodne cząstkowe g''_{uu}, g''_{vv} oraz wykorzystując równość $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$, otrzymamy

$$g''_{uu} + g''_{vv} = 4\left(u^2+v^2\right) f''_{xx} + 4\left(u^2+v^2\right) f''_{yy} = 4\left(u^2+v^2\right)\left(f''_{xx}+f''_{yy}\right) = 0.$$

To oznacza, że funkcja g spełnia równanie Laplace'a.

▷ **Zadanie 3.15.** Funkcja f spełnia warunek $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ (równanie Laplace'a). Pokazać, że funkcja g określona wzorem

$$g(u,v) = f\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

również spełnia warunek $g''_{uu} + g''_{vv} = 0$.

Pochodna kierunkowa funkcji

▶ **Przykład 3.16.** Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\boldsymbol{v} = \left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)$;

(b) $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\boldsymbol{v} = (3/5, 4/5)$;

(c) $g(x,y,z) = \sqrt{x^4+y^8+z^{12}}$, $\left(x_), y_0, z_0\right) = (0,0,0)$, $\boldsymbol{v} = (1/3, 2/3/, 2/3)$.

Rozwiązanie. Pochodną kierunkową funkcji f dwóch zmiennych w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ definiujemy wzorem:

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+v_x t, y_0+v_y t) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Podobnie, pochodną kierunkową funkcji g trzech zmiennych w punkcie (x_0,y_0,z_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ definiujemy wzorem:

$$g'_{\boldsymbol{v}}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(x_0+v_x t, y_0+v_y t, z_0+v_z t) - g(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

▶ (a) Dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, punktu $(x_0,y_0) = (0,0)$ oraz wersora $\boldsymbol{v} = \left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)$ mamy

$$\begin{aligned} f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{2}t, -\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1. \end{aligned}$$

► (b) Przyjmując w podanym na wstępie wzorze $f(x,y)=|x-y|$, $(x_0,y_0)=(1,1)$ oraz $\boldsymbol{v}=(3/5,4/5)$ otrzymamy

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,1)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(1+\frac{3}{5}t,1+\frac{4}{5}t\right)-f(1,1)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left|\left(1+\frac{3}{5}t\right)-\left(1+\frac{4}{5}t\right)\right|-0}{t}=\frac{1}{5}.$$

► (c) Dla funkcji $g(x,y,z)=\sqrt{x^4+y^8+z^{12}}$, punktu $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ oraz wersora $\boldsymbol{v}=(1/3,2/3,2/3)$ mamy

$$\begin{aligned}g'_{\boldsymbol{v}}(0,0,0)&=\lim_{t\to 0^+}\frac{g\left(\frac{1}{5}t,\frac{2}{3}t,\frac{2}{3}t\right)-g(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^4+\left(\frac{2t}{3}\right)^8+\left(\frac{2t}{3}\right)^{12}}-0}{t}\\&=\lim_{t\to 0^+}t^2\sqrt{\frac{1}{3^4}+\left(\frac{2}{3}\right)^8t^4+\left(\frac{2}{3}\right)^{12}t^8}=0.\end{aligned}$$

▷ **Zadanie 3.16.** Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=2|x|+|y|$, $\quad(x_0,y_0)=(0,0)$, $\quad\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right)$;

(b) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, $\quad(x_0,y_0)=(1,0)$, $\quad\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{3}/2,1/2\right)$;

(c) $g(x,y,z)=x^2+yz$, $\quad(x_0,y_0,z_0)=(-1,0,1)$, $\quad\boldsymbol{v}=(3/13,4/13,12/13)$.

Odpowiedzi. (a) $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)=3\sqrt{2}/2$; (b) $f'_{\boldsymbol{v}}(1,0)=\infty$; (c) $g'_{\boldsymbol{v}}(-1,0,1)=-2/13$.

► **Przykład 3.17.** Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=\sin x\cos y$, $\;(x_0,y_0)=(0,\pi)$, $\;\boldsymbol{v}=\left(-1/2,\sqrt{3}/2\right)$;

(b) $g(x,y,z)=\dfrac{z-x}{z+y}$, $\;(x_0,y_0,z_0)=(1,0,-4)$, $\;\boldsymbol{v}=(-6/7,3/7,-2/7)$.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja f dwóch zmiennych ma ciągłe pochodne cząstkowe f'_x, f'_y w punkcie (x_0,y_0), to jej pochodną kierunkową w tym punkcie w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ można obliczyć ze wzoru

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0,y_0)=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)\circ\boldsymbol{v},\ \text{ gdzie }\ \mathbf{grad}\,f=\left(f'_x,f'_y\right). \tag{3.1}$$

Podobnie, jeżeli funkcja g trzech zmiennych ma ciągłe pochodne cząstkowe g'_x, g'_y, g'_z w punkcie (x_0,y_0,z_0), to jej pochodną kierunkową w tym punkcie w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ można obliczyć ze wzoru

$$g'_{\boldsymbol{v}}(x_0,y_0,z_0)=\mathbf{grad}\,g(x_0,y_0,z_0)\circ\boldsymbol{v},\ \text{ gdzie }\ \mathbf{grad}\,g=\left(g'_x,g'_y,g'_z\right). \tag{3.2}$$

► (a) Funkcja $f(x,y)=\sin x\cos y$ oraz jej pochodne cząstkowe

$$f'_x=[\sin x\cos y]'_x=\cos x\cos y,\quad f'_y=[\sin x\cos y]'_y=-\sin x\sin y$$

są określone i ciągłe na $\mathbb{R}^2$. Zatem pochodną kierunkową $f'_{\boldsymbol{v}}(0,\pi)$ możemy obliczyć ze wzoru (3.1). Mamy

$$f'_x(0,\pi) = -1, \quad f'_y(0,\pi) = 0,$$

stąd

$$\mathbf{grad}\, f(0,\pi) = \left(f'_x(0,\pi), f'_y(0,\pi)\right) = (-1,0).$$

Zatem dla wersora $\boldsymbol{v} = \left(-1/2, \sqrt{3}/2\right)$ otrzymamy

$$f'_{\boldsymbol{v}}(0,\pi) = (-1,0) \circ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

► (b) Funkcja $g(x,y,z) = \dfrac{z-x}{z+y}$ oraz jej pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned}
g'_x &= \left[\frac{z-x}{z+y}\right]'_x = \frac{1}{z+y} \cdot [z-x]'_x = \frac{1}{z+y} \cdot (-1) = \frac{-1}{z+y},\\
g'_y &= \left[\frac{z-x}{z+y}\right]'_y = (z-x) \cdot \left[\frac{1}{z+y}\right]'_y = (z-x) \cdot \frac{-1}{(z+y)^2} = \frac{x-z}{(z+y)^2},\\
g'_z &= \left[\frac{z-x}{z+y}\right]'_z = \frac{[z-x]'_z\,(z+y) - (z-x)\,[z+y]'_z}{(z+y)^2} = \frac{(z+y)-(z-x)}{(z+y)^2} = \frac{x+y}{(z+y)^2}
\end{aligned}$$

są określone i ciągłe na zbiorze $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : z+y=0\}$. Ponieważ punkt $(1,0,-4)$ należy do zbioru D, więc pochodną kierunkową $g'_{\boldsymbol{v}}(1,0,-4)$ możemy obliczyć ze wzoru (3.2). Mamy

$$g'_x(1,0,-4) = \frac{1}{4}, \quad g'_y(1,0,-4) = \frac{5}{16}, \quad g'_z(1,0,-4) = \frac{1}{16},$$

stąd

$$\mathbf{grad}\, g(1,0,-4) = \left(g'_x(1,0,-4), g'_y(1,0,-4), g'_z(1,0,-4)\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right).$$

Wstawiając obliczone wielkości do wzoru (3.2) otrzymamy

$$g'_{\boldsymbol{v}}\,(1,0,-4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right) \circ \left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right) = -\frac{11}{102}.$$

▷ **Zadanie 3.17.** Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x_0,y_0) = (-3,4), \quad \boldsymbol{v} = (12/13, 5/13);$

(b) $g(x,y,z) = e^{xyz}, \quad (x_0,y_0,z_0) = (-1,1,-1), \quad \boldsymbol{v} = \left(1/2, -3/4, \sqrt{3}/4\right).$

Odpowiedzi. (a) $\mathbf{grad}\, f(-3,4) = (-6,8)$, $f'_{\boldsymbol{v}}(-3,4) = -32/13$; (b) $\mathbf{grad}\, g(-1,1,-1) = (-e,e,-e)$, $g'_{\boldsymbol{v}}(-1,1,-1) = -(e/4)\left(5+\sqrt{3}\right)$.

► **Przykład 3.18.** (a) Dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ znaleźć wersor $\boldsymbol{v}$ taki, że $f'_{\boldsymbol{v}}(-3,4) = 0$.

(b) Dla funkcji $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ znaleźć wersor $\boldsymbol{v}$ taki, że $f'_{\boldsymbol{v}}(2,1) = 1$.

(c) Dla funkcji $f(x,y) = xy^2$ znaleźć wersor $\boldsymbol{v}$, w kierunku którego pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie $(3,-1)$ jest najmniejsza.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe f'_x, f'_y w punkcie (x_0,y_0) oraz $\boldsymbol{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, to wzór (3.1) z poprzedniego przykładu przyjmuje postać

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cos\varphi + f'_y(x_0,y_0)\sin\varphi. \tag{3.3}$$

► (a) Funkcja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ oraz jej pochodne cząstkowe

$$f'_x = \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f'_y = \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

są określone i ciągłe na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zatem w punkcie $(-3,4)$ możemy zastosować wzór (3.3). Mamy

$$f'_x(-3,4) = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\frac{3}{5}, \quad f'_y(-3,4) = \frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Z warunków zadania otrzymamy

$$f'_x(-3,4) = 0 \iff -\frac{3}{5}\cos\varphi + \frac{4}{5}\sin\varphi = 0.$$

Stąd oraz równości $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ mamy

$$\cos\varphi = -\frac{4}{5},\ \sin\varphi = \frac{3}{5} \quad \text{albo} \quad \cos\varphi = \frac{4}{5},\ \sin\varphi = -\frac{3}{5}.$$

Zatem $\boldsymbol{v} = (-4/5, 3/5)$ albo $\boldsymbol{v} = (4/5, -3/5)$.

► (b) Funkcja $f(x,y) = x/y$ oraz jej pochodne cząstkowe f'_x, f'_y

$$f'_x = \left[\frac{x}{y}\right]'_x = \frac{1}{y}, \quad f'_y = \left[\frac{x}{y}\right]'_y = -\frac{x}{y^2}$$

są określone i ciągłe na zbiorze $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\}$. Ponieważ punkt $(2,1)$ należy do zbioru D, więc możemy wykorzystać wzór (3.3). Mamy

$$f'_x(2,1) = 1, \quad f'_y(2,1) = -2.$$

Z warunków zadania otrzymamy

$$f'_{\boldsymbol{v}}(2,1) = \cos\varphi - 2\sin\varphi = 1,$$

czyli $\cos\varphi = 1 + 2\sin\varphi$. Stąd oraz równości $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ dostaniemy równanie

$$\sin^2\varphi + (1 + 2\sin\varphi)^2 = 1,$$

które jest równoważne kolejno równaniom

$$\begin{aligned}&\sin^2\varphi+1+4\sin\varphi+4\sin^2\varphi = 1,\\&5\sin^2\varphi+4\sin\varphi = 0,\\&\sin\varphi\,(5\sin\varphi+4) = 0.\end{aligned}$$

Z kolei ostatnie z nich jest równoważne alternatywie $\sin\varphi = 0$ lub $\sin\varphi = -4/5$. Zatem korzystając z warunku $\cos\varphi = 1 + 2\sin\varphi$ mamy odpowiednio $\cos\varphi = 1$ albo $\cos\varphi = -3/5$. Tak więc, szukanymi wersorami są $\boldsymbol{v} = (1,0)$ albo $\boldsymbol{v} = (-3/5, -4/5)$.

► (c) Przypomnijmy, że wektor $\mathbf{grad}\, f\,(x_0, y_0)$ wskazuje kierunek, w którym pochodna kierunkowa funkcji o ciągłych pochodnych cząstkowych f w punkcie (x_0, y_0) jest największa. Zatem wektor przeciwny $-\,\mathbf{grad}\, f\,(x_0, y_0)$ wskazuje kierunek, w którym ta pochodna jest najmniejsza. Dla funkcji $f(x,y) = xy^2$ oraz punktu $(x_0, y_0) = (3, -1)$ mamy

$$f'_x = \left[xy^2\right]'_x = y^2, \quad f'_x(3,-1) = 1; \qquad f'_y = \left[xy^2\right]'_y = 2xy, \quad f'_y(3,-1) = -6.$$

Zatem $-\,\mathbf{grad}\, f(3,-1) = -\left(f'_x(3,-1), f'_y(3,-1)\right) = (-1, 6)$. Po unormowaniu otrzymamy wersor

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 6^2}} \cdot (-1, 6) = \left(\frac{-1}{\sqrt{37}}, \frac{6}{\sqrt{37}}\right),$$

w kierunku, którego pochodna kierunkowa funkcji f w danym punkcie jest najmniejsza.

▷ **Zadanie 3.18.** (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2, -1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x + y^2\right)$ w punkcie $(0, 2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

(c) Wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$ w kierunku wersora $\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$ przyjmuje wartość 0.

Odpowiedzi. (a) $f'_v(-1/2, -1) = -5\cos\alpha - \sin\alpha$, $\alpha = -\operatorname{arc\,tg} 5$, $\alpha = \pi - \operatorname{arc\,tg} 5$; (b) $\boldsymbol{v} = (3/5, 4/5)$, $\boldsymbol{v} = (-3/5, -4/5)$; (c) punkty półprostej $y = 2x$, $x > 0$.

Wzór Taylora. Ekstrema funkcji

► **Przykład 3.19.** Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli:

(a) $f(x,y) = \sin^2(x+y)$, $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$, $n = 2$;

(b) $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$, $n = 3$.

Rozwiązanie.

► (a) Wzór Taylora w punkcie (x_0, y_0) dla funkcji $z = f(x,y)$ oraz dla $n = 2$ ma postać

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right] + R_2(x,y),$$

gdzie

$$R_2(x,y) = \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(\xi,\eta)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(\xi,\eta)(y-y_0)^2\right],$$

przy czym $(\xi,\eta) = \big(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)\big)$ dla pewnego $0<\theta<1$. Obliczymy potrzebne pochodne cząstkowe. Mamy

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_y = 2\sin(x+y)\cos(x+y) = \sin 2(x+y),\\ f''_{xx} &= f''_{yy} = f''_{xy} = 2\cos 2(x+y). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} f'_x(\pi,\pi) &= f'_y(\pi,\pi) = \sin 2(\pi+\pi) = 0\\ f''_{xx}(\xi,\eta) &= f''_{yy}(\xi,\eta) = f''_{xy}(\xi,\eta) = 2\cos 2(\xi+\eta), \end{aligned}$$

gdzie $(\xi,\eta) = \left(\pi+\theta(x-\pi), \pi+\theta(y-\pi)^2\right)$. Ponadto $f(\pi,\pi)=0$. Tak więc poszukiwany wzór ma postać

$$\begin{aligned} \sin^2(x+y) &= 0 + \frac{1}{1!}\left(0\cdot(x-\pi) + 0\cdot(y-\pi)\right)\\ &\quad + \frac{1}{2!}\Big(2\cos 2(\xi+\eta)(x-\pi)^2 + 2\cdot 2\cos 2(\xi+\eta)(x-\pi)(y-\pi)\\ &\quad + 2\cos 2(\xi+\eta)(y-\pi)^2\Big)\\ &= \cos 2(\xi+\eta)\left((x-\pi)^2 + 2(x-\pi)(y-\pi) + (y-\pi)^2\right). \end{aligned}$$

► (b) Wzór Taylora w punkcie (x_0, y_0) dla funkcji $z = f(x,y)$ oraz dla $n = 3$ ma postać

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right]\\ &\quad + \frac{1}{2!}\Big[f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\ &\quad + f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big] + R_3(x,y), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_3(x,y) &= \frac{1}{3!}\Big[f'''_{xxx}(\xi,\eta)(x-x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(\xi,\eta)(x-x_0)^2(y-y_0)\\ &\quad + 3f'''_{xyy}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f'''_{yyy}(\xi,\eta)(y-y_0)^3\Big], \end{aligned}$$

przy czym $(\xi, \eta) = (x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$ dla pewnego $0 < \theta < 1$. Obliczymy potrzebne pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

w punkcie $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Mamy $f(-2,1) = 1$ oraz

$$\begin{aligned}
&f'_x(-2,1) = (-2x+2y-6)\big|_{(-2,1)} = 0, \;\; f'_y(-2,1) = (2x+6y-2)\big|_{(-2,1)} = 0,\\
&f''_{xx}(-2,1) = -2, \;\; f''_{xy}(-2,1) = 2, \;\; f''_{yy}(-2,1) = 6,\\
&f'''_{xxx}(x,y) = f'''_{xyy}(x,y) = f'''_{xxy}(x,y) = f'''_{yyy}(x,y) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
f(x,y) = 1 \,+\, &\frac{1}{1!}\,[0\cdot(x+2) + 0\cdot(y-1)]\\
+&\frac{1}{2!}\left[-2(x+2)^2 + 2\cdot 2(x+2)(y-1) + 6(y-1)^2\right] + R_3(x,y),
\end{aligned}$$

gdzie

$$R_3(x,y) = \frac{1}{3!}\left[0\cdot(x+2)^3 + 3\cdot 0\cdot(x+2)^2(y-1) + 3\cdot 0\cdot(x+2)(y-1)^2 + 0\cdot(y-1)^3\right] \equiv 0.$$

Ostatecznie

$$f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$$

▷ **Zadanie 3.19.** Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli:

(a) $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right), \quad (x_0, y_0) = (0,0), \quad n = 3;$

(b) $f(x,y) = (x+y)^3, \quad (x_0, y_0) = (-1,1), \quad n = 4.$

Odpowiedzi. (a) $\sin\left(x^2 + y^2\right) = u - \frac{1}{6}\left(12\theta u^2 \sin\theta^2 u + 8\theta^3 u^3 \cos\theta^2 u\right)$, gdzie $u = x^2 + y^2$ oraz $\theta \in (0,1)$; (b) $(x+y)^3 = (x+1)^3 + 3(x+1)^2(y-1) + 3(x+1)(y-1)^2 + (y-1)^3$.

► **Przykład 3.20.** Znaleźć ekstrema funkcji:

(a) $f(x,y) = \left(2x + y^2\right) e^x$;

(b) $f(x,y) = (x-y+1)^2 + (2x+y-4)^2$;

(c) $f(x,y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$;

(d) $f(x,y) = e^{1-x} + e^{x-y} + e^{3+y}$;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

(f) $f(x,y) = e^y(y - \cos x)$.

Rozwiązanie. Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Jeżeli $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ oraz

$$H(x_0, y_0) = \det\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0)\\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{bmatrix} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to minimum, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ albo maksimum, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$. Wyznacznik H nazywamy hessianem.

► (a) Dziedziną funkcji $f(x, y) = \left(2x + y^2\right) e^x$ jest $\mathbb{R}^2$. Jej pochodne cząstkowe rzędu pierwszego są postaci:

$$\begin{aligned} f'_x &= \left[\left(2x + y^2\right) e^x\right]'_x = \left[2x + y^2\right]'_x e^x + \left(2x + y^2\right) \left[e^x\right]'_x \\ &= 2e^x + \left(2x + y^2\right) e^x = \left(2x + y^2 + 2\right) e^x, \\ f'_y &= \left[\left(2x + y^2\right) e^x\right]'_y = \left[2x + y^2\right]'_y e^x + \left(2x + y^2\right) \left[e^x\right]'_y = 2ye^x + 0 = 2ye^x. \end{aligned}$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremów wynika, że funkcja f może je mieć tylko w punktach, w których

$$\begin{cases} f'_x = \left(2x + y^2 + 2\right) e^x = 0, \\ f'_y = 2ye^x = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ mamy

$$\begin{cases} \left(2x+y^2+2\right) e^x = 0 \big| : e^x, \\ 2ye^x = 0 | : e^x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y^2+2 = 0, \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Wyznaczymy pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji f i obliczymy znak jej hessianu w puncie $(-1, 0)$. Mamy

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \left[\left(2x + y^2 + 2\right) e^x\right]'_x = \left[2x + y^2 + 2\right]'_x e^x + \left(2x + y^2 + 2\right) \left[e^x\right]'_x \\ &= 2e^x + \left(2x + y^2 + 2\right) e^x = \left(2x + y^2 + 4\right) e^x, \\ f''_{yx} &= \left[\left(2x + y^2 + 2\right) e^x\right]'_y = \left[2x + y^2 + 2\right]'_y e^x + \left(2x + y^2 + 2\right) \left[e^x\right]'_y \\ &= 2ye^x + 0 = 2ye^x = f''_{xy}, \\ f''_{yy} &= \left[2ye^x\right]'_y = 2e^x. \end{aligned}$$

Stąd

$$H(-1, 0) = \det \begin{bmatrix} f''_{xx}(-1, 0) & f''_{xy}(-1, 0) \\ f''_{xy}(-1, 0) & f''_{yy}(-1, 0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix} = 4e^{-2} > 0.$$

Z warunku wystarczającego wynika, że funkcja f ma w punkcie $(-1, 0)$ ekstremum lokalne, przy czym jest to minimum, gdyż $f''_{xx}(-1, 0) = 2e^{-1} > 0$.

► (b) Dziedziną funkcji $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2$ jest $\mathbb{R}^2$. Jej pochodne cząstkowe rzędu pierwszego są postaci

$$\begin{aligned} f'_x &= \left[(x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2\right]'_x = 2(x - y + 1) + 2(2x + y - 4) \cdot 2 \\ &= 2(5x + y - 7), \\ f'_y &= \left[(x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2\right]'_y = 2(x - y + 1) \cdot (-1) + 2(2x + y - 4) \\ &= 2(x + 2y - 5). \end{aligned}$$

Z warunku koniecznego wynika, że funkcja f może mieć ekstrema lokalne jedynie w punktach zerowania się obu pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Mamy zatem

$$\begin{cases} f'_x = 2(5x + y - 7) = 0, \\ f'_y = 2(x + 2y - 5) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując układ otrzymamy $x = 1$, $y = 2$. Funkcja f może mieć zatem ekstremum lokalne jedynie w punkcie $(1, 2)$. Do zbadania, czy w tym punkcie funkcja f ma rzeczywiście ekstremum, wykorzystamy warunek wystarczający, czyli określimy znak jej hessianu w punkcie $(1, 2)$. Mamy

$$f''_{xx} = [2(5x + y - 7)]'_x = 10, \quad f''_{yy} = [2(x + 2y - 5)]'_y = 4,$$
$$f''_{yx} = [2(5x + y - 7)]'_y = 2 = f''_{xy}.$$

Stąd

$$H(1,2) = \det \begin{bmatrix} f''_{xx}(1,2) & f''_{xy}(1,2) \\ f''_{xy}(1,2) & f''_{yy}(1,2) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 36 > 0$$

oraz

$$f''_{xx}(1,2) = 10 > 0.$$

Zatem w punkcie $(1, 2)$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe.

► (c) Funkcja $f(x, y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$ jest określona dla $x \geqslant -1$ i $y \geqslant -1$, a obie jej pochodne cząstkowe istnieją dla $x > -1$ i $y > -1$

$$f'_x = \left[x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}\right]'_x = \sqrt{y+1} \cdot [x]'_x + y \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]'_x = \frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{y}{2\sqrt{x+1}},$$
$$f'_y = \left[x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}\right]'_y = x \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{y+1}}\right]'_y + [y]'_y \cdot \sqrt{x+1} = \frac{x}{2\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+1}.$$

Jak poprzednio korzystamy z warunku koniecznego istnienia ekstremum. Mamy

$$\begin{cases} f'_x = \sqrt{y+1} + \dfrac{y}{2\sqrt{x+1}} = 0, \\ f'_y = \dfrac{x}{2\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+1} = 0. \end{cases}$$

A dalej otrzymamy

$$\begin{cases} \sqrt{y+1} + \dfrac{y}{2\sqrt{x+1}} = 0 \,\Big|\, \cdot 2\sqrt{x+1} > 0, \\ \dfrac{x}{2\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+1} = 0 \,\Big|\, \cdot 2\sqrt{y+1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sqrt{x+1}\sqrt{y+1} + y = 0, \\ x + 2\sqrt{y+1}\sqrt{x+1} = 0. \end{cases}$$

Stąd mamy $y = x$, co po wstawieniu np. do pierwwszego równania układu daje $2\sqrt{x+1}\sqrt{x+1} + x = 0$. Zatem układ równań ma tylko jedno rozwiązanie $x = -2/3$, $y = x = -2/3$. To oznacza, że funkcja f może mieć ekstremum lokalne jedynie w punkcie $(-2/3, -2/3)$. Teraz wykorzystamy warunek wystarczający istnienia ekstremum. Mamy

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \left[\sqrt{y+1} + \frac{y}{2\sqrt{x+1}}\right]'_x = \left[\sqrt{y+1}\right]'_x + \frac{y}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]'_x \\ &= 0 + \frac{y}{2} \cdot \frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{-y}{4(x+1)\sqrt{x+1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy} &= \left[\frac{x}{2\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+1}\right]'_y = \frac{x}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{y+1}}\right]'_y + \left[\sqrt{x+1}\right]'_y \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2(y+1)\sqrt{y+1}} + 0 = \frac{-x}{4(y+1)\sqrt{y+1}} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''_{yx} &= \left[\sqrt{y+1} + \frac{y}{2\sqrt{x+1}}\right]'_y = \left[\sqrt{y+1}\right]'_y + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,[y]'_y \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = f''_{xy}. \end{aligned}$$

Stąd

$$H\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \det\begin{bmatrix} f''_{xx}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) & f''_{xy}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ f''_{xy}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) & f''_{yy}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = -\frac{9}{4} < 0.$$

Zatem w punkcie $(-2/3, -2/3)$ funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.

► (d) Funkcja $f(x, y) = e^{1-x} + e^{x-y} + e^{3+y}$ jest określona na $\mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe funkcji f są postaci:

$$f'_x = \left[e^{1-x} + e^{x-y} + e^{3+y}\right]'_x = \left[e^{1-x}\right]'_x + \left[e^{x-y}\right]'_x + \left[e^{3+y}\right]'_x = -e^{1-x} + e^{x-y} + 0,$$

$$f'_y = \left[e^{1-x} + e^{x-y} + e^{3+y}\right]'_y = \left[e^{1-x}\right]'_y + \left[e^{x-y}\right]'_y + \left[e^{3+y}\right]'_y = 0 - e^{x-y} + e^{3+y}.$$

Jak poprzednio korzystamy z warunku koniecznego istnienia ekstremum. Mamy

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f'_x = -e^{1-x} + e^{x-y} = 0, \\ f'_y = -e^{x-y} + e^{3+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{1-x} = e^{x-y}, \\ e^{x-y} = e^{3+y} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 - x = x - y, \\ x - y = 3 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1/3, \\ y = -5/3. \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd funkcja f może mieć ekstremum lokalne tylko w punkcie $(-1/3, -5/3)$. Teraz skorzystamy z warunku wystarczającego istnienia ekstremum. Mamy

$$f''_{xx} = \left[-e^{1-x} + e^{x-y}\right]'_x = -\left[e^{1-x}\right]'_x + \left[e^{x-y}\right]'_x = e^{1-x} + e^{x-y},$$

$$f''_{yy} = \left[-e^{x-y} + e^{3+y}\right]'_y = -\left[e^{x-y}\right]'_y + \left[e^{3+y}\right]'_y = e^{x-y} + e^{3+y},$$

$$f''_{yx} = \left[-e^{1-x} + e^{x-y}\right]'_y = -\left[e^{1-x}\right]'_y + \left[e^{x-y}\right]'_y = 0 - e^{x-y} = f''_{xy}.$$

Stąd

$$H\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)=\det\begin{bmatrix} f''_{xx}\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right) & f''_{xy}\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right) \\ f''_{xy}\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right) & f''_{yy}\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right) \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 2e^{\frac{4}{3}} & -e^{\frac{4}{3}} \\ -e^{\frac{4}{3}} & 2e^{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}=3e^{\frac{8}{3}}>0$$

oraz

$$f''_{xx}\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)=2e^{\frac{4}{3}}>0.$$

Zatem funkcja f ma w punkcie $(-1/3,-5/3)$ minimum lokalne właściwe.

► (e) Dziedziną funkcji $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ jest $\mathbb{R}^2$. Jej pochodne cząstkowe rzędu pierwszego są postaci:

$$f'_x=\left[x^4+y^4-4xy\right]'_x=\left[x^4\right]'_x+\left[y^4\right]'_x-\left[4xy\right]'_x=4x^3+0-4y,$$
$$f'_y=\left[x^4+y^4-4xy\right]'_y=\left[x^4\right]'_y+\left[y^4\right]'_y-\left[4xy\right]'_y=0+4y^3-4x.$$

Z warunku koniecznego wynika, że funkcja f może mieć ekstrema tylko w punktach, w których

$$\begin{cases} f'_x=4x^3-4y=0, \\ f'_y=4y^3-4x=0. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ mamy

$$\begin{cases} 4x^3-4y=0, \\ 4y^3-4x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3-y=0, \\ y^3-x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3=y, \\ y^3-x=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^3=y, \\ \left(x^3\right)^3-x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3=y, \\ x\left(x^8-1\right)=0, \end{cases}$$

czyli trzy rozwiązania $(x_1,y_1)=(0,0)$, $(x_2,y_2)=(1,1)$, $(x_3,y_3)=(-1,-1)$. Dla ustalenia, czy w tych punktach funkcja f ma ekstrema wykorzystamy warunek wystarczający. W tym celu wyznaczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f. Mamy

$$f''_{xx}=\left[4x^3-4y\right]'_x=4\left[x^3\right]'_x-4\left[y\right]'_x=4\cdot 3x^2-0=12x^2,$$
$$f''_{yy}=\left[4y^3-4x\right]'_y=4\left[y^3\right]'_y-4\left[x\right]'_y=4\cdot 3y^2-0=12y^2,$$
$$f''_{yx}=\left[4x^3-4y\right]'_y=4\left[x^3\right]'_y-4\left[y\right]'_y=0-4=-4=f''_{xy}.$$

Zbadamy teraz znak hessianu kolejno w punktach $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Mamy

$$H(0,0)=\det\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}=-16<0.$$

Zatem w punkcie $(0,0)$ funkcja f nie ma ekstremum lokalnego. Z kolei w punktach $(1,1)$ oraz $(-1,-1)$ mamy

$$H(1,1)=H(-1,-1)=\det\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}=128>0$$

oraz

$$f''_{xx}(1,1) = f''_{xx}(-1,-1) = 12 > 0,$$

tak więc w każdym z nich funkcja f ma minimum lokalne właściwe.

► (f) Dziedziną funkcji $f(x,y) = e^y(y - \cos x)$ jest $\mathbb{R}^2$. Jej pochodne cząstkowe rzędu pierwszego są postaci

$$\begin{aligned}
f'_x &= [e^y(y-\cos x)]'_x = e^y\,[y-\cos x]'_x = e^y \sin x,\\
f'_y &= [e^y(y-\cos x)]'_y = [e^y]'_y\,(y-\cos x) + e^y\,[y-\cos x]'_y\\
&= e^y(y-\cos x) + e^y = e^y\,(1+y-\cos x)\,.
\end{aligned}$$

Z warunku koniecznego wynika, że funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} f'_x = e^y \sin x = 0,\\ f'_y = e^y\,(1+y-\cos x) = 0. \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ

$$\begin{cases} e^y \sin x = 0 | : e^y \neq 0,\\ e^y\,(1+y-\cos x) = 0 | : e^y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0,\\ 1+y-\cos x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ 1+y-\cos k\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ 1+y-(-1)^k = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ y = (-1)^k - 1 = 0. \end{cases}$$

Zatem układ spełniają punkty postaci $\big(k\pi, (-1)^k - 1\big)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Obliczymy teraz pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Mamy

$$\begin{aligned}
f''_{xx} &= [e^y \sin x]'_x = e^y\,[\sin x]'_x = e^y \cos x,\\
f''_{yy} &= [e^y(1+y-\cos x)]'_y = [e^y]'_y\,(1+y-\cos x) + e^y\,[1+y-\cos x]'_y\\
&= e^y\,(1+y-\cos x) + e^y = e^y(2+y-\cos x),\\
f''_{yx} &= [e^y \sin x]'_y = \sin x\,[e^y]'_y = \sin x \cdot e^y = f''_{xy}.
\end{aligned}$$

Zbadamy znak hessianu w punktach postaci $\big(k\pi, (-1)^k - 1\big)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Mamy

$$H\left(k\pi, (-1)^k - 1\right) = \det \begin{bmatrix} e^{(-1)^k - 1}(-1)^k & 0\\ 0 & e^{(-1)^k-1} \end{bmatrix} = (-1)^k e^{2\left((-1)^k - 1\right)}$$

oraz

$$f''_{xx}\left(k\pi, (-1)^k - 1\right) = (-1)^k e^{(-1)^k - 1} \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Z warunku wystarczającego istnienia ekstremum wynika, że punktach postaci $(2k\pi, 0)$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe, a w punkach postaci $((2k+1)\,\pi, -2)$ – nie ma ekstremów.

▷ **Zadanie 3.20.** Znaleźć ekstrema funkcji:

(a) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$; (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(c) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (d) $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$;

(e) $f(x,y) = 8^{x-y} + 4^{x+y} + 2^{y-5x}$; (f) $f(x,y) = xy^2(12-x-y)\ (x,y>0)$;

(g) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y\ (x,y>0)$; (h) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)\ (x,y>0)$;

(i) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)\ (0 < x,\ y < \pi/2)$;

(j) $f(x,y) = \left(x^2-y\right)^2 + \left(y^2-x\right)^2$; (k) $f(x,y) = \ln x + \dfrac{y}{\ln x} + \dfrac{8}{y}$.

Odpowiedzi. (a) $(1,-2)$ min. lok.; (b) $(1,1)$ min. lok.; (c) $(4,1)$ min. lok., $(-4,-1)$ max. lok.; (d) $(-1,0)$ max. lok.; (e) $(0,0)$ min. lok.; (f) $(3,6)$ max. lok.; (g) $(4,2)$ min. lok.; (h) $(4,4)$ min. lok.; (i) $(\pi/3, \pi/6)$ max. lok.; (j) $(0,0)$, $(1,1)$ min. lok.; (k) $\left(e^2, 4\right)$ min. lok.

► **Przykład 3.21.** Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w obszarze D lub w jej dziedzinie naturalnej:

(a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 36$;

(b) $f(x,y) = x^2y - 8x - 4y$, D – trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,4)$ i $(4,0)$;

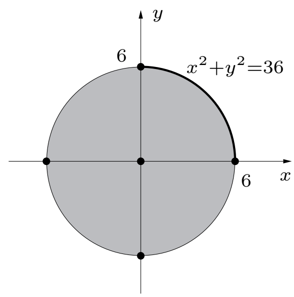
(c) $f(x,y) = x - y$, D – obszar określony nierównościami $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2/2$;

(d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Rozwiązanie. Wartości najmniejszą i największą funkcji na ograniczonym obszarze domkniętym znajdujemy w następujący sposób: na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstrema lokalne. Następnie na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstrema warunkowe. Na końcu porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach oraz na tej podstawie ustalamy wartości najmniejszą i największą funkcji na obszarze. Nie ma potrzeby korzystania z warunku wystarczającego.

► (a) Znajdziemy najpierw punkty wewnątrz rozważanego zbioru (rysunek), w których funkcja f może mieć ekstrema. Mamy

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = -4y.$$



Z warunku koniecznego wynika, że funkcja f może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których

$$f'_x = 2x = 0, \quad f'_y = -4y = 0,$$

czyli w punkcie $(0,0)$. Zauważmy, że punkt ten należy do wnętrza rozważanego obszaru. Zbadamy teraz funkcję f na okręgu $x^2 + y^2 = 36$. Zauważmy najpierw, że funkcja f spełnia warunki $f(x,y) = f(-x,-y)$ oraz $f(x,y) = f(-x,y)$. Zatem badanie funkcji na okręgu $x^2+y^2 = 36$ wystarczy ograniczyć do pierwszej ćwiartki układu, a więc do badania na półokręgu $y = \sqrt{36 - x^2}$, gdzie $x \in [0, 6]$. Mamy zatem

$$g(x) = f\left(x, \sqrt{36 - x^2}\right) = x^2 - 2\left(36 - x^2\right) = 3x^2 - 72, \;\; x \in [0, 6].$$

Funkcja kwadratowa g przyjmuje wartość najmniejszą (równą -72) w punkcie $x = 0$ (wtedy $y = 6$) oraz wartość największą (równą 36) w punkcie $x = 6$ (wtedy $y = 0$). Z porównania otrzymanych wartości w punktach $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 6)$ wynika, że funkcja f w obszarze D osiąga wartość najmniejszą równą -72 w punkcie $(0, 6)$, a wartość największą równą 36 w punkcie $(6, 0)$. Z symetryczności funkcji f wynika, że wartość największą osiąga również w punkcie $(-6, 0)$, a najmniejszą w punkcie $(0, -6)$.

► (b) Jak w poprzednim przykładzie badanie rozpoczynamy od wyznaczenia punktów wewnątrz rozważanego obszaru (rysunek), w których funkcja może mieć ekstrema. Wobec warunku koniecznego funkcja $f(x, y) = x^2y - 8x - 4y$ może mieć ekstrema tylko w punktach, w których zachodzą równości

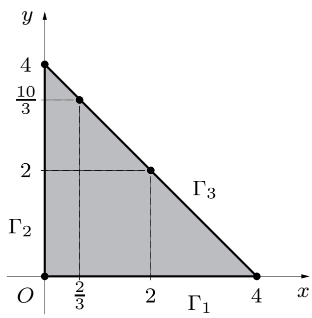
$$f'_x = 2xy - 8 = 0, \quad f'_y = x^2 - 4 = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymamy dwa punkty $(2, 2)$ i $(-2, -2)$. Zauważmy, że punkt $(2, 2)$ leży na brzegu, a punkt $(-2, -2)$ poza rozważanym obszarem, czyli żaden z nich nie leży w jego wnętrzu. Zbadamy teraz funkcję f na brzegu obszaru, który składa się z trzech odcinków (rysunek). Badanie funkcji na brzegu oznacza jej analizę odpowiednio na prostych

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &: \quad y = 0, \;\text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4,\\
\Gamma_2 &: \quad x = 0, \;\text{ gdzie } 0 \leqslant y \leqslant 4,\\
\Gamma_3 &: \quad y = 4 - x, \;\text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4.
\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &: \quad f_1(x) = f(x, 0) = -8x, \;\text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4,\\
\Gamma_2 &: \quad f_2(y) = f(0, y) = -4y, \;\text{ gdzie } 0 \leqslant y \leqslant 4,\\
\Gamma_3 &: \quad f_3(x) = f(x, 4 - x) = -x^3 + 4x^2 - 4x - 16,\\
&\qquad \text{gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4.
\end{aligned}$$



Ponieważ dwie pierwsze funkcje są liniowe, więc swoje wartości ekstremalne przyjmują na końcach przedziału określoności. Mamy zatem trzy miejsca, w których funkcja f może mieć wartości ekstremalne. Są to punkty $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$. W punktach tych mamy $f_1(0) = f(0, 0) = f_2(0) = 0$, $f_1(4) = f(4, 0) = -32$, $f_2(4) = f(0, 4) = -16$. Natomiast dla funkcji f_3 mamy

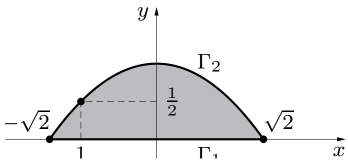
$$f'_3(x) = -3x^2 + 8x - 4.$$

Zatem

$$f'_3(x) = 0 \iff -3x^2 + 8x - 4 = 0 \iff x = 2 \text{ lub } x = \frac{2}{3}.$$

Ponieważ wyznaczone powyżej dwa punkty należą do wnętrza przedziału $[0, 4]$, więc funkcja f_3 może przyjmować wartości ekstremalne dla $x = 2/3$, $x = 2$ oraz na końcach przedziału, czyli $x = 0$ i $x = 4$. Tym samym funkcja f może mieć wartości ekstremalne na prostej Γ_3 w punktach $(2/3, 10/3)$, $(2, 2)$, $(0, 4)$ i $(4, 0)$, przy czym $f_3(2/3) = f(2/3, 10/3) = -464/27$, $f_3(2) = f(2, 2) = -16$, $f_3(0) = f(0, 4) = -16$, $f_3(4) = f(4, 0) = -32$. Z porównania otrzymanych wartości wynika, że przyjmuje ona wartość najmniejszą równą -32 w punkcie $(4, 0)$, a największą równą 0 w punkcie $(0, 0)$.

► (c) Ponieważ $f'_x = 1$, $f'_y = -1$, więc nie jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum. To oznacza, że funkcja f nie ma ekstremów lokalnych. Zbadamy teraz tę funkcję na brzegu obszaru D. Brzeg składa się z odcinka $\Gamma_1 :\ y = 0 \left(-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right)$ oraz łuku paraboli $\Gamma_2 :\ y = 1 - x^2/2 \left(-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right)$.



Na odcinku Γ_1 funkcja f ma postać

$$f_1(x) = f(x, 0) = x, \text{ gdzie } -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2},$$

jest więc funkcją liniową. Zatem wartości ekstremalne przyjmuje na końcach przedziału $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Mamy $f_1\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, 0\right) = -\sqrt{2}$ i $f_1\left(\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, 0\right) = \sqrt{2}$. Z kolei na łuku paraboli Γ_2 funkcja f ma postać

$$f_2(x) = f\left(x, 1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + x - 1 = \frac{1}{2}\left[(x+1)^2 - 3\right].$$

Jest więc funkcją kwadratową, która wartości ekstremalne przyjmuje na końcach przedziału $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ lub w wierzchołu $x = -1$. Mamy

$$f_2\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, 0\right) = -\sqrt{2}, \quad f_2\left(\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, 0\right) = \sqrt{2}$$

oraz

$$f_2(-1) = f(-1, 1/2) = -3/2.$$

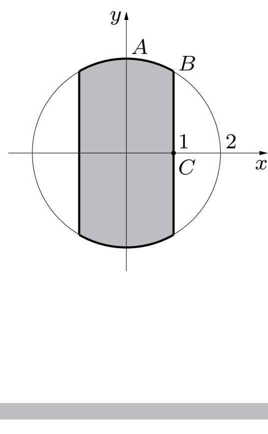
Z porównania otrzymanych wartości wynika, że funkcja f na obszarze D przyjmuje wartość najmniejszą równą $-3/2$ w punkcie $(-1, 1/2)$, a wartość największą równą $\sqrt{2}$ w punkcie $\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

► (d) Dziedziną naturalną funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

jest zbiór punktów (x, y) płaszczyzny, które spełniają układ nierówności:

$$1 - x^2 \geqslant 0, \quad 4 - \left(x^2 + y^2\right) \geqslant 0.$$



Zbiór ten przedstawiono na rysunku. Najpierw znajdziemy punkty wewnątrz tego zbioru, w których spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum.

Mamy

$$\begin{aligned} f'_x &= \left[\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2-y^2}\right]'_x = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\cdot(-2x) \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ f'_x &= \left[\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2-y^2}\right]'_y = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\cdot(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

Ponieważ wewnątrz wyznaczonego zbioru $1-x^2>0$ oraz $4-x^2-y^2>0$, więc jedynym rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} -x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)=0 \\ \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=0 \end{cases}$$

jest punkt $(0,0)$. Oczywiście punkt ten należy do wnętrza dziedziny funkcji f. Wartość funkcji f w tym punkcie jest równa $f(0,0)=3$.
Przechodzimy do zbadania funkcji f na brzegu jej dziedziny. Funkcja f jest parzysta ze względu na każdą zmienną. Dlatego badania możemy ograniczyć tylko do łuku AB oraz odcinka BC. Łuk AB jest opisany wzorem $y=\sqrt{4-x^2}$, gdzie $0\leqslant x\leqslant 1$. Funkcja f na tym łuku ma postać

$$g(x)=f\left(x,\sqrt{4-x^2}\right)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1].$$

Oczywiste jest, że funkcja g przyjmuje w przedziale $[0,1]$ wartość największą równą 1 dla $x=0$, a najmniejszą 0 dla $x=1$.
Przechodzimy do zbadania funkcji f na odcinku BC. Odcinek ten ma równanie $x=1$, gdzie $0\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. Funkcja f na tym odcinku jest opisana wzorem

$$h(y)=f(1,y)=\sqrt{1-1^2}+\sqrt{4-1^2-y^2}=\sqrt{3-y^2},\quad y\in\left[0,\sqrt{3}\right].$$

Także w tym przypadku oczywiste jest, że funkcja h przyjmuje wartość największą $\sqrt{3}$ dla $y=0$, a najmniejszą 0 dla $y=\sqrt{3}$.
Z przeprowadzonych rozważań wynika, że funkcja f w dziedzinie naturalnej przyjmuje największą wartość 5 w punkcie $(0,0)$, a najmniejszą 0 w punkcie $\left(1,\sqrt{3}\right)$. Ze względu zauważoną symetrię wartość najmniejszą przyjmuje też w punktach $\left(-1,\sqrt{3}\right)$, $\left(1,-\sqrt{3}\right)$, $\left(1,-\sqrt{3}\right)$.

▷ **Zadanie 3.21.** Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w obszarze D lub w jej dziedzinie naturalnej:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $D:\ |x|+|y|\leqslant 2$;

(b) $f(x,y)=xy^2+4xy-4x$, $D:\ -3\leqslant x\leqslant 3,\ -3\leqslant y\leqslant 0$;

(c) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $D:\ x^2 + y^2 \leqslant 9$;

(d) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 2} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;

(e*) $f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arccos(x-y)$.

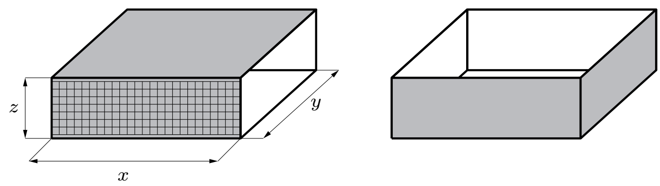
Odpowiedzi. (a) w punkcie $(0,0)$ wartość najmniejsza równa 0, w punktach $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$ wartość największa równa 4; (b) w punkcie $(3,-2)$ wartość najmniejsza równa -24, w punkcie $(-3,-2)$ wartość największa równa 24; (c) w punkcie $(0,0)$ wartość najmniejsza równa 0, w punktach $(0,\pm 3)$ i $(\pm 3, 0)$ wartość największa równa 81; (d) w punktach $\left(\pm\sqrt{14}, \pm\sqrt{2}\right)$ wartość najmniejsza równa 0, w punktach $(0,\pm 3)$ wartość największa równa $2\sqrt{7}$; (e*) w punkcie $(0,-1)$ wartość najmniejsza równa $-\pi/2$, a w punkcie $(0,1)$ wartość największa $3\pi/2$.

► Przykład 3.22.

(a) Na płaszczyźnie $x+2y-3z=6$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

(b) Znaleźć wymiary prostopadłościanu wpisanego w kulę o promieniu R, który ma największą objętość.

(c) Pudełko zapałek składa się z ramki i szufladki (rysunek). Jakie powinny być wymiary pudełka o objętości $V = 24\,\mathrm{cm}^3$, aby do jego sporządzenia zużyć najmniej kartonu? Nie uwzględniać grubości kartonu ani zakładek do sklejania.



Rozwiązanie.

► (a) Łatwo uzasadnić, że odległość dwóch punktów będzie najmniejsza, gdy kwadrat tej odległości będzie najmniejszy. Kwadrat odległości punktu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ od początku układu współrzędnych określony jest wzorem

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Interesują nas jednak tylko punkty leżące na płaszczyźnie $x + 2y - 3z = 6$. Zatem $z = (x + 2y - 6)/3$. Stąd kwadrat odległości punktu tej płaszczyzny od początku układu współrzędnych jest określony wzorem

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{9}(x+2y-6)^2, \quad \text{gdzie} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Szukamy najmniejszej wartości funkcji f na całej płaszczyźnie. Wyznaczamy pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu tej funkcji:

$$f'_x = \left[x^2 + y^2 + \frac{1}{9}(x+2y-6)^2\right]'_x = 2x + 2\cdot\frac{1}{9}(x+2y-6) = \frac{4}{9}(5x+y-3),$$

$$f'_y = \left[x^2 + y^2 + \frac{1}{9}\,(x+2y-6)^2\right]'_y = 2y + 2\cdot\frac{1}{9}(x+2y-6)\cdot 2 = \frac{2}{9}\,(2x+13y-12)\,,$$

$$f''_{xx} = \left[\frac{4}{9}\,(5x+y-3)\right]'_x = \frac{20}{9}, \qquad f''_{yy} = \left[\frac{2}{9}\,(2x+13y-12)\right]'_y = \frac{26}{9},$$

$$f''_{yx} = \left[\frac{4}{9}\,(5x+y-3)\right]'_y = \frac{4}{9} = f''_{xy}.$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum wynika, że funkcja f może mieć ekstrema tylko w punktach, w których obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu zerują się. Mamy zatem

$$f'_x = \frac{4}{9}\,(5x+y-3) = 0, \quad f'_y = \frac{2}{9}\,(2x+13y-12) = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest punkt $(3/7, 6/7)$. Ponieważ w punkcie tym hessian

$$H\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) = \det\begin{bmatrix} f''_{xx}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) & f''_{xy}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) \\ f''_{xy}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) & f''_{yy}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{20}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{26}{9} \end{bmatrix} = \frac{504}{81}$$

jest dodatni oraz druga pochodna cząstkowa

$$f''_{xx}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{9}$$

jest również dodatnia, więc z warunku wystarczającego istnienia ekstremum wynika, że funkcja f ma w punkcie $(3/7, 6/7)$ minimum lokalne właściwe. Zbadamy teraz zachowanie funkcji f, gdy punkt (x,y) oddala się od początku układu do nieskończoności, tj. gdy $x^2+y^2\to\infty$. Mamy

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = \lim_{x^2+y^2\to\infty}\left\{x^2+y^2+\frac{1}{9}\,(x+2y-6)^2\right\} = \infty.$$

Zatem minimum lokalne jest jednocześnie wartością najmniejszą funkcji. To oznacza, że punktem płaszczyzny $x+2y-3z=6$ leżącym najbliżej początku układu współrzędnych jest $(3/7, 6/7, -9/7)$.

► (b) Jeżeli długość krawędzi prostopadłościanu oznaczymy przez $2x, 2y, 2z$, to jego objętość wyraża się wzorem $V = 8xyz$. Ponieważ prostopadłościan wpisany jest w kulę o promieniu R, więc jego krawędzie spełniają warunek $x^2+y^2+z^2=R^2$. Zatem $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Stąd

$$V(x,y) = 8xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad \text{gdzie} \quad x>0,\ \ y>0 \ \text{ oraz } \ x^2+y^2<R^2.$$

Tak więc powinniśmy znaleźć wartość największą funkcji V w podanym zbiorze. Zauważmy jednak, że nieujemna funkcja ma wartość największą w tych samych punktach co jej kwadrat. Możemy zatem szukać wartości największej funkcji

$$f(x,y) = V^2(x,y) = 64x^2y^2\left(R^2-x^2-y^2\right).$$

w zbiorze ograniczonym $D: \ x^2+y^2<R^2,\ x>0,\ y>0$. W tym celu wykorzystamy algorytm podany w poprzednim zadaniu.

$$\begin{aligned}
f'_x &= \left[64x^2y^2\left(R^2-x^2-y^2\right)\right]'_x \\
&= 64y^2\left[x^2\right]'_x\left(R^2-x^2-y^2\right)+64x^2y^2\left[R^2-x^2-y^2\right]'_x \\
&= 128xy^2\left(R^2-x^2-y^2\right)+64x^2y^2(-2x)=128xy^2\left(R^2-2x^2-y^2\right), \\
f'_y &= \left[64x^2y^2\left(R^2-x^2-y^2\right)\right]'_y \\
&= 64x^2\left[y^2\right]'_y\left(R^2-x^2-y^2\right)+64x^2y^2\left[R^2-x^2-y^2\right]'_y \\
&= 128x^2y\left(R^2-x^2-y^2\right)+64x^2y^2(-2y)=128x^2y\left(R^2-x^2-2y^2\right).
\end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (warunek konieczny istnienia ekstremum)

$$\begin{cases} f'_x = 128xy^2\left(R^2-2x^2-y^2\right)=0, \\ f'_y = 128x^2y\left(R^2-x^2-2y^2\right)=0 \end{cases}$$

i uwzględniając fakt, że $x, y>0$ otrzymujemy układ równoważny

$$\begin{cases} R^2-2x^2-y^2=0, \\ R^2-x^2-2y^2=0, \end{cases}$$

a dalej

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=R^2, \\ x^2+2y^2=R^2. \end{cases}$$

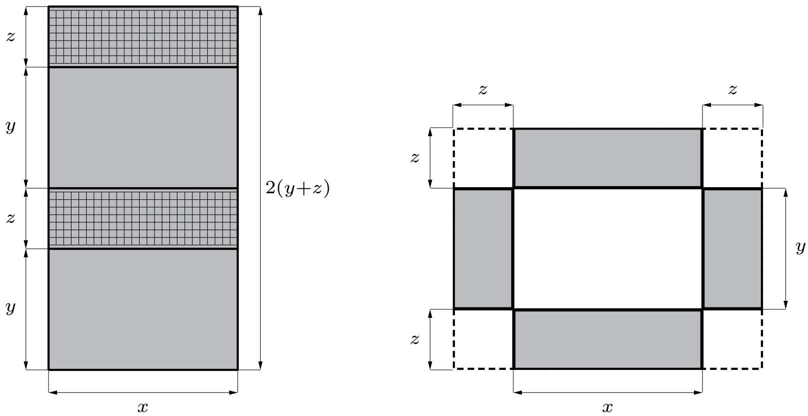
Układ ten ma tylko jedno rozwiązanie $\left(R/\sqrt{3}, R/\sqrt{3}\right)$, w którym funkcja f może mieć ekstremum. Wartość funkcji f w tym punkcie jest równa $f\left(R/\sqrt{3}, R/\sqrt{3}\right)=64R^6/27$. Ustalimy teraz czy jest to wartość największa funkcji f w dziedzinie. W tym celu zbadamy zachowanie funkcji f na brzegu dziedziny. Dla punktu (x_0,y_0) należącego do brzegu dziedziny, tj. spełniającego warunek $(x_0)^2+(y_0)^2=R^2$ albo $x_0=0$ oraz $0\leqslant y_0<R$ albo $y_0=0$ oraz $0<x_0<R$, mamy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 64x^2y^2\left(R^2-x^2-y^2\right)=64x_0^2y_0^2\left(R^2-x_0^2-y_0^2\right)=0.$$

Tak więc największą objętość ma sześcian o krawędzi $2x=2y=2z=2R/\sqrt{3}$.

Uwaga. W rozwiązaniu można zrezygnować ze stosowania warunku wystarczającego istnienie ekstremum. W tym celu funkcję f rozszerzamy na brzeg dziedziny (dwa odcinki i łuk okręgu). Niech przyjmuje ona tam wartość 0. Łatwo sprzwdzić, że funkcja f jest ciągła w powiększonej dziedzinie. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że w domkniętej dziedzinie funkcja ciągła f przyjmuje wartość największą. Oczywiście nie jest to możliwe na brzegu (dlaczego?). To zaś oznacza, że w punkcie wyznaczonym z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcja f przyjmuje wartość największą.

► (c) Niech x, y, z oznaczają długości krawędzi pudełka. Wtedy mamy $xyz = V$ i stąd $z = V/(xy)$. Ramka pudełka po rozwinięciu jest prostokątem o bokach $2(y+z)$ oraz x, zatem ma pole $2x(y+z)$. Natomiast szufladka po rozwinięciu ma kształt prostokąta o bokach $x+2z$ oraz $y+2z$ z wyciętymi w wierzchołkach kwadratami o boku z, zatem ma pole $(x+2z)(y+2z)-4z^2$.



Całkowite pole kartonu potrzebnego do sporządzenia pudełka wyraża się wzorem

$$S(x,y) = 2x(y+z) + (x+2z)(y+2z) - 4z^2 = 3xy + 4xz + 2yz.$$

Po uwzględnieniu zależności $z = V/(xy)$ otrzymamy funkcję

$$S(x,y) = 3xy + \frac{2V}{x} + \frac{4V}{y}.$$

Znajdziemy teraz wartość najmniejszą funkcji S na zbiorze nieograniczonym $D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$. Rozpoczniemy od wyznaczenia pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego i drugiego funkcji S. Mamy

$$S'_x = \left[3xy + \frac{2V}{x} + \frac{4V}{y}\right]'_x = 3y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y = \left[3xy + \frac{2V}{x} + \frac{4V}{y}\right]'_y = 3x - \frac{4V}{y^2},$$

a dalej

$$S''_{xx} = \left[3y - \frac{2V}{x^2}\right]'_x = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{yy} = \left[3x - \frac{4V}{y^2}\right]'_y = \frac{8V}{y^3},$$

$$S''_{yx} = \left[3y - \frac{2V}{x^2}\right]'_y = 3 = S''_{xy}.$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} S'_x = 3y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ S'_y = 3x - \dfrac{4V}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań jest para

$$(x_0, y_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{3}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{3}}\right).$$

Jak w poprzednich przykładach, korzystając z warunku wystarczającego, zbadamy czy funkcja S ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne. Mamy

$$H(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} S''_{xx}(x_0, y_0) & S''_{xy}(x_0, y_0) \\ S''_{xy}(x_0, y_0) & S''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{4V}{x_0^3} & 3 \\ 3 & \frac{8V}{y_0^3} \end{bmatrix} = \frac{32V^2}{(x_0 y_0)^3} - 9 = 27 > 0$$

oraz

$$S''_{xx}(x_0, y_0) = \frac{4V}{(x_0)^3} > 0.$$

Zatem badana funkcja w punkcie (x_0, y_0) ma minimum lokalne właściwe. Należy jeszcze uzasadnić, że w tym punkcie funkcja S realizuje minimum globalne. W tym celu zbadamy zachowanie się funkcji S, gdy punkt $(x, y) \in D$ zbliża się do brzegu obszaru D lub oddala się nieograniczenie od początku układu. Dla punktu $(x^*, 0)$, gdzie $x^* \geqslant 0$, tego brzegu mamy

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,0^+)} S(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x^*,0^+)} \left(3xy + \frac{2V}{x} + \frac{4V}{y}\right) = \infty.$$

Podobnie jest dla punktu $(0, y^*)$, gdzie $y^* > 0$. Ponadto mamy

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} S(x, y) = \infty.$$

Zatem w punkcie

$$(x_0, y_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{3}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{3}}\right)$$

funkcja S przyjmuje najmniejszą wartość. Podstawiając $V = 24\,\mathrm{cm}^3$ otrzymamy optymalne wymiary pudełka zapałek: $x_0 = 2\,\mathrm{cm}$, $y_0 = 4\,\mathrm{cm}$, $z_0 = 3\,\mathrm{cm}$.

▷ **Zadanie 3.22.** (a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

(b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

(c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

(d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie 30 zł/m^2, do budowy podłogi w cenie 40 zł/m^2, a sufitu w cenie 20 zł/m^2. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(e*) Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.

Odpowiedzi. (a) $M = (2/3, 2)$; (b) $a = \sqrt[3]{2V}$, $b = \sqrt[3]{2V}$, $h = \sqrt[3]{V/4}$; (c) $d_{\min} = 3$; (d) $a = b = c = 6\,[\mathrm{m}]$; (e*) trójkąt równoboczny.

Funkcje uwikłane

► **Przykład 3.23.** Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:
(a) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$; (b) $xe^y + ye^x = e^{xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Rozwiązanie. Równanie stycznej do krzywej określonej równaniem $F(x, y) = 0$ w punkcie (x_0, y_0) tej krzywej ma postać

$$y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

► (a) Dla funkcji $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ oraz punktu $(x_0, y_0) = (1, 1)$ mamy

$$\begin{aligned} F'_x &= \left[x^3 + y^3 - 2xy\right]'_x = 3x^2 - 2y, \ F'_x(1, 1) = 1, \\ F'_y &= \left[x^3 + y^3 - 2xy\right]'_y = 3y^2 - 2x, \ F'_y(1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Zatem równanie stycznej ma postać

$$y - 1 = -\frac{1}{1}(x - 1), \quad \text{czyli} \quad y = -x + 2.$$

► (b) Dla funkcji $F(x, y) = xe^y + ye^x - e^{xy}$ oraz punktu $(x_0, y_0) = (1, 0)$ mamy

$$\begin{aligned} F'_x &= \left[xe^y + ye^x - e^{xy}\right]'_x = e^y + ye^x - ye^{xy}, \ F'_x(1, 0) = 1, \\ F'_y &= \left[xe^y + ye^x - e^{xy}\right]'_y = xe^y + e^x - xe^{xy}, \ F'_y(1, 0) = e. \end{aligned}$$

Zatem równanie stycznej ma postać

$$y - 0 = -\frac{1}{e}(x - 1), \quad \text{stąd} \quad y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e}.$$

▷ **Zadanie 3.23.** Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:
(a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $(2, 2)$; (b) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0$, $(1, 1)$.

Odpowiedzi. (a) $y = x$; (b) $y = 1$.

▶ **Przykład 3.24.** Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

(a) $y - \operatorname{arc\,tg} y - x^3 = 0$; (b) $xe^y + ye^x - 2 = 0$ w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie.

▶ (a) Ponieważ $y = y(x)$ jest funkcją uwikłaną określoną równaniem

$$y - \operatorname{arc\,tg} y - x^3 = 0,$$

więc dla x z pewnego przedziału mamy

$$y(x) - \operatorname{arc\,tg} y(x) - x^3 = 0.$$

Różniczkując obustronnie względem x powyższą równość otrzymamy

$$y'(x) - \frac{1}{1 + y^2(x)} y'(x) - 3x^2 = 0.$$

Stąd

$$y'(x) \frac{1 + y^2(x) - 1}{1 + y^2(x)} = 3x^2,$$

czyli pierwsza pochodna wyraża się wzorem

$$y'(x) = \frac{1 + y^2(x)}{y^2(x)} \cdot 3x^2 = \left(1 + \frac{1}{y^2(x)}\right) \cdot 3x^2 = 3x^2 + \frac{3x^2}{y^2(x)}.$$

Różniczkując otrzymaną równość dostaniemy

$$\begin{aligned} y''(x) &= 6x + \frac{6xy^2(x) - 2y(x)y'(x) \cdot 3x^2}{[y^2(x)]^2} = 6x + \frac{6xy(x) - 6y'(x)x^2}{y^3(x)} \\ &= 6x + 6x\frac{y(x) - y'(x)x}{y^3(x)}. \end{aligned}$$

Uwzględniając otrzymany poprzednio wzór na $y'(x)$ mamy

$$y''(x) = 6x + 6x\frac{y(x) - \dfrac{1 + y^2(x)}{y^2(x)} 3x^2 \cdot x}{y^3(x)} = 6x\left(1 + \frac{y^3(x) - 3x^3\left(1 + y^2(x)\right)}{y^5(x)}\right).$$

▶ (b) Znajdziemy najpierw wartość funkcji uwikłanej $y = y(x)$ w punkcie $x_0 = 0$. Podstawiając $x_0 = 0$ do warunku $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$ otrzymamy $y_0 = 2$. Sprawdzimy teraz warunki gwarantujące istnienie i różniczkowalność funkcji uwikłanej określonej podanym warunkiem w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Pochodne cząstkowe

$$F'_x = [xe^y + ye^x - 2]'_x = e^y + ye^x, \quad F'_y = [xe^y + ye^x - 2]'_y = e^x + xe^y$$

są ciągłe w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (0, 2)$ oraz spełniony jest warunek $F'_y(0, 2) = 1 \neq 0$. Zatem w pewnym otoczeniu punktu x_0 istnieje jednoznacznie określona i różniczkowalna funkcja uwikłana $y = y(x)$ taka, że $y(0) = 2$. To oznacza, że w otoczeniu punktu $x_0 = 0$ zachodzi równość

$$xe^{y(x)} + y(x)e^x - 2 = 0.$$

Różniczkując powyższą równość względem zmiennej x otrzymamy

$$(*) \quad e^{y(x)} + xe^{y(x)}y'(x) + y'(x)e^x + y(x)e^x = 0.$$

Stąd obliczamy pochodną y'. Mamy

$$y'(x) = -\frac{e^{y(x)} + y(x)e^x}{xe^{y(x)} + e^x}.$$

Uwzględniając fakt, że $y(0) = 2$ otrzymamy

$$y'(0) = -\frac{e^{y(0)} + y(0)e^0}{0 \cdot e^{y(0)} + e^0} = -\frac{e^2 + 2}{1} = -\left(e^2 + 2\right).$$

Obliczymy teraz drugą pochodną funkcji uwikłanej różniczkując względem zmiennej x równość $(*)$. Mamy

$$\begin{aligned} e^{y(x)}y'(x) + e^{y(x)}y'(x) + xe^{y(x)}\left(y'(x)\right)^2 + xe^{y(x)}y''(x) \\ + y''(x)e^x + y'(x)e^x + y'(x)e^x + y(x)e^x = 0, \end{aligned}$$

a dalej

$$y'(x)\left(2e^{y(x)} + xy'(x) + 2e^x\right) + y''(x)\left(xe^{y(x)} + e^x\right) + y(x)e^x = 0.$$

Stąd

$$y''(x) = -\frac{y(x)e^x + y'(x)\left(2e^{y(x)} + xy'(x) + 2e^x\right)}{xe^{y(x)} + e^x}.$$

Podstawiając w ostatniej równości $y(0) = 2$ oraz $y'(0) = -e^2 - 2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} y''(0) &= -\frac{y(0)e^0 + y'(0)\left(2e^{y(0)} + 0 \cdot y'(0) + 2e^0\right)}{0 \cdot e^{y(0)} + e^0} \\ &= -\frac{2 - \left(e^2 + 2\right)\left(2e^2 + 2\right)}{1} = 2e^4 + 6e^2 + 2. \end{aligned}$$

▷ **Zadanie 3.24.** Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

(a) $xe^y - y + 1 = 0$; (b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$; (c) $x - y = \sin x - \sin y$.

Odpowiedzi. (a) $y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$, $y'' = \dfrac{2e^{2y} - xe^{3y}}{(1 - xe^y)^3}$; (b) $y' = \dfrac{2x - 3y}{3x - 2y}$, $y'' = \dfrac{30xy - 10x^2 - 10y^2}{(3x - 2y)^3}$; (c) $y' = 1$, $y'' = 0$.

► **Przykład 3.25.** Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych równaniami:

(a) $x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0$; (b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Rozwiązanie. Punkty, w których funkcja uwikłana może mieć ekstrema lokalne, znajdujemy korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum. W tym celu rozwiązujemy układ warunków:

$$F(x,y) = 0, \qquad F'_x(x,y) = 0, \qquad F'_y(x,y) \neq 0.$$

W otrzymanych punktach (x,y) sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum, tj. badamy, czy zachodzi nierówność

$$A = -\frac{F''_{xx}(x,y)}{F'_y(x,y)} \neq 0.$$

Na podstawie znaku A ustalamy rodzaj ekstremum. I tak jest to minimum, gdy $A > 0$ albo maksimum, gdy $A < 0$.

► (a) Przede wszystkim obliczymy potrzebne w rozwiązaniu pochodne cząstkowe funkcji $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y - 2$. Mamy

$$F'_x(x,y) = \left[x^2 + xy + y^2 + x - y - 2\right]'_x = 2x + y + 1, \quad F''_{xx}(x,y) = [2x + y + 1]'_x = 2,$$
$$F'_y(x,y) = \left[x^2 + xy + y^2 + x - y - 2\right]'_y = x + 2y - 1.$$

Zatem mamy do rozwiązania układ równań

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0, \\ F'_x(x,y) = 2x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Wyznaczając niewiadomą y z drugiego równania i wstawiając do pierwszego, po prostych przekształceniach, otrzymamy dwa rozwiązania $(x_1, y_1) = (0, -1)$, $(x_2, y_2) = (-2, 3)$. W obu punktach spełniony jest również warunek $F'_y \neq 0$. Mamy bowiem

$$F'_y(0,-1) = (x + 2y - 1)\Big|_{(0,-1)} = -3 \neq 0$$

oraz

$$F'_y(-2,3) = (x + 2y - 1)\Big|_{(-2,3)} = 3 \neq 0.$$

Sprawdzimy teraz warunek wystarczający w tych punktach. Mamy

$$A = -\frac{F''_{xx}(0,-1)}{F'_y(0,-1)} = \frac{-2}{x + 2y - 1}\Bigg|_{(0,-1)} = \frac{2}{3} > 0$$

oraz

$$A = -\frac{F''_{xx}(-2,3)}{F'_y(-2,3)} = \frac{-2}{x + 2y - 1}\Bigg|_{(-2,3)} = -\frac{2}{3} < 0,$$

więc funkcje uwikłane określone warunkiem $x^2+xy+y^2+x-y-2=0$ mają w punktach $x_1=0$ i $x_2=-2$ odpowiednio minimum oraz maksimum lokalne właściwe.

► (b) W tym przykładzie mamy

$$F'_x(x,y)=\left[x^3+y^3-3xy\right]'_x=3x^2-3y,\quad F''_{xx}(x,y)=\left[3x^2-3y\right]'_x=6x,$$
$$F'_y(x,y)=\left[x^3+y^3-3xy\right]'_y=3y^2-3x.$$

Zatem do rozwiązania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0,\\ F'_x(x,y)=3x^2-3y=0.\end{cases}$$

Układ ten ma dwa rozwiązania $(0,0)$, $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)$. Zauważmy teraz, że tylko punkt $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)$ spełnia trzeci warunek

$$F'_y\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)=3\sqrt[3]{2}\neq 0.$$

Ponieważ $F''_{xx}(x,y)=6x$, więc $F''_{xx}\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)=6\sqrt[3]{2}$. Zatem

$$A=-\frac{F''_{xx}\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)}{F'_y\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)}=-\frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{2}}=-2<0.$$

To oznacza, że funkcja uwikłana określona warunkiem $x^3+y^3-3xy=0$ w punkcie $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)$ ma maksimum lokalne właściwe. Natomiast w otoczeniu punktu $(0,0)$ nie istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y=y(x)$. Można to pokazać badając liczbę rozwiązań równania $x^3+y^3-3xy=0$ dla ustalonej wartości zmiennej $x=a>0$.

▷ **Zadanie 3.25.** Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y=y(x)$ określonych równaniami:

(a) $x^2+y^2-xy-2x+4y=0$; (b) $(x-y)^2=y+xy-3x$.

Odpowiedzi. (a) $x_{\max}=2/\sqrt{3}$, $y_{\max}=4/\sqrt{3}-2$, $x_{\min}=-2/\sqrt{3}$, $y_{\min}=-4/\sqrt{3}-2$; (b) $x_{\max}=0$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=6/5$, $y_{\min}=9/5$.

Mnożniki Lagrange'a

► **Przykład 3.26.** Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znaleźć ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych przy wskazanych ograniczeniach:

(a) $f(x,y)=4x-3y$, $x^2+y^2-25=0$; (b) $f(x,y)=x^2+y^2$, $xy-9=0$.

Rozwiązanie.

► (a) Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=4x-3y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right).$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji z ograniczeniami otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x = 2x\lambda + 4 = 0, \\ L'_y = 2y\lambda - 3 = 0, \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

Układ ten ma dwa rozwiązania:

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(4, -3, -\frac{1}{2}\right), \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-4, 3, \frac{1}{2}\right).$$

Korzystając z warunku wystarczającego istnienia ekstremum z ograniczeniami zbadamy, czy funkcja f ma ekstrema lokalne w tych miejscach. W tym celu wyznaczymy hessian obrzeżony. Obliczamy potrzebne pochodne cząstkowe. Mamy

$$L''_{xx}(x,y,\lambda) = 2\lambda, \;\; L''_{yy}(x,y,\lambda) = 2\lambda, \;\; L''_{xy}(x,y,\lambda) = 0,$$

oraz

$$g'_x = 2x, \;\; g'_y = 2y.$$

W punkcie $(x_1, y_1) = (4, -3)$ odpowiadającym mnożnikowi $\lambda_1 = -1/2$, hessian obrzeżony ma postać:

$$H\left(4, -3, -\frac{1}{2}\right) = \det \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{bmatrix} \left(4, -3, -\frac{1}{2}\right) = \det \begin{bmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 8 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 100 > 0.$$

Ponieważ jest on dodatni, więc funkcja f w punkcie $(4, -3)$ ma maksimum lokalne. Z kolei w punkcie $(x_2, y_2) = (-4, 3)$, odpowiadającym mnożnikowi $\lambda_2 = 1/2$, hessian obrzeżony ma postać:

$$H\left(-4, 3, \frac{1}{2}\right) = \det \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -8 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -100 < 0.$$

Ponieważ jest on ujemny, więc funkcja f ma w punkcie $(-4, 3)$ minimum lokalne.

► (b) Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 9).$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji z ograniczeniami otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + y\lambda = 0, \\ L'_y = 2y + x\lambda = 0, \\ g(x,y) = xy - 9 = 0. \end{cases}$$

Układ ten ma dwa rozwiązania odpowiadające tej samej wartości mnożnika:

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (-3, -3, -2), \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = (3, 3, -2).$$

Korzystając z warunku wystarczającego istnienia ekstremum z ograniczeniami zbadamy, czy funkcja f ma ekstrema lokalne w tych miejscach. W tym celu wyznaczymy hessian obrzeżony. Obliczamy potrzebne pochodne cząstkowe. Mamy

$$L''_{xx}(x,y,\lambda)=2,\ \ L''_{yy}(x,y,\lambda)=2,\ \ L''_{xy}(x,y,\lambda)=\lambda,$$

oraz

$$g'_x=y,\ \ g'_y=x.$$

W punkcie $(x_1,y_1)=(-3,-3)$, odpowiadającym mnożnikowi $\lambda_1=-2$, hessian obrzeżony ma postać:

$$H(-3,-3,-2)=\det\begin{bmatrix}0 & g'_x & g'_y\\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy}\\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy}\end{bmatrix}(-3,-3,-2)=\det\begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\ -3 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 2\end{bmatrix}=-72<0.$$

Ponieważ jest on ujemny, więc funkcja f ma w punkcie $(-3,-3)$ minimum lokalne. Tak samo jest w punkcie $(3,3)$.

▷ **Zadanie 3.26.** Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znaleźć ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych przy wskazanych ograniczeniach:

(a) $f(x,y)=5-3x-4x$, $x^2+y^2=25$; (b) $f(x,y)=x+y$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1$.

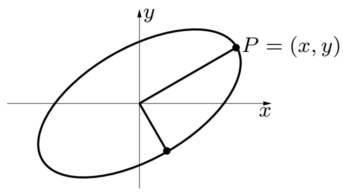
Odpowiedzi. (a) minimum $f(3,4)=-20$, maksimum $f(-3,-4)=30$;
(b) minimum $f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-2$, maksimum $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=2$.

▶ **Przykład 3.27.** (a) Znaleźć półosie elipsy $x^2-xy+y^2=100$.

(b) Na hiperboli $x^2-y^2=1$ znaleźć punkt położony najbliżej punktu $A=\left(1,2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Rozwiązanie.

▶ (a) Zauważmy najpierw, że jeżeli punkt (x,y) należy do elipsy, to punkt $(-x,-y)$ także należy do niej. To oznacza, że początek układu jest środkiem symetrii krzywej (rysunek).



Zatem, aby znaleźć półosie małą i dużą elipsy, wystarczy wyznaczyć odpowiednio najkrótszy i najdłuższy odcinek łączący punkt $P=(x,y)$ elipsy z początkiem układu. Aby uprościć obliczenia, zamiast długości odcinka będziemy rozważali jej kwadrat. Problem optymalizacyjny ma zatem postać: znaleźć wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$, przy warunku $x^2 - xy + y^2 = 100$. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 - xy + y^2 - 100\right).$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji z ograniczeniami otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2x\lambda - y\lambda = 0, \\ L'_y = 2y - x\lambda + 2y\lambda = 0, \\ g(x,y) = x^2 - xy + y^2 = 100. \end{cases}$$

Układ ten ma cztery rozwiązania:

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{10}{3}\sqrt{3}, -\frac{10}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\right); \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\frac{10}{3}\sqrt{3}, \frac{10}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\right);$$
$$(x_3, y_3, \lambda_3) = (10, 10, -2); \qquad (x_4, y_4, \lambda_4) = (-10, -10, -2).$$

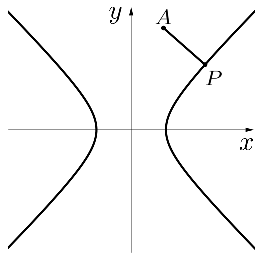
Ponieważ punkty pierwszy i drugi oraz trzeci czwarty są symetryczne, więc do dalszych rozważań weźmiemy tylko pierwszy i trzeci. Z geometrii wiemy, że elipsa ma półosie małą i wielką, więc nie ma potrzeby stosowania warunku wystarczającego istnienia ekstremum. Wystarczy tylko porównać wartości funkcji f w otrzymanych punktach. Z porównania tych wielkości wynika, że półoś mała elipsy ma długość

$$\sqrt{\left(-\frac{10}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{6}}{3},$$

a półoś duża – długość

$$\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}.$$

► (b) Niech $P = (x,y)$ będzie ruchomym punktem na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ (rysunek).



Odległość punktu $A = \left(1, 2 - \sqrt{2}/2\right)$ od P wyraża się wzorem

$$|AP| = \sqrt{(x-1)^2 + \left(y - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Aby uprościć obliczenia będziemy rozważali kwadrat tej wielkości. Problem optymalizacyjny przyjmuje wtedy postać: znaleźć wartość najmniejszą funkcji

$$f(x,y) = (x-1)^2 + \left(y - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

przy warunku $x^2 - y^2 = 1$. Łatwo zauważyć, że optymalne rozwiązanie istnieje i jest nim pewien punkt z pierwszej ćwiartki. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = (x-1)^2 + \left(y - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \lambda\left(x^2 - y^2 - 1\right).$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji z ograniczeniami otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2x\lambda - 2 = 0, \\ L'_y = 2y - 2y\lambda + \sqrt{2} - 4 = 0, \\ g(x,y) = x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

Układ ten ma w pierwszej ćwiartce tylko jedno rozwiązanie

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right).$$

Z rozważań geometrycznych wynika, że problem ma optymalne rozwiązanie, więc punkt hiperboli $(x_1, y_1) = \left(\sqrt{2}, 1\right)$ leży najbliżej punktu A.

▷ **Zadanie 3.27.** (a) Wyznaczyć półosie elipsy $7x^2 - 6xy + 7y^2 = 8$.
(b) Na paraboli $y = x^2 + 1$ znaleźć punkt położony najbliżej punktu $B = (3, 0)$.

Odpowiedzi. (a) $a = \sqrt{2}$, $b = 2/\sqrt{5}$; (b) $(1, 2)$.

Metoda najmniejszych kwadratów

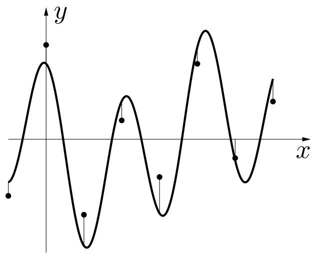
► **Przykład 3.28.** Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynniki a, b:

(a) funkcji liniowej $y = ax + b$, która najlepiej przybliża następujące dane:$(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 5)$;

(b) funkcji $y = a \sin x + b \cos x$, która najlepiej przybliża następujące dane: $(0, -1)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi, 1)$, $(3\pi/2, -1)$, $(2\pi, -2)$;

(c) funkcji wykładniczej $y = ae^{bx}$, która najlepiej przybliża następujące dane: $(-1, 0.5)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3.5)$.

Rozwiązanie. *Metoda najmniejszych kwadratów.* Załóżmy, że wielkość y zależy od zmiennej x i niech ta zależność ma postać $y = f(x, a, b)$, gdzie a, b są nieznanymi parametrami. Dysponujemy danymi: (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) $(n \geqslant 3)$. Chcemy znaleźć parametry a, b tak, aby funkcja $y = f(x, a, b)$ najlepiej przybliżała te wyniki, tj. aby suma kwadratów długości pionowych odcinków łączących dane punkty z wykresem funkcji (rysunek) była najmniejsza.



Funkcja ta ma zatem postać

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(x_k, a, b\right) - y_k \right]^2 ,$$

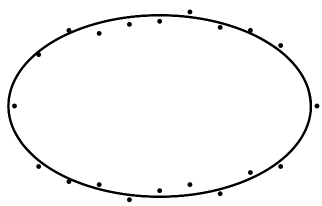
a szukamy jej najmniejszej wartości w $\mathbb{R}^2$.
Najczęściej funkcja f jest liniowa, tj. ma postać $ax + b$. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji S zmiennych a, b otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie a, b tego układu jest wartościami szukanych parametrów, gdyż dla funkcji liniowej hesjan funkcji S ma postać

$$H(a, b) = \det \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } P, Q \text{ są liczbami dodatnimi.}$$

To zaś oznacza, że funkcja S ma w punkcie (a, b) minimum lokalne właściwe i w tym miejscu przyjmuje wartość najmniejszą*.
Uwaga. Oprócz funkcji liniowych, rozważa się także zależności wykładnicze ae^{bx}, kwadratowe $ax^2 + b$, itp. oraz funkcje dwóch lub większej liczby zmiennych zależne od więcej niż dwóch parametrów np. $ax + by + cz + d$. Ponadto rozważa się aproksymowanie układu punktów na płaszczyźnie krzywymi, które nie są wykresami funkcji. Np. szuka się elipsy, która najlepiej przybliża układ punktów na płaszczyźnie. Tę metodę stosuje się w astronomii do wyznaczania parametrów orbity ciała niebieskiego na podstawie obserwacji jego położeń (rysunek).



*Wynika to z faktu, że funkcja S jest wypukła, jako funkcja dwóch zmiennych.

► (a) Dla danych z zadania funkcja S przyjmuje postać

$$S(a,b) = (-2a+b+1)^2 + (b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (3a+b-5)^2 .$$

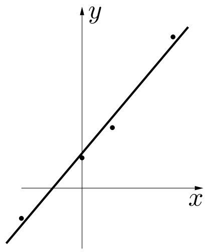
Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji S ma postać

$$\begin{cases} S'_a = -4(-2a+b+1) + 2(a+b-2) + 6(3a+b-5) = 0, \\ S'_b = 2(-2a+b+1) + 2(b-1) + 2(a+b-2) + 2(3a+b-5) = 0. \end{cases}$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{cases} 14a + 2b = 19, \\ 2a + 4b = 14. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a = 31/26 \approx 1.19$, $b = 15/13 \approx 1.15$. Trafność wyboru parametrów prostej można ocenić na rysunku.



► (b) Dla danych z zadania funkcja S przyjmuje postać:

$$S(a,b) = (b+1)^2 + a^2 + (-b-1)^2 + (-a+1)^2 + (b+2)^2.$$

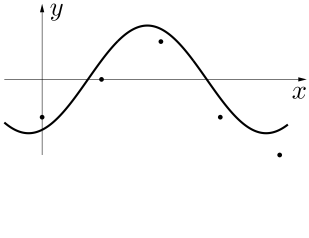
Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji S ma postać

$$\begin{cases} S'_a = 2a - 2(-a+1) = 0, \\ S'_b = 2(b+1) - 2(-b-1) + 2(b+2) = 0. \end{cases}$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{cases} 4a = 2, \\ 6b = -8. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a = 1/2$, $b = -4/3$. Trafność wyboru krzywej można ocenić na rysunku.



► (c) W tym przypadku, aby uprościć obliczenia zlogarytmujemy najpierw obie strony funkcji $y = ae^{bx}$. Możemy to zrobić, bo wśród podanych wartości funkcji są tylko liczby dodatnie. Mamy zatem

$$\ln y = bx + \ln a.$$

Przyjmując oznaczenia $z = \ln y$ oraz $A = b$, $B = \ln a$, otrzymamy funkcją liniową $z = Ax + B$. „Nowe dane” mają teraz postać $(-1, \ln 2)$, $(0, \ln 3)$, $(1, \ln 6)$, $(2, \ln 9)$, a funkcja $S(A, B)$ im odpowiadająca wyraża się wzorem

$$S(A,B) = (-A + B - \ln 0.5)^2 + (B - \ln 1)^2 + (A + B - \ln 2)^2 + (2A + B - \ln 3.5)^2.$$

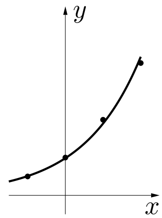
Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji S ma postać

$$\begin{cases} -2(-A + B - \ln 0.5) + (A + B - \ln 2) + 2(2A + B - \ln 3.5) = 0, \\ 2(-A + B - \ln 0.5) + 2(B - \ln 1) + (A + B - \ln 2) + (2A + B - \ln 3.5) = 0, \end{cases}$$

a po uproszczeniach postać

$$\begin{cases} 7A + B = \ln 2 + 2\ln 3.5 - 2\ln 0.5, \\ A + 6B = 2\ln 0.5 + \ln 7. \end{cases}$$

Przybliżonym rozwiązaniem tego układu jest $A \approx 0.6573, B \approx -0.0163$. Zatem $a = e^{-0.0163} = 0.9838$ oraz $b = A = 0.6573$. Trafność wyboru krzywej przybliżającej można ocenić na rysunku.



▷ **Zadanie 3.28.** Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczyć:

(a) współczynniki a, b funkcji kwadratowej $y = ax^2 + b$, która najlepiej przybliża następujące dane:$(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(3,4)$;

(b) współczynniki a, b funkcji postaci $y = \dfrac{a}{x+b}$, która najlepiej przybliża następujące dane: $(-1,4)$, $(0,3)$, $(2,1)$, $(4,1)$;

(c*) środek (a, b) okręgu o promieniu 5, który najlepiej przybliża pięć punktów: $(-4,2)$, $(1,-3)$, $(3,6)$, $(4,-2)$, $(5,5)$.

Odpowiedzi. (a) $26/49$, $b = 6/7$; (b) $a \approx 6.72$, $b \approx 2.63$; (c*) $a \approx 1.3$, $b \approx 1.7$.

4 Całki podwójne

Całki podwójne po prostokącie

► **Przykład 4.1.** Obliczyć całki podwójne po prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}\right) dxdy,\ R=[1,2]\times[1,e]$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_R y\cos(2x+y)\,dxdy,\ R=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_R y^3e^{x^2}\,dxdy,\ R=[0,2]\times[-1,1]$;

(d) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{xy+x+y+1}{x-1}\,dxdy,\ R=[2,3]\times[1,3]$.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $R=[a,b]\times[c,d]$, to

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right\}dx=\int\limits_c^d\left\{\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right\}dy. \tag{4.1}$$

Całki po prawej stronie znaku równości nazywamy całkami iterowanymi i często umownie zapisujemy odpowiednio w postaci

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy,\qquad \int\limits_c^d dy\int\limits_c^d f(x,y)\,dx.$$

Jeżeli funkcja f jest iloczynem funkcji g i h jednej zmiennej, ciągłych odpowiednio na przedziałach $[a,b]$ i $[c,d]$, to

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_R g(x)h(y)\,dxdy=\left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_c^d h(y)\,dy\right), \tag{4.2}$$

gdzie $R=[a,b]\times[c,d]$. Funkcję $f(x,y)=g(x)h(y)$ nazywamy funkcją o rozdzielonych zmiennych.

► (a) Korzystając ze wzoru (4.1) oraz podstawowych własności całek oznaczonych mamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dxdy &= \int\limits_1^2 \left\{\int\limits_1^e \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dy\right\}dx = \int\limits_1^2 \left\{x\int\limits_1^e \frac{dy}{y}+\frac{1}{x^2}\int\limits_1^e y\,dy\right\}dx \\
&= \int\limits_1^2 \left\{x\left[\ln|y|\right]_1^e+\frac{1}{x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^e\right\}dx \\
&= \int\limits_1^2 \left\{x\left(\ln e-\ln 1\right)+\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}dx \\
&= \int\limits_1^2 x\,dx+\frac{e^2-1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\frac{e^2-1}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 \\
&= 2-\frac{1}{2}+\frac{e^2-1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{7+e^2}{4}.
\end{aligned}$$

Uwaga. Można wybrać odwrotną kolejność całkowania

$$\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dxdy = \int\limits_1^e \left\{\int\limits_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dx\right\}dy.$$

W tym przypadku wybór kolejności całkowania nie ma istotnego wpływu na stopień trudności rachunków. Nie zawsze tak musi być. Świadczy o tym przykład (c).

► (b) Korzystając ze wzoru (4.1) oraz ze wzorów na całkowanie przez podstawienie i przez części dla całek oznaczonych mamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R y\cos(2x+y)\,dxdy &= \int\limits_0^\pi \left\{y\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x+y)\,dx\right\}dy \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ u=2x+y;\ du=2\,dx\\ x=0,\ u=y;\\ x=\pi/2,\ u=\pi+y\end{array}\right] \\
&= \int\limits_0^\pi \left\{y\int\limits_y^{y+\pi} \frac{\cos u}{2}\,du\right\}dy = \int\limits_0^\pi y\left[\frac{\sin u}{2}\right]_y^{y+\pi}dy \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi y\left(\sin(y+\pi)-\sin y\right)\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi y\left(-\sin y-\sin y\right)\,dy \\
&= -\int\limits_0^\pi y\sin y\,dy \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez części}\\ u(y)=y,\ \ v'(y)=\sin y\\ u'(y)=1,\ v(y)=-\cos y\end{array}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[y\cos y\right]_0^\pi + \int\limits_0^\pi -\cos y\,dy = -\pi + \left[-\sin y\right]_0^\pi = -\pi.$$

► (c) Jak w poprzednich przykładach korzystając ze wzoru (4.1) oraz własności całek oznaczonych mamy

$$\iint\limits_R y^3 e^{x^2}\,dxdy = \int\limits_0^2 \left\{\int\limits_{-1}^1 e^{x^2} y^3\,dy\right\} dx = \int\limits_0^2 e^{x^2} \left\{\int\limits_{-1}^1 y^3\,dy\right\} dx$$

$$= \int\limits_0^2 e^{x^2} \left[\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^1 dx = \int\limits_0^2 e^{x^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) dx = 0.$$

W przykładzie tym widać, że dobór kolejności całkowania w całkach iterowanych może mieć wpływ na złożoność obliczeń. Całkując bowiem w odwrotnej kolejności mamy

$$\iint\limits_R y^3 e^{x^2}\,dxdy = \int\limits_{-1}^1 \left\{\int\limits_0^2 e^{x^2} y^3\,dx\right\} dy = \int\limits_{-1}^1 y^3 \left\{\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx\right\} dy.$$

To oznacza, że należałoby najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji e^{x^2}, która nie jest funkcją elementarną.

► (d) Zauważmy, że w tym przykładzie funkcja $\dfrac{xy+x+y+1}{x-1}$ jest funkcją o rozdzielonych zmiennych, gdyż

$$\frac{xy+x+y+1}{x-1} = \frac{(x+1)(y+1)}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}\cdot(y+1)$$

Korzystając ze wzoru (4.2) oraz prostych całek oznaczonych mamy

$$\iint\limits_R \frac{xy+x+y+1}{x-1}\,dxdy = \iint\limits_R \frac{x+1}{x-1}\cdot(y+1)\,dxdy = \left(\int\limits_2^3 \frac{x+1}{x-1}\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_1^3 (y+1)\,dy\right)$$

$$= \left(\int\limits_2^3 \left(1+\frac{2}{x-1}\right) dx\right)\cdot\left[\frac{(y+1)^2}{2}\right]_1^3$$

$$= \left[x + 2\ln|x-1|\right]_2^3 \cdot (8-2) = 6(1+2\ln 2).$$

▷ **Zadanie 4.1.** Obliczyć podane całki podwójne po prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint\limits_R \left((x-y)^2+\sqrt{y}\right)\,dxdy,\ R=[-1,1]\times[0,1]$; (b) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3},\ R=[0,2]\times[0,1]$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_R x\sin xy\,dxdy,\ R=[0,1]\times[\pi,2\pi]$; (d) $\displaystyle\iint\limits_R e^{2x-y}\,dxdy,\ R=[0,1]\times[-1,0]$.

Odpowiedzi. (a) $8/3$; (b) $5/24$; (c) 0; (d) $(e-1)^2(e+1)/2$.

Całki podwójne po obszarach normalnych

► **Przykład 4.2.** Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:

(a) $xy = 6,\ x + y = 7$; (b) $x = y^2,\ x = \dfrac{y^2}{2} + 1$.

Narysować obszar całkowania.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na $D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$ – obszarze normalnym względem osi Ox, to

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy. \tag{4.3}$$

I analogicznie, jeżeli funkcja f jest ciągła na $D = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ p(y) \leqslant x \leqslant q(y)\}$ – obszarze normalnym względem osi Oy, to

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx. \tag{4.4}$$

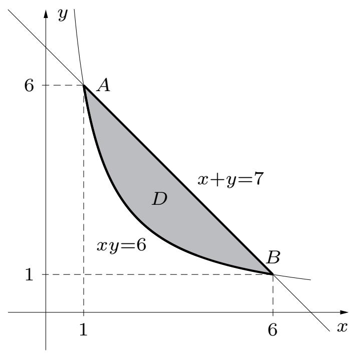
Całki po prawej stronie równości we wzorach (4.3), (4.4) nazywamy całkami iterowanymi.

► (a) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Obszar ten jest normalny względem osi Ox i osi Oy. Z układu równań

$$xy = 6, \quad x + y = 7$$

wyznaczamy współrzędne punktów $A = (1,6)$, $B = (6,1)$ przecięcia hiperboli $xy = 6$ z prostą $x + y = 7$. Traktując obszar D jako normalny względem osi Ox:

$$D = \{(x,y) : 1 \leqslant x \leqslant 6,\ 6/x \leqslant y \leqslant 7 - x\}$$



oraz korzystając ze wzoru (4.3) mamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_1^6 dx \int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)\,dy.$$

Gdy obszar D potraktujemy jako normalny względem osi Oy:

$$D = \{(x,y) : 1 \leqslant y \leqslant 6,\ 6/y \leqslant y \leqslant 7 - y\},$$

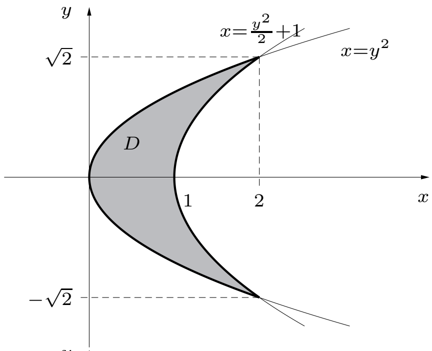
to z kolei stosując wzór (4.4) otrzymamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_1^6 dy \int\limits_{\frac{6}{y}}^{7-y} f(x,y)\,dx.$$

► (b) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Jest to obszar normalny tylko względem osi Oy. Rozwiązując układ równań

$$x = y^2, \quad x = \frac{y^2}{2} + 1$$

otrzymamy miejsca przecięcia parabol. Są to punkty $\left(2, -\sqrt{2}\right)$, $\left(2, \sqrt{2}\right)$. Obszar D jest opisany przez nierówności:

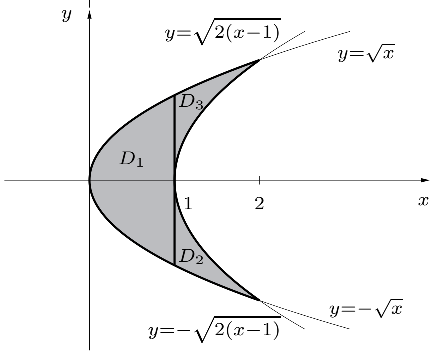


$$-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}, \quad y^2 \leqslant x \leqslant \frac{y^2}{2} + 1.$$

Zatem korzystając ze wzoru (4.4) otrzymamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2}^{\frac{y^2}{2}+1} f(x,y)\,dx.$$

Obszar D nie jest normalny względem osi Ox. Można go jednak podzielić na trzy obszary D_1, D_2, D_3 (rysunek), z których każdy jest obszarem normalnym względem osi Ox. Obszary te są określone nierównościami:



$$D_1: \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x};$$
$$D_2: \ 1 \leqslant x \leqslant 2, \ -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant -\sqrt{2(x-1)};$$
$$D_3: \ 1 \leqslant x \leqslant 2, \ \sqrt{2(x-1)} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}.$$

Z addytywności całki względem obszaru całkowania oraz wzoru (4.3) mamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{2(x-1)}} f(x,y)\,dy +$$

$$+\int_1^2 dx \int_{\sqrt{2(x-1)}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$$

▷ **Zadanie 4.2.** Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:

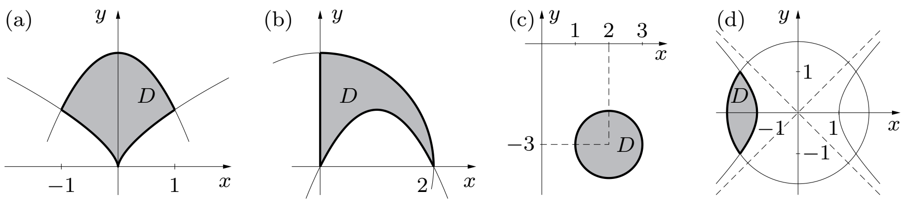
(a) $x^2+y=2,\ \ y^3=x^2$; (b) $x^2+y^2=4,\ \ y=2x-x^2,\ \ x=0\ (x,y\geqslant 0)$;

(c) $x^2-4x+y^2+6y+12=0$; (d) $x^2-y^2=1,\ \ x^2+y^2=3\ (x<0)$.

Narysować obszary całkowania.

Odpowiedzi. (a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$;

(c) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{-3-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{-3+\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy$; (d) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y^2}}^{-\sqrt{1+y^2}} f(x,y)\,dx$.



► **Przykład 4.3.** Narysować obszary całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całkach iterowanych:

(a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_2^{4-x} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$; (c) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_{\sin x}^{2} f(x,y)\,dy$;

(d) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{|x|} f(x,y)\,dy$; (e) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e^2} dx \int\limits_{-1}^{\ln x} f(x,y)\,dy$; (f) $\int\limits_1^4 dy \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} f(x,y)\,dx$.

Rozwiązanie. Zapisanie całki podwójnej $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ w formie całki iterowanej

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy,$$

oznacza, że obszar całkowania D określony jest przez nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad g(x) \leqslant y \leqslant h(x),$$

czyli jest obszarem normalnym względem osi Ox. Podobnie, zapisanie całki podwójnej w formie

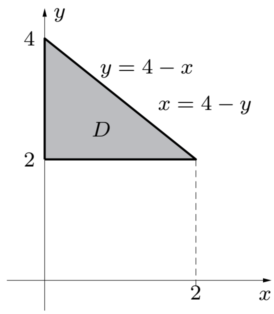
$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx,$$

oznacza, że obszar całkowania D określony jest przez nierówności,

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad p(y) \leqslant y \leqslant q(y),$$

czyli jest obszarem normalnym względem osi Oy. Ponadto w rozwiązaniach będziemy korzystali ze wzorów (4.3, 4.4, str. 137).

► (a) Z postaci całki iterowanej wynika, że obszar całkowania D jest określony przez nierówności $0 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 4-x$ (rysunek), czyli jest obszarem normalnym względem osi Ox. Obszar ten jest normalny także względem osi Oy, gdyż można go opisać nierównościami:



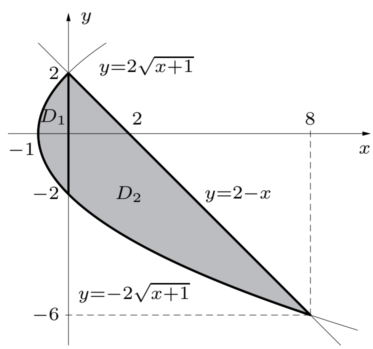
$$2 \leqslant y \leqslant 4, \ 0 \leqslant x \leqslant 4-y.$$

Zatem korzystając ze wzoru (4.4) mamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)\,dx.$$

► (b) Obszar całkowania D jest określony nierównościami:

$$-6 \leqslant y \leqslant 2, \qquad \frac{y^2}{4} - 1 \leqslant x \leqslant 2-y,$$



czyli jest normalny względem osi Oy. Jest również obszarem normalnym względem osi Ox. Jednak, aby zmienić kolejność całkowania w całce obszar D należy podzielić na dwa obszary D_1, D_2 (rysunek) normalne względem osi Ox. Pierwszy jest określony nierównościami:

$$-1 \leqslant x \leqslant 0, \ -2\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x+1},$$

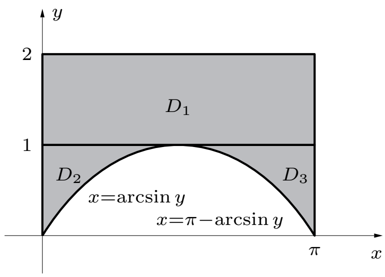
a drugi nierównościami:

$$0 \leqslant x \leqslant 8, \ -2\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant 2-x.$$

Korzystając z addytywności całki względem obszaru całkowania, a następnie ze wzoru (4.3), otrzymamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

► (c) Obszar całkowania D określony jest nierównościami $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\sin x \leqslant y \leqslant 2$, czyli jest normalny względem osi Ox. Nie jest jednak obszarem normalnym względem osi Oy. Zatem, aby zmienić kolejność całkowania, należy obszar D podzielić na trzy obszary D_1, D_2, D_3 (rysunek) normalne względem osi Oy:



$$D_1:\ 1 \leqslant y \leqslant 2, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$D_2:\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 0 \leqslant x \leqslant \arcsin y,$$
$$D_3:\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ \pi - \arcsin y \leqslant x \leqslant \pi.$$

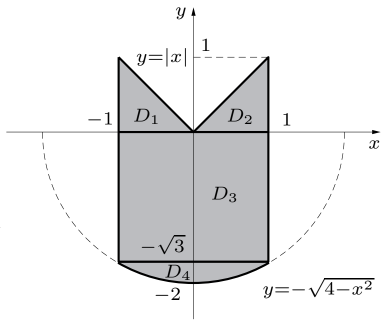
Wtedy korzystając z addytywności całki względem obszaru całkowania, a następnie ze wzoru (4.4), otrzymamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\pi} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)\,dx$$
$$+ \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx.$$

► (d) Z postaci całki iterowanej wynika, że obszar całkowania D określony jest nierównościami:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant |x|$$

(rysunek), czyli jest normalny względem osi Ox. Nie jest jednak normalny względem drugiej osi. Zatem, aby zmienić kolejność całkowania, obszar D dzielimy na cztery obszary. Każdy normalny względem osi Oy :

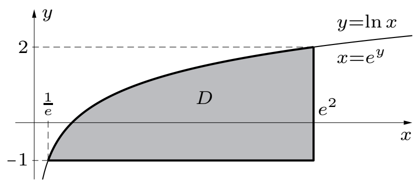


$$D_1: 0 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant -y,$$
$$D_2: 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x \leqslant 1,$$
$$D_3: -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0,\ -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$D_4: -2 \leqslant y \leqslant -\sqrt{3},\ -\sqrt{4-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}.$$

Wtedy korzystając z addytywności całki względem obszaru całkowania, a następnie ze wzoru (4.4), otrzymamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_4} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{-y} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dy \int\limits_{-1}^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

► (e) Obszar całkowania D jest określony nierównościami $1/e \leqslant x \leqslant e^2$, $-1 \leqslant y \leqslant \ln x$ (rysunek), czyli jest normalny względem osi Ox. Jest on normalny również względem osi Oy, gdyż można go opisać nierównościami:



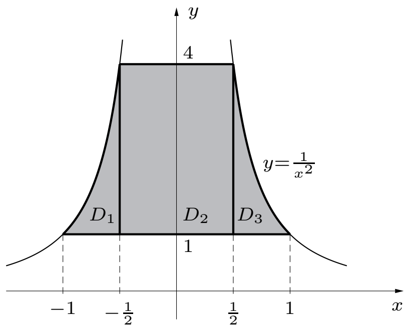
$$-1 \leqslant y \leqslant 2,\ e^y \leqslant x \leqslant e^2.$$

Zatem wobec wzoru (4.4) mamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_{e^y}^{e^2} f(x,y)\,dx.$$

► (f) Obszar całkowania D określony jest nierównościami $1 \leqslant y \leqslant 4$, $-1/\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1/\sqrt{y}$, czyli jest normalny względem osi Oy. Jest również normalny względem osi Ox. Jednak, aby zmienić kolejność całkowania w całce, należy obszar D podzielić na trzy obszary D_1, D_2, D_3 normalne względem osi Ox (rysunek). Mamy

$$D_1: -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2},\ 1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2},$$
$$D_2: -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ 1 \leqslant y \leqslant 4,$$
$$D_3: \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2}.$$



Korzystając z addytywności całki względem obszaru całkowania, a następnie ze wzoru (4.3), mamy

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int\limits_{1}^{\frac{1}{x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{1}^{4} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{-1}^{\frac{1}{x^2}} f(x,y)\,dy.$$

$\triangleright$ **Zadanie 4.3.** Narysować obszary całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całkach iterowanych:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{|x|} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy$; (c) $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

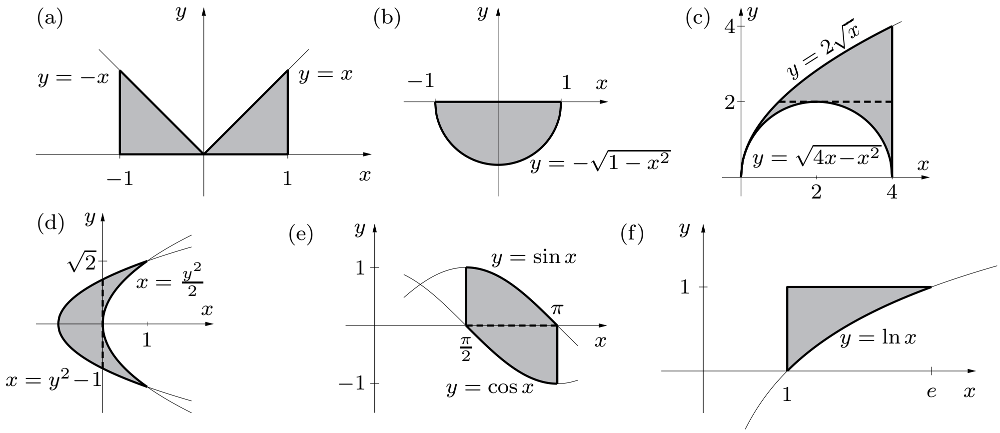
(d) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\,dx$; (e) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$; (f) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy$.

Odpowiedzi. (a) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-1}^{-y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} f(x,y)\,dx$; (b) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;

(c) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)\,dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)\,dx$;

(d) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy$;

(e) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\arccos y}^{\pi} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx$; (f) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1}^{e^y} f(x,y)\,dx$.



► **Przykład 4.4.** Obliczyć całki podwójne po obszarach ograniczonych krzywymi lub opisanych nierównościami:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{y}}, \quad D:\ y=x-1,\ y=5-x,\ x=2;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D y\sin\left(x+y^2\right)\,dxdy, \quad D:\ x=y^2,\ x=\frac{\pi}{2}-y^2;$

(c) $\displaystyle\iint\limits_D \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dxdy, \quad D:\ x=y^2+1,\ y=x,\ y=1,\ y=\sqrt{3};$

(d) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{\left(1-y^2\right)^2}, \quad D:\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant \sin x;$

(e) $\displaystyle\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy, \quad D:\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi;$

(f) $\displaystyle\iint\limits_D \max(2x,y)\,dxdy, \quad D:\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

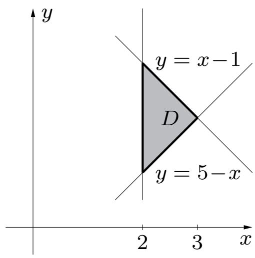
Narysować obszary całkowania.
Uwaga. Symbol $\max(a,b)$ oznacza większą spośród liczb a,b.

Rozwiązanie. W rozwiązaniach będziemy korzystali ze wzorów (4.3, 4.4, str. 137) na zamianę całek podwójnych na iterowane oraz podstawowych własności całek oznaczonych. Ponadto przypominamy o umownym zapisie dotyczącym kolejności całkowania w całkach iterowanych:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx,$$

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy.$$

► (a) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Obszar ten jest normalny względem obu osi. Dla obliczenia całki potraktujemy go jako normalny względem osi Ox (dlaczego?). Zatem

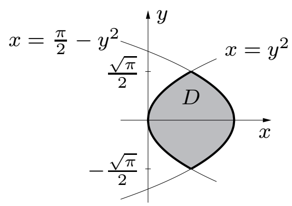


$$D = \{(x,y) : 2 \leqslant x \leqslant 3,\, 5-x \leqslant y \leqslant x-1\}.$$

Korzystając ze wzoru (4.3), a dalej z podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy kolejno

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{y}} &= \int\limits_2^3 dx \int\limits_{x-1}^{5-x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int\limits_2^3 \left\{ \int\limits_{x-1}^{5-x} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right\} dx \\
&= \int\limits_2^3 \left[2\sqrt{y}\right]_{x-1}^{5-x} dx = 2\int\limits_2^3 \left(\sqrt{5-x} - \sqrt{x-1}\right) dx \\
&= 2\int\limits_2^3 \sqrt{5-x}\,dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ u = 5-x \\ du = -dx \\ x=2,\ u=3 \\ x=3,\ u=2 \end{array}\right] - 2\int\limits_2^3 \sqrt{x-1}\,dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ u = x-1 \\ du = dx \\ x=2,\ u=1 \\ x=3,\ u=2 \end{array}\right] \\
&= 2\int\limits_3^2 -\sqrt{u}\,du - 2\int\limits_1^2 \sqrt{u}\,du = 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right]_2^3 - 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right]_1^2 \\
&= \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1\right).
\end{aligned}$$

► (b) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Obszar ten jest normalny względem obu osi. Dla obliczenia całki potraktujemy obszar jako normalny względem osi Oy (dlaczego?). Zatem



$$D = \left\{ (x,y) : -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2},\, y^2 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} - y^2 \right\}.$$

Korzystając ze wzoru (4.4), a dalej podstawowych metod obliczania całek oznaczonych mamy kolejno

$$\iint\limits_D y\sin\left(x+y^2\right)\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} dy \int\limits_{y^2}^{\frac{\pi}{2}-y^2} y\sin\left(x+y^2\right)\,dx =$$

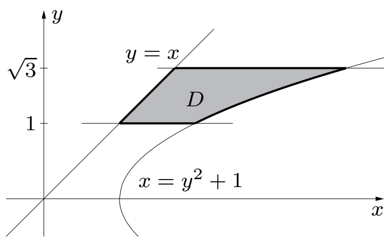
$$= \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left\{ \int_{y^2}^{\frac{\pi}{2}-y^2} y \sin\left(x+y^2\right)\, dx \right\} dy \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ u = x + y^2 \\ du = dx \\ x = y^2,\ u = 2y^2 \\ x = \frac{\pi}{2} - y^2,\ u = \frac{\pi}{2} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left\{ \int_{2y^2}^{\frac{\pi}{2}} y \sin u \, du \right\} dy = \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left[-y\cos u\right]_{2y^2}^{\frac{\pi}{2}} dy$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} -y\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2y^2\right) dy = \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} y\cos 2y^2 \, dy = 0.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, iż całka oznaczona z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem początu układu współrzędnych jest równa 0.

► (c) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku.



Obszar ten jest normalny względem osi Ox i Oy. Dla obliczenia całki potraktujemy obszar jako normalny względem osi Oy (dlaczego?). Zatem

$$D = \left\{(x,y) :\ 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ y \leqslant x \leqslant y^2 + 1\right\}.$$

Korzystając ze wzoru (4.4), a dalej z podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy kolejno

$$\iint_D \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dxdy = \int_1^{\sqrt{3}} dy \int_y^{y^2+1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left\{ \int_y^{y^2+1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dx \right\} dy$$

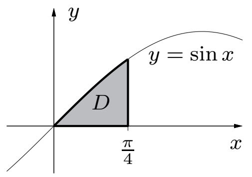
$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left[-\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right]_y^{y^2+1} dy$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{1}{y^2+1} + \frac{y^2+1}{y^2}\right) - \left(-\frac{1}{y} + \frac{y}{y^2}\right)\right] dy$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = \left[y - \frac{1}{y} - \operatorname{arc\,tg} y\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}.$$

► (d) Obszar całkowania

$$D = \left\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\right\}$$



przedstawiono na rysunku. Korzystając ze wzoru (4.3), a dalej z podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy kolejno

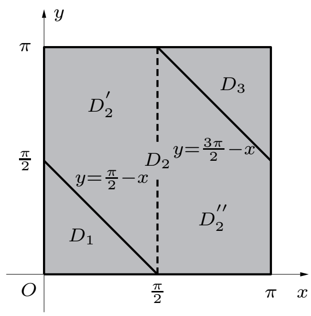
$$\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{(1-y^2)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} \frac{y\,dy}{(1-y^2)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int\limits_0^{\sin x} \frac{y\,dy}{(1-y^2)^2} \right\} dy \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ u = 1 - y^2 \\ du = -2y\,dy \\ y = 0,\ u = 1 \\ y = \sin x,\ u = \cos^2 x \end{array} \right]$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int\limits_1^{\cos^2 x} -\frac{du}{2u^2} \right\} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{u}\right]_1^{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg} x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

► (e) Ponieważ

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{dla } 0 \leqslant x+y \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos(x+y) & \text{dla } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x+y \leqslant \dfrac{3\pi}{2}, \\ \cos(x+y) & \text{dla } \dfrac{3\pi}{2} \leqslant x+y \leqslant 2\pi, \end{cases}$$



więc obszar D dzielimy na obszary D_1, D_2, D_3 (rysunek). Przy czym obszar D_2 jeszcze na obszary D_2', D_2''. Z własności addytywności całki względem obszaru całkowania mamy

$$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2'} (-\cos(x+y))\,dxdy + \iint\limits_{D_2''} (-\cos(x+y))\,dxdy + \iint\limits_{D_3} \cos(x+y)\,dxdy.$$

Obszary całkowania są normalne względem osi Ox. Zatem do obliczenia kolejnych całek korzystamy ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych. Mamy kolejno

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\,dxdy &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(x+y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}dx\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x\right)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,dx\\ &= \left[x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2'}(-\cos(x+y))\,dxdy &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}(-\cos(x+y))\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\sin(x+y)\Big]_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=\pi}dx\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sin(x+\pi)-\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\right]dx\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)\,dx = \Big[-\cos x+x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}+1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2''}(-\cos(x+y))\,dxdy &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}-x}(-\cos(x+y))\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big[-\sin(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\frac{3\pi}{2}-x}dx\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}-x\right)-(-\sin(x+0))\right]dx\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x+1)\,dx = \Big[-\cos x+x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2}+1\end{aligned}$$

oraz

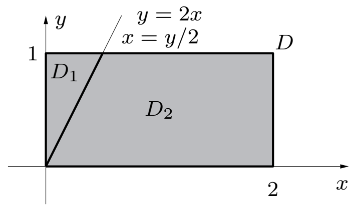
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_3}\cos(x+y)\,dxdy &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int\limits_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big[\sin(x+y)\Big]_{y=\frac{3\pi}{2}-x}^{y=\pi}dx\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sin(x+\pi)-\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}-x\right)\right]dx\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin x-(-1))\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin x)\,dx = \Big[x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2}-1.\end{aligned}$$

Tak więc

$$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)+\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 2\pi.$$

► (f) Funkcja $\max(2x, y)$ jest określona wzorem

$$\max(2x,y) = \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad 2x \geqslant y, \\ y & \text{dla} \quad 2x \leqslant y. \end{cases}$$



Prosta $y = 2x$ dzieli obszar całkowania

$$D = [0,2] \times [0,1]$$

na obszary D_1 i D_2 normalne względem osi Oy (rysunek). Z addytywności całki względem obszaru całkowania, wzoru (4.4) oraz prostych całek oznaczonych otrzymamy

$$\iint\limits_D \max(2x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} y\,dxdy + \iint\limits_{D_2} 2x\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} y\,dx + 2\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} x\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left[xy\right]_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} dy + 2\int\limits_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^2\,dy + \int\limits_0^1 \left(4-\frac{y^2}{4}\right) dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 + \left[4y - \frac{y^3}{12}\right]_0^1 = \frac{49}{12}.$$

▷ **Zadanie 4.4.** Obliczyć całki podwójne po obszarach ograniczonych krzywymi lub opisanych nierównościami:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{x^2}\,dxdy, \quad D:\ y = x^2,\ y = x^3,\ x = 2;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D x^2\sqrt{y-x}\,dxdy, \quad D:\ x = y,\ x = \frac{y}{2},\ x = 1,\ x = 4;$

(c) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right) dxdy, \quad D:\ y = \sqrt{4-x^2},\ y = 0;$

(d) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{y^2+16}\,dxdy, \quad D:\ y = x,\ x = 0,\ y = 3;$

(e*) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\, dxdy, \quad D: 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ x \leqslant y \leqslant \pi;$

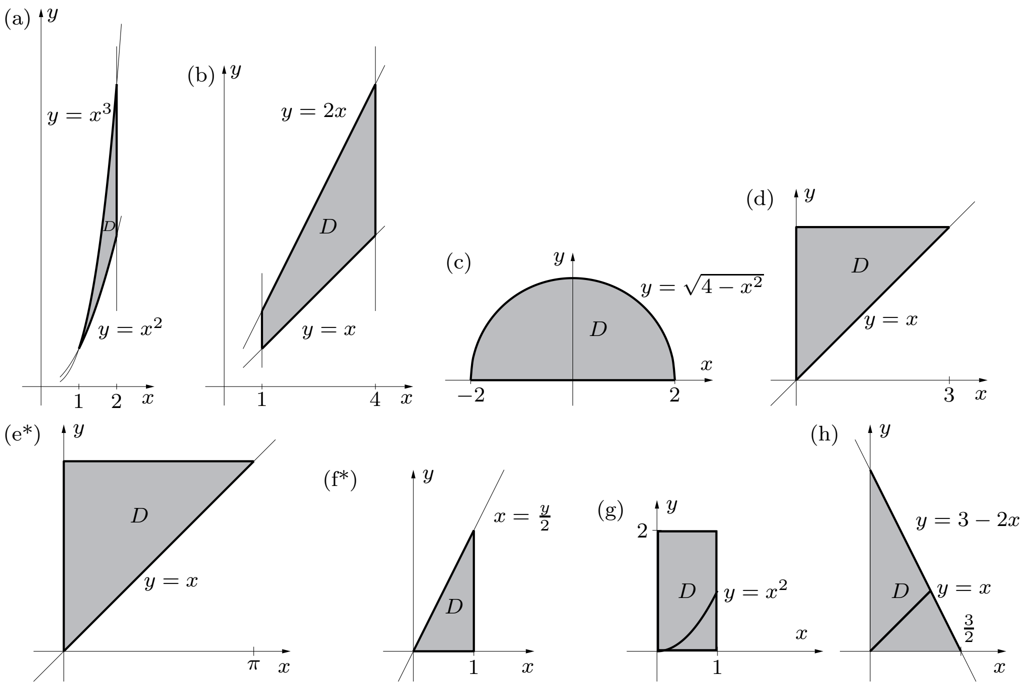
(f*) $\displaystyle\iint\limits_D y e^{x^3}\, dxdy, \quad D: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x;$

(g) $\displaystyle\iint\limits_D \min\left(x^2, y\right)\, dxdy, \quad D: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2;$

(h) $\displaystyle\iint\limits_D |x-y|\, dxdy, \quad D: x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 3-2x.$

Narysować obszary całkowania.
Uwaga. Symbol $\min(a,b)$ oznacza mniejszą spośród liczb a, b.

Odpowiedzi. (a) 1/15; (b) 2044/27; (c) 128/15; (d) 61/3; (e*) 2; (f*) $2(e-1)/3$; (g) 5/6; (h) 17/30.



► **Przykład 4.5.** Obliczyć całki podwójne z funkcji nieciągłych:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \lfloor y \rfloor\, dxdy,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant \frac{5}{2}\right\};$

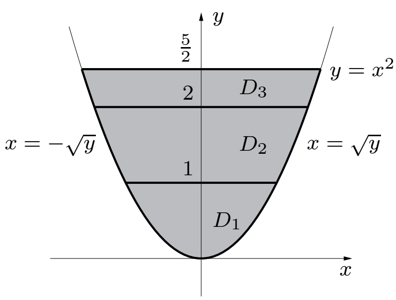
(b) $\displaystyle\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x-y)\, dxdy,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}.$

Uwaga. Symbol $\lfloor u \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby u.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy fakt, iż zmiana wartości funkcji dwóch zmiennych w punktach krzywych ciągłych nie powoduje zmiany wartości całki z tej funkcji.

► (a) Ponieważ

$$\lfloor y \rfloor = \begin{cases} \vdots \\ 0 \text{ dla } 0 \leqslant y < 1, \\ 1 \text{ dla } 1 \leqslant y < 2, \\ 2 \text{ dla } 2 \leqslant y < 3, \\ \vdots \end{cases}$$



więc funkcja podcałkowa $f(x, y) = \lfloor y \rfloor$ jest nieciągła w punktach prostych $y = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Zatem obszar całkowania D podzielimy prostymi $y = 1$, $y = 2$ na trzy obszary D_1, D_2 i D_3 – normalne względem osi Oy (rysunek). Z addytywności całki względem obszaru całkowania mamy

$$\iint\limits_{D} \lfloor y \rfloor \, dxdy = \iint\limits_{D_1} \lfloor y \rfloor \, dxdy + \iint\limits_{D_2} \lfloor y \rfloor \, dxdy + \iint\limits_{D_3} \lfloor y \rfloor \, dxdy.$$

Do obliczenia każdej z tych całek wykorzystamy podany na wstępie fakt, wzór (4.4, str. 137) oraz proste całki oznaczone. Mamy kolejno:

$$\iint\limits_{D_1} \lfloor y \rfloor \, dxdy = \iint\limits_{D_1} 0 \, dxdy = 0,$$

$$\iint\limits_{D_2} \lfloor y \rfloor \, dxdy = \iint\limits_{D_2} 1 \, dxdy = \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2\int\limits_{1}^{2} \sqrt{y} \, dy = \frac{4}{3}\left[\sqrt{y^3}\right]_1^2 = \frac{4}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right],$$

oraz

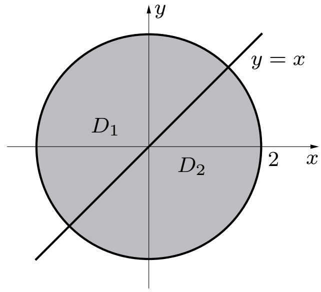
$$\iint\limits_{D_3} \lfloor y \rfloor \, dxdy = \iint\limits_{D_3} 2 \, dxdy = 2\int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 4\int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} \sqrt{y} \, dy = \frac{8}{3}\left[\sqrt{y^3}\right]_2^{\frac{5}{2}} = \frac{8}{3}\left[\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{2}\right].$$

Zatem

$$\iint\limits_{D} \lfloor y \rfloor \, dxdy = \frac{4}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right] + \frac{8}{3}\left[\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{2}\right] = \frac{10\sqrt{10} - 8\sqrt{2} - 4}{3}.$$

► (b) Ponieważ

$$\operatorname{sgn}(x-y)=\begin{cases}-1 & \text{dla } x-y<0,\\ 0 & \text{dla } x-y=0,\\ 1 & \text{dla } x-y>0,\end{cases}$$



więc funkcja $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ jest nieciągła w punktach prostej $y=x$. Zatem obszar całkowania D dzielimy prostą $y=x$ na dwie części D_1, D_2 (rysunek). Z addytywności całki względem obszaru całkowania mamy

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x-y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1}\operatorname{sgn}(x-y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2}\operatorname{sgn}(x-y)\,dxdy.$$

Do obliczenia całek wykorzystamy podany na wstępie fakt oraz interpretację geometryczną całki podwójnej. Mamy

$$\iint\limits_{D_1}\operatorname{sgn}(x-y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(-1)\,dxdy=-\text{ pole }(D_1)=-\frac{1}{2}\cdot 4\pi=-2\pi,$$

$$\iint\limits_{D_2}\operatorname{sgn}(x-y)\,dxdy=\iint\limits_{D_2}1\,dxdy=\text{ pole }(D_2)=\frac{1}{2}\cdot 4\pi=2\pi.$$

Zatem

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x-y)\,dxdy=0.$$

▷ **Zadanie 4.5.** Obliczyć całki podwójne z funkcji nieciągłych:

(a) $\iint\limits_D \lfloor x+y\rfloor\,dxdy,\ D=[0,2]\times[0,2];$

(b) $\iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2-y^2+2\right)\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 4\right\}.$

Uwaga. Symbol $\lfloor u\rfloor$ oznacza część całkowitą liczby u.

Odpowiedzi. (a) 6; (b) $4\pi/3+4\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

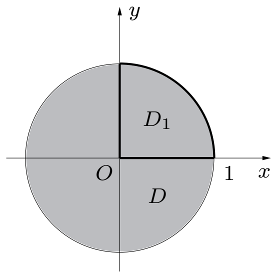
► **Przykład 4.6.** Obliczyć wartości średnie funkcji na wskazanych obszarach:

(a) $f(x,y)=|xy|,\ D:\ x^2+y^2\leqslant\ 1;$

(b) $f(x,y)=x^2+y^2,\ D:\ x\leqslant y\leqslant x+2,\ 2\leqslant x\leqslant 3.$

Rozwiązanie. Wartość średnia funkcji f na obszarze D wyraża się wzorem:

$$f_{\text{śr}} = \frac{1}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$



► (a) W tym przypadku wystarczy obliczyć tylko całkę podwójną

$$\iint\limits_D |xy|\,dxdy, \quad \text{gdyż} \quad \text{pole}\,(D) = \pi.$$

Funkcja $f(x,y) = |xy|$ spełnia warunki $f(x,y) = f(-x,y) = f(-x,-y) = f(x,-y)$. Stąd oraz z symetryczności obszaru całkowania wynika, że

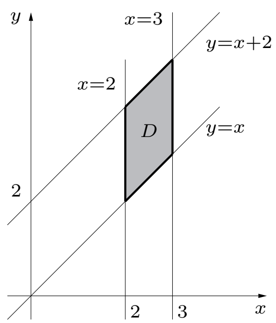
$$\iint\limits_D |xy|\,dxdy = 4\iint\limits_{D_1} |xy|\,dxdy = 4\iint\limits_{D_1} xy\,dxdy,$$

gdzie D_1 oznacza pierwszą ćwiartkę koła D (rysunek). Traktując obszar D_1 jako normalny względem osi Ox i korzystając ze wzoru (4.3, str. 137) oraz prostych całek oznaczonych, mamy

$$\iint\limits_{D_1} xy\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy = \int\limits_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x - x^3\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Podstawiając ten wynik do wzoru na wartość średnią otrzymamy $f_{\text{śr}} = 4 \cdot \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2\pi}$.

► (b) Wyznaczymy najpierw pole obszaru D (rysunek).



Traktując obszar D jako normalny względem osi Ox i korzystając ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych mamy

$$\text{pole}(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{x+2} dy = \int\limits_2^3 [y]_x^{x+2}\, dx = 2\int\limits_2^3 dx = 2.$$

Następnie obliczymy całkę z funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$ po obszarze D. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy &= \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{x+2} \left(x^2+y^2\right) dy = \int\limits_2^3 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{x+2} dx \\ &= \int\limits_2^3 \frac{4}{3}\left(3x^2+3x+2\right) dx = \frac{4}{3}\left[x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = 38.\end{aligned}$$

Tak więc wartość średnia funkcji f na obszarze D jest równa $f_{\text{śr}} = \dfrac{1}{2} \cdot 38 = 19$.

▷ **Zadanie 4.6.** Obliczyć wartości średnie funkcji na wskazanych obszarach:

(a) $f(x,y) = \sin x \cos y,\ D = [0,\pi] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

(b) $f(x,y) = x + y,\ D:\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x \leqslant \sin y$.

Odpowiedzi. (a) $f_{\text{śr}} = 4/\pi^2$; (b) $f_{\text{śr}} = 5\pi/8$.

Zamiana zmiennych w całkach podwójnych*

▶ **Przykład 4.7.** Stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć podane całki podwójne po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D (x+y)\, dxdy,\ D:\ y = x, y = x+1, y = -2x-1, y = -2x+4$;

(b) $\iint\limits_D \dfrac{y}{x}\, dxdy,\ D:\ xy = 1,\ xy = 3,\ y = 2x,\ y = 4x,\ (x > 0)$;

(c) $\iint\limits_D xy\, dxdy,\ D:\ y = x^2,\ y = 2x^2,\ 2x = y^2,\ 4x = y^2$;

(d*) $\iint\limits_D \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) dxdy,\ D:\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy wzór na zamianę zmiennych w całce podwójnej:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_\Delta f\left[\varphi(u,v), \psi(u,v)\right] \left|J_{\mathcal{T}}(u,v)\right|\, dudv.$$

W tym wzorze przekształcenie $\mathcal{T}:\Delta\longrightarrow D$, określone wzorem

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v), \end{cases}$$

przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru $\Delta\subset\mathbb{R}^2$ na wnętrze obszaru D, przy czym funkcje φ,ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze Δ, a jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$, tj. funkcja

$$J_{\mathcal{T}}(u,v)=\det\begin{bmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{bmatrix},$$

nie zeruje się wewnątrz obszaru Δ. Ponadto zakładamy, że funkcja f jest ciągła na obszarze D.

► (a) Proste ograniczające obszar D zapisujemy w postaci:

$$y-x=0,\ y-x=1,\ \ y+2x=-1,\ y+2x=4.$$

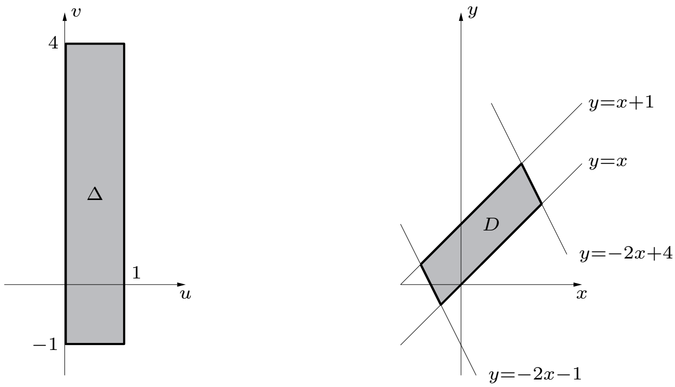
Stąd widać, że wygodnie jest dokonać następującej zamiany zmiennych:

$$\begin{cases} u=y-x, \\ v=y+2x. \end{cases}$$

Z układu równań wyznaczmy zmienne x,y. Mamy

$$\mathcal{T}:\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}u+\dfrac{1}{3}v, \\[2mm] y=\dfrac{2}{3}u+\dfrac{1}{3}v. \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru Δ, opisanego nierównościami $0\leqslant u\leqslant 1$, $-1\leqslant v\leqslant 4$, na wnętrze obszaru D (rysunek).



Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ ma postać

$$J_{\mathcal{T}}(u,v)=\det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \left[-\dfrac{u}{3}+\dfrac{v}{3}\right]'_u & \left[-\dfrac{u}{3}+\dfrac{v}{3}\right]'_v \\[2mm] \left[\dfrac{2u}{3}+\dfrac{v}{3}\right]'_u & \left[\dfrac{2u}{3}+\dfrac{v}{3}\right]'_v \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\[2mm] \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}=-\dfrac{1}{3}$$

i nie zeruje się wewnątrz obszaru Δ. Wstawiając otrzymane wielkości do wzoru na zamianę zmiennych w całce podwójnej, dostaniemy

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta \left[\frac{1}{3}(-u+v) + \frac{1}{3}(2u+v)\right]\left|-\frac{1}{3}\right| dudv = \frac{1}{9}\iint\limits_\Delta (u+2v)\,dudv.$$

Korzystając teraz ze wzoru (4.1, str. 134) oraz prostych całek oznaczonych otrzymamy

$$\frac{1}{9}\iint\limits_\Delta (u+2v)\,dudv = \frac{1}{9}\int\limits_0^1 du \int\limits_{-1}^4 (u+2v)\ dv = \frac{1}{9}\int\limits_0^1 \left[uv+v^2\right]_{-1}^4\ dv$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_0^1 (5u+15)\,du = \frac{1}{9}\left[\frac{5}{2}u+15u\right]_0^1 = \frac{35}{18}.$$

► (b) Krzywe ograniczające podany obszar D zapisujemy w postaci:

$$xy=1,\ \ xy=3,\ \ \frac{y}{x}=2,\ \ \frac{y}{x}=4,\quad \text{gdzie } x>0.$$

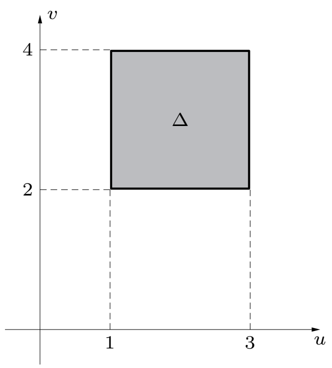
Stąd widać, że wygodnie jest dokonać następującej zamiany zmiennych:

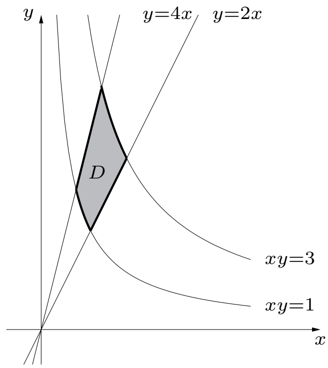
$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Z układu równań wyznaczmy zmienne x, y, pamiętając o warunku $x > 0$. Mamy

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru Δ, opisanego nierównościami $1 \leqslant u \leqslant 3$, $2 \leqslant v \leqslant 4$, na wnętrze obszaru D (rysunek).





Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ ma postać

$$J_{\mathcal{T}}(u,v) = \det \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \left[\sqrt{\frac{u}{v}}\right]'_u & \left[\sqrt{\frac{u}{v}}\right]'_v \\ \left[\sqrt{uv}\right]'_u & \left[\sqrt{uv}\right]'_v \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}$$

i nie zeruje się wewnątrz obszaru Δ. Wstawiając otrzymane wielkości do wzoru podanego na wstępie i korzystając z interpretacji geometrycznej całki podwójnej, dostaniemy

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy = \iint\limits_\Delta \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}} \left|\frac{1}{2v}\right| dudv = \frac{1}{2}\iint\limits_\Delta dudv = \frac{1}{2}\,\text{pole}\,(\Delta) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2.$$

► (c) Parabole ograniczające obszar D zapisujemy w postaci:

$$\frac{y}{x^2} = 1, \quad \frac{y}{x^2} = 2, \quad \frac{y^2}{x} = 2, \quad \frac{y^2}{x} = 4.$$

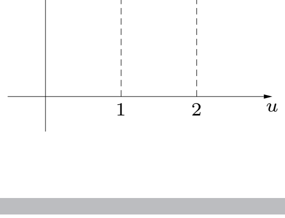
Stąd widać, że wygodnie jest dokonać następującej zamiany zmiennych:

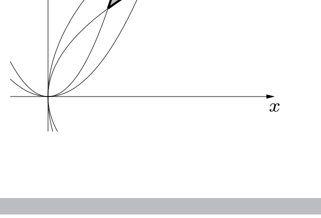
$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2}, \\ v = \dfrac{y^2}{x}. \end{cases}$$

Z podanego układu równań wyznaczmy zmienne x, y. Mamy

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{v}{u^2}}, \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u}}. \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru Δ, opisanego nierównościami $1 \leqslant u \leqslant 2$, $2 \leqslant v \leqslant 4$, na wnętrze obszaru D (rysunek).





Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ ma postać

$$J_{\mathcal{T}}(u,v) = \det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \left[\sqrt[3]{\dfrac{v}{u^2}}\right]'_u & \left[\sqrt[3]{\dfrac{v}{u^2}}\right]'_v \\ \left[\sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u}}\right]'_u & \left[\sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u}}\right]'_v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v}{u^5}} & \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2v^2}} \\ -\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u^4}} & \dfrac{2}{3\sqrt[3]{uv}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3u^2}$$

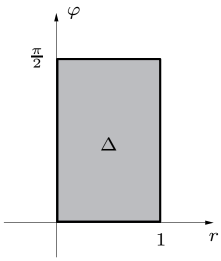
i nie zeruje się wewnątrz obszaru Δ. Wstawiając otrzymane wielkości do wzoru podanego na wstępie, następnie korzystając ze wzoru (4.2, str. 134) oraz korzystając z prostych całek oznaczonych dostaniemy

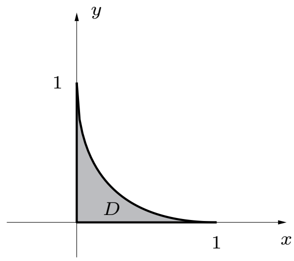
$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \iint\limits_\Delta \sqrt[3]{\frac{v}{u^2}}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}\left|-\frac{1}{3u^2}\right| dudv = \frac{1}{3}\iint\limits_\Delta \frac{v}{u^3}\,dudv$$
$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_1^2 \frac{du}{u^3}\right)\cdot\left(\int\limits_2^4 v\,dv\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{2u^2}\right]_1^2\cdot\left[\frac{v^2}{2}\right]_2^4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}\cdot 6 = \frac{3}{4}.$$

► (d*) W tym zadaniu dokonamy nieco sztucznej zamiany zmiennych, jednak skutecznie doprowadzi ona nas do celu. Przyjmujemy

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x = r^2\cos^4\varphi, \\ y = r^2\sin^4\varphi. \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru Δ, opisanego nierównościami $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, na wnętrze obszaru D (rysunek).





Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ ma postać

$$J_{\mathcal{T}}(r,\varphi) = \det\begin{bmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \left[r^2\cos^4\varphi\right]'_r & \left[r^2\cos^4\varphi\right]'_\varphi \\ \left[r^2\sin^4\varphi\right]'_r & \left[r^2\sin^4\varphi\right]'_\varphi \end{bmatrix}$$
$$= \det\begin{bmatrix} 2r\cos^4\varphi & -4r^2\sin\varphi\cos^3\varphi \\ 2r\sin^4\varphi & 4r^2\sin^3\varphi\cos\varphi \end{bmatrix} = 8r^3\cos^3\varphi\sin^3\varphi$$

i nie zeruje się wewnątrz obszaru Δ. Wstawiając otrzymane wielkości do wzoru podanego na wstępie, a następnie korzystając ze wzoru (4.2, str. 134), dostaniemy

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\,dxdy &= \iint\limits_\Delta \left(\sqrt{r^2\cos^4\varphi}+\sqrt{r^2\sin^4\varphi}\right)\left|8r^3\cos^3\varphi\sin^3\varphi\right|\,d\varphi\,dr\\ &= \iint\limits_\Delta r\left|8r^3\cos^3\varphi\sin^3\varphi\right|\,d\varphi\,dr = \iint\limits_\Delta 8r^4\left|\cos^3\varphi\sin^3\varphi\right|\,d\varphi\,dr\\ &= 8\left(\int\limits_0^1 r^4\,dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\right).\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\int\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi &= \int\cos^3\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi\left[\begin{array}{c} t=\cos\varphi\\ dt=-\sin\varphi\,d\varphi\end{array}\right]\\ &= -\int t^3\left(1-t^2\right)\,dt = \left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}\right)+C = \frac{\cos^6\varphi}{6}-\frac{\cos^4\varphi}{4}+C,\end{aligned}$$

więc

$$\left(\int\limits_0^1 r^4\,dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\right) = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\cdot\left[\frac{\cos^6\varphi}{6}-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{60}.$$

Zatem

$$\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\,dxdy = 8\cdot\frac{1}{60} = \frac{2}{15}.$$

▷ **Zadanie 4.7.** Stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć podane całki podwójne po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{(x-y)^3}\,dxdy,\ D:\ x+y=-1, x+y=1, x-y=1, x-y=3;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{y},\ D:\ y=x,\ y=2x,\ y=-\frac{1}{2}x+1,\ y=-2x+4;$

(c) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\ xy=1,\ xy=2,\ y=x^2,\ y=3x^2;$

(d*) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^4-y^4\right)\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2=3,\ x^2+y^2=5,\ x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=\ 2$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

Odpowiedzi. (a) $4/27$. Wsk. Podstawić $u = x + y$, $v = x - y$; (b) $2\ln(9/8)$. Wsk. Podstawić $u = x/y$, $v = (x-2)/y$; (c) $\ln 3$. Wsk. Podstawić $u = xy$, $v = y/x^2$;
(d*) $\left(24\sqrt{24} - 21\sqrt{21} - 8\sqrt{8} + 5\sqrt{5}\right)/12$. Wsk. Podstawić $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$.

Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych

► **Przykład 4.8.** Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całki podwójne:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, gdzie $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\right\}$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, gdzie $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\right\}$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(1 - x^2 - y^2\right)^2}$, gdzie $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant y\right\}$;

(d) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}\,dxdy$, gdzie $D = \left\{(x,y):\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\right\}$;

(e*) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy$, gdzie $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 - 2x - 2y \leqslant 0\right\}$;

(f) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{x^2 + y^2}$, gdzie $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 1\right\}$.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze D, który jest obrazem zbioru Δ opisanego we współrzędnych biegunowych nierównościami:

$$\Delta:\quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ \ g(\varphi) \leqslant \varrho \leqslant h(\varphi),$$

gdzie funkcje g, h są ciągłe, to

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta f\left(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi\right)\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho \tag{4.5}$$

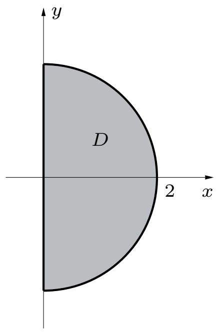
$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f\left(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi\right)\varrho\,d\varrho. \tag{4.6}$$

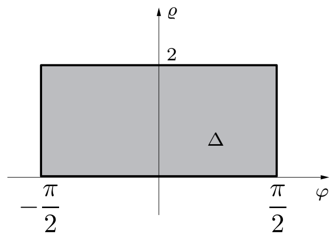
► (a) Obszar całkowania D jest półkolem o promieniu 2 (rysunek). Podstawiając $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ do nierówności $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, otrzymamy:

$$\varrho^2 \leqslant 4, \quad \varrho\cos\varphi \geqslant 0.$$

Ponieważ $\varrho \geqslant 0$, więc rozwiązując powyższy układ nierówności mamy

$$\Delta:\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$



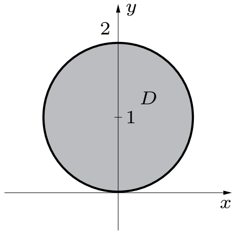


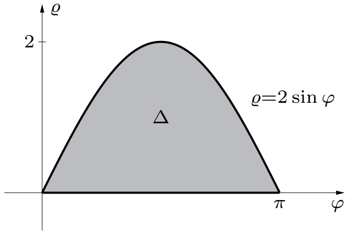
Zakres zmienności kąta φ można odczytać również z rysunku. Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzoru (4.5), następnie (4.2, str. 134) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xy^2\,dxdy &= \iint\limits_\Delta (\varrho\cos\varphi)\,(\varrho\sin\varphi)^2\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho = \iint\limits_\Delta \varrho^4\cos\varphi\,(\sin\varphi)^2\,d\varphi d\varrho \\
&= \left(\int\limits_0^2 \varrho^4\,d\varrho\right)\cdot\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right) \\
&= \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^2\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ \psi=\sin\varphi\\ d\psi=\cos\varphi\,d\varphi\\ \varphi=-\pi/2,\ \psi=-1\\ \varphi=\pi/2,\ \psi=1\end{array}\right] = \frac{32}{5}\int\limits_{-1}^{1}\psi^2\,d\psi \\
&= \frac{32}{5}\left[\frac{\psi^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{64}{15}.
\end{aligned}
$$

► (b) Nierówność $x^2+y^2-2y\leqslant 0$ opisującą obszar D przekształcamy do postaci $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$. Stąd wynika, że obszar całkowania D jest kołem o środku $(0,1)$ i promieniu 1 (rysunek). Podstawiając $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ do nierówności $x^2+y^2-2y\leqslant 0$, otrzymamy

$$\varrho^2-2\varrho\sin\varphi\leqslant 0.$$





Ponieważ $\varrho \geqslant 0$, więc rozwiązując powyższą nierówność mamy

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \ \ 0 \leqslant \varrho \leqslant 2\sin\varphi.$$

Zakres zmienności kąta φ można także ustalić na podstawie rysunku. Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzorów (4.5), (4.6) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy &= \iint\limits_\Delta \left((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2\right) \varrho\, d\varrho = \iint\limits_\Delta \varrho^3\, d\varrho \\
&= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \varrho^3\, d\varrho = \int\limits_0^\pi \left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^{2\sin\varphi} d\varphi = 4\int\limits_0^\pi \sin^4\varphi\, d\varphi \\
&\stackrel{(*)}{=\!=} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi \\
&= \left[\frac{3}{2}\varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

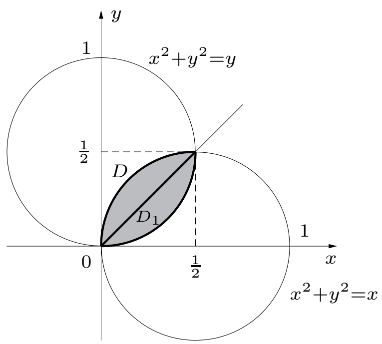
Całkę w miejscu oznaczonym $(*)$ obliczyliśmy korzystając z tożsamości

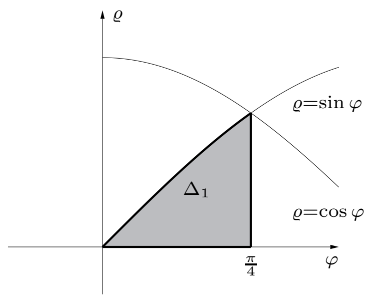
$$\begin{aligned}
\sin^4\varphi &= \left(\sin^2\varphi\right)^2 = \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right).
\end{aligned}$$

► (c) Nierówności $x^2+y^2 \leqslant x$, $x^2+y^2 \leqslant y$ opisujące obszar D przekształcamy odpowiednio do postaci

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}, \quad x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Stąd wynika, że obszar całkowania D jest częścią wspólną dwóch kół. Jednego o środku $(1/2, 0)$ i promieniu $1/2$, a drugiego o środku $(0, 1/2)$ i promieniu $1/2$ (rysunek).





Ze względu na symetrię obszaru D względem prostej $y = x$, a także ze względu na symetrię funkcji podcałkowej względem tej prostej, mamy

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^2} = 2\iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^2},$$

gdzie D_1 jest dolną połową obszaru D. Zatem obszar D_1 opisany jest nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant y$, $y \leqslant x$. Podstawiając $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ do tych nierówności otrzymamy

$$\varrho^2 \leqslant \varrho\sin\varphi, \quad \varrho\sin\varphi \leqslant \varrho\cos\varphi.$$

Ponieważ $\varrho \geqslant 0$, więc rozwiązując powyższe nierówności otrzymamy

$$\Delta_1: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, \ 0 \leqslant \varrho \leqslant \sin\varphi.$$

Zakres zmienności kąta φ można także ustalić na podstawie rysunku. Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzorów (4.5), (4.6) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych mamy

$$2\iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^2} = 2\iint\limits_{\Delta} \frac{\varrho\, d\varphi d\varrho}{\left(1-(\varrho\cos\varphi)^2-(\varrho\sin\varphi)^2\right)^2}$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{\varrho\, d\varrho}{\left(1-\varrho^2\right)^2} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

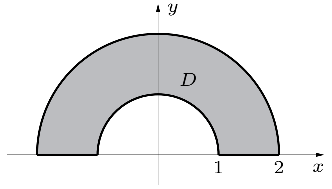
Ostatnia równość wynika z obliczeń przeprowadzonych w rozwiązaniu Przykładu 4.4 (d) (str. 144).

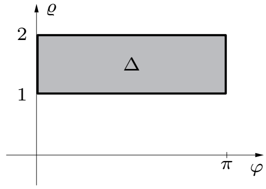
► (d) Obszar całkowania D jest górnym półpierścieniem o środku w początku układu współrzędnych, promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2 (rysunek). Podstawiając $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ do nierówności $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 0$ otrzymamy kolejno

$$1 \leqslant \varrho^2 \leqslant 4, \quad \varrho\sin\varphi \geqslant 0.$$

Ponieważ $\varrho \geqslant 0$, więc rozwiązując powyższy układ nierówności otrzymamy

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \ 1 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$





Zakres zmienności kąta φ można również odczytać z rysunku. Teraz w obliczanej całce dokonujemy zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzoru (4.5), następnie (4.2, str. 134) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_\Delta \frac{\ln\left((\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2\right)}{(\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2}\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho$$

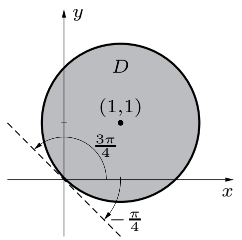
$$= 2\iint\limits_\Delta \frac{\ln\varrho}{\varrho}d\varphi d\varrho = 2\left(\int\limits_0^\pi d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^2 \frac{\ln\varrho\,d\varrho}{\varrho}\right)$$

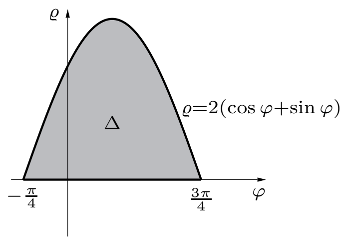
$$= 2\pi\int\limits_1^2 \frac{\ln\varrho\,d\varrho}{\varrho}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ u=\ln\varrho,\ du=d\varrho/\varrho\\ \varrho=1,\ u=0\\ \varrho=2,\ u=\ln 2\end{array}\right]$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\ln 2} u\,du = 2\pi\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \pi\ln^2 2.$$

► (e*) Nierówność $x^2+y^2-2x-2y\leqslant 0$ opisującą obszar D przekształcamy do postaci $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$. Stąd wynika, że obszar całkowania D jest kołem o środku $(1,1)$ i promieniu $\sqrt{2}$ (rysunek). Podstawiając $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ do nierówności $x^2+y^2-2x-2y\leqslant 0$ otrzymamy

$$\varrho^2-2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)\leqslant 0.$$





Ponieważ $\varrho\geqslant 0$, więc rozwiązując powyższą nierówność otrzymamy

$$\Delta:\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},\ \ 0\leqslant\varrho\leqslant 2(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

Zakres zmienności kąta φ można także ustalić na podstawie rysunku. Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzorów (4.5), (4.6) mamy

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \iint\limits_\Delta (\varrho\cos\varphi)(\varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varphi d\varrho = \iint\limits_\Delta \varrho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi d\varrho$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3[\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} \varrho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\varrho = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)^4\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Ponieważ $(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 = 1+\sin 2\varphi$ oraz $\cos\varphi\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$, więc wyrażenie w ostatniej całce możemy sprowadzić do postaci

$$(\cos\varphi+\sin\varphi)^4\cos\varphi\sin\varphi = (1+\sin 2\varphi)^2\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\left(\sin 2\varphi + 2\sin^2 2\varphi + \sin^3 2\varphi\right).$$

Mamy zatem

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)^4\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\sin 2\varphi + 2\sin^2 2\varphi + \sin^3 2\varphi\right)\,d\varphi \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ 2\varphi = u-\pi/2,\ 2d\varphi = du\\ \varphi = -\pi/4,\ u=0\\ \varphi = 3\pi/4,\ u=2\pi\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin\left(u-\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin^2\left(u-\frac{\pi}{2}\right) + \sin^3\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sin u + 2\left(-\sin u\right)^2 + \left(-\sin u\right)^3\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sin u + 2\sin^2 u - \sin^3 u\right)du$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin u\,du + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 u\,du - \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^3 u\,du$$

Z interpretacji geometrycznej pojedynczej całki oznaczonej wynika, że pierwsza i trzecia całka są równe 0, więc do obliczenia pozostaje tylko druga całka. Wykorzystując wzór $\sin^2 u = (1-\cos 2u)/2$ mamy

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 u\,du = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2u)\,du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Zatem całka z funkcji $f(x,y) = xy$ po obszarze D jest równa $4\cdot\dfrac{\pi}{2} = 2\pi$.

Uwaga. Obliczenia tej całki podwójnej można znacznie uprościć, gdy najpierw dokonamy zamiany zmiennych: $u = x + 1$, $v = y + 1$. Wtedy całka przyjmie postać

$$\iint\limits_{\Delta_1} (u-1)(v-1)\, dudv = \iint\limits_{\Delta_1} (uv - u - v - 1)\, dudv.$$

gdzie $\Delta_1 :\ u^2 + v^2 \leqslant 2$. Z symetrii obszaru całkowania i funkcji podcałkowej wynika, że

$$\iint\limits_{\Delta_1} uv\, dudv = 0, \quad \iint\limits_{\Delta_1} u\, dudv = 0, \quad \iint\limits_{\Delta_1} v\, dudv = 0.$$

Z kolei całka

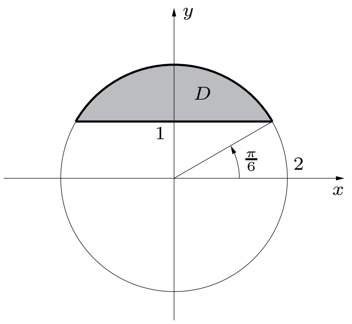
$$\iint\limits_{\Delta_1} dudv = 2\pi.$$

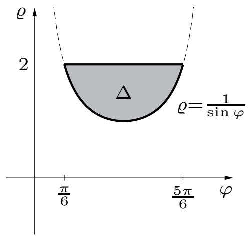
► (f) Obszar całkowania D jest soczewką przedstawioną na rysunku. Podstawiając $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ do nierówności $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 1$ otrzymamy kolejno

$$\varrho^2 \leqslant 4, \quad \varrho\sin\varphi \geqslant 1.$$

Ponieważ $\varrho \geqslant 0$ oraz $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, więc rozwiązując powyższy układ nierówności otrzymamy

$$\Delta :\quad \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{1}{\sin\varphi} \leqslant \varrho \leqslant 2.$$





Zakres zmienności kąta φ można także ustalić na podstawie rysunku. Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzorów (4.5), (4.6) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\iint\limits_{D} \frac{y\, dxdy}{x^2 + y^2} = \iint\limits_{\Delta} \frac{(\varrho\sin\varphi)\ \varrho\, d\varphi d\varrho}{(\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2} = \iint\limits_{\Delta} \sin\varphi\, d\varphi\, d\varrho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{2} \sin\varphi\, d\varrho$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\varphi \Big[\varrho\Big]_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{2} d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin\varphi - 1)\ d\varphi = \Big[-2\cos\varphi - \varphi\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

▷ **Zadanie 4.8.** Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całki podwójne:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, gdzie $D:\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$;

(b) $\iint\limits_D y^2 e^{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1$;

(c) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$, gdzie $D:\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x$;

(d*) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D:\ x \geqslant 0,\ \left(x^2+y^2\right)^2 \leqslant 4\left(x^2-y^2\right)$.

Odpowiedzi. (a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \varrho^4 \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varrho = \frac{8\sqrt{2}-1}{15}$; (b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \varrho^3 e^{\varrho^2}\sin^2\varphi\,d\varrho = \frac{\pi}{8}$; (c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} \varrho^3\,d\varrho = \frac{1}{8}$; (d*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \varrho^3\cos\varphi\,d\varrho = \frac{32\sqrt{2}}{15}$.

Zastosowania całek podwójnych w geometrii

► **Przykład 4.9.** Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y = x^2 - x,\ \ y = x$; (b) $y = e^x,\ \ y = \ln x,\ \ x + y = 1,\ \ x = 2$;

(c) $y = e^{-x},\ \ y = e^{2x},\ \ y = e^2$; (d) $y = \ln x,\ \ y = \ln^2 x$.

Rozwiązanie. Pole obszaru normalnego $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem

$$\text{pole}\,(D) = \iint\limits_D dxdy$$

W rozwiązaniach przykładów (b), (c) i (d) wykorzystamy wzory:

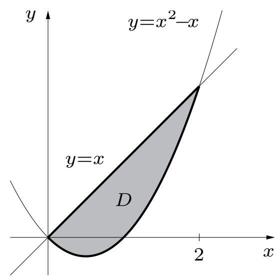
$$(*)\qquad \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C, \qquad (**)\qquad \int \ln^2 x\,dx = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C.$$

Wzory te można otrzymać całkując przez części:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx \left[\begin{array}{l} u(x) = \ln x,\ \ v'(x) = 1 \\ u'(x) = 1/x,\ \ v(x) = x \end{array}\right] &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C,\end{aligned}$$

$$\int \ln^2 x\,dx \left[\begin{array}{ll} u(x)=\ln^2 x, & v'(x)=1 \\ u'(x)=\dfrac{2}{x}\ln x, & v(x)=x \end{array}\right] = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,dx$$
$$= x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C$$
$$= x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C.$$

► (a) Najpierw wyznaczymy miejsca, w których przecinają sie krzywe $y = x^2 - x$, $y = x$. Otrzymamy punkty $(0,0)$ oraz $(2,2)$. Obszar D, którego pole mamy obliczyć, zaznaczono na rysunku. Obszar ten jest normalny względem obu osi. Dla obliczenia całki potraktujemy obszar jako normalny względem osi Ox (dlaczego?). Zatem

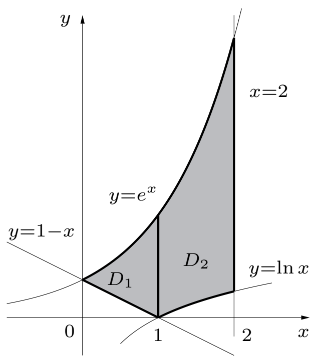


$$D = \left\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 - x \leqslant y \leqslant x\right\}.$$

Zatem wobec wzoru (4.3, str. 137), a dalej podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\text{pole}\,(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2-x}^{x} dy = \int_0^2 \Big[y\Big]_{x^2-x}^{x} dx = \int_0^2 \left(x - \left(x^2 - x\right)\right) dx$$
$$= \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[2\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

► (b) Obszar D jest wprawdzie obszarem normalnym zarówno względem osi Ox i Oy, jednakże niektórych funkcji ograniczających ten obszar z góry i z dołu nie da się zapisać jednym wzorem. Dlatego podzielimy go prostą $x = 1$ na dwa obszary D_1 i D_2 (rysunek) normalne względem osi Ox. Wobec addytywności całki względem obszaru całkowania mamy



$$\text{pole}\,(D) = \text{pole}\,(D_1) + \text{pole}\,(D_2)$$
$$= \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy$$

Ponieważ obszary całkowania D_1, D_2 opisane są nierównościami:

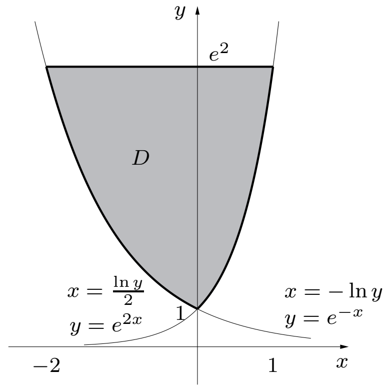
$$D_1 :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 - x \leqslant y \leqslant e^x, \qquad D_2 :\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ \ln x \leqslant y \leqslant e^x,$$

więc korzystając ze wzoru (4.3) oraz metod obliczania całek oznaczonych i podanego na wstępie wzoru $(*)$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{e^x} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\ln x}^{e^x} dy = \int\limits_0^1 \big[y\big]_{1-x}^{e^x} dx + \int\limits_1^2 \Big[y\Big]_{\ln x}^{e^x} dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(e^x + x - 1\right) dx + \int\limits_1^2 \left(e^x - \ln x\right) dx \\ &\overset{(*)}{=} \left[e^x + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \Big[e^x - x\left(\ln x - 1\right)\Big]_1^2 = e^2 + \frac{1}{2} - \ln 4.\end{aligned}$$

► (c) Obszar D jest obszarem normalnym zarówno względem osi Ox i Oy (rysunek). Ze względu na prostsze obliczenia obszar D potraktujemy jako normalny względem osi Oy. Wtedy opisany jest on układem nierówności

$$1 \leqslant y \leqslant e^2, \quad -\ln y \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ln y.$$

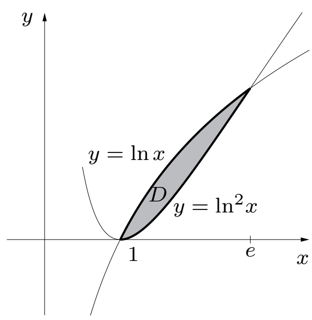


Korzystając ze wzoru (4.4, str. 137) oraz oraz metod obliczania całek oznaczonych i podanego na wstępie $(*)$ otrzymamy

$$\begin{aligned}\text{pole}\,(D) &= \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^{e^2} dy \int\limits_{-\ln y}^{\frac{1}{2}\ln y} dx = \int\limits_1^{e^2} \big[x\big]_{-\ln y}^{\frac{1}{2}\ln y} dy \\ &= \frac{3}{2}\int\limits_1^{e^2} \ln y\, dy \overset{(*)}{=} \frac{3}{2}\big[y\left(\ln y - 1\right)\big]_1^{e^2} = \frac{3}{2}\left(e^2 + 1\right).\end{aligned}$$

► (d) Wyznaczymy punkty przecięcia krzywych $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$. Dla $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\ln x = \ln^2 x &\iff \ln x\left(1 - \ln x\right) = 0 \\ &\iff \ln x = 0 \text{ lub } \ln x = 1 \\ &\iff x = 1 \text{ lub } x = e.\end{aligned}$$



Obszar D, którego pole mamy obliczyć, pokazano na rysunku. Jest on normalny względem obu osi. Zatem traktując go jako normalny względem osi Ox mamy

$$D = \left\{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant e, \ln^2 x \leqslant y \leqslant \ln x\right\}.$$

Teraz korzystając ze wzoru (4.3) oraz podanych na wstępie wzorów (∗), (∗∗), mamy

$$\text{pole}\,(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln^2 x}^{\ln x} dy = \int\limits_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right)\, dx$$
$$= -\left[x \ln^2 x - 3\ln x + 3\right]_1^e = 3 - e.$$

▷ **Zadanie 4.9.** Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y = 0\ (y \geqslant 0)$; (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$;

(c) $x^2 + y^2 = 2y,\ y = \sqrt{3}|x|$; (d) $x + y = 4,\ x + y = 8,\ x - 3y = 0,\ x - 3y = 5$;

(e) $y = 2^x,\ y = 4^x,\ y = 16$; (f*) $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.

Odpowiedzi. (a) $10/3$; (b) 3π; (c) $\pi/3 + \sqrt{3}/2$; (d) 5; (e) $(64\ln 2 - 15)\,/\,(2\ln 2)$; (f) $2/3$.

► **Przykład 4.10.** Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 3,\ z = 0$; (b) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2},\ z = 3$;

(c) $x = 0,\ x = 1 - |y|,\ z = 0,\ z = 10 - 5x - 2y$;

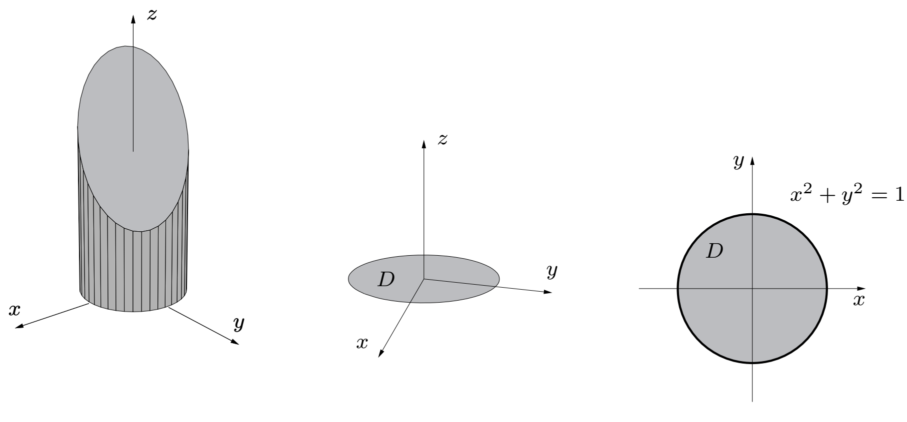
(d) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 2 - x^2 - y^2$; (e*) $z = x^2,\ z = 1 - y^2$;

Rozwiązanie. Objętość bryły U obliczymy ze wzoru

$$\text{objętość}\,(U) = \iint\limits_D \left[g(x,y) - d(x,y)\right]\, dxdy,$$

gdzie $z = d(x,y)$ i $z = g(x,y)$ są odpowiednio dolną i górną powierzchnią ograniczającą tę bryłę, a D jest jej rzutem na płaszczyznę xOy. Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy wzory (4.2, str. 134), (4.3, str. 137) oraz (4.5, 4.6, str. 160).

► (a) Bryła U jest ograniczona walcem $x^2 + y^2 = 1$ oraz dwiema płaszczyznami $z = 0$ i $x + y + z = 3$ (rysunek). Rzutem D bryły U na płaszczyznę xOy jest koło o środku $(0,0)$ i promieniu 1.



Zatem

$$\text{objętość}\,(U) = \iint\limits_{D} [(3 - x - y) - 0]\, dxdy.$$

Obszar D we współrzędnych biegunowych jest opisany nierównościami

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 1.$$

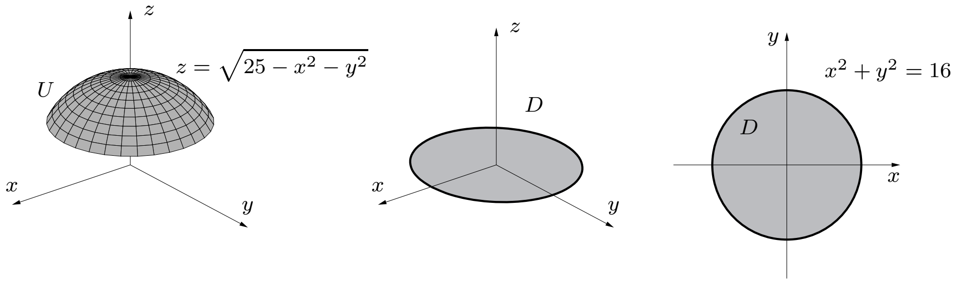
Teraz w całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Na mocy wzorów (4.5), (4.6) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D} (3 - x - y)\, dxdy &= \iint\limits_{\Delta} (3 - \varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varphi\, d\varrho \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(3\varrho - \varrho^2\cos\varphi - \varrho^2\sin\varphi\right)\, d\varrho \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left[3\cdot\frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3\cos\varphi - \frac{1}{3}\varrho^3\sin\varphi\right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) d\varphi = \left[\frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Tak więc objętość $(U) = 3\pi$.

► (b) Bryła U jest ograniczona górną półsferą o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 5 oraz płaszczyzną poziomą na wysokości 3 (rysunek).



Aby wznaczyć rzut bryły U na płaszczyznę xOy rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \\ z = 3. \end{cases}$$

Otrzymamy $x^2 + y^2 = 16$. Stąd rzut D bryły U na płaszczyznę xOy jest kołem o promieniu 4 i środku w początku układu współrzędnych. Objętość bryły U wyraża się zatem wzorem

$$\text{objętość }(U) = \iint\limits_{D} \left(\sqrt{25-x^2-y^2}-3\right)\, dxdy.$$

Obszar całkowania D we współrzędnych biegunowych jest opisany nierównościami:

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 4.$$

Teraz w całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Korzystając ze wzoru (4.5), następnie (4.2) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\iint\limits_{D} \left(\sqrt{25-x^2-y^2}-3\right) dxdy =$$

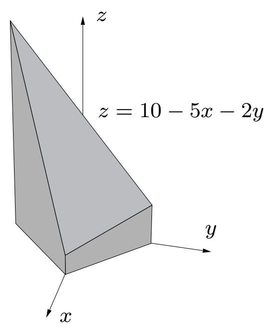
$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\sqrt{25-(\varrho\cos\varphi)^2-(\varrho\sin\varphi)^2}-3\right) \varrho\, d\varphi d\varrho = \iint\limits_{\Delta} \left(\sqrt{25-\varrho^2}-3\right) \varrho\, d\varphi d\varrho$$

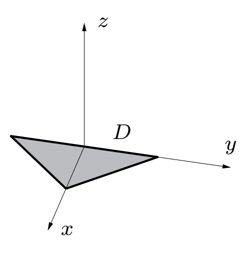
$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{4} \left(\sqrt{25-\varrho^2}-3\right)\varrho\, d\varrho\right) = 2\pi \int\limits_0^4 \left(\sqrt{25-\varrho^2}-3\right) \varrho\, d\varrho \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie} \\ \text{przez} \\ \text{podstawienie} \\ u = 25-\varrho^2 \\ du = -2\varrho\, d\varrho \\ \varrho = 0,\ u = 25 \\ \varrho = 4,\ u = 9 \end{array}\right]$$

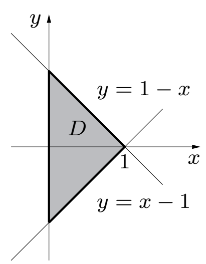
$$= 2\pi \int\limits_{25}^{9} \left(\sqrt{u}-3\right) \frac{du}{-2} = \pi \int\limits_{9}^{25} \left(\sqrt{u}-3\right) du = \pi \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}-3u\right]_9^{25} = \frac{52}{3}\pi.$$

Tak więc objętość $(U) = 52\pi/3$.

► (c) Bryła U jest częścią graniastosłupa ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $x = 1-y$, $x = 1+y$, $z = 0$, ściętego płaszczyzną $z = 10-5x-2y$. Na rysunkach poniżej przedstawiono bryłę U oraz jej rzut D na płaszczyznę xOy.







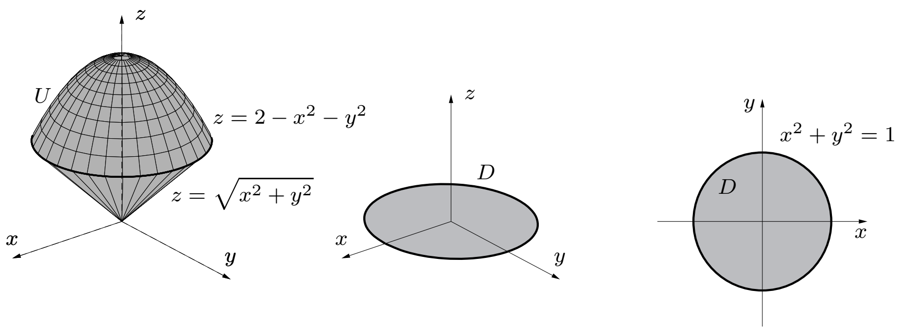
Stąd mamy

$$\text{objętość}\,(U) = \iint\limits_D [(10-5x-2y)-0]\; dxdy.$$

Traktując obszar całkowania D jako obszar normalny względem osi Ox oraz korzystając ze wzoru (4.3) i prostych metod obliczania całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iint\limits_D (10-5x-2y)\; dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} (10-5x-2y)\, dy = \int\limits_0^1 \left[10y-5xy-y^2\right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx$$
$$= 10\int\limits_0^1 \left(x^2-3x+2\right)\, dx = 10\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1 = \frac{25}{3}.$$

► (d) Bryła U jest ograniczona od dołu stożkiem $z=\sqrt{x^2+y^2}$, a od góry paraboloidą $z=2-x^2-y^2$ (rysunek).



Wyznaczymy najpierw rzut D bryły U na płaszczyznę xOy. Mamy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ oraz $z=2-x^2-y^2$. Zatem obszar D jest ograniczony krzywą o równaniu $\sqrt{x^2+y^2} = 2-\left(x^2+y^2\right)$. Stąd po prostych przekształceniach otrzymamy $x^2+y^2=1$. Zatem D jest kołem o środku $(0,0)$ i promieniu 1. Korzystając ze wzoru na objętość bryły mamy

$$\text{objętość}\,(U) = \iint\limits_D \left[\left(2-x^2-y^2\right)-\sqrt{x^2+y^2}\right] dxdy.$$

Obszar D we współrzędnych biegunowych jest opisany nierównościami

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 1.$$

Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Korzystając ze wzoru (4.5), a następnie wzoru (4.2), otrzymamy

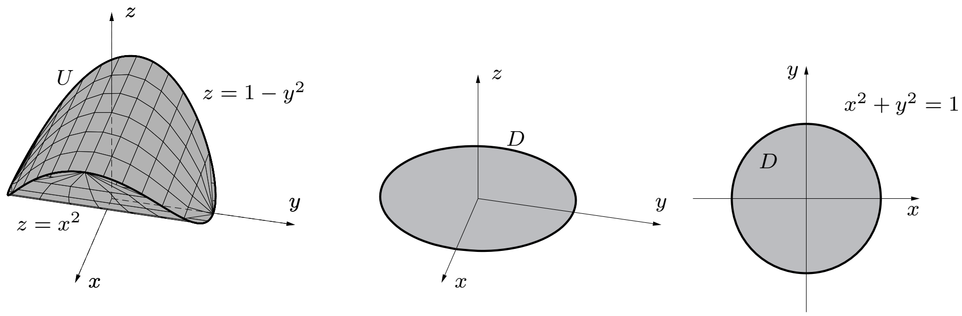
$$\iint\limits_D \left\{\left[2-\left(x^2+y^2\right)\right]-\sqrt{x^2+y^2}\right\} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(2 - (\varrho\cos\varphi)^2 - (\varrho\sin\varphi)^2 - \sqrt{(\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2}\right) \varrho\, d\varphi d\varrho$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(2 - \varrho^2 - \varrho\right) \varrho\, d\varphi d\varrho = \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \left(2 - \varrho^2 - \varrho\right) \varrho\, d\varrho\right)$$

$$= 2\pi \left[\varrho^2 - \frac{\varrho^3}{3} - \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 d\varphi = 2\pi \cdot \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{6}.$$

► (e*) Bryła U jest ograniczona dwiema rynnami parabolicznymi (rysunek).



Wyznaczymy rzut D bryły U na płaszczyznę xOy. Mamy $z = x^2$, $z = 1 - y^2$. Stąd $x^2 + y^2 = 1$. Jak w przykładzie (d) obszar D jest kołem o środku $(0, 0)$ i promieniu 1, więc we współrzędnych biegunowych jest opisany nierównościami

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 1.$$

Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Korzystając ze wzoru (4.5), a następnie wzoru (4.2), otrzymamy

$$\text{objętość}\,(U) = \iint\limits_D \left[\left(1 - y^2\right) - x^2\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left[\left(1 - (\varrho\sin\varphi)^2\right) - (\varrho\cos\varphi)^2\right] \cdot \varrho\, d\varphi d\varrho$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\varrho - \varrho^3\right) d\varphi d\varrho = \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \left(\varrho - \varrho^3\right) d\varrho\right) = 2\pi \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = \pi.$$

▷ **Zadanie 4.10.** Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$;
(b) $x^2 + y^2 - 2y = 0, \;\; z = x^2 + y^2, \;\; z = 0$;
(c*) $2z = x^2 + y^2, \;\; y + z = 4$;
(d*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \;\; z = xy, \;\; z = 0$;
(e*) $z = (x-y)^2, \;\; z = 2-(x+y)^2$;
(f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; z = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Odpowiedzi. (a) $4\pi/3$; (b) $3\pi/2$; (c*) $81\pi/4$. (d*) π; Wsk. Zastosować przesunięte współrzędne biegunowe: $x = 1 + \varrho\cos\varphi$, $y = 1 + \varrho\sin\varphi$, $J = \varrho$; (e*) π; (f) $4\pi/3$.

► **Przykład 4.11.** Obliczyć pola płatów określonych równaniami:

(a) $z = 8 - 4x - 2y$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; (b) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $\left(z \geqslant \dfrac{R}{2}\right)$;

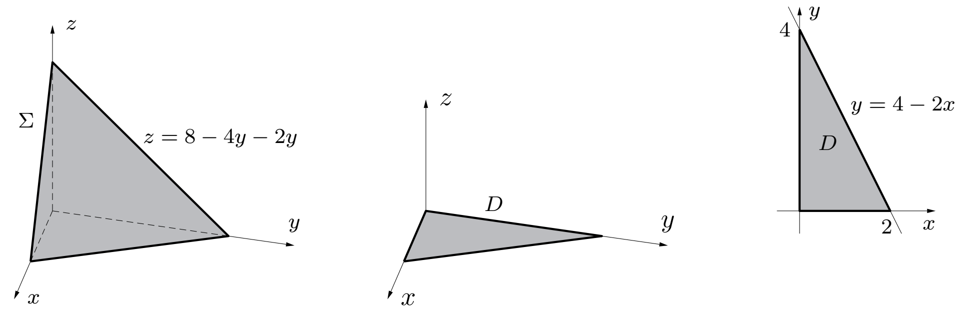
(c) $z = x^2 + y^2$ $(1 \leqslant z \leqslant 4)$; (d) $z = 5 + xy$ $\left(x^2 + y^2 \leqslant 9\right)$.

Rozwiązanie. Niech funkcja f ma ciągłe pochodne pierwszego rzędu. Wtedy pole płata Σ będącego częścią wykresu funkcji $z = f(x, y)$ obliczamy ze wzoru

$$\text{pole}\,(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy,$$

gdzie D oznacza rzut płata Σ na płaszczyznę xOy. Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy wzory (4.5, str. 160) oraz (4.2, str. 134).

► (a) Płat Σ jest częścią płaszczyzny $z = 8 - 4x - 2y$ odciętą płaszczyznami układu współrzędnych. Jego rzut D na płaszczyznę xOy jest trójkątem ograniczonym prostą $y = 4 - 2x$ i osiami układu współrzędnych (rysunek).



Pochodne cząstkowe f'_x, f'_y funkcji f są ciągłe i odpowiednio równe

$$f'_x = [8 - 4x - 2y]'_x = -4, \quad f'_y = [8 - 4x - 2y]'_y = -2.$$

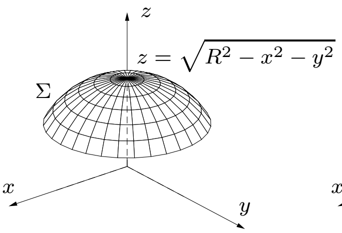
Zatem

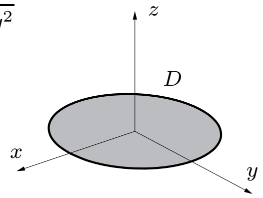
$$\begin{aligned}\text{pole}\,(\Sigma) &= \iint\limits_D \sqrt{1 + (-4)^2 + (-2)^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{21}\, dxdy = \sqrt{21} \iint\limits_D dxdy \\ &= \sqrt{21} \cdot \text{pole}\,(D) = \sqrt{21} \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\sqrt{21}.\end{aligned}$$

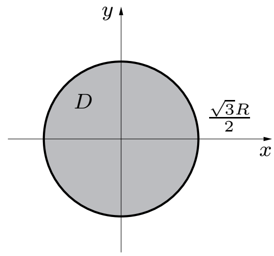
► (b) Płat Σ jest częścią górnej półsfery o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu R leżącą nad płaszczyzną $z = R/2$. Jego rzut D na płaszczyznę xOy wyznaczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\ z = \dfrac{R}{2}. \end{cases}$$

Otrzymamy $x^2 + y^2 = \dfrac{\sqrt{3}R}{2}$, czyli koło o środku $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt{3}R/2$ (rysunek).







Obliczymy pochodone cząstkowe funkcji $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Mamy

$$f'_x = \left[\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right]'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$
$$f'_y = \left[\sqrt{R^{2-x^2-y^2}}\right]'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Zauważmy, że obie pochodne są funkcjami ciągłymi w obszarze D. Zatem pole płata Σ wyraża się więc wzorem

$$\begin{aligned}
\text{pole}\,(\Sigma) &= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dxdy \\
&= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy \\
&= \iint\limits_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = R \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

Obszar całkowania D we współrzędnych biegunowych możemy zapisać w postaci nierówności

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant \frac{\sqrt{3}R}{2}.$$

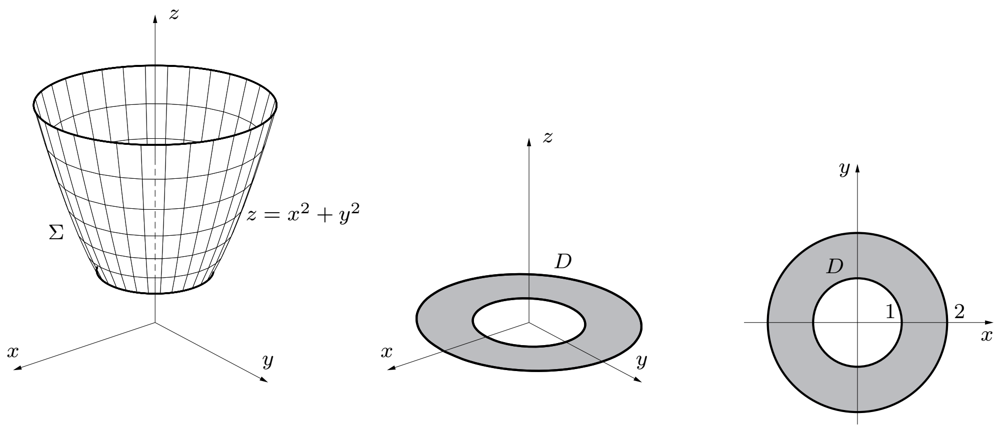
Teraz w całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Korzystając ze wzoru (4.5), następnie wzoru (4.2) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} &= \iint\limits_\Delta \frac{\varrho\, d\varphi d\varrho}{\sqrt{R^2 - (\varrho\cos\varphi)^2 - (\varrho\sin\varphi)^2}} = \iint\limits_\Delta \frac{\varrho\, d\varphi d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{2}} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}\right) \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ u = R^2 - \varrho^2,\ du = -2\varrho\, d\varrho \\ \varrho = 0,\ u = R^2 \\ \varrho = \frac{\sqrt{3}R}{2},\ u = \frac{R^2}{4} \end{array}\right] =
\end{aligned}$$

$$= 2\pi \int\limits_{R^2}^{\frac{R^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2} = \pi \int\limits_{\frac{R^2}{4}}^{R^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \pi \left[2\sqrt{u} \right]_{\frac{R^2}{4}}^{R^2} = \pi R.$$

Zatem pole części sfery jest równe $R \cdot \pi R = \pi R^2$.

► (c) Płat Σ jest częścią paraboloidy $z = x^2 + y^2$ zawartą między płaszczyznami $z = 1$, $z = 4$ (rysunek). Rzut płata Σ na płaszczyznę xOy jest pierścieniem kołowym D o środku $(0, 0)$, promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2.



Obliczymy pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$. Mamy

$$f'_x = \left[x^2 + y^2\right]'_x = 2x, \quad f'_y = \left[x^2 + y^2\right]'_y = 2y.$$

Obie pochodne cząstkowe są ciągłe w obszarze D. Pole płata Σ wyraża się więc wzorem

$$\text{pole}\,(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy.$$

We współrzędnych biegunowych obszar całkowania opisany jest nierównościami

$$\Delta : \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ \ 1 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$

Teraz w całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Korzystając ze wzoru (4.5), następnie wzoru (4.2) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy = \iint\limits_\Delta \sqrt{1 + 4\left((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2\right)}\,\varrho\, d\varphi d\varrho$$

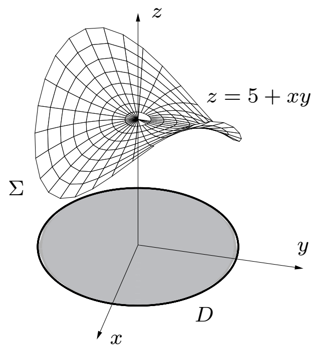
$$= \iint\limits_\Delta \sqrt{1 + 4\varrho^2} \cdot \varrho\, d\varphi d\varrho =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_1^{2} \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\, d\varrho\right) \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ u = 1+4\varrho^2\\ du = 8\varrho\, d\varrho\\ \varrho=1,\ u=5\\ \varrho=2,\ u=17\end{array}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_5^{17} \frac{1}{8}\sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_5^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right).$$

Pole płata Σ jest równe $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$.

► (d) Płat Σ jest fragmentem powierzchni siodłowej $f(x,y) = 5 + xy$ wycietej przez walec $x^2 + y^2 = 9$ (rysunek). Rzut płata Σ na płaszczyznę xOy jest kołem D o środku $(0,0)$ i promieniu 3. Ponieważ pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = 5 + xy$ są równe



$$f'_x = [5+xy]'_x = y, \quad f'_y = [5+xy]'_y = y,$$

i są ciągłe w obszarze D, więc korzystając ze wzoru na pole płata Σ, mamy

$$\text{pole}\,(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1+y^2+x^2}\, dxdy.$$

We współrzędnych biegunowych obszar całkowania opisujemy nierównościami

$$\Delta: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ \ 0 \leqslant \varrho \leqslant 3.$$

Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Korzystając ze wzoru (4.5), następnie wzoru (4.2) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych otrzymamy

$$\iint\limits_D \sqrt{1+y^2+x^2}\, dxdy = \iint\limits_\Delta \sqrt{1+(\varrho\sin\varphi)^2+(\varrho\cos\varphi)^2}\cdot\varrho\, d\varphi d\varrho$$

$$= \iint\limits_\Delta \sqrt{1+\varrho^2}\cdot\varrho\, d\varphi d\varrho = \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{3}\varrho\sqrt{1+\varrho^2}\, d\varrho\right)$$

$$= 2\pi\cdot\int\limits_0^3 \varrho\sqrt{1+\varrho^2}\, d\varrho \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ u=1+\varrho^2;\ du = 2\varrho\, d\varrho\\ \varrho=0,\ u=1;\ \varrho=3,\ u=10\end{array}\right]$$

$$= 2\pi\int\limits_1^{10}\frac{1}{2}\sqrt{u}\, du = \pi\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^{10} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Pole płata Σ jest równe $\frac{2\pi}{3}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.

$\triangleright$ **Zadanie 4.11.** Obliczyć pola płatów:

(a) $z = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 \leqslant 1$; (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ 1 \leqslant z \leqslant 2$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ \ x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0,\ \ z \geqslant 0\ (R > 0)$;

(d*) Satelita telekomunikacyjny jest umieszczony na orbicie geostacjonarnej położonej w odległości $h = 400$ km od powierzchni Ziemi. Obliczyć pole obszaru objętego zasięgiem satelity. Przyjąć, że Ziemia jest kulą o promieniu $R = 6400$ km.

Odpowiedzi. (a) pole $(\Sigma) = \pi\left(5\sqrt{5}-1\right)/6$; (b) pole $(\Sigma) = 3\pi\sqrt{2}$; (c) pole$(\Sigma) = R^2(\pi - 2)$; (d*) pole $(\Sigma) = 2\pi R^2 h/(R+h) \approx 15\,138\,780\ \left[\mathrm{km}^2\right]$.

Zastosowania całek podwójnych w fizyce

$\blacktriangleright$ **Przykład 4.12.** Obliczyć masy obszarów D o podanych gęstościach powierzchniowych:

(a) $D = [0,a] \times [0,a]$, gdzie $a > 0$, $\sigma(x,y) = x^2 + y^2$;

(b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 \leqslant x \leqslant 3 + y^2\right\}$, gdzie $\sigma(x,y) = |y|$.

Rozwiązanie. Masę obszaru D o gęstości powierzchniowej $\sigma = \sigma(x,y)$ obliczamy ze wzoru

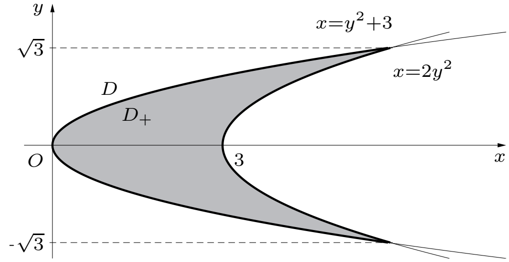
$$\text{masa}\,(D) = \iint\limits_D \sigma(x,y)\,dxdy.$$

$\blacktriangleright$ (a) Ponieważ obszar D jest kwadratem, więc korzystając ze wzoru (4.1, str. 134) oraz z podstawowych metod obliczania całek oznaczonych otrzymamy

$$\text{masa}\,(D) = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(x^2+y^2\right)\,dy = \int\limits_0^a \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=a} dx$$

$$= \int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{1}{3}a^3\right) dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{3}a^3x\right]_0^a = \frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^4 = \frac{2}{3}a^4.$$

$\blacktriangleright$ (b) Obszar D przedstawiono na rysunku.



Ze względu na symetrię obszaru D i gęstości σ względem prostej $y = 0$ wystarczy obliczyć masę połowy obszaru D, który oznaczymy przez D_+. Obszar ten jest obszarem normalnym względem osi Oy, więc korzystając ze wzoru (4.4, str. 137) oraz obliczając proste całki oznaczone, mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{masa}(D) &= 2\iint\limits_{D_+} |y|\,dxdy = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{2y^2}^{y^2+3} y\,dx = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left[yx\right]_{x=2y^2}^{x=y^2+3} dy \\ &= 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} y\left(3-y^2\right)\,dy = 2\left[\frac{3y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

▷ **Zadanie 4.12.** Obliczyć masy obszarów D o podanych gęstościach powierzchniowych:

(a) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\right\}$, $\sigma(x,y) = x$;

(b) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\right\}$, $\sigma(x,y) = |x|$.

Odpowiedzi. (a) π; (b) 14/3.

▶ **Przykład 4.13.** Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) półkole D o promieniu R; (b) $D = \left\{(x,y) :\ y \geqslant \dfrac{x^2}{4},\ x \geqslant \dfrac{y^2}{4}\right\}$;

(c) $D = \{(x,y) :\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$;

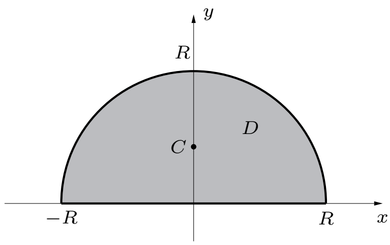
(d) kwadrat jednostkowy, z którego boku wycięto półkole o średnicy 1.

Rozwiązanie. Współrzędne środka masy obszaru jednorodnego $D \subset \mathbb{R}^2$ wyznaczamy ze wzorów

$$x_C = \frac{1}{\operatorname{pole}(D)}\iint\limits_D x\,dxdy, \quad y_C = \frac{1}{\operatorname{pole}(D)}\iint\limits_D y\,dxdy,$$

Gdy obszar D ma oś symetrii, to jego środek masy leży na tej osi. W rozwiązaniach wykorzystamy wzory (4.2, str. 134), (4.3, str. 137) oraz (4.5, str. 160).

▶ (a) Ponieważ obszar D (półkole) jest jednorodny oraz ma oś symetrii, więc jego środek masy leży na tej osi. Niech półkole D będzie położone w układzie współrzędnych jak na rysunku. Wtedy oczywiście $x_C = 0$. Wyznaczymy teraz współrzędną y_C środka masy. Mamy



$$y_C = \frac{2}{\pi R^2}\iint\limits_D y\,dxdy.$$

Aby obliczyć tę całkę dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Półkole D w tych współrzędnych jest opisane nierównościami

$$\Delta : \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant R.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe oraz korzystając ze wzoru (4.5), następnie (4.2) oraz prostych metod obliczania całek oznaczonych, otrzymamy:

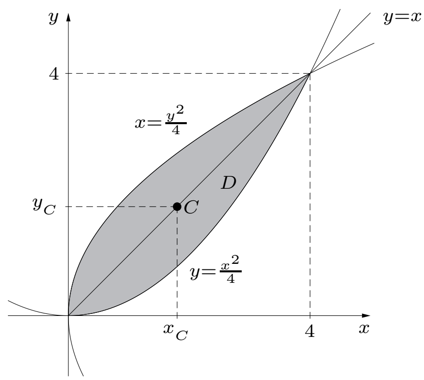
$$\iint\limits_D y\,dxdy = \iint\limits_\Delta (\varrho\sin\varphi)\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho = \iint\limits_\Delta \varrho^2\sin\varphi\,d\varphi d\varrho = \left(\int\limits_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^R \varrho^2\,d\varrho\right)$$

$$= \Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi \cdot \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^R = (-(-1)-(-1))\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}R^3.$$

Zatem współrzędne środka masy półkola dane są wzorami:

$$x_C = 0, \;\; y_C = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}.$$

► (b) Obszar D, którego położenie środka masy mamy wyznaczyć, przedstawiono na rysunku. Ponieważ obszar ten jest jednorodny a prosta $y = x$ jest jego osią symetrii, więc środek C masy należy do niej. Stąd $x_C = y_C$. Wystarczy zatem obliczyć jedną ze współrzędnych tego środka. Rozpoczniemy od obliczenia pola obszaru D, który potraktujemy jako obszar normalny względem osi Ox. Korzystając ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych mamy



$$\text{pole}\,(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} dy$$

$$= \int\limits_0^4 \Big[y\Big]_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^4 \left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{16}{3}.$$

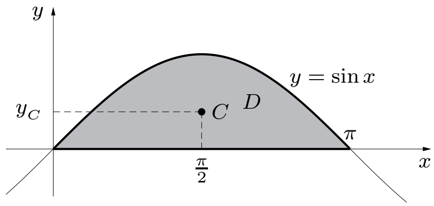
Teraz wyznaczymy współrzędną x_C środka masy ponownie korzystając ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych. Mamy

$$x_C = \frac{1}{\text{pole}\,(D)}\iint\limits_D x\,dxdy = \frac{3}{16}\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} x\,dy = \frac{3}{16}\int\limits_0^4 x\,\Big[y\Big]_{\frac{x^2}{2}}^{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{3}{16}\int\limits_0^4 \left(2x\sqrt{x}-\frac{x^3}{4}\right) dx = \frac{3}{16}\left[\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{x^4}{16}\right]_0^4 = \frac{3}{16}\cdot\frac{48}{5} = \frac{9}{5}.$$

Zatem środek masy ma współrzędne $x_C = y_C = 9/5$.

► (c) Obszar D przedstawiono na rysunku.



Ponieważ obszar D jest jednorodny, a prosta $x = \pi/2$ jest jego osią symetrii, więc $x_C = \pi/2$. Przechodzimy do wyznaczenia współrzędnej y_C środka masy. Rozpoczniemy od obliczenia pola obszaru D, który potraktujemy jako obszar normalny względem osi Ox. Jak w poprzednim przykładzie korzystając ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych mamy

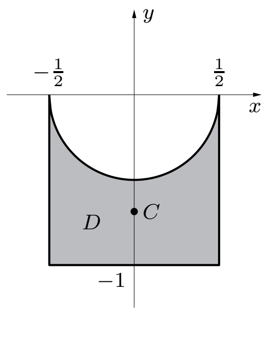
$$\text{pole}\,(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} dy = \int\limits_0^\pi \left[y\right]_0^{\sin x} dx = \int\limits_0^\pi \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = 2.$$

Wyznaczymy teraz współrzędną y_C środka masy. Ponownie korzystając ze wzoru (4.3), a dalej prostych całek oznaczonych i tożsamości $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D y\, dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} y\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx \\ &= \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Ostatecznie $C = (x_C, y_C) = (\pi/2, \pi/8)$.

► (d) Rozważaną figurę umieszczamy w układzie współrzędnych tak jak na rysunku. Ponieważ obszar D jest jednorodny, a oś Oy jest jego osią symetrii, więc $x_C = 0$. Pole obszaru D obliczymy bezpośrednio. Mamy



$$\text{pole}\,(D) = 1^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{8}.$$

Obszar D we współrzędnych kartezjańskich jest opisany nierównościami:

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad -1 \leqslant y \leqslant -\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}.$$

Zatem wobec wzoru (4.3) i prostych całek oznaczonych mamy

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{-1}^{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} y\,dy = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{3}{4}-x^2\right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3x}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{12}.$$

Stąd

$$y_C = \frac{1}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D y\,dxdy = \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{8}} \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{10}{3\,(8-\pi)}.$$

Środek masy ma zatem współrzędne $x_C = 0$, $y_C = -10/\left(3(8-\pi)\right)$.

▷ **Zadanie 4.13.** Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:
(a) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;
(b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\}$;
(c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\}$;
(d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant e^x\right\}$.

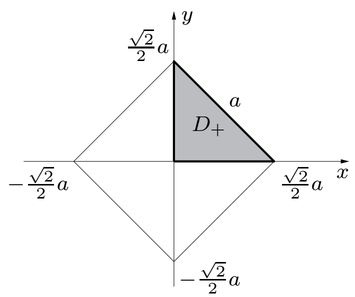
Odpowiedzi. (a) środek masy leży na osi symetrii trójkąta w odległości $h/3$ od podstawy; (b) $x_C = \pi/2$ (z symetrii), $y_C = 3/8$; (c) $x_C = 0$, $y_C = 3/5$; (d) $x_C = 1/(e-1)$, $y_C = (e+1)/4$.

► **Przykład 4.14.** Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M względem wskazanych osi:
(a) kwadrat o boku a, względem przekątnej;
(b) ćwiartka koła o promieniu R, względem osi symetrii;
(c) odcinek paraboli o szerokości b i wysokości h, względem osi symetrii;
(d) $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$, względem osi Ox.

Rozwiązanie. Momenty bezwładności obszaru jednorodnego $D \subset \mathbb{R}^2$ o masie M względem osi Ox i Oy wyrażają się wzorami

$$I_x = \frac{M}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D y^2\,dxdy,$$

$$I_y = \frac{M}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D x^2\,dxdy.$$



Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy wzory (4.2, str. 134), (4.3, str. 137) oraz (4.5, str. 160).

► (a) Kwadrat umieszczamy w układzie współrzędnych jak na rysunku.

Wtedy moment bezwładności względem przekątnej będzie momentem względem osi Oy. Ze względu na symetrię kwadratu i funkcji x^2 jego moment bezwładności jest czterokrotnie większy od momentu bezwładności tej jego części, która leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. obszaru

$$D_+ = \left\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a - x\right\}.$$

Korzystając ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych, mamy

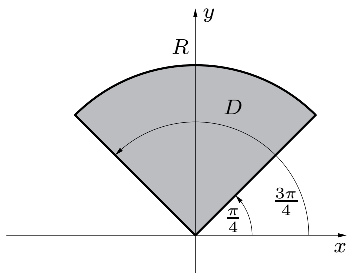
$$\iint\limits_{D_+} x^2\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} dx \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a-x} x^2\,dy = \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} x^2\,\big[y\big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a-x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} x^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - x\right)dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{a^4}{48}.$$

Moment bezwładności kwadratu o boku a względem przekątnej (osi Oy) jest więc równy

$$I_y = 4\cdot\frac{\frac{M}{4}}{\text{pole }(D_+)}\iint\limits_{D_+} x^2\,dxdy = 4\cdot\frac{\frac{M}{4}}{\frac{a^2}{4}}\cdot\frac{a^4}{48} = \frac{a^2M}{12}.$$

► (b) Niech ćwiartka koła D będzie położona w układzie współrzędnych jak na rysunku.



Wtedy jej moment bezwładności względem osi symetrii będzie momentem względem osi Oy, czyli

$$I_y = \frac{M}{\text{pole}\,(D)}\iint\limits_D x^2\,dxdy,$$

gdzie pole $(D) = \pi R^4/4$. Ponieważ ćwiartka koła jest obszarem określonym we współrzędnych biegunowych nierównościami

$$\Delta: \quad \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4},\ \ 0 \leqslant \varrho \leqslant R,$$

więc dokonując w całce zamiany zmiennych na te współrzędne oraz korzystając ze wzoru (4.5), następnie wzoru (4.2), a dalej z prostych całek oznaczonych i tożsamości $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, otrzymamy

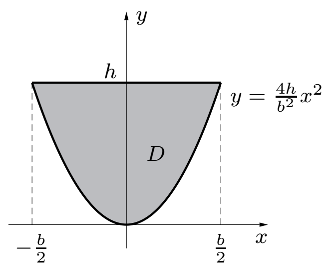
$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\,dxdy &= \iint\limits_\Delta (\varrho\cos\varphi)^2\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho = \iint\limits_\Delta \varrho^3\cos^2\varphi\,d\varphi d\varrho\\ &= \left(\int\limits_0^R \varrho^3\,d\varrho\right)\cdot\left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2\varphi\,d\varphi\right) = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^R\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\,d\varphi\\ &= \frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{(\pi-2)R^4}{16}.\end{aligned}$$

Zatem moment bezwładności ćwiartki koła względem jej osi symetrii jest równy

$$I_y = \frac{M}{\frac{\pi R^2}{4}}\cdot\frac{(\pi-2)\,R^4}{16} = \frac{M(\pi-2)R^2}{4\pi}.$$

► (c) Odcinek paraboli D umieszczamy w układzie współrzędnych jak na rysunku. Wtedy jego moment bezwładności względem osi symetrii jest momentem względem osi Oy. Z zadania wynika, że parabola ma równanie

$$y = \frac{4h}{b^2}x^2 \quad \left(-\frac{b}{2}\leqslant x\leqslant\frac{b}{2}\right).$$



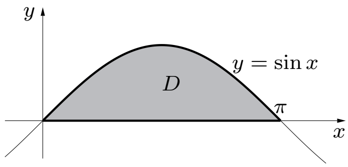
Pole odcinka paraboli wyrażone całką oznaczoną jest równe

$$\text{pole}\,(D) = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)\,dx = \left[hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{2}{3}hb. \tag{4.7}$$

Zatem korzystając ze wzoru (4.3) oraz prostych całek oznaczonych, mamy

$$\begin{aligned}I_y &= \frac{M}{\frac{2}{3}bh}\iint\limits_D x^2\,dxdy = \frac{3M}{2hb}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dx\int\limits_{\frac{4h}{b^2}x^2}^{h}x^2\,dy = \frac{3M}{2hb}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2\,\left[y\right]_{\frac{4h}{b^2}x^2}^{h}\,dx\\ &= \frac{3M}{2hb}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)\,dx = \frac{3M}{2b}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4}{b^2}\frac{x^5}{5}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{3M}{2b}\cdot\frac{b^3}{30} = \frac{Mb^2}{20}.\end{aligned}$$

(d) Najpierw obliczymy pole obszaru D (rysunek).



Pole tego obszaru wyrażone całką oznaczoną jest równe

$$\text{pole}\,(D) = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = 2.$$

Przechodzimy do obliczenia momentu bezwładności obszaru D względem osi Ox. Korzystając ze wzoru (4.3) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{M}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D y^2\,dxdy = \frac{M}{2}\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} y^2\,dy = \frac{M}{2}\int\limits_0^\pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sin x} dx \\ &= \frac{M}{6}\int\limits_0^\pi \sin^3 x\,dx = \frac{M}{6}\int\limits_0^\pi \big(1-\cos^2 x\big)\sin x\,dx \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ u=\cos x;\ du=-\sin x\,dx \\ x=0,\ u=1;\ x=\pi,\ u=-1 \end{array}\right] \\ &= \frac{M}{6}\int\limits_1^{-1}\big(1-u^2\big)(-du) = \frac{M}{6}\int\limits_{-1}^{1}\big(1-u^2\big)\,du = \frac{M}{6}\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{M}{6}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2M}{9}. \end{aligned}$$

▷ **Zadanie 4.14.** Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów względem wskazanych osi:

(a) jednorodny trójkąt równoramienny o podstawie a, wysokości h i masie M, względem podstawy.

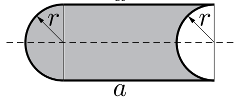
(b) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leqslant R^2,\ y\geqslant 0\right\}$, oś Ox, $\sigma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(c) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant y\leqslant 1-x^2\right\}$, oś symetrii obszaru, $\sigma(x,y)=x^2$;

(d) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \sin x\right\}$, oś Ox, $\sigma(x,y)=x$;

(e) jednorodny wycinek koła o promieniu R, kącie środkowym $\pi/3$ i masie M względem osi symetrii;

(f*) jednorodna figura o masie M oraz wymiarach a, r, pokazanych na rysunku, względem jej osi symetrii.



Odpowiedzi. (a) $I_x = Mh^2/6$; (b) $I_x = \pi R^5/10$; (c) $I_y = 4/35$; (d) $I_x = 2\pi/9$; (e) $I_x = MR^2\left(\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\right)$; (f*) $I_x = Mr^2/3$. Wsk. Wykorzystać fakt, że moment bezwładności figury jest taki sam, jak moment bezwładności jednorodnego prostokata o bokach a, $2r$ i masie M, względem osi symetrii równoległej do boku a.

5 Całki potrójne

Całki potrójne po prostopadłościanie

► **Przykład 5.1.** Obliczyć całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

(a) $\iiint\limits_P xz\sin xy\,dxdydz$, gdzie $P = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right] \times [0,\pi] \times [0,1]$;

(b) $\iiint\limits_P \frac{xy^3}{z^2}\,dxdydz$, gdzie $P = [-1,0] \times [0,1] \times [1,2]$.

Rozwiązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostopadłościanie $P = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$, to

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_p^q f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Powyższe twierdzenie będzie prawdziwe także wtedy, gdy po prawej stronie równości napiszemy inną całkę iterowaną (jest sześć rodzajów całek iterowanych). Całkę

$$\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_p^q f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx$$

zapisujemy umownie w postaci

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)\,dz.$$

Podobną umowę przyjmujemy dla pozostałych całek iterowanych. W wielu przypadkach wybór odpowiedniej kolejności całkowania pozwala znacznie uprościć obliczenia.

Jeżeli funkcja f jest iloczynem funkcji ciągłych g, h i k jednej zmiennej odpowiednio na przedziałach $[a,b]$, $[c,d]$ i $[p,q]$, to

$$\begin{aligned}\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz &= \iiint\limits_P g(x)h(y)k(z)\,dxdydz \\ &= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_p^q k(z)\,dz\right),\end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie $P=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$. Funkcję $f(x,y,z)=g(x)h(y)k(z)$ nazywamy funkcją o rozdzielonych zmiennych.

► (a) Korzystając ze wzoru na zamianę całki potrójnej na całki iterowane oraz wzoru na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych mamy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_P xz\sin xy\,dxdydz &= \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1\left[\int_0^\pi xz\sin xy\,dy\right]dz\right\}dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ u=xy,\ du=x\,dy\\ y=0,\ u=0\\ y=\pi,\ u=\pi x\end{array}\right] \\ &= \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1\left[\int_0^{\pi x} z\sin u\,du\right]dz\right\}dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1 z\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi x}dz\right\}dx \\ &= \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1 z(1-\cos\pi x)\,dz\right\}dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}(1-\cos\pi x)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}(1-\cos\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}-\frac{1}{4\pi}.\end{aligned}$$

► (b) Zauważmy, że w tym przykładzie funkcja podcałkowa jest funkcja o rozdzielonych zmiennych

$$\frac{xy^3}{z^2} = x\cdot y^3\cdot\frac{1}{z^2}.$$

Zatem korzystając ze wzoru (5.1) oraz prostych całek oznaczonych mamy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_P \frac{xy^3}{z^2}\,dxdydz &= \left(\int_{-1}^0 x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 y^3\,dy\right)\cdot\left(\int_1^2\frac{dz}{z^2}\right) \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0\cdot\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[-\frac{1}{z}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

▷ **Zadanie 5.1.** Obliczyć podane całki potrójne po prostopadłościanach:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz}$, gdzie $U = [1,2] \times [1,e] \times [1,e]$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $U = [1,2] \times [2,3] \times [3,4]$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U \sin x \sin(x+y)\sin(x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $U = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y)e^{x+z}\,dxdydz$, gdzie $U = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Odpowiedzi. (a) $3/2$; (b) $15/2$; (c) 0; (d) $\left(e^2-1\right)/2$.

Całki potrójne po obszarach normalnych

► **Przykład 5.2.** Całkę potrójną z funkcji $f(x,y,z)$ po obszarze U zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o równaniach:

(a) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=3$; (b) $x^2+y^2=3,\ z=-1,\ z=2$.

Rozwązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na

$$U = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy},\ d(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\},$$

– obszarze normalnym względem płaszczyzny xOy, gdzie funkcje d i g są ciągłe na obszarze regularnym D_{xy}, to

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz \quad = \quad \iint\limits_{D_{xy}} \left\{ \int\limits_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dxdy. \tag{5.2}$$

Obszar D_{xy} jest rzutem U na płaszczyznę xOy. W szczególności, jeżeli D_{xy} jest obszarem normalnym względem osi Ox, czyli

$$D_{xy} = \left\{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \tilde{d}(x) \leqslant y \leqslant \tilde{g}(x)\right\},$$

to

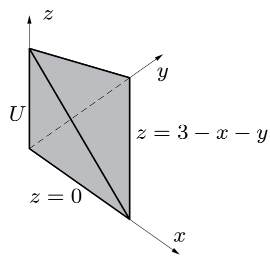
$$U = \left\{(x,y,z) : a \leqslant x \leqslant b,\ \tilde{d}(x) \leqslant y \leqslant \tilde{g}(x),\quad d(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\right\}.$$

Zatem wobec wzoru (5.2) mamy

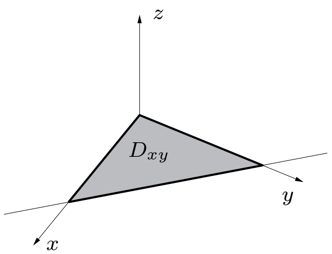
$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\tilde{d}(x)}^{\tilde{g}(x)} dy \int\limits_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{5.3}$$

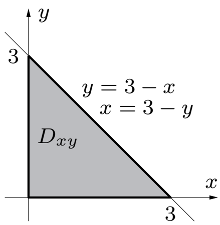
Całkę po prawej stronie powyższego wzoru nazywamy całką iterowaną. Prawdziwe są także analogiczne wzory z całkami iterowanymi po obszarach normalnych względem pozostałych płaszczyzn i osi układu.

► (a) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Obszar ten jest normalny względem każdej z płaszczyzn układu.



Rozważmy po kolei każdy przypadek. Obszar U normalny względem płaszczyzny xOy. Rzut obszaru U na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunkach.





Obszar D_{xy} jest normalny względem obu osi. Traktując go jako normalny względem osi Ox mamy

$$D_{xy} = \{(x, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 3 - x\}.$$

Wtedy

$$U = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 3 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 - x - y\}.$$

Zatem korzystając ze wzoru (5.3) otrzymamy

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{3-x-y} f(x, y, z)\,dz.$$

Podobnie, jeżeli potraktujemy obszar D_{xy} jako normalny względem osi Oy, to

$$D_{xy} = \{(x, y) :\ 0 \leqslant y \leqslant 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 3 - y\},$$

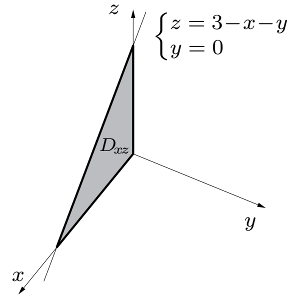
oraz

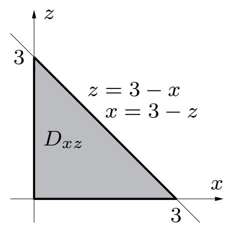
$$U = \{(x, y, z) : 0 \leqslant y \leqslant 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 3 - y,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 - x - y\}.$$

Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} dx \int\limits_0^{3-x-y} f(x,y,z)\,dz.$$

Teraz rozważmy przypadek, gdy obszar U potraktujemy jako normalny względem płaszczyzny xOz. Rzut obszaru U na płaszczyznę xOz przedstawiono na rysunkach.





Obszar D_{xz} jest normalny względem obu osi. Traktując go jako normalny względem osi Ox mamy

$$D_{xz} = \{(x,z):\ 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 3-x\}.$$

oraz

$$U = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 3-x,\ 0 \leqslant y \leqslant 3-x-z\}.$$

Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dz \int\limits_0^{3-x-z} f(x,y,z)\,dy.$$

Podobnie, jeżeli potraktujemy obszar D_{xz} jako normalny względem osi Oz, to

$$D_{xz} = \{(x,z):\ 0 \leqslant z \leqslant 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 3-z\},$$

oraz

$$U = \{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 3-z,\ 0 \leqslant y \leqslant 3-x-z\}.$$

Wtedy

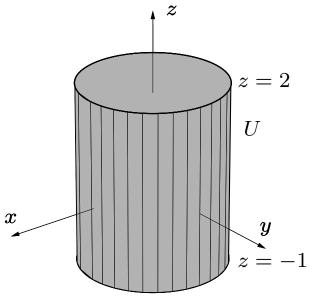
$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{3-z} dx \int\limits_0^{3-x-z} f(x,y,z)\,dz.$$

W ostatnim przypadeku gdy obszar U traktujemy jako normalny względem płaszczyzny yOz po analogicznych rozważaniach jak powyżej otrzymamy

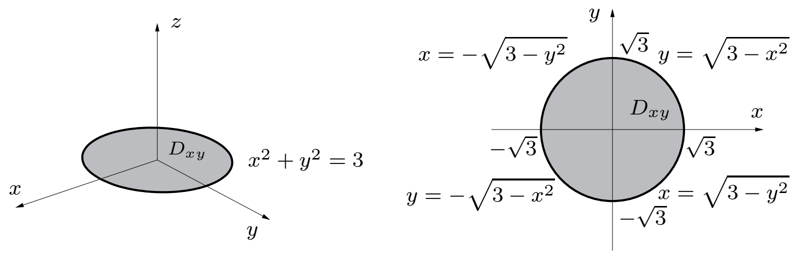
$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} dz \int\limits_0^{3-y-z} f(x,y,z)\,dx.$$

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{3-z} dy \int\limits_0^{3-y-z} f(x,y,z)\,dx.$$

(b) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Obszar ten jest normalny względem każdej z płaszczyzn układu.



Rozważmy po kolei każdy przypadek. Obszar U normalny względem płaszczyzny xOy. Rzut obszaru U na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunkach.



Obszar D_{xy} jest normalny względem obu osi. Traktując go jako normalny względem osi Ox mamy

$$D_{xy} = \left\{(x,y):\ -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3},\ -\sqrt{3-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{3-x^2}\right\}.$$

Wtedy

$$U = \left\{(x,y,z): -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3},\ -\sqrt{3-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{3-x^2},\ -1 \leqslant z \leqslant 2\right\}.$$

Zatem korzystając ze wzoru (5.3) otrzymamy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{-1}^{2} f(x,y,z)\,dz.$$

Podobnie, jeżeli potraktujemy obszar D_{xy} jako normalny względem osi Oy, to

$$D_{xy} = \left\{(x, y) : -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ \sqrt{3 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{3 - y^2}\right\},$$

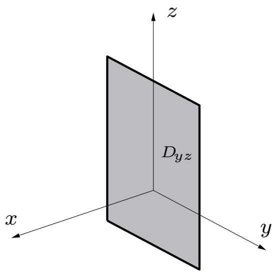
oraz

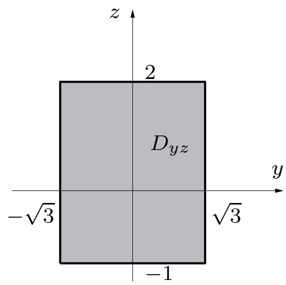
$$U = \left\{(x, y, z) : -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ -\sqrt{3 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{3 - y^2},\ -1 \leqslant z \leqslant 2\right\}.$$

Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} dx \int\limits_{-1}^{2} f(x, y, z)\, dz.$$

Teraz potraktujemy obszar U jako normalny względem płaszczyzny yOz. Rzut obszaru U na płaszczyznę yOz przedstawiono na rysunkach.





Obszar D_{yz} jest normalny względem obu osi. Traktując go jako normalny względem osi Oy mamy

$$D_{yz} = \left\{(y, z) : -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ -1 \leqslant z \leqslant 2\right\}.$$

oraz

$$U = \left\{(x, y, z) : -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ -1 \leqslant z \leqslant 2,\ -\sqrt{3 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{3 - y^2}\right\}.$$

Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-1}^{2} dz \int\limits_{-\sqrt{3-y^2}}^{-\sqrt{3-y^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

Podobnie, jeżeli potraktujemy obszar D_{yz} jako normalny względem osi Oz, to

$$D_{yz} = \left\{(x, z) : -1 \leqslant z \leqslant 2,\ -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\right\},$$

oraz

$$U = \left\{(x, y, z) : -1 \leqslant z \leqslant 2,\ -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ -\sqrt{3 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{3 - y^2}\right\}.$$

Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-1}^{2} dz \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y^2}}^{-\sqrt{3-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$$

W ostatnim przypadeku gdy obszar U traktujemy jako normalny względem płaszczyzny xOz po analogicznych rozważaniach jak powyżej otrzymamy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-1}^{2} dz \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{-\sqrt{3-x^2}} f(x,y,z)\,dy,$$

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-1}^{2} dz \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{-\sqrt{3-x^2}} f(x,y,z)\,dy,$$

▷ **Zadanie 5.2.** Całkę potrójną z funkcji $f(x,y,z)$ po obszarze U zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o równaniach:

(a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6$;

(b) $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z = 4$, $(z \geqslant 4)$;

(c) $z = x^2+y^2$, $z = \sqrt{20-x^2-y^2}$.

Odpowiedzi. (a) U – traktowany jako normalny względem płaszczyzny xOy:

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{6} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dx \int\limits_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{6} f(x,y,z)\,dz;$$

(b) U – traktowany jako normalny względem płaszczyzny yOz:

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{4}^{\sqrt{25-y^2}} dz \int\limits_{-\sqrt{25-y^2-z^2}}^{\sqrt{25-y^2-z^2}} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_{4}^{5} dz \int\limits_{-\sqrt{25-z^2}}^{\sqrt{25-z^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2-z^2}}^{\sqrt{25-y^2-z^2}} f(x,y,z)\,dx;$$

(c) U – traktowany jako normalny względem płaszczyzny xOy:

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz.$$

► **Przykład 5.3.** Narysować obszary całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania według podanego wzoru:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} f(x,y,z)\,dz, \quad \int dy \int dz \int f(x,y,z)\,dx;$

(b) $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz, \qquad \int dz \int dx \int f(x,y,z)\,dy.$

Rozwiązanie. Z postaci całki iterowanej

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\tilde{d}(x)}^{\tilde{g}(x)} dy \int\limits_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

wynika, że obszar całkowania U jest opisany nierównościami:

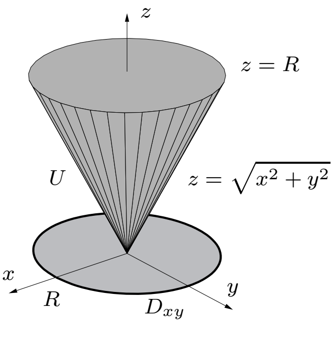
$$U: \qquad a \leqslant x \leqslant b,\ \tilde{d}(x) \leqslant y \leqslant \tilde{g}(x),\ \ d(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y).$$

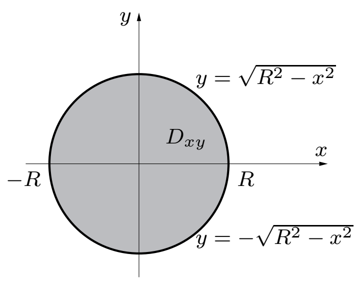
To oznacza, że jest obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy, przy czym jego rzut na tę płaszczyznę jest z kolei obszarem normalnym względem osi Ox. Analogiczny opis obszaru całkowania można podać dla pozostałych pięciu rodzajów całek iterowanych.

► (a) Z postaci całki iterowanej wynika, że obszar całkowania U określony jest nierównościami:

$$-R \leqslant x \leqslant R, \quad -\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant R,$$

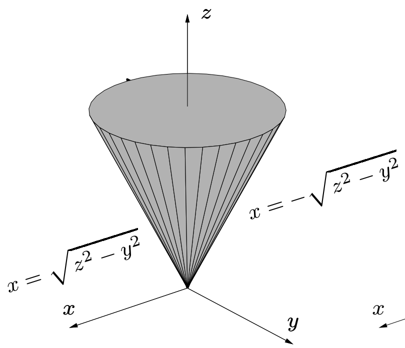
czyli jest obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy, a jego rzut na tą płaszczyznę jest obszarem normalnym względem osi Ox. Obszar U oraz jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy, przedstawiono na rysunkach.

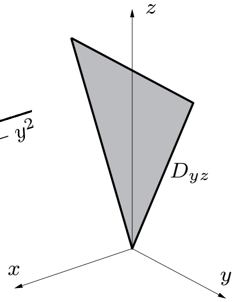


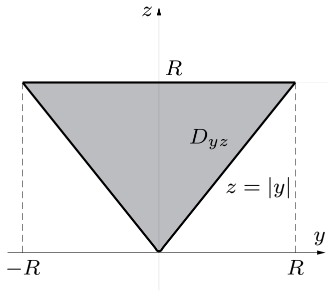


Aby rozważaną całkę zamienić na całkę iterowaną o wskazanej kolejności całkowania, należy obszar U przedstawić jako normalny względem płaszczyzny yOz, a jego rzut na tą płaszczyznę opisać jako obszar normalny względem osi Oy. Obszar U i jego rzut na płaszczyznę yOz, przedstawiono na rysunkach. Powierzchnie ograniczające obszar U odpowiednio z dołu i z góry (względem osi Ox) mają równania

$$x = -\sqrt{z^2-y^2}, \quad x = \sqrt{z^2-y^2},$$







a krzywe ograniczające jego rzut na płaszczyznę yOz – równania

$$z = |y|, \quad z = R.$$

Stąd

$$U = \left\{(x, y, z) : -R \leqslant y \leqslant R,\, |y| \leqslant z \leqslant R,\, -\sqrt{z^2 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{z^2 - y^2}\right\}.$$

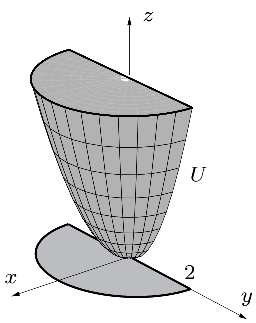
Zatem szukana całka iterowana ma postać

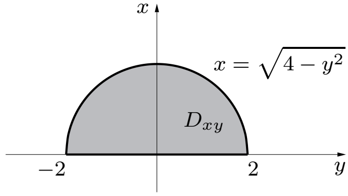
$$\int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{|y|}^{R} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

(b) Z postaci całki iterowanej wynika, że obszar całkowania U jest określony nierównościami:

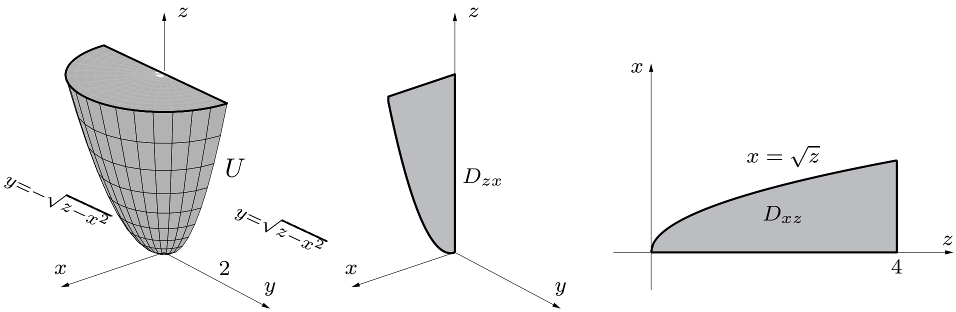
$$-2 \leqslant y \leqslant 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 4.$$

To oznacza, że jest obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy, a jego rzut na tą płaszczyznę jest obszarem normalnym względem osi Oy. Obszar U oraz jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy, przedstawiono na rysunkach.





Aby rozważaną całkę zamienić na całkę iterowaną o wskazanej kolejności całkowania, należy obszar U przedstawić jako normalny względem płaszczyzny xOz, a jego rzut na tą płaszczyznę opisać jako obszar normalny względem osi Oz. Obszaru U i jego rzut na płaszczyznę xOz, przedstawiono na rysunkach.



Powierzchnie ograniczające obszar U odpowiednio z dołu i z góry (w kierunku osi Oy) mają równania

$$y = -\sqrt{z - x^2}, \quad y = \sqrt{z - x^2},$$

a krzywe ograniczające jego rzut na płaszczyznę zOx – równania

$$x = \sqrt{z}, \quad x = 0, \quad z = 4.$$

Stąd

$$U = \left\{(x, y, z) : 0 \leqslant z \leqslant 4,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{z},\ -\sqrt{z - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{z - x^2}\right\}.$$

Zatem szukana całka iterowana ma postać

$$\int\limits_0^4 dz \int\limits_0^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z)\, dy.$$

▷ **Zadanie 5.3.** Narysować obszary całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania według podanego wzoru:

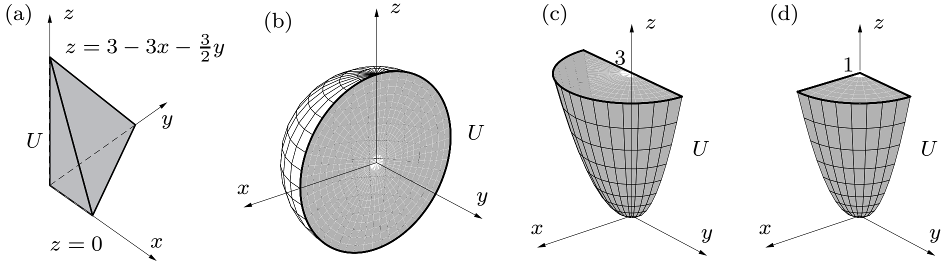
(a) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z)\, dz, \quad \int dx \int dz \int f(x, y, z)\, dy;$

(b) $\displaystyle\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz, \quad \int dy \int dz \int f(x, y, z)\, dx;$

(c) $\displaystyle\int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z)\, dy, \quad \int dy \int dx \int f(x, y, z)\, dz;$

(d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz, \quad \int dz \int dx \int f(x,y,z)\,dy.$

Odpowiedzi.



(a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{3-3x} dz \int\limits_0^{2-2x-\frac{2}{3}z} f(x,y,z)\,dy;$

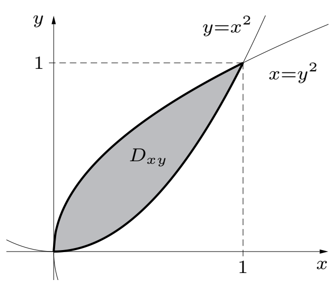
(b) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dz \int\limits_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} f(x,y,z)\,dx;$ (c) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_0^{\sqrt{3-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{3} f(x,y,z)\,dz;$

(d) $\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{\sqrt{z}} dx \int\limits_0^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\,dy.$

► **Przykład 5.4.** Obliczyć całki potrójne z funkcji f po obszarach U:
(a) $f(x,y,z) = xyz, \quad U: y \geqslant x^2,\ x \geqslant y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant xy;$
(b) $f(x,y,z) = \sqrt{x}, \quad U: 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant \sin y.$

Rozwązanie.
W rozwiązaniu wykorzystamy wzór (5.3, str. 189).

► (a) Obszar U jest ograniczony z dołu powierzchnią o równaniu $z = 0$, a z góry powierzchnią o równaniu $z = xy$. Rzut D_{xy} obszaru U na płaszczyznę xOy jest opisany nierównościami $y \geqslant x^2$, $x \geqslant y^2$ (rysunek).



Rzut ten traktowany jako normalny względem osi Ox ma postać

$$D_{xy}: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}.$$

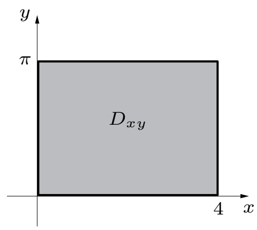
Zatem

$$U = \left\{(x,y,z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\ 0 \leqslant z \leqslant xy\right\}.$$

Następnie korzystając ze wzoru (5.2), a dalej prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iiint\limits_U xyz\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{xy} xyz\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy} dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x^3y^3\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^3\left[\frac{y^4}{4}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left(x^5 - x^{11}\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{96}.$$

(b) Obszar U jest ograniczony z dołu płaszczyzną $z \equiv 0$, a z góry powierzchnią o równaniu $z = \sin y$. Rzut D_{xy} obszaru U na płaszczyznę xOy jest prostokątem $[0,4] \times [0,\pi]$ (rysunek).



Prostokąt ten traktowany jako obszar normalny względem osi Ox ma postać

$$D_{xy}: 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Zatem

$$U = \{(x,y,z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant \sin y\}.$$

Następnie korzystając ze wzoru (5.2), a dalej prostych całek oznaczonych otrzymamy

$$\iiint\limits_U \sqrt{x}\,dxdydz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_0^{\sin y} \sqrt{x}\,dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\pi} \sqrt{x}\left[z\right]_0^{\sin y} dy$$
$$= \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\pi} \sqrt{x}\sin y\,dy = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\left[-\cos y\right]_0^{\pi} dx = \int\limits_0^4 2\sqrt{x}\,dx$$
$$= 2\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4 = \frac{32}{3}.$$

▷ **Zadanie 5.4.** Obliczyć całki potrójne z funkcji f po wskazanych obszarach:
(a) $f(x,y,z)=e^{x+y+z}$, $\quad U: x\leqslant 0,\ -x\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant -x$;

(b) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $\quad U: x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-y$;

(c) $f(x,y,z)=x^2+y^2$, $\quad U: x^2+y^2\leqslant 4,\ 1-x\leqslant z\leqslant 2-x$;

(d) $f(x,y,z)=x^2y^2$, $\quad U: 0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$.

Odpowiedzi. (a) $3-e$; (b) $1/144$; (c) 8π; (d) $1/126$.

Zamiana zmiennych w całkach potrójnych*

► **Przykład 5.5.** Stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć całki potrójne:
(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{(x+y)(x-y)^3}{(2x+3y-z)^2}\,dxdydz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym płaszczyznami: $x+y=2,\ x+y=3,\ x-y=0,\ x-y=2,\ 2x+3y-z=1,\ 2x+3y-z=5$;
(b) $\displaystyle\iiint\limits_U x^2y^6z\,dxdydz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym przez powierzchnie o równaniach: $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2}{x}$, $y=2x$, $y=3x$, $z=x^2+y^2$, $z=x^2+y^2+1$ $(x>0)$.

Rozwązanie. W rozwiązaniach wykorzystamy wzór na zamianę zmiennych w całce potrójnej:

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_\Omega f\Big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\Big)\Big|J_{\mathcal{T}}(u,v,w)\Big|\,dudvdw.$$

W tym wzorze przekształcenie $\mathcal{T}:\Omega\longrightarrow U$, określone wzorem

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v,w),\\ y=\psi(u,v,w),\\ z=\chi(u,v,w),\end{cases}$$

przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ na wnętrze obszaru $U\subset\mathbb{R}^3$, przy czym funkcje φ,ψ,χ mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze Ω, a jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$, tj. funkcja

$$J_{\mathcal{T}}(u,v,w)=\det\begin{bmatrix}\varphi'_u(u,v,w) & \varphi'_v(u,v,w) & \varphi'_w(u,v,w)\\ \psi'_u(u,v,w) & \psi'_v(u,v,w) & \psi'_w(u,v,w)\\ \chi'_u(u,v,w) & \chi'_v(u,v,w) & \chi'_w(u,v,w)\end{bmatrix},$$

nie zeruje się wewnątrz obszaru Ω. Ponadto zakładamy, że funkcja f jest ciągła na obszarze U.

► (a) Ponieważ płaszczyzny ograniczające obszar U mają postać:

$$x+y=2,\ x+y=3,\ x-y=0,\ x-y=2,\ 2x+3y-z=1,\ 2x+3y-z=5,$$

więc wygodnie jest dokonać następującej zamiany zmiennych:

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y, \\ w = 2x+3y-z. \end{cases}$$

Wtedy obszar Ω jest opisany nierównościami:

$$\Omega: \quad 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2,\ 1 \leqslant w \leqslant 5.$$

Z podanego powyżej układu równań wyznaczamy zmienne x, y, z. Mamy

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v, \\ z = \frac{5}{2}u - \frac{1}{2}v - w. \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru Ω na wnętrze obszaru U. Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ ma postać

$$J_{\mathcal{T}}(u,v,w) = \det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{u}{2}+\frac{v}{2}\right]'_u & \left[\frac{u}{2}+\frac{v}{2}\right]'_v & \left[\frac{u}{2}+\frac{v}{2}\right]'_w \\ \left[\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right]'_u & \left[\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right]'_v & \left[\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right]'_w \\ \left[\frac{5u}{2}-\frac{v}{2}-w\right]'_u & \left[\frac{5u}{2}-\frac{v}{2}-w\right]'_v & \left[\frac{5u}{2}-\frac{v}{2}-w\right]'_w \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 5/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

i nie zeruje się wewnątrz obszaru Ω. Wstawiając otrzymane wielkości do wzoru na zamianę zmiennych w całce potrójnej dostaniemy

$$\iiint\limits_U \frac{(x+y)(x-y)^3}{(2x+3y-z)^2}\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \frac{uv^3}{w^2}\left|\frac{1}{2}\right|\,dudvdw = \frac{1}{2}\iiint\limits_\Omega \frac{uv^3}{w^2}\,dudvdw.$$

Ponieważ obszar Ω jest prostopadłościanem $[2,3]\times[0,2]\times[1,5]$, a funkcja podcałkowa jest funkcją o rozdzielonych zmiennych, więc korzystając ze wzoru (5.1, str. 188) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iiint\limits_\Omega \frac{uv^3}{w^2}\,dudvdw = \left(\int_2^3 u\,du\right)\cdot\left(\int_0^2 v^3\,dv\right)\cdot\left(\int_1^5 \frac{dw}{w^2}\right)$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_2^3 \cdot \left[\frac{v^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[-\frac{1}{w}\right]_1^5 = \frac{5}{2}\cdot 4\cdot\frac{4}{5} = 8.$$

Ostatecznie

$$\iiint\limits_U \frac{(x+y)(x-y)^3}{(2x+3y-z)^2}\,dxdydz = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4.$$

(b) Powierzchnie ograniczające obszar U zapisujemy w postaci:

$$xy=1,\ xy=2,\ \frac{y}{x}=2,\ \frac{y}{x}=3,\ z-x^2-y^2=0,\ z-x^2-y^2=1.$$

Stąd widać, że wygodnie jest dokonać następującej zamiany zmiennych:

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}, \\ w = z - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Wtedy obszar Ω jest opisany przez nierówności:

$$\Omega: \quad 1 \leqslant u \leqslant 2,\ \ 2 \leqslant v \leqslant 3,\ \ 0 \leqslant w \leqslant 1.$$

Z podanego powyżej układu równań wyznaczamy zmienne x, y, z, pamiętając przy tym, że $x > 0$, $y > 0$. Mamy

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \\ z = \dfrac{u}{v} + uv + w. \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza różnowartościowo wnętrze obszaru Ω na wnętrze obszaru U. Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ ma postać

$$J_{\mathcal{T}}(u,v,w) = \det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{\dfrac{u}{v}}\right]'_u & \left[\sqrt{\dfrac{u}{v}}\right]'_v & \left[\sqrt{\dfrac{u}{v}}\right]'_w \\ \left[\sqrt{uv}\right]'_u & \left[\sqrt{uv}\right]'_v & \left[\sqrt{uv}\right]'_w \\ \left[\dfrac{u}{v}+uv+w\right]'_u & \left[\dfrac{u}{v}+uv+w\right]'_v & \left[\dfrac{u}{v}+uv+w\right]'_w \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} & 0 \\ \dfrac{1}{v}+v & -\dfrac{u}{v^2}+u & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}$$

i nie zeruje się wewnątrz obszaru Ω. Ponadto $|J_{\mathcal{T}}(u,v,w)| = 1/2v$, bo $2 \leqslant v \leqslant 3$. Wstawiając teraz otrzymane wielkości do wzoru na zamianę zmiennych w całce potrójnej dostaniemy

$$\iiint\limits_U x^2y^6z\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^2 \left(\sqrt{uv}\right)^6 \left(\frac{u}{v}+uv+w\right)\frac{1}{2v}\,dudvdw$$
$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_\Omega \left(u^5v^2+u^5+u^4vw\right)\,dudvdw.$$

Ponieważ obszar Ω jest prostopadłościanem $[1,2]\times[2,3]\times[0,1]$, więc korzystając ze wzoru na zamianę całki potrójnej po prostopadłościanie na całki iterowane, a dalej z prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iiint\limits_\Omega \left(u^5v^2+u^5+u^4vw\right)\,dudvdw = \int\limits_1^2 du\int\limits_2^3 dv\int\limits_0^1 \left(u^5v^2+u^5+u^4vw\right)\,dw$$
$$= \int\limits_1^2 du\int\limits_2^3 \left\{\left(u^5v^2+u^5\right)\left[w\right]_0^1 + u^4v\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1\right\}\,dv$$
$$= \int\limits_1^2 du\int\limits_2^3 \left(u^5v^2+u^5+\frac{1}{2}u^4v\right)\,dv$$
$$= \int\limits_1^2 \left\{u^5\left[\frac{v^3}{3}\right]_2^3 + u^5\left[v\right]_2^3 + \frac{1}{2}u^4\left[\frac{v^2}{2}\right]_2^3\right\}du$$
$$= \int\limits_1^2 \left(\frac{22}{3}u^5+\frac{5}{4}u^4\right)\,du = \frac{22}{3}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^2 + \frac{5}{4}\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^2$$
$$= \frac{339}{4}.$$

Ostatecznie

$$\iiint\limits_U x^2y^6z\,dxdydz = \frac{1}{2}\cdot\frac{339}{4} = \frac{339}{8}.$$

$\triangleright$ **Zadanie 5.5.** Stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć całki potrójne:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U x(x+y)^2(x+y+z)^3\,dxdydz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym przez płaszczyzny: $x=0$, $x=1$, $x+y=1$, $x+y=2$, $x+y+z=2$, $x+y+z=3$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdydz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym przez powierzchnie: $y=x$, $y=2x$, $xy=1$, $xy=4$, $z=y+2$, $z=y+3$, gdzie $x>0$;

(c*) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie U jest torusem, tj. bryłą powstałą z obrotu wokół osi Oz koła $(x-R)^2+z^2 \leqslant r^2$, $y=0$, gdzie $0<r\leqslant R$.

Odpowiedzi. (a) $455/2$; (b) $9/4$; (c*) $\pi^2 Rr^2\left(4R^2+3r^2\right)/2$.

Współrzędne walcowe w całkach potrójnych

► **Przykład 5.6.** Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki:

(a) $\iiint\limits_U \left(x^4+y^4\right)\,dxdydz$, gdzie $U:\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ 2\leqslant z\leqslant 5$;

(b) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie $U:\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$;

(c) $\iiint\limits_U x^2\,dxdydz$, gdzie $U:\ 0\leqslant z\leqslant 9-x^2-y^2$.

Rozwązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze U, który jest obrazem zbioru Ω opisanym we współrzędnych walcowych nierównościami:

$$\Omega:\quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\ \ \tilde{d}(\varphi)\leqslant\varrho\leqslant\tilde{g}(\varphi),\ \ d(\varphi,\varrho)\leqslant h\leqslant g(\varphi,\varrho),$$

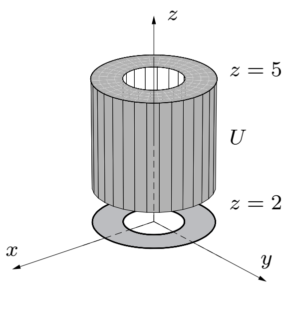
gdzie funkcje $\tilde{d}$, $\tilde{g}$ oraz d, g są ciągłe, to

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_\Omega f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,h)\varrho\,d\varphi d\varrho dh \tag{5.4}$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\tilde{d}(\varphi)}^{\tilde{g}(\varphi)}d\varrho\int\limits_{d(\varphi,\varrho)}^{g(\varphi,\varrho)}f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,h)\varrho\,dh. \tag{5.5}$$

► (a) Obszar całkowania jest walcem wydrążonym o promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2, położonym między płaszczyznami $z=2$ i $z=5$ (rysunek). Podstawiając $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, $z=h$ do nierówności $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, $2\leqslant z\leqslant 5$ opisujących obszar U, otrzymamy

$$1\leqslant\varrho^2\leqslant 4,\quad 2\leqslant h\leqslant 5.$$



Ponieważ $\varrho\geqslant 0$, więc we współrzędnych walcowych obszar U jest opisany nierównościami

$$\Omega:\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ \ 1\leqslant\varrho\leqslant 2,\ \ 2\leqslant h\leqslant 5.$$

Z rysunku również można wywnioskować ten opis. Teraz w całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Na mocy wzoru (5.4), a następnie (5.1, str. 188), mamy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_U \left(x^4+y^4\right)\,dxdydz &= \iiint\limits_\Omega \Big((\varrho\cos\varphi)^4+(\varrho\sin\varphi)^4\Big)\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho dh\\ &= \iiint\limits_\Omega \left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)\cdot\varrho^5\,d\varphi d\varrho dh\\ &= \left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_1^2\varrho^5\,d\varrho\right)\cdot\left(\int\limits_2^5 dh\right).\end{aligned}$$

Do obliczenia pierwszej całki wykorzystamy zależności:

$$\begin{aligned}\cos^4\varphi+\sin^4\varphi &= \left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1-\frac{1}{2}\left(2\sin\varphi\cos\varphi\right)^2\\ &= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi = 1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos 4\varphi\right)\right] = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\varphi.\end{aligned}$$

Zatem

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)\,d\varphi = \left[\frac{3}{4}\varphi+\frac{1}{16}\sin 4\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

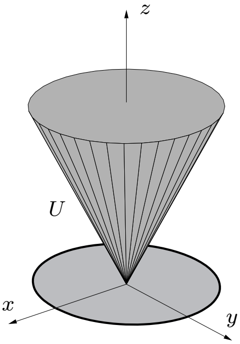
Dwie kolejne całki są równe odpowiednio

$$\int\limits_1^2\varrho^5\,d\varrho = \left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_1^2 = \frac{63}{6},\qquad \int\limits_2^5 dh = 3.$$

Zatem

$$\iiint\limits_U\left(x^4+y^4\right)\,dxdydz = \frac{3}{2}\pi\cdot\frac{63}{6}\cdot 3 = \frac{189}{4}\pi.$$

► (b) Obszar całkowania U jest stożkiem o wysokości 1 i promieniu podstawy 1 (rysunek).



Podstawiając $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $z = h$ do nierówności opisujących obszar U mamy

$$\sqrt{\varrho^2} \leqslant h \leqslant 1.$$

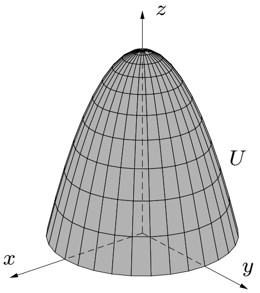
Ponieważ $\varrho \geqslant 0$, więc obszar U opisany jest nierównościami

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant \varrho \leqslant 1, \; \varrho \leqslant h \leqslant 1.$$

Z rysunku również można wywnioskować ten opis. Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Na mocy kolejno wzoru (5.4) i (5.5) oraz prostych całek oznaczonych, mamy

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right)\, dxdydz &= \iiint\limits_\Omega \Big((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2 \Big) \cdot \varrho \, d\varphi d\varrho dh \\
&= \iiint\limits_\Omega \varrho^3 \, d\varphi d\varrho dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\varrho \int\limits_\varrho^1 \varrho^3 \, dh \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \varrho^3 \left[h\right]_\varrho^1 d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\varrho^3 - \varrho^4\right) d\varrho \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^4}{4} - \frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{20} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}$$

(c) Obszar całkowania U jest odcinkiem paraboloidy (rysunek).



Zapiszemy teraz obszar U we współrzędnych walcowych. Podstawiając $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $z = h$ do nierówności opisujących U mamy

$$0 \leqslant h \leqslant 9 - (\varrho\cos\varphi)^2 - (\varrho\sin\varphi)^2.$$

Stąd

$$0 \leqslant h \leqslant 9 - \varrho^2.$$

Zatem we współrzędnych walcowych obszar U opisany jest układem nierówności

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant \varrho \leqslant 3, \; 0 \leqslant h \leqslant 9 - \varrho^2.$$

Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Na mocy kolejno wzoru (5.4) i 5.5) oraz prostych całek oznaczonych, mamy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_U x^2\,dxdydz &= \iiint\limits_\Omega (\varrho\cos\varphi)^2\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho dh = \iiint\limits_\Omega \varrho^3\cos^2\varphi\,d\varphi d\varrho dh\\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 d\varrho\int\limits_0^{9-\varrho^2}\varrho^3\cos^2\varphi\,dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \varrho^3\cos^2\varphi\,\big[h\big]_0^{9-\varrho^2}\,d\varrho\\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \varrho^3\left(9-\varrho^2\right)\cos^2\varphi\,d\varrho = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\left[\frac{9\varrho^4}{4}-\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^3 d\varphi\\ &= \frac{243}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\,d\varphi = \frac{243}{8}\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{243\pi}{4}.\end{aligned}$$

▷ **Zadanie 5.6.** Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki:

(a) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2\,dxdydz,$ gdzie $U: x^2+y^2\leqslant 4,\ 0\leqslant z\leqslant 1;$

(b) $\iiint\limits_U xyz\,dxdydz,$ gdzie $U: \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2};$

(c) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)dxdydz,$ gdzie $U: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz;$

(d) $\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz,$ gdzie $U: x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 2-x-y.$

Odpowiedzi. (a) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 d\varrho\int\limits_0^1\left(\varrho^2+h^2\right)^2\varrho\,dh = \frac{412}{15}\pi;$

(b) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\varrho\int\limits_\varrho^{\sqrt{1-\varrho^2}} h\varrho^3\sin\varphi\cos\varphi\,dh = 0;$ (c) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} d\varrho\int\limits_{R-\sqrt{R^2-\varrho^2}}^{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\varrho^3\,dh = \frac{53}{480}\pi R^5;$

(d) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 d\varrho\int\limits_0^{2-\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)}\left[\varrho\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)+h\right]\varrho\,dh = \frac{7\pi}{4}.$

Współrzędne sferyczne w całkach potrójnych

► **Przykład 5.7.** Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki:

(a) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dxdydz,$ gdzie $U:\ -\sqrt{4-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant 0;$

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie $U:\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant x$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie $U:\ 3\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 5,\ z\leqslant 0$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{z}$; gdzie $U:\ 1\leqslant z\leqslant\sqrt{4-(x^2+y^2)}$.

Rozwązanie. Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze U, który jest obrazem zbioru Ω opisanego we współrzędnych sferycznych nierównościami:

$$\Omega:\quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\ \ \tilde{d}(\varphi)\leqslant\psi\leqslant\tilde{g}(\varphi),\ \ d(\varphi,\psi)\leqslant\varrho\leqslant g(\varphi,\psi),$$

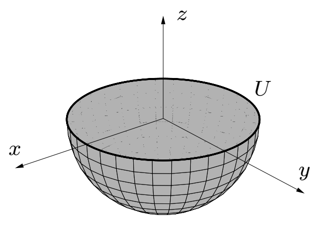
gdzie funkcje $\tilde{d}$, $\tilde{g}$ oraz d, g są ciągłe, to

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_\Omega f\left(\varrho\cos\varphi\cos\psi,\varrho\sin\varphi\cos\psi,\varrho\sin\psi\right)\varrho^2\cos\psi\,d\varrho \quad (5.6)$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\tilde{d}(\varphi)}^{\tilde{g}(\varphi)}d\psi\int\limits_{d(\varphi,\psi)}^{g(\varphi,\psi)}f\left(\varrho\cos\varphi\cos\psi,\varrho\sin\varphi\cos\psi,\varrho\sin\psi\right)\varrho^2\cos\psi\,d\varrho. \quad (5.7)$$

Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy wzór (5.1, str. 188).

► (a) Obszar całkowania U jest dolną półkulą o promieniu $R=2$ (rysunek).



Podstawiając $x=\varrho\cos\varphi\cos\psi$, $y=\varrho\sin\varphi\cos\psi$, $z=\varrho\sin\psi$ do nierówności opisujących obszar U mamy

$$-\sqrt{4-\varrho^2\cos^2\psi}\leqslant\varrho\sin\psi\leqslant 0.$$

Stąd we współrzędnych sferycznych obszar U opisany jest nierównościami:

$$\Omega:\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant 0,\ \ 0\leqslant\varrho\leqslant 2$$

Opis ten można uzyskać odwołując się do interpretacji geometrycznej współrzędnych sferycznych. Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Na mocy wzoru (5.6), następnie (5.1) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

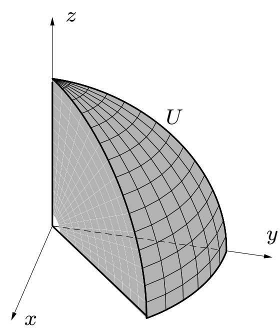
$$\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega \left(\varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + \varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + \varrho^2\sin^2\psi\right)\varrho^2\cos\psi\, d\varphi d\psi d\varrho$$

$$= \iiint\limits_\Omega \varrho^4\cos\psi\, d\varphi d\psi d\varrho = \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\psi\, d\psi\right)\cdot\left(\int\limits_0^2 \varrho^4\, d\varrho\right)$$

$$= 2\pi\cdot\left[\sin\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cdot\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi\cdot 1\cdot\frac{32}{5} = \frac{64}{5}\pi.$$

(b) Obszar całkowania (jest to 1/16 kuli o promieniu R) przedstawiono na rysunku. Podstawiając $x=\varrho\cos\varphi\cos\psi$, $y=\varrho\sin\varphi\cos\psi$, $z=\varrho\sin\psi$ do nierówności opisujących obszar U, mamy



$$0\leqslant\varrho\sin\psi\leqslant\sqrt{4-\varrho^2\cos^2\psi},$$
$$\varrho\cos\varphi\cos\psi\geqslant 0,$$
$$\varrho\sin\varphi\cos\psi\geqslant\varrho\cos\varphi\cos\psi.$$

Stąd, uwzględniając ograniczenia dotyczące zakresu zmienności współrzędnych sferycznych, obszar U opisany jest przez nierówności

$$\Omega:\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant\varrho\leqslant 2.$$

Opis ten można również uzyskać odwołując się do interpretacji geometrycznej współrzędnych sferycznych. Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Na mocy wzoru (5.6), a następnie (5.1) oraz podstawowych metod całkowania całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iiint\limits_U z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz =$$

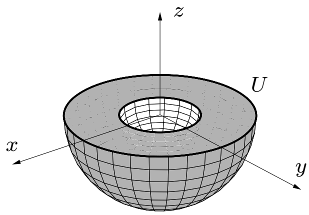
$$= \iiint\limits_\Omega (\varrho\sin\psi)^2\sqrt{(\varrho\cos\varphi\cos\psi)^2+(\varrho\sin\varphi\cos\psi)^2+(\varrho\sin\psi)^2}\cdot\varrho^2\cos\psi\, d\varphi d\psi d\varrho$$

$$= \iiint\limits_\Omega \varrho^5\sin^2\psi\cos\psi\, d\varphi d\psi d\varrho = \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^2\varrho^5\, d\varrho\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\cos\psi\, d\psi\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^2 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi \cos\psi \, d\psi\right) \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie} \\ u = \sin\psi, \;\; du = \cos\psi \, d\psi \\ \psi = 0, \; u = 0 \\ \psi = \pi/2, \; u = 1\end{array}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{64}{6} \cdot \int_0^1 u^2 \, du = \frac{8}{3}\pi \cdot \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}\pi.$$

► (c) Obszar całkowania U jest dolną półkulą wydrążoną o promieniu wewnętrznym $r = \sqrt{3}$ i zewnętrznym $R = \sqrt{5}$ (rysunek). Zatem obszar U we współrzędnych sferycznych jest opisany przez nierówności:



$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0, \;\; \sqrt{3} \leqslant \varrho \leqslant \sqrt{5}.$$

Teraz w obliczanej całce możemy dokonać zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Na mocy wzoru (5.6), a następnie (5.1) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdydz =$$

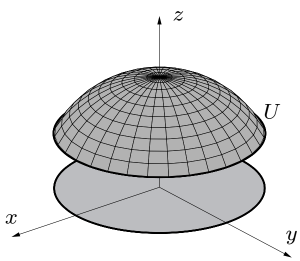
$$= \iiint_\Omega \sqrt{(\varrho\cos\varphi\cos\psi)^2 + (\varrho\sin\varphi\cos\psi)^2} \cdot \varrho^2 \cos\psi \, d\varphi d\psi d\varrho$$

$$= \iiint_\Omega \varrho^3 \cos^2\psi \, d\varphi d\psi d\varrho = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \varrho^3 \, d\varrho\right) \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\psi \, d\psi\right)$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\psi) \, d\psi = 2\pi \left(\frac{25}{4} - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\psi + \frac{1}{2}\sin 2\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0$$

$$= 8\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi^2.$$

► (d) Obszar całkowania U jest czaszą kulistą ograniczoną przez płaszczyznę $z = 1$ oraz górną półsferę $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ (rysunek).



Podstawiając współrzędne sferyczne do nierówności określających obszar U otrzymamy

$$1 \leqslant \varrho \sin\psi \leqslant \sqrt{4-\varrho^2\cos^2\psi}.$$

Z nierówności $1 \leqslant \varrho\sin\psi$ wynika, że $\varrho \geqslant \dfrac{1}{\sin\psi}$. Z kolei z nierówności $\varrho\sin\psi \leqslant \sqrt{4-\varrho^2\cos^2\psi}$ mamy $\varrho \leqslant 2$. Z ostatniej nierówności $1 \leqslant \sqrt{4-\varrho^2\cos^2\psi}$ wobec faktu, że $\varrho \geqslant \dfrac{1}{\sin\psi}$, mamy $\psi \geqslant \pi/6$. Zatem obszar U we współrzędnych sferycznych opisany jest układem nierówności

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\sin\psi} \leqslant \varrho \leqslant 2.$$

Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Na mocy kolejno wzorów (5.6), (5.7) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{z} &= \iiint\limits_\Omega \frac{\varrho^2\cos\psi\, d\varphi d\psi d\varrho}{\varrho\sin\psi} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{\frac{1}{\sin\psi}}^{2} \frac{\cos\psi}{\sin\psi}\varrho\, d\varrho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi}{\sin\psi}\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sin\psi}}^{2} d\psi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2-\frac{1}{2\sin^2\psi}\right)\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\, d\psi \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ u=\sin\psi;\ du=\cos\psi\, d\psi \\ \psi=\pi/6,\ u=1/2;\ \psi=\pi/2,\ u=1\end{array}\right] \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2-\frac{1}{2u^2}\right)\frac{du}{u} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{2u^3}\right) du \\
&= \int_0^{2\pi}\left[2\ln|u| + \frac{1}{4u^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} d\varphi = \left(\frac{1}{4} - 2\ln\frac{1}{2} - 1\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \left(2\ln 2 - \frac{3}{4}\right)\cdot 2\pi = \left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right)\pi.
\end{aligned}$$

▷ **Zadanie 5.7.** Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdzie $U: 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, gdzie $U: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U z^2\, dxdydz$, gdzie $U: x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2\ (R>0)$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U x^2\,dxdydz$, gdzie $U : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$.

Odpowiedzi. (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_2^3 \varrho\cos\psi\,d\varrho = 10\pi$;

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \varrho^4\cos^3\psi\,d\varrho = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12}\right)$;

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2R\sin\psi} \varrho^4\sin^2\psi\cos\psi\,d\varrho = \frac{8}{5}\pi R^5$;

(d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{4\cos\varphi\cos\psi} \varrho^4\cos^2\varphi\cos^3\psi\,d\varrho = \frac{256\pi}{5}$.

Zastosowania całek potrójnych

► **Przykład 5.8.** Narysować i obliczyć objętości obszarów U ograniczonych powierzchniami:
(a) $z = 2-x^2-y^2$, $z=0$; (b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;
(c) $z=x^2+y^2$, $z=3+\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$; (d) $z=\sqrt[4]{x^2+y^2}$, $z=1$, $z=\sqrt{2}$.

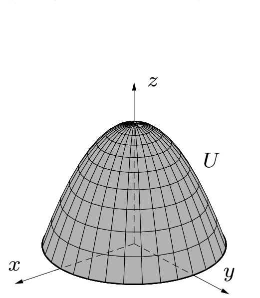
Rozwiązanie. Objętość obszaru $U\subset\mathbb{R}^3$ wyraża się wzorem:

$$\text{objętość}\,(U) = \iiint\limits_U dxdydz.$$

W rozwiązaniach wykorzystamy także wzory (5.4, 5.5, str. 204) i (5.6, 5.7, str. 208) na zamianę zmiennych w całkach potrójnych odpowiednio na współrzędne walcowe i sferyczne. Ponadto wykorzystamy wzory (4.2, str. 134) i (5.1, str. 188) dla całek z funkcji o rozdzielonych zmiennych.

► (a) Obszar U rozważany w zadaniu jest ograniczony paraboloidą obrotową $z = 2-\left(x^2+y^2\right)$ oraz płaszczyzną xOy (rysunek). Obszar ten jest określony przez nierówności:

$$0 \leqslant z \leqslant 2-x^2-y^2.$$



We współrzędnych walcowych nierówności te przyjmują postać

$$0 \leqslant h \leqslant 2-\varrho^2.$$

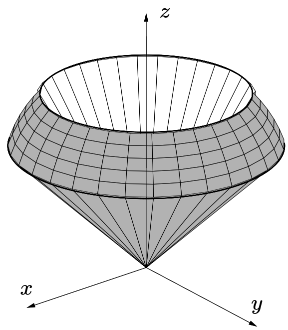
Stąd $2-\varrho^2 \geqslant 0$, czyli $\varrho \leqslant \sqrt{2}$. Zatem obszar U we współrzędnych walcowych opisany jest nierównościami

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ 0 \leqslant \varrho \leqslant \sqrt{2},\ \ 0 \leqslant h \leqslant 2-\varrho^2.$$

Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Na mocy kolejno wzorów (5.4), (5.5) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\text{objętość}\,(U) &= \iiint\limits_U dxdydz = \iiint\limits_\Omega \varrho\, d\varphi d\varrho dh \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} d\varrho \int\limits_0^{2-\varrho^2} \varrho\, dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \varrho\, \big[h\big]_0^{2-\varrho^2}\, d\varrho \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \varrho\left(2-\varrho^2\right) d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} \left[\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.
\end{aligned}$$

► (b) Bryła U rozważana w zadaniu jest ograniczona dwoma powierzchniami stożkowymi oraz fragmentem sfery. Tworząca stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nachylona jest do płaszczyzny xOy pod kątem $\pi/4$, a stożka $z = \sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ – pod kątem $\pi/6$. Półsfera, której fragment ogranicza bryłę U ma promień 2 (rysunek). Zatem bryła U we współrzędnych sferycznych opisana jest nierównościami:



$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ \frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{3},\ \ 0 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$

Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Na mocy wzorów (5.6), (5.7), a następnie (5.1) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

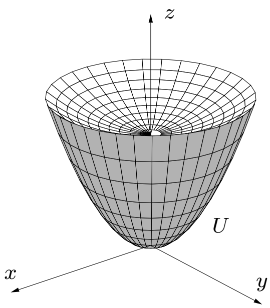
$$\begin{aligned}
\text{objętość}\ (U) &= \iiint\limits_U dxdydz = \iiint\limits_\Omega \varrho^2 \cos\psi\, d\varphi d\psi d\varrho \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\psi \int\limits_0^{2} \varrho^2 \cos\psi\, d\varrho \\
&= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\psi\, d\psi\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \varrho^2 d\varphi\right) \\
&= 2\pi \cdot \big[\sin\psi\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{3}\left[\varrho^3\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

► (c) Bryła U opisana w zadaniu jest ograniczona powierzchniami dwóch paraboloid (rysunek), czyli opisana jest nierównościami

$$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 3 + \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right).$$

We współrzędnych walcowych nierówności te mają postać

$$\varrho^2 \leqslant h \leqslant 3 + \frac{1}{4}\varrho^2.$$



Stąd $\varrho^2 \leqslant 3+\frac{1}{4}\varrho^2$. To oznacza, że $\varrho \leqslant 2$. Zatem bryła U we współrzędnych walcowych jest opisana nierównościami:

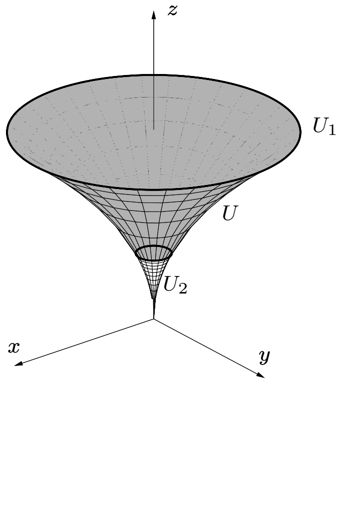
$$\Omega : \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 2, \;\; \varrho^2 \leqslant h \leqslant 3 + \frac{1}{4}\varrho^2.$$

Teraz w obliczanej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Na mocy kolejno wzorów (5.4), (5.5) i (4.2) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\text{objętość } (U) &= \iiint\limits_U dxdydz = \iiint\limits_\Omega \varrho \, d\varphi d\varrho dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{\varrho^2}^{3+\frac{1}{4}\varrho^2} \varrho \, dh \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho \left[h\right]_{\varrho^2}^{3+\frac{1}{4}\varrho^2} d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho \left(3 + \frac{1}{4}\varrho^2 - \varrho^2\right) d\varrho \\
&= 3 \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^2 \left(\varrho - \frac{\varrho^3}{4}\right) d\varrho\right) = 3 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{16}\right]_0^2 = 6\pi.
\end{aligned}$$

(d) Rozważany obszar U jest ograniczony powierzchnią obrotową $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ oraz płaszczyznami $z = 1$ i $z = \sqrt{2}$ (rysunek). Obszar U jest różnicą obszarów U_1 i U_2 zaznaczonych na rysunku. Zatem

$$\text{objętość}\,(U) = \text{objętość } (U_1) - \text{objętość } (U_2).$$



Obszary U_1, U_2 są opisane nierównościami:

$$U_1 : \qquad \sqrt[4]{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2},$$

$$U_2 : \qquad \sqrt[4]{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1.$$

Zatem we współrzędnych walcowych obszary te są opisane nierównościami:

$$\Omega_1: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 2, \;\; \sqrt{\varrho} \leqslant h \leqslant \sqrt{2},$$

$$\Omega_2: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 1, \;\; \sqrt{\varrho} \leqslant h \leqslant 1.$$

Teraz w całkach dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Na mocy kolejno wzorów (5.4), (5.5) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\text{objętość } (U_1) = \iiint\limits_{U_1} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} \varrho\, d\varphi d\varrho dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{\sqrt{\varrho}}^{\sqrt{2}} \varrho\, dh =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho\, [h]_{\sqrt{\varrho}}^{\sqrt{2}}\, d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(\sqrt{2}\varrho - \varrho\sqrt{\varrho}\right) d\varrho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\varrho^2 - \frac{2}{5}\varrho^2\sqrt{\varrho}\right]_0^2 d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5}$$

oraz

$$\text{objętość } (U_2) = \iiint\limits_{U_2} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_2} \varrho\, d\varphi d\varrho dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\varrho \int\limits_{\sqrt{\varrho}}^{1} \varrho\, dh$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \varrho\, [h]_{\sqrt{\varrho}}^{1}\, d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\varrho - \varrho\sqrt{\varrho}\right) d\varrho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{2}{5}\varrho^2\sqrt{\varrho}\right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{5}.$$

Zatem

$$\text{objętość}\,(U) = \text{objętość } (U_1) - \text{ objętość } (U_2) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right).$$

▷ **Zadanie 5.8.** Narysować i obliczyć objętości obszarów U ograniczonych powierzchniami:

(a) $x^2 + y^2 = 9, \;\; x + y + z = 1, \;\; x + y + z = 5;$

(b) $x = -1, \;\; x = 2, \;\; z = 4 - y^2, \;\; z = 2 + y^2;$

(c) $z = \left(1 + x^2 + y^2\right)^{-1}, \;\; z = 0, \;\; x^2 + y^2 = 1;$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \;\; y = 1 \;\; (y \geqslant 1).$

Odpowiedzi. (a) objętość $(U) = 36\pi$; (b) objętość $(U) = 8$; (c) objętość $(U) = \pi \ln 2$; (d) objętość $(U) = \pi\left(4\sqrt{2} - 5\right)/3$.

► **Przykład 5.9.** Obliczyć masy obszarów o zadanych gęstościach objętościowych:
(a) $U: x^2+y^2 \leqslant 16,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2},\ \gamma(x,y,z)=x^2+y^2$;
(b) $U: x^2+y^2+z^2 \leqslant z,\ \gamma(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^{-1}$.

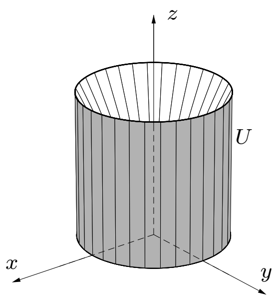
Rozwązanie. Masę obszaru U o gęstości objętościowej masy $\gamma(x,y,z)$ obliczamy ze wzoru

$$\text{masa}\,(U)=\iiint\limits_U \gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

W rozwiązaniach wykorzystamy także wzory (5.4, 5.5, str. 204) i (5.6, 5.7, str. 208) na zamianę zmiennych w całkach potrójnych odpowiednio na współrzędne walcowe i sferyczne.

► (a) Masa obszaru U o gęstości objętościowej $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$ wyraża się wzorem

$$\text{masa}\,(U)=\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz.$$



Obszar U rozważany w tym przykładzie jest opisany nierównościami

$$x^2+y^2 \leqslant 16, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Obszar ten jest walcem o promieniu 4 i wysokości 8, z którego wycięto od góry stożek (rysunek). Układ nierówności opisujących obszar U we współrzędnych walcowych ma postać

$$\varrho^2 \leqslant 16, \quad 0 \leqslant h \leqslant 2\varrho.$$

Stąd we współrzędnych walcowych jest on określony przez nierówności:

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varrho \leqslant 4,\ 0 \leqslant h \leqslant 2\varrho.$$

Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne walcowe oraz korzystając ze wzorów (5.4), (5.5) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}\text{masa}\,(U) &= \iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \varrho^2\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho dh \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 d\varrho \int\limits_0^{2\varrho} \varrho^3\,dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \varrho^3\left[h\right]_0^{2\varrho}\,d\varrho \\ &= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \varrho^4\,d\varrho = 2\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^4 d\varphi = 2\cdot\frac{1024}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{2048}{5}\cdot 2\pi = \frac{4096}{5}\pi.\end{aligned}$$

(b) Masa M obszaru U o gęstości objętościowej $\gamma(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$ wyraża się wzorem

$$\operatorname{masa}(U)=\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

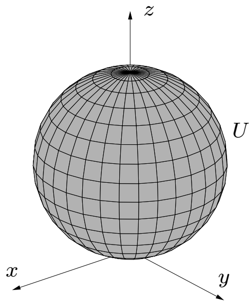
Obszar U rozważany w tym przykładzie opisany jest nierównością

$$x^2+y^2+z^2\leqslant z$$

lub równoważnie

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

Obszar ten jest więc kulą o środku $(0,0,1/2)$ i promieniu $1/2$ (rysunek).



Nierówność określająca obszar U we współrzędnych sferycznych ma postać

$$\varrho^2\leqslant\varrho\sin\psi,$$

co wobec warunku $\varrho\geqslant 0$, daje

$$\varrho\leqslant\sin\psi \text{ oraz } \psi\geqslant 0.$$

Zatem obszar U we współrzędnych sferycznych określony jest przez nierówności

$$\Omega:\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ \ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant\varrho\leqslant\sin\psi.$$

Wprowadzając współrzędne sferyczne oraz korzystając ze wzorów (5.6), (5.7) i (5.1, str. 188), otrzymamy

$$\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}=\iiint\limits_\Omega \frac{\varrho^2\cos\psi}{\varrho^2+1}\,d\varphi d\psi d\varrho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int\limits_0^{\sin\psi}\frac{\varrho^2\cos\psi}{\varrho^2+1}d\varrho\\
&=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int\limits_0^{\sin\psi}\cos\psi\left(1-\frac{1}{\varrho^2+1}\right)d\varrho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\left[\varrho-\operatorname{arc\,tg}\varrho\right]_0^{\sin\psi}d\psi\\
&=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\left(\sin\psi-\operatorname{arc\,tg}(\sin\psi)\right)d\psi\\
&=\left(\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\left(\sin\psi-\operatorname{arc\,tg}(\sin\psi)\right)d\psi\right).
\end{aligned}$$

Korzystając teraz kolejno ze wzorów na całkowanie przez podstawienie i przez części w całce oznaczonej, otrzymamy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\psi - \operatorname{arc\,tg}(\sin\psi))\cos\psi\, d\psi \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ u=\sin\psi;\ du=\cos\psi\, d\psi\\ \psi=0,\ u=0;\ \psi=\pi/2,\ u=1\end{array}\right] =$$

$$= \int_0^1 (u - \operatorname{arc\,tg} u)\, du = \int_0^1 u\, du - \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} u\, du \left[\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{c}{\text{całkowanie przez części}}\\ f(u)=\operatorname{arc\,tg} u, & g'(u)=1\\ f'(u)=1/\left(1+u^2\right), & g(u)=u\end{array}\right]$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 - \left(\left[u \operatorname{arc\,tg} u\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u\, du}{1+u^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(1+u^2\right)'}{1+u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+u^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ostatecznie

$$\text{masa}\,(U) = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right) = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right) = \left(1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2\right)\pi.$$

▷ **Zadanie 5.9.** Obliczyć masy obszarów o zadanych gęstościach objętościowych:
(a) $U = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$, $\gamma(x,y,z) = x+y+z$ $(a,b,c>0)$;
(b) $U:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$, $\gamma(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Odpowiedzi. (a) $M = abc(a+b+c)/2$; (b) $M = 972\pi/5$.

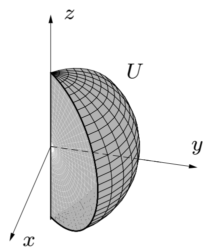
► **Przykład 5.10.** Wyznaczyć położenia środków masy obszarów jednorodnych:
(a) ćwiartka kuli o promieniu R; (b) $U:\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 4-y$;
(c) półkula wydrążona o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R;
(d) $U:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 3,\ x \geqslant 0$.

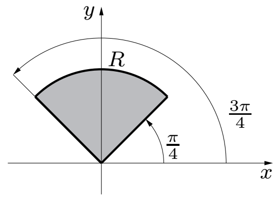
Rozwązanie. Współrzędne środka masy obszaru jednorodnego $U \subset \mathbb{R}^3$ wyznaczamy ze wzorów

$$x_C = \frac{\iiint\limits_U x\, dxdydz}{\text{objętość}\,(U)}, \quad y_C = \frac{\iiint\limits_U y\, dxdydz}{\text{objętość}\,(U)}, \quad z_C = \frac{\iiint\limits_U z\, dxdydz}{\text{objętość}\,(U)}.$$

W szczególności, gdy obszar jednorodny U ma oś lub płaszczyznę symetrii, to środek masy leży na tej osi lub w tej płaszczyźnie.
W rozwiązaniach wykorzystamy także wzory (5.4, 5.5, str. 204) i (5.6, 5.7, str. 208) na zamianę zmiennych w całkach potrójnych odpowiednio na współrzędne walcowe i sferyczne.

► (a) Ćwiartkę kuli U umieszczamy w układzie współrzędnych jak na rysunku.





Płaszczyzna $x = 0$ i $z = 0$ są płaszczyznami symetrii tego obszaru oraz jest on jednorodny, więc środek masy także należy do tych płaszczyzn. Zatem $x_C = 0$ oraz $z_C = 0$. Współrzędną y_C obliczymy ze wzoru

$$y_C = \frac{1}{\text{objętość}(U)} \iiint\limits_U y\,dxdydz.$$

Najpierw wyznaczymy bezpośrednio objętość ćwiartki kuli U. Mamy

$$\text{objętość}\,(U) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Zatem

$$y_C = \frac{3}{\pi R^3} \iiint\limits_U y\,dxdydz.$$

Obszar U we współrzędnych sferycznych opisany jest układem nierówności

$$\Omega: \quad \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant R.$$

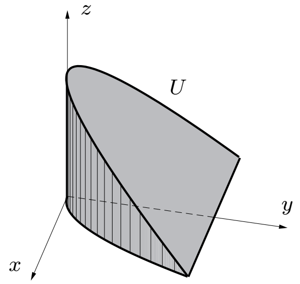
Zatem dokonując zamiany zmiennych w całce oraz wykorzystując wzory (5.6), (5.7) i (5.1, str. 188) oraz proste całki oznaczone, otrzymamy

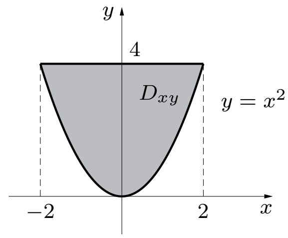
$$\begin{aligned}
\iiint\limits_U y\,dxdydz &= \iiint\limits_\Omega \varrho \sin\varphi \cos\psi \cdot \varrho^2 \cos\psi \,d\varphi d\psi d\varrho = \iiint\limits_\Omega \varrho^3 \sin\varphi \cos^2\psi \,d\varphi d\psi d\varrho \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R \varrho^3 \sin\varphi \cos^2\psi \,d\varrho \\
&= \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \,d\varphi \right) \cdot \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \,d\psi \right) \cdot \left(\int\limits_0^R \varrho^3 \,d\varrho \right) \\
&= \big[-\cos\varphi\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\psi)\,d\psi \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^R \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\psi + \frac{1}{2}\sin 2\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi R^8.
\end{aligned}$$

Zatem współrzędna y_C środka masy ćwiartki kuli jest równa

$$y_C = \frac{3}{\pi R^3}\cdot\frac{\sqrt{2}\pi R^4}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{8}R.$$

(b) Obszar U przedstawiono na rysunku. Ponieważ płaszczyzna $x=0$ jest płaszczyzną symetrii tego obszaru oraz jest on jednorodny, więc środek masy należy do tej płaszczyzny. Zatem $x_C=0$. Współrzędne y_C i z_C obliczymy z podanych wzorów.





Zauważmy, że U jest obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy. Z góry jest ograniczony płaszczyzną $z=4-y$, a z dołu – $z=0$. Jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunku. Zatem

$$U=\left\{(x,y,z): -2\leqslant x\leqslant 2,\ x^2\leqslant y\leqslant 4,\ 0\leqslant z\leqslant 4-y\right\}.$$

Korzystając ze wzoru (5.3) oraz prostych całek oznaczonych obliczymy kolejno potrzebne całki:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_U y\,dxdydz &= \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy\int_0^{4-y}y\,dz = \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}y\left[z\right]_0^{4-y}dy = \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}y(4-y)\,dy\\ &= \int_{-2}^{2}\left[2y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{4}dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{32}{3}-2x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx\\ &= \left[\frac{32}{3}x-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^7}{21}\right]_{-2}^{2} = \frac{1024}{35},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_U z\,dxdydz &= \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy\int_0^{4-y}z\,dz\\ &= \int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-y}dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}(4-y)^2\,dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left[\frac{(y-4)^3}{3}\right]_{x^2}^{4}dx =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)^3\,dx = \int\limits_{-2}^{2} \left(64-48x^2+12x^4-x^6\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[64x-16x^3+\frac{12}{5}x^5-\frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{2048}{105}$$

oraz

$$\text{objętość}(U) = \iiint\limits_{U} dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{4-y} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} \Big[z\Big]_{0}^{4-y} dy$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} (4-y)\,dy = \int\limits_{-2}^{2} \left[4y-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left(8-4x^2+\frac{x^4}{2}\right)\,dx = \left[8x-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{2} = \frac{256}{15}.$$

Wracamy do obliczenia współrzędnych środka masy. Mamy

$$y_C = \frac{1024}{35}\cdot\frac{15}{256} = \frac{12}{7}, \qquad z_C = \frac{2048}{105}\cdot\frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

Ostatecznie $(x_C, y_C, z_C) = (0, 12/7, 8/7)$.

► (c) Półkulę wydrążoną U umieszczamy w układzie współrzędnych analogicznie jak w Przykładzie 5.7 (c). Z symetrii półkuli i jednorodności wynika, że $x_C = 0$, $y_C = 0$, a współrzędną z_C obliczymy ze wzoru podanego na wstępnie. Najpierw wyznaczymy objętość półkuli wydrążonej U. Mamy

$$\text{objętość}\,(U) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(R^3-r^3\right) = \frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right).$$

Zatem

$$z_C = \frac{3}{2\pi\left(R^3-r^3\right)}\iiint\limits_{U} z\,dxdydz.$$

W całce potrójnej dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Półkula wydrążona w tych współrzędnych jest opisana nierównościami:

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0, \ r \leqslant \varrho \leqslant R.$$

Teraz korzystając ze wzoru 5.6), a następnie ze wzoru (5.1, str. 188) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$z_C = \frac{3}{2\pi\left(R^3-r^3\right)}\iiint\limits_{\Omega} \varrho\sin\psi\cdot\varrho^2\cos\psi\,d\varphi d\psi d\varrho =$$

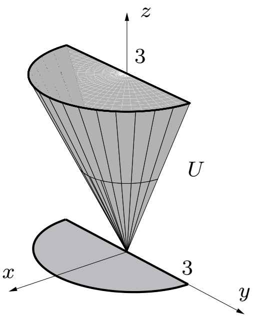
$$= \frac{3}{2\pi\left(R^3-r^3\right)} \iiint\limits_{\Omega} \varrho^3 \sin\psi \cos\psi \, d\varphi d\psi d\varrho$$

$$= \frac{3}{2\pi\left(R^3-r^3\right)} \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\sin 2\psi \, d\psi\right) \cdot \left(\int\limits_r^R \varrho^3 \, d\varrho\right)$$

$$= \frac{3}{2\pi\left(R^3-r^3\right)} \cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{4}\cos 2\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_r^R$$

$$= = \frac{3}{R^3-r^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{R^4-r^4}{4} = -\frac{3\left(R^4-r^4\right)}{8\left(R^3-r^3\right)}.$$

► (d) Obszar U, który jest połową stożka, umieszczamy w układzie współrzędnych jak na rysunku. Ponieważ jest on jednorodny, a płaszczyzna xOz jest jego płaszczyzną symetrii, to środek masy C należy do tej płaszczyzny. To oznacza, że $y_C = 0$. Pozostałe współrzędne punktu C wyznaczymy ze wzorów podanych na wstępie. Objętość obszaru U jest połową objętości stożka, więc



$$\text{objętość}\,(U) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = \frac{9\pi}{2}.$$

Zatem

$$x_C = \frac{2}{9\pi} \iiint\limits_U x \, dxdydz, \quad z_C = \frac{2}{9\pi} \iiint\limits_U z \, dxdydz.$$

W obu całkach potrójnych zastosujemy współrzędne walcowe. Obszar U w tych współrzędnych opisany jest przez nierówności (Przykład 5.6 (b)):

$$\Omega: \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \leqslant \varrho \leqslant 3, \;\; \varrho \leqslant h \leqslant 3.$$

Teraz korzystając ze wzorów 5.4), (5.5) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\iiint\limits_U x \, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \varrho\cos\varphi \cdot \varrho \, d\varphi d\varrho dh = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 d\varrho \int\limits_{\varrho}^{3} \varrho^2 \cos\varphi \, dh$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 \varrho^2 \cos\varphi \left[h\right]_{\varrho}^{3} d\varrho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 \varrho^2 (3-\varrho)\cos\varphi \, d\varrho$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\varrho^3 - \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^3 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{27}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{27}{4} \cdot \left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{2}$$

oraz

$$\iiint\limits_U z\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega h\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho dh = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^3 d\varrho\int\limits_\varrho^3 \varrho h\,dh$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^3 \varrho\left[\frac{h^2}{2}\right]_\varrho^3 d\varrho = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^3 \varrho\left(9-\varrho^2\right)\,d\varrho$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{9\varrho^2}{2}-\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^3 d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^4}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{3^4}{8}\cdot\pi = \frac{81}{8}\pi.$$

Ostatecznie współrzędne środka masy są równe

$$x_C = \frac{\frac{27}{2}}{\frac{9\pi}{2}} = \frac{3}{\pi},\quad y_C = 0,\quad z_C = \frac{\frac{81\pi}{8}}{\frac{9\pi}{2}} = \frac{9}{4}.$$

▷ **Zadanie 5.10.** Wyznaczyć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) $U:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x$;

(b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H;

(c) $U:\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}$;

(d) odcinek paraboloidy o średnicy podstawy D i wysokości H.

Odpowiedzi. (a) $x_C = 1/4$, $y_C = 3/8$, $z_C = 3/8$; (b) środek masy leży na osi symetrii stożka w odległości $H/4$ od podstawy; (c) $x_C = y_C = 0$ (z symetrii), $z_C = 7\pi/\left(8\sqrt{2}-7\right)$; (d) środek masy leży na osi symetrii odcinka paraboloidy w odległości $H/3$ od podstawy.

► **Przykład 5.11.** Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów jednorodnych o masie M względem wskazanych osi:

(a) kula promieniu R, względem średnicy;

(b) odcinek paraboloidy $2\left(x^2+y^2\right)\leqslant z\leqslant 8$, względem osi symetrii;

(c) walec wydrążony o promieniu wewnętrznym r, zewnętrzym R oraz wysokości H, względem osi obrotu;

(d) ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a, wysokości H, względem osi symetrii.

Rozwązanie. Moment bezwładności obszaru jednorodnego $U\subset\mathbb{R}^3$ o masie M względem osi Oz wyraża się wzorem

$$I_z = \frac{M}{\text{objętość}\,(U)}\iiint\limits_U (x^2+y^2)dxdydz.$$

Analogiczną postać mają wzory na momenty bezwładności względem pozostałych osi układu.
W rozwiązaniach wykorzystamy także wzory (5.4, 5.5, str. 204) i (5.6, 5.7, str. 208) na zamianę zmiennych w całkach potrójnych odpowiednio na współrzędne walcowe i sferyczne.

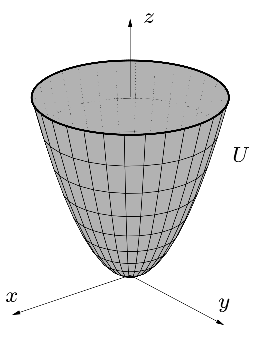
► (a) Kulę umieszczamy tak, aby jej środek leżał w początku układu współrzędnych. Wtedy moment bezwładności względem średnicy jest momentem względem osi Oz. W całce potrójnej wyrażającej moment bezwładności dokonamy zamiany zamiennych na współrzędne sferyczne. Kula U w tych współrzędnych jest opisana przez nierówności:

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqslant \varrho \leqslant R.$$

oraz ma objętość$(U) = 4\pi R^3/3$. Zatem korzystając kolejno ze wzorów (5.6) i (5.1, str. 188) oraz podstawowych metod obliczania całek oznaczonych, mamy

$$\begin{aligned}
I_z &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz \\
&= \frac{3M}{4\pi R^3} \iiint\limits_\Omega \left((\varrho\cos\varphi\cos\psi)^2 + (\varrho\sin\varphi\cos\psi)^2\right) \cdot \varrho^2\cos\psi \, d\varphi d\psi d\varrho \\
&= \frac{3M}{4\pi R^3} \iiint\limits_\Omega \varrho^4\cos^3\psi \, d\varphi d\psi d\varrho = \frac{3M}{4\pi R^3} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi \, d\psi\right) \cdot \left(\int_0^R \varrho^4 \, d\varrho\right) \\
&= \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot 2\pi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\psi\right)\cos\psi \, d\psi\right) \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ u=\sin\psi;\ du=\cos\psi\, d\psi \\ \psi=-\pi/2,\ u=-1;\ \psi=\pi/2,\ u=1 \end{array}\right] \cdot \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^R \\
&= \frac{3MR^2}{10} \int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right) du = \frac{3MR^2}{10}\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3MR^2}{10}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2MR^2}{5}.
\end{aligned}$$

► (b) Moment bezwładności obszaru U (rysunek) względem jego osi symetrii jest momentem względem osi Oz. Jak poprzednio wykorzystamy podany na wstępie wzór, w którym dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Obszar U w tych współrzędnych opisany jest przez nierówności:



$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \varrho \leqslant 2, \ 2\varrho^2 \leqslant h \leqslant 8.$$

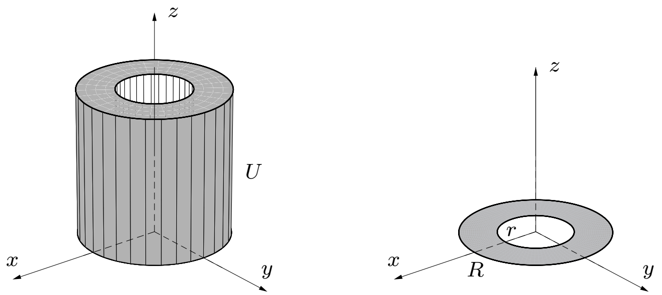
Najpierw obliczymy objętość obszaru U. Korzystając kolejno ze wzorów (5.4) i (5.5) oraz korzystając z prostych całek oznaczonych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\text{objętość}\,(U) &= \iiint\limits_U dxdydz = \iiint\limits_\Omega \varrho\, d\varphi d\varrho dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{2\varrho^2}^{8} \varrho\, dh \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho \left[h\right]_{2\varrho^2}^{8} d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(8\varrho - 2\varrho^3\right) d\varrho \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left[4\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{2}\right]_0^2 d\varphi = 8\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 16\pi.
\end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć moment bezwładności obszaru U. Mamy

$$\begin{aligned}
I_z &= \frac{M}{16\pi}\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz = \frac{M}{16\pi}\iiint\limits_\Omega \left((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2\right) \varrho\, d\varphi d\varrho dh \\
&= \frac{M}{16\pi}\iiint\limits_\Omega \varrho^3\, d\varphi d\varrho dh = \frac{M}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{2\varrho^2}^{8} \varrho^3\, dh = \frac{M}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho^3 \left[h\right]_{2\varrho^2}^{8} d\varrho \\
&= \frac{M}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(8\varrho^3 - 2\varrho^5\right) d\varrho = \frac{M}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[\varrho^4 - \frac{\varrho^6}{6}\right]_0^2 d\varphi \\
&= \frac{M}{8\pi}\cdot\frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2M}{3\pi}\cdot 2\pi = \frac{4}{3}M.
\end{aligned}$$

► (c) Walec wydrążony U umieszczamy w układzie współrzędnych tak, aby oś Oz była jego osią symetrii, a podstawa była zawarta w płaszczyźnie xOy (rysunek).



Moment bezwładności walca obliczamy z podanego na wstępnie wzoru. Obszar U we współrzędnych walcowych opisany jest przez nierówności:

$$\Omega: \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ r \leqslant \varrho \leqslant R,\ \ 0 \leqslant h \leqslant H.$$

Objętość walca wydrążonego wyraża się wzorem

$$\text{objętość}\,(U) = \pi\left(R^2 - r^2\right)H.$$

Zatem

$$I_z = \frac{M}{\pi\left(R^2 - r^2\right)H}\iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right)\,dxdydz$$

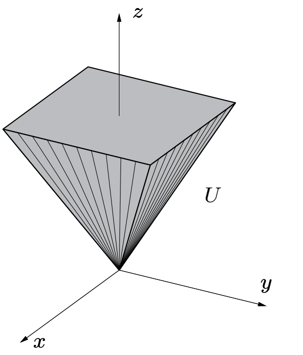
Teraz korzystając ze wzorów (5.4) i (5.1, str. 188) oraz prostych całek oznaczonych, otrzymamy

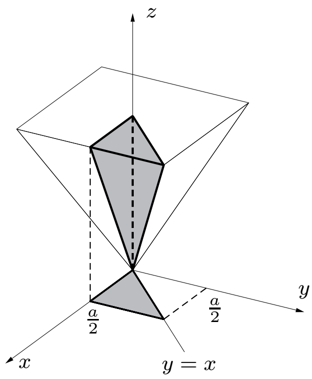
$$\begin{aligned}\iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right)\,dxdydz &= \iiint\limits_\Omega \left((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2\right)\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho dh \\ &= \iiint\limits_\Omega \varrho^3\,d\varphi d\varrho dh = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int_r^R \varrho^3\,d\varrho\right)\cdot\left(\int_0^H dh\right) \\ &= 2\pi\cdot\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_r^R\cdot H = \frac{\pi\left(R^4 - r^4\right)H}{2}.\end{aligned}$$

Zatem moment bezwładności walca wydrążonego względem jego osi symetrii jest równy

$$I_z = \frac{M}{\pi\left(R^2 - r^2\right)H}\cdot\frac{\pi\left(R^4 - r^2\right)H}{2} = \frac{M}{2}\left(r^2 + R^2\right).$$

► (d) Ostrosłup U umieszczamy w układzie współrzędnych jak na lewym rysunku.





Zatem jego moment bezwładności obliczamy względem osi Oz. Zauważmy, że płaszczyzny $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ są płaszczyznami symetrii ostrosłupa, więc wystarczy obliczyć moment bezwładności $1/8$ części tej bryły (rysunek prawy) i wynik pomnożyć przez 8. Ta część ostrosłupa w układzie kartezjańskim jest opisana przez nierówności:

$$U_{\frac{1}{8}}:\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad \frac{2H}{a}x\leqslant z\leqslant H.$$

Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem $(1/3)a^2H$, więc moment bezwładności wyznaczymy ze wzoru

$$I_z = 8 \cdot \frac{\frac{M}{8}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{a^2H}{3}} \iiint\limits_{U_{\frac{1}{8}}} \left(x^2 + y^2\right) \, dxdydz = \frac{24M}{a^2H} \iiint\limits_{U_{\frac{1}{8}}} \left(x^2 + y^2\right) \, dxdydz.$$

Teraz dokonując zamiany całki potrójnej na całki iterowane, czyli korzystając ze wzoru (5.3, str. 189), mamy

$$\iiint\limits_{U_{\frac{1}{8}}} \left(x^2 + y^2\right) \, dxdydz =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^x dy \int_{\frac{2Hx}{a}}^{H} \left(x^2 + y^2\right) \, dz = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^x \left(x^2 + y^2\right) \left[z\right]_{\frac{2Hx}{a}}^{H} \, dy$$

$$= H \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^x \left(x^2 + y^2\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) dy = H \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^x \, dx$$

$$= \frac{4H}{3} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) x^3 \, dx = \frac{4H}{3} \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5a}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4H}{3} \cdot \frac{a^4}{5 \cdot 64} = \frac{a^4H}{240}.$$

Zatem moment bezwładności całego ostrosłupa jest równy

$$I_z = \frac{24M}{a^2H} \cdot \frac{a^4H}{240} = \frac{Ma^2}{10}.$$

$\triangleright$ **Zadanie 5.11.** Obliczyć momenty bezwładności względem wskazanych osi podanych obszarów jednorodnych o masie M:

(a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi walca;

(b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi stożka;

(c) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, względem średnicy podstawy;

(d*) część kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ położona w pierwszym oktancie, względem osi symetrii tej części.

Odpowiedzi. (a) $I_z = MR^2/2$; (b) $I_z = 3MR^2/10$; (c) $I_x = M\left(R^2/4 + H^2/3\right)$; (d*) $I_l = 2(\pi - 2)MR^2/(5\pi)$, gdzie $l : x = y = z$.

Zbiory zadań

1. G.N.Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej,* Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2000.
2. W.Krysicki, L.Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I–II,* PWN, Warszawa 1999.
3. W.Leksiński, I.Nabiałek, W.Żakowski, *Matematyka. Zadania,* WNT, Warszawa, 1992.