Dominik Szot, 02.03.2023

Laboratorium 1

Analiza Błędów

Zadanie 1

Do wykonywania obliczeń używałem biblioteki NumPy, wykresy wykonano za pomocą biblioteki matplotlib

Dla zadanej funkcji

$$\mathrm{f(x)} = \tan(x) \text{ oraz } x = 1$$

Wartość pochodnej funkcji f wyznaczamy ze wzoru:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad h = 10^{-k}, \qquad k = 0, \dots, 16$$

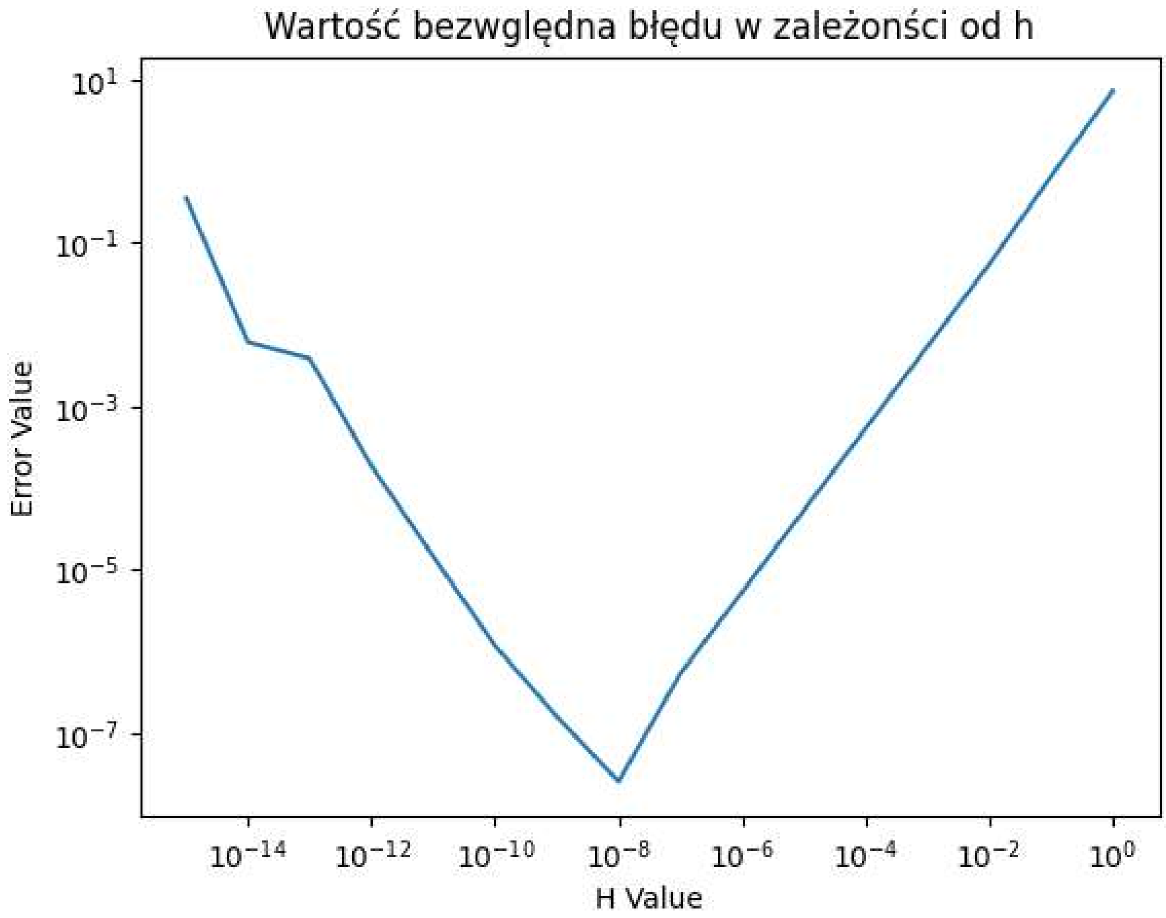
Błąd bezwzględny obliczamy ze wzoru:

$$|fl(x) - x|$$

Gdzie $fl(x) - wartość\ obliczona\ za\ pomocą\ naszej\ fukcji,$

$x - wartość\ obliczona\ za\ pomocą\ fukcji\ wbudowanej$

Wykres błędu bezwzględnego wartości wyników funkcji w zależności od h oraz wartości otrzymanej w wyniku działania funkcji wbudowanej prezentuje się następująco:



Najmniejszą wartość jaką funkcja przyjmuje dla argumentu

$$h_{min} \approx 1.0 * 10^{-8}$$

Wartość ϵ_{mec} wyznaczamy za pomocą algorytmu

```
def machineEpsilon(func=float):
    machine_epsilon = func(1)
    while func(1)+machine_epsilon != func(1):
        machine_epsilon_last = machine_epsilon
        machine_epsilon = func(machine_epsilon) / func(2)
    return machine_epsilon_last
```

Otrzymana wartość wynosi:

$$\sqrt{\epsilon_{mech}} = 1.4901161193847656e - 08$$

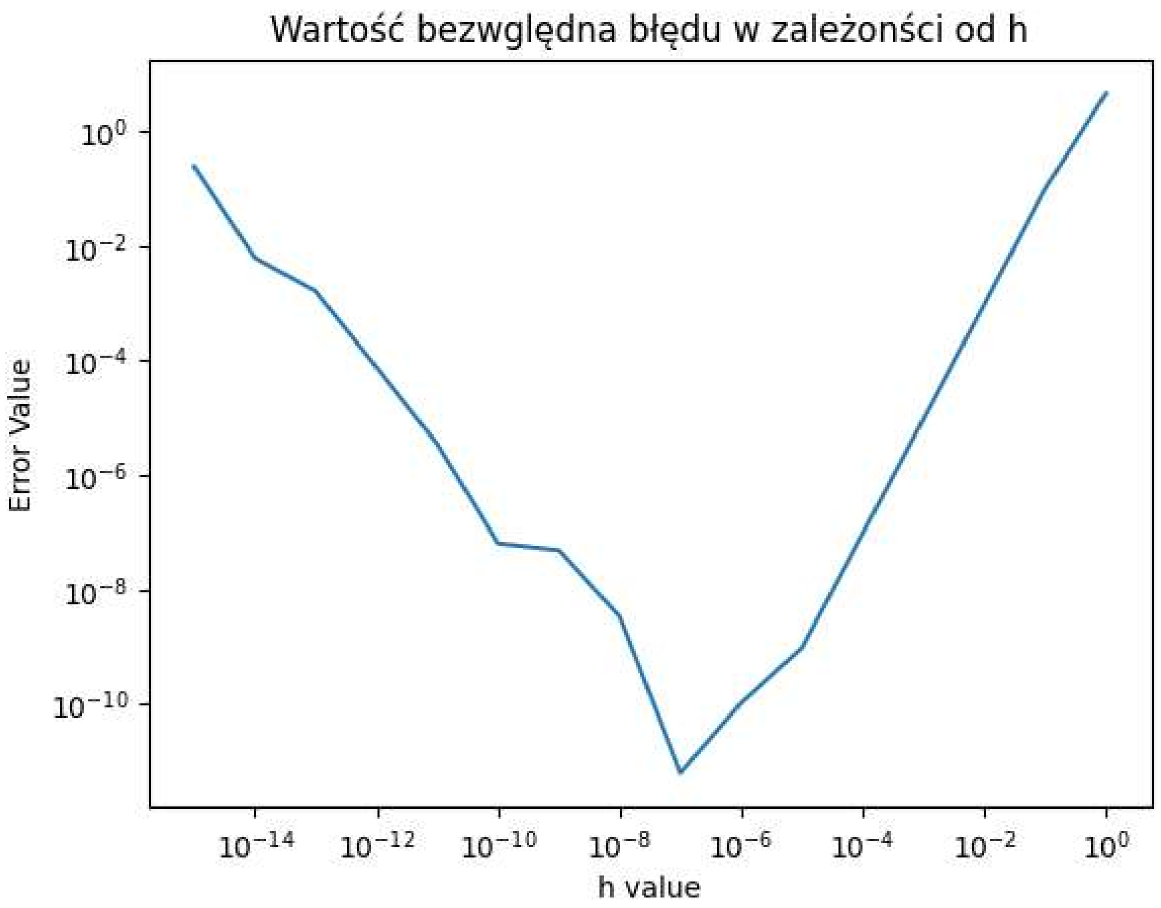
Otrzymane wartości nie odbiegają od siebie w sposób znaczący, co może świadczyć o tym że obliczenia są poprawne.

Używając wzoru różnic centralnych

Używamy tutaj innego wzoru na pochodną funkcji

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Resztę obliczeń wykonujemy podobnie jak w poprzednim przypadku



W tym przypadku funkcja przyjmuje minimum dla

$$h_{min} \approx 1.0 * 10^{-7}$$

$$\sqrt{\epsilon_{mech}} = 1.4901161193847656e - 08$$

ϵ_{mech} jest w tym przypadku znacznie mniejszy od wartości otrzymanych w wyniku działania programu.

Ponieważ obliczona wartość używająca wzoru różnic centralnych odbiega bardziej od wartości ϵ_{mech} , sprawia ona wrażenie mniej dokładnej.

Zadanie 2

Dla zadanego ciągu

$$x_{k+1} = 2.25x_k - 0.5x_{k-1}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{1}{12}$$

Wartość bezwzględną błędu względnego w zależności od k wyznacza wzór

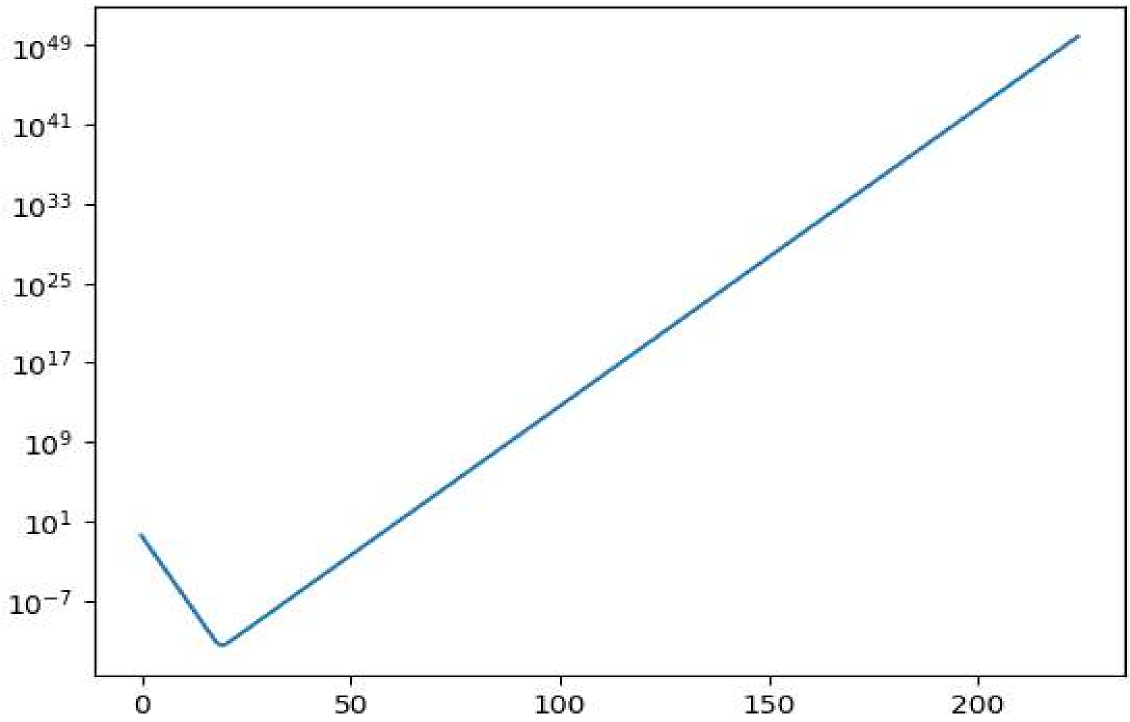
$$\left|\frac{fl(x,k) - x_k}{x_k}\right|$$

Gdzie x_k jest dokładnym rozwiązaniem równania

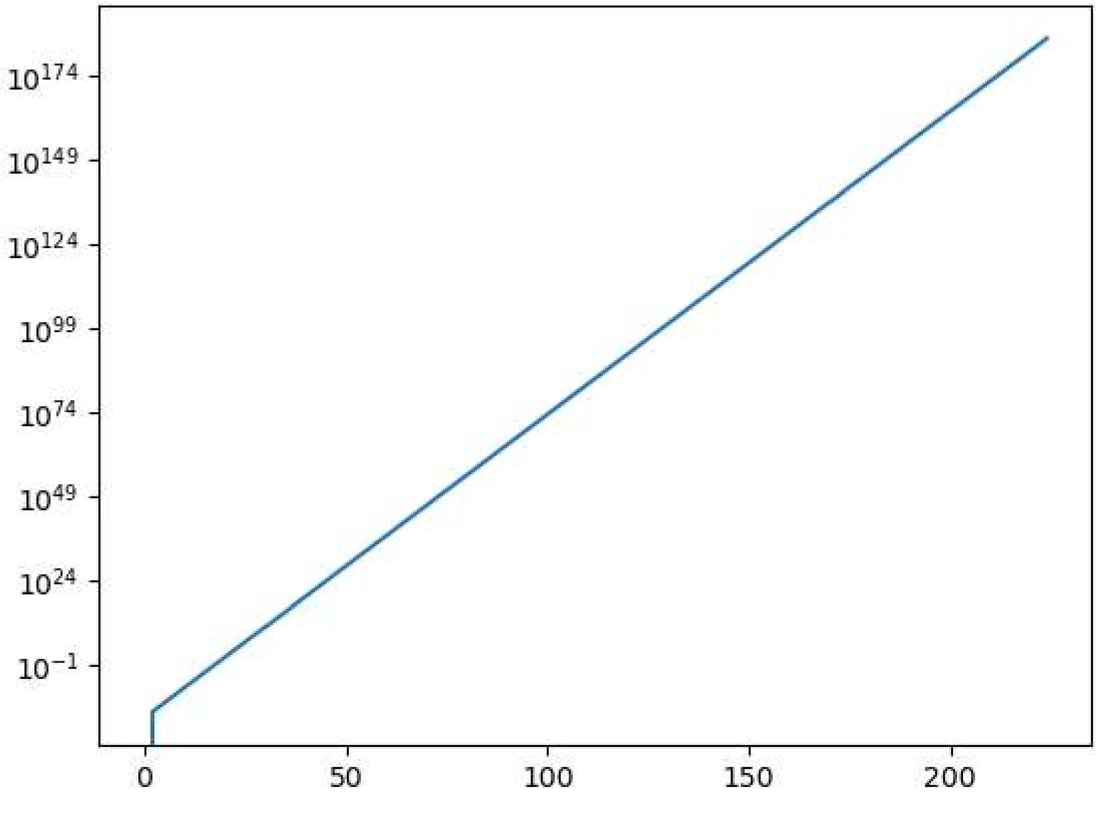
$$x_k = \frac{4^{1-k}}{3}$$

Używany typ longdouble używa podwójnej precyzji, stąd n = 225

Wykres wartości w zależności od k



Wykres błędu względnego w zależności od k



Dla k należącego do przedziału od 0 do k = 19 nasz ciąg jest malejący. Dla k > 19 wykres jest już rosnący. Spowodowane jest to najprawdopodobniej błędem zaokrąglenia oraz błędem obcięcia, który pojawia się gdy próbujemy przybliżyć nieskończony ciąg skończona ilością elementów.

Bibliografia

- https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon
- Katarzyna Rycerz: Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice