Dominik Szot, 14.04.2023

Laboratorium 05

Aproksymacja

Zadanie 1

In [ ]:
```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.linalg as scp
import scipy.integrate as integrate
```

Inicjalizowanie zmiennych oraz dane testowe.

In [ ]:
```
years = np.array([1900,1910, 1920, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980])
points = np.array([76212168, 92228496, 106021537, 123202624, 132164569,

actual_value = 248709873
difference_array = np.zeros(7)
AIC = np.zeros(7)

new_years = np.arange(1900, 1991, 1)
new_points = []
cooeficient_vector = []
```

Funkcja tworząca macierz jednomianów.

In [ ]:
```
def create_matrix(pow: int):
    matrix = np.zeros((9, pow+1))
    for i in range(len(years)):
        for j in range(pow+1):
            matrix[i][j] = (years[i] ** j)

    return matrix
```

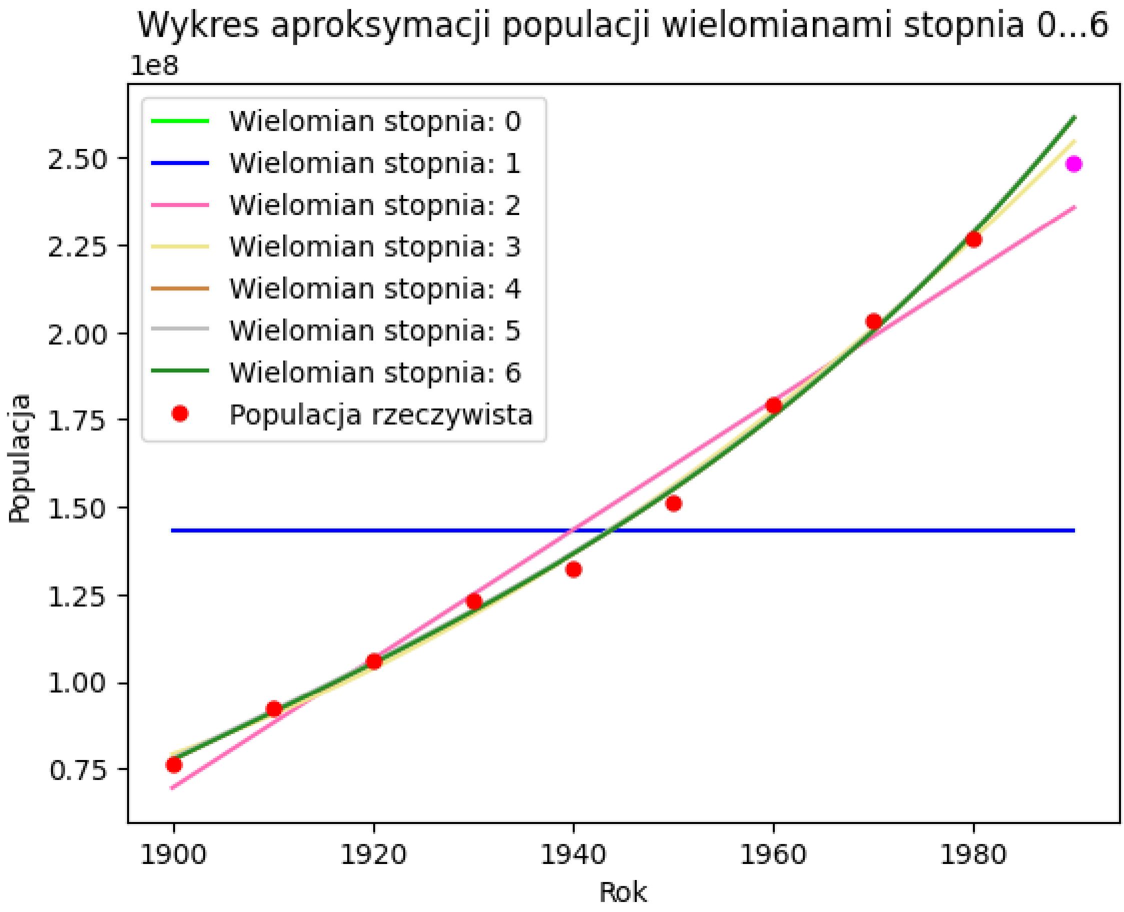
Wartość wielomianu będę obliczał korzystając z Algorytmu Hornera.

In [ ]:
```
def horner(L, x):
    i = len(L) - 1
    result = L[i]
    while i > 0:
        i = i - 1
        result = result*x + L[i]

    return result
```

Następnie wykonuję aproksymację średniokwadratową punktową populacji na przedziale [1900,1980] wielomianami stopnia m dla 0 <= m <= 6 oraz dokonuję ekstapolacji wielomianu do roku 1990. Do rozwiązania równania używam funkcji *numpy.linalg.lstsq z biblioteki numpy.*

In [ ]:
```
color = ["lime","blue","hotpink","khaki","peru","silver","forestgreen"]

for i in range(0,7):
    p_matrix = create_matrix(i)
    cooeficient_vector.append(np.linalg.lstsq(p_matrix,points,rcond=-1)[0
    new_points = [horner(cooeficient_vector[i-1], x) for x in new_years]

    difference_array[i] = np.abs(actual_value - new_points[90])/actual_va
    sqr_diff = [(new_points[10*i] - points[i])**2 for i in range(len(year

    k = i+1
    n = len(years)
    AIC[i] = 2*k*(k+1)/(n-k-1) + 2*k-k*np.log(sum(sqr_diff)/k)

    plt.plot(new_years,new_points,label="Wielomian stopnia: "+ str(i),col

plt.plot(years, points, ".", markersize = 10, color = "red", label="Popul
plt.plot(1990, actual_value, ".", markersize = 10, color ="magenta")
plt.legend()

plt.xlabel("Rok")
plt.ylabel("Populacja")
plt.title("Wykres aproksymacji populacji wielomianami stopnia 0...6")

df2 = pd.DataFrame(data=difference_array, index=[0,1,2,3,4,5,6], columns=
df2 = df2.rename_axis('Stopień wielomianu', axis=1)
print(df2)
print()

df3 = pd.DataFrame(data=AIC, index=[0,1,2,3,4,5,6], columns=["Wartość kry
df3 = df3.rename_axis('Stopień wielomianu', axis=1)
print(df3)
```

```
Stopień wielomianu  Wartość błędu względnego
0                                   0.423549
1                                   0.423549
2                                   0.051875
3                                   0.024137
4                                   0.051181
5                                   0.052530
6                                   0.051278

Stopień wielomianu  Wartość kryterium informacyjnego Akaikego
0                                                  -35.007968
1                                                  -67.772498
2                                                  -86.847996
3                                                 -104.645220
4                                                 -121.205823
5                                                 -126.526794
6                                                  -83.420202
```



Najmniejszy błąd bezwzględny posiada wielomian stopnia 3.
Najlepsza wartość kryterium Akaikego występuje dla wielomianu stopnia 5.

Warto zauważyć że wyższy stopień wielomianu nie zawsze wpływa pozytywnie na dokładność wyników.
Dla wielomianu stopnia 6 wartość kryterium Akaikego jest już dużo gorsza niż wartość dla wielomianu stopnia 5

Zadanie 2

In [ ]:
```
f_x = lambda x : x**(1/2)
```

Funkcja wagi dla wielomianu Czebyszewa (pierwszego typu) dla przedziału [-1, 1]

In [ ]:
```
w_x = lambda x: (1-(x**2))**(-1/2)
```

Aby otrzymać przedział [-1, 1] z przedziału [0, 2] musimy przeprowadzić transformację przedziału.

In [ ]:
```
a = 0
b = 2

t_x = lambda x: (x-(a+b)/2)*(2)/(b-a)
```

Wielomiany Czebyszewa można zdefiniować za pomocą funkcji rekurencyjnej:

$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Dla wielomianu stopnia 2 funkcje bazowe będą postaci:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x_2-1$

In [ ]:
```
T_0 = lambda x : 1
T_1 = lambda x : t_x(x)
T_2 = lambda x : 2*t_x(x)**2 - 1
```

Następnie jesteśmy w stanie obliczyć współczynniki wielomianu.

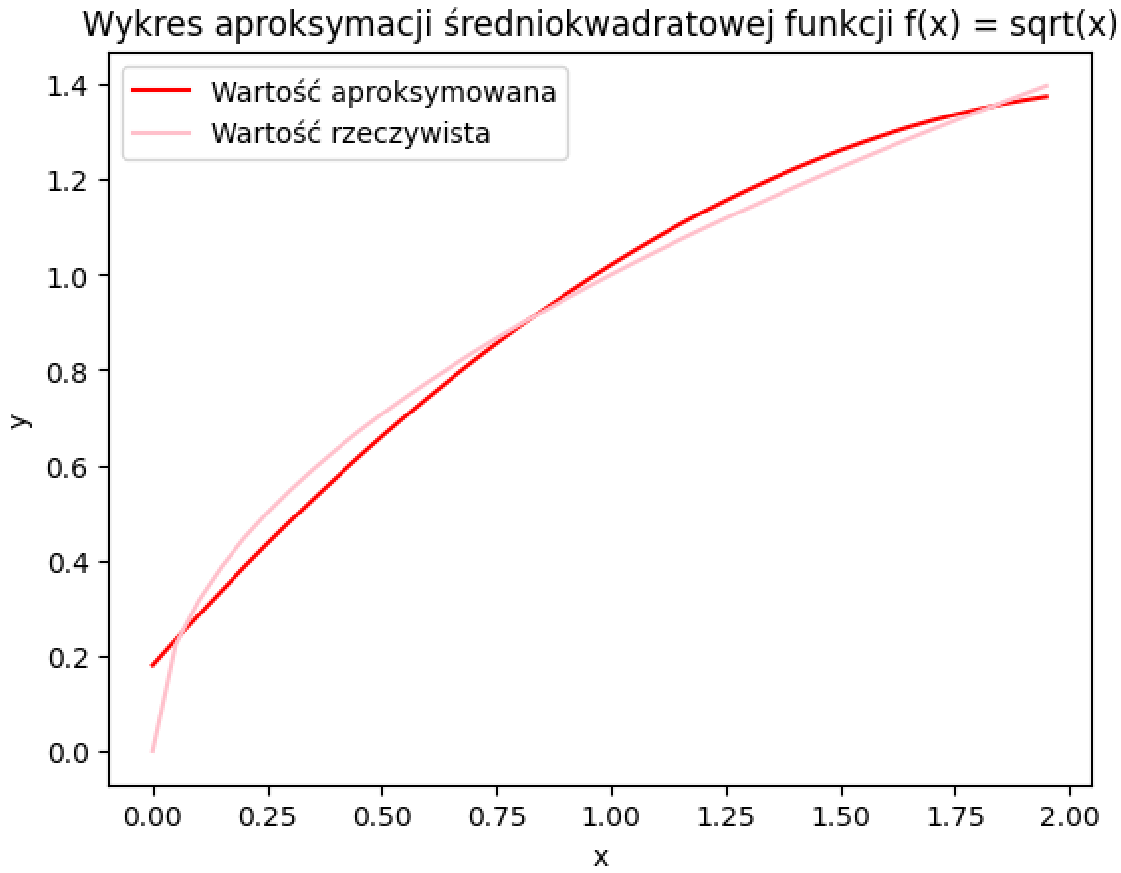
In [ ]:
```
C_0 = integrate.quad(lambda x: w_x(t_x(x))*f_x(x)*T_0(x), 0, 2)[0] * np.p
C_1 = integrate.quad(lambda x: w_x(t_x(x))*f_x(x)*T_1(x), 0, 2)[0] * np.p
C_2 = integrate.quad(lambda x: w_x(t_x(x))*f_x(x)*T_2(x), 0, 2)[0] * np.p
```

Ponieważ mamy wyznaczone funkcje bazowe oraz współczynniki wielomianu jesteśmy wyznaczyć funkcję która posłuży do aproksymacji wartości funkcji f(x):

In [ ]:
```
approximated_value = lambda x : C_0*T_0(x) + C_1*T_1(x) + C_2*T_2(x)
```

In [ ]:
```
x_axis = np.arange(0, 2, 0.05)
y_axis = [approximated_value(i) for i in x_axis]
actual_value = [f_x(x) for x in x_axis]

plt.plot(x_axis, y_axis, label="Wartość aproksymowana", color="red")
plt.plot(x_axis, actual_value, label="Wartość rzeczywista", color="pink")
plt.title("Wykres aproksymacji średniokwadratowej funkcji f(x) = sqrt(x)'
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

plt.legend()
```

Out[ ]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fe9d0dc8040>
```



Funkcja aproksymowana nie przybliżyła wartości funkcji tak dokładnie jak niektóre metody interpolacji, jednak jest znacznie prostsza i tańsza obliczeniowo.

Bibliografia

- *Katarzyna Rycerz: Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice*
- *Materiały do zajęć*
- *https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials*