Efekt Rungego

Zadanie 1. Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ na przedziale } [-1, 1]\,,$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale } [0, 2\pi]\,,$$

używając:

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami $x_j = x_0 + jh,\ j = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $h = (x_n - x_0)/n$
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami $x_j = x_0 + jh,\ j = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $h = (x_n - x_0)/n$
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \cos(\theta_j) \quad \theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi,\ 0 \le j \le n\,. \tag{1}$$

(a) Dla funkcji Rungego, $f_1(x)$, z $n = 12$ węzłami interpolacji przedstaw na wspólnym wykresie funkcję $f_1(x)$ oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonaj próbkowanie funkcji $f_1(x)$ i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w θ dla węzłów Czebyszewa). Pamiętaj o podpisaniu wykresu i osi oraz o legendzie.

(b) Wykonaj interpolację funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ z $n = 4, 5, ..., 50$ węzłami interpolacji, używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadź na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórz dwa rysunki, jeden dla $f_1(x)$, drugi dla $f_2(x)$. Na każdym rysunku przedstaw razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n, dla każdej z trzech metod interpolacji.

Która metoda interpolacji jest najbardziej dokładna, a która najmniej?

Uwaga 1. Transformacja węzłów Czebyszewa z przedziału $[-1, 1]$ na $[a, b]$ dana jest wzorem $x = a + (b - a) * (r + 1)/2$, gdzie r jest punktem Czebyszewa.

Uwaga 2. Należy zaimplementować własnoręcznie interpolację Lagrange'a. Implementacja biblioteczna `scipy.interpolate.lagrange` jest niestablina numerycznie.