Dominik Szot, 27.04.2023

Laboratorium 07

Kwadratury adaptacyjne

Celem zadania jest obliczenie wartości całki

$$\int_0^1 4/(1+x^2)dx$$

używając:

- kwadratur adaptacyjnych trapezów
- kwadratur adaptacyjnych Gaussa-Kronroda

Następnnym zadaniem jest obliczenie wartośći całek

- $$\int_0^1 \sqrt{x} log x dx$$
- $$\int_0^1 (1/((x-0.3)^2+0.001)+1/((x-0.9)^2+0.004))dx$$

używając:

- kwadratur trapezów
- kwadratur prostokątów
- kwadratur Simpsona
- kwadratur adaptacyjnych trapezów
- kwadratur adaptacyjnych Gaussa-Kronroda

Import potrzebnych bibliotek

In [ ]:
```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.linalg as scp
import scipy.integrate as integrate
import matplotlib.ticker
```

Równania do numerycznego obliczenia oraz rozwiązania równań.

In [ ]:
```
functions = [int for _ in range(3)]

functions[0] = lambda x: np.double(4./(x**2 + 1))
functions[1] = lambda x: 0 if x == 0 else np.double(x ** 0.5 * np.log(x))
function_03_helper  = lambda x,a,b : 1/((x-a)**2 + b)
functions[2] = lambda x: function_03_helper(x, 0.3, 0.001) + function_03_helper(x, 0.9, 0.004)
```

In [ ]:
```
solutions = [None for _ in range(3)]

f3_helper_ans = lambda x0, a : 1/np.power(a, 0.5) * (np.arctan((1-x0)
                /np.power(a, 0.5))+np.arctan((x0)/np.power(a, 0.5)) )

solutions[0] = np.pi
solutions[1] = -4/9
solutions[2] = f3_helper_ans(0.3, 0.001) + f3_helper_ans(0.9, 0.004) - 6
```

In [ ]:
```
error_trapz = []
error_gauss = []
error_trapz_adaptive = []
error_simps = []
error_rectangle = []
```

- W celu obliczenia wartości całki za pomocą kwadratur adaptacyjnych używam funkcji `scipy.integrate.quad_vec()`

In [ ]:
```
max_no_evaluations = 14

def adaptive_quadratures(f_x, f_actual):
        a = 0
        b = 1

        last = len(error_trapz_adaptive)
        error_trapz_adaptive.append({})
        error_gauss.append({})

        for i in range(max_no_evaluations):
                error = 10**(-i)
                y1, err_y1, info_y1 = integrate.quad_vec(f_x, a, b, limit=10**6, epsrel=error,
                                        quadrature='trapezoid', full_output=True)

                y2, err_y1, info_y2 = integrate.quad_vec(f_x, a, b, limit=10**6, epsrel=error,
                                        quadrature='gk21', full_output=True)

                error_trapz_adaptive[last][info_y1.neval] = np.abs((f_actual - y1)/f_actual)
                error_gauss[last][info_y2.neval] = np.abs((f_actual - y2)/f_actual)
```

Następnie definiuję funkcję potrzebną do obliczenia całki metodą kwadratur prostokątów oraz definiuję funkcję obliczającą wartość całki dla kwadratur nieadaptacyjnych.

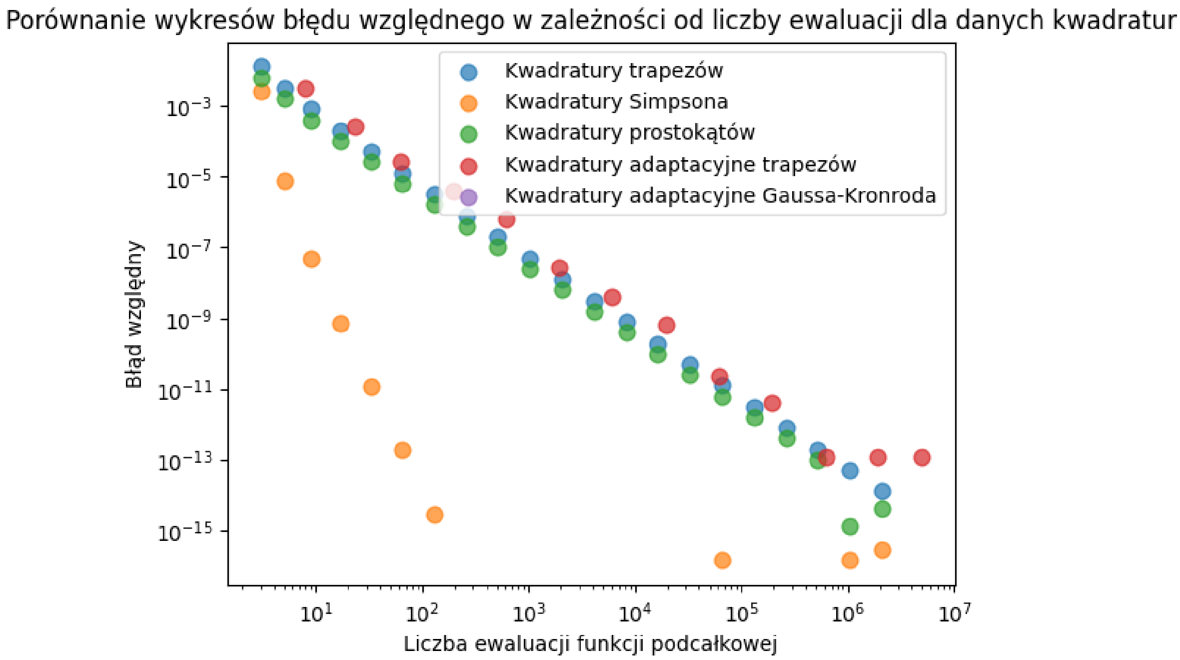
In [ ]:
```
def rectangular_method(nodes, f_x) -> None:
    accumulated = 0.

    for i in range(1, len(nodes)):
        accumulated += (nodes[i] - nodes[i-1])*f_x(nodes[i-1] + (nodes[i] - nodes[i-1])/2)

    return accumulated
```

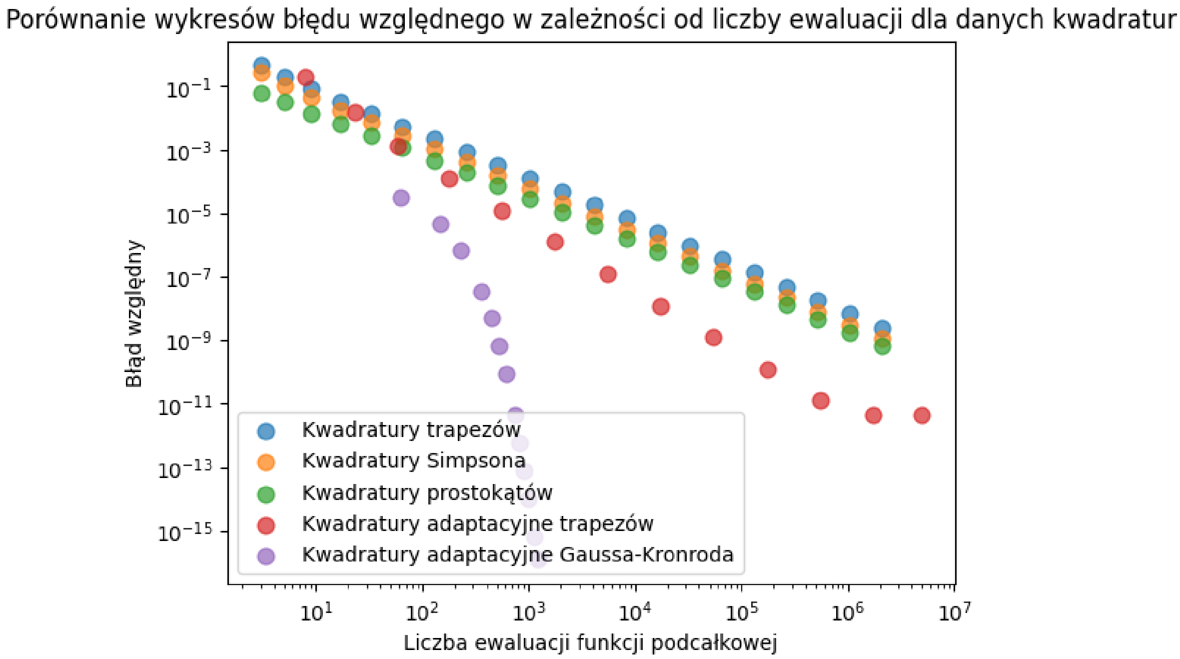
In [ ]:
```
def quadrature_methods(f_x, f_actual):
    max_no_evaluations = 22
    a = 0
    b = 1

    last = len(error_trapz)
    error_trapz.append({})
    error_simps.append({})
    error_rectangle.append({})

    for i in range(1, max_no_evaluations):
        no_nodes = 2**i + 1
        quadrature_nodes = np.array([np.double(a) + np.double(i) *
                        np.double((b-a))/(no_nodes-1) for i in range(no_nodes)])

        quadrature_points = [f_x(i) for i in quadrature_nodes]

        result_trapz = integrate.trapezoid(quadrature_points, quadrature_nodes, 1)
        result_simps = integrate.simpson(quadrature_points, quadrature_nodes, 1)
        result_rectangle = rectangular_method(quadrature_nodes, f_x);

        error_trapz[last][no_nodes]=np.abs(((f_actual - result_trapz)/f_actual))
        error_simps[last][no_nodes]=np.abs(((f_actual - result_simps)/f_actual))
        error_rectangle[last][no_nodes]=np.abs((( f_actual - result_rectangle)/f_actual))
```

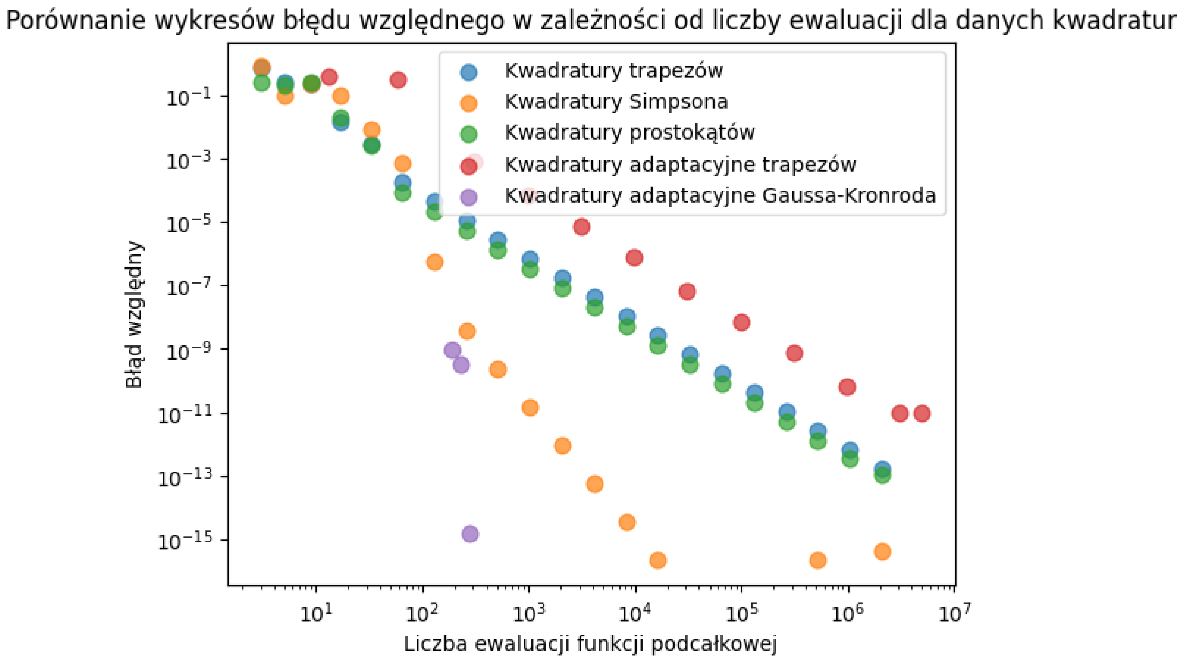
Obliczanie wartości Całek oraz porównanie metod.

In [ ]:
```
#
error_trapz = []
error_gauss = []
```

```python
error_trapz_adaptive = []
error_simps = []
error_rectangle = []

quadrature_methods(functions[0], solutions[0])
adaptive_quadratures(functions[0], solutions[0])

fig, ax = plt.subplots()

labels = [
    'Kwadratury trapezów',
    'Kwadratury Simpsona',
    'Kwadratury prostokątów',
    'Kwadratury adaptacyjne trapezów',
    'Kwadratury adaptacyjne Gaussa-Kronroda',
]

j = 0

for i in (error_trapz, error_simps, error_rectangle, error_trapz_adaptive, error_gauss):
    ax.scatter(i[len(i) -1].keys(),i[len(i) -1].values(), s=60, alpha=0.7, label = labels[j])
    ax.set_xscale("log")
    ax.set_yscale("log")
    j+= 1

plt.legend()
plt.xlabel("Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej")
plt.ylabel("Błąd względny")
plt.title('''Porównanie wykresów błędu względnego w
            zależności od liczby ewaluacji dla danych kwadratur''')
plt.show()



fig, ax = plt.subplots()
quadrature_methods(functions[1], solutions[1])
adaptive_quadratures(functions[1], solutions[1])

j = 0

for i in (error_trapz, error_simps, error_rectangle, error_trapz_adaptive, error_gauss):
    ax.scatter(i[len(i) -1].keys(),i[len(i) -1].values(), s=60, alpha=0.7, label = labels[j])
    ax.set_xscale("log")
    ax.set_yscale("log")
    j+= 1

plt.legend()
plt.xlabel("Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej")
plt.ylabel("Błąd względny")
plt.title('''Porównanie wykresów błędu względnego w zależności
            od liczby ewaluacji dla danych kwadratur''')
plt.show()

fig, ax = plt.subplots()
quadrature_methods(functions[2], solutions[2])
adaptive_quadratures(functions[2], solutions[2])

j = 0

for i in (error_trapz, error_simps, error_rectangle, error_trapz_adaptive, error_gauss):
    ax.scatter(i[len(i) -1].keys(),i[len(i) -1].values(), s=60, alpha=0.7, label = labels[j])
    ax.set_xscale("log")
    ax.set_yscale("log")
    j+= 1

plt.legend()
plt.xlabel("Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej")
plt.ylabel("Błąd względny")
plt.title('''Porównanie wykresów błędu względnego w zależności
            od liczby ewaluacji dla danych kwadratur''')
plt.show()
```


Porównanie wykresów błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji dla danych kwadratur
Kwadratury trapezów
Kwadratury Simpsona
Kwadratury prostokątów
Kwadratury adaptacyjne trapezów
Kwadratury adaptacyjne Gaussa-Kronroda
Błąd względny
Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej


Porównanie wykresów błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji dla danych kwadratur
Kwadratury trapezów
Kwadratury Simpsona
Kwadratury prostokątów
Kwadratury adaptacyjne trapezów
Kwadratury adaptacyjne Gaussa-Kronroda
Błąd względny
Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej



Kwadratury adaptacyjne wypadły w porównaniu lepiej od kwadratur nieadaptacyjnych.
Przwagą kwadratur adaptacyjnych jest elastyczność przy dobieraniu kolejnych węzłów całkowania
W porównaniu kwadratur adaptacyjnych wartość błędu względnego
prawie zawsze spadała szybciej na korzyść kwadratur `Gaussa-Kronroda`.

Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: Wykłady z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
- Marcin Kuta: Materiały z zajęć - Quadratures