

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## 8. Wyznaczanie pierwiastków wielomianów

Marian Bubak, Katarzyna Rycerz

Department of Computer Science  
AGH University of Science and Technology  
Krakow, Poland  
[kzajac@agh.edu.pl](mailto:kzajac@agh.edu.pl)  
[dice.cyfronet.pl](http://dice.cyfronet.pl)

### Contributors

Magdalena Nowak  
Paweł Taborowski  
Arkadiusz Placha



# Plan wykładu

- 1 Wstęp
- 2 Deflacja – dzielenie syntetyczne
- 3 Techniki wygładzania pierwiastków (root polishing)
- 4 Metoda Laguerre'a znajdowania pierwiastków wielomianu
- 5 Metoda Bairstowa oraz deflacja czynnikiem kwadratowym
- 6 Procedura Maehly'ego
- 7 Bibliografia

# Wstęp

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot x^i = 0; \quad a_m \neq 0$$

- Wielomian stopnia  $m$  –  $m$  pierwiastków,
- Jeżeli  $a_i$  – rzeczywiste, to ewentualne pierwiastki zespolone są parami sprzężone:

$$\alpha + i \cdot \beta, \quad \alpha - i \cdot \beta$$

- Jeżeli  $a_i$  – zespolone, to brak związku między pierwiastkami.

Szukanie zer – dobór metody:

- Dowolny
- Ze względu na postać  $f(x)$  – metody specjalne (zwłaszcza dla w. zespolonych).

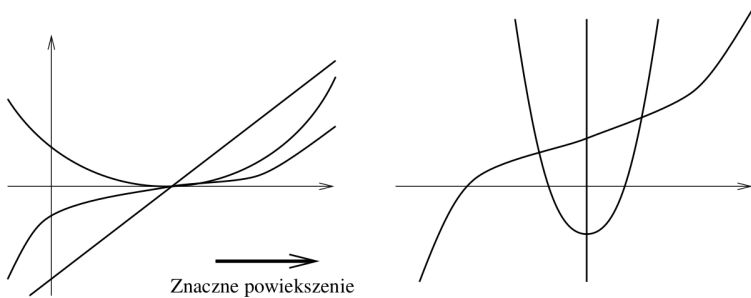
Trudności:

- Wielokrotne pierwiastki – trudno „obramować”, łatwiej, gdy znana krotność,
- Blisko położone pierwiastki – trudności jak wyżej.

*Nie wiadomo z góry, jaki typ patologii wykazuje wielomian.*

### Uwaga

*Zadanie wyznaczania zer wielomianów może być źle uwarunkowane. (Wilkinson).*



## Przydatność deflacji

**Deflacja** - obniżenie stopnia wielomianu po znalezieniu jego pierwiastka; bardzo użyteczna część algorytmu wyznaczania pierwiastków wielomianów.

$P(x)$  – wielomian,

$r$  – znaleziony pierwiastek wielomianu  $P$ .

Realizujemy *faktoryzację*:

$$P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$$

- Zmniejszenie złożoności obliczeniowej ( $Q$  – niższego stopnia niż  $P$ )
- Uniknięcie pomyłki – powrotu do pierwiastka już znalezionego.

# Algorytm Hornera - przypomnienie

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot x^i =$$
$$((\dots ((a_m \cdot x + a_{m-1}) \cdot x + a_{m-2}) \dots) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

Rekurencyjny algorytm obliczania wartości wielomianu dla  $x = \lambda$  ma postać:

## Algorytm

$$\begin{cases} b_{m-1} = a_m \\ b_i = a_{i+1} + \lambda \cdot b_{i+1}, & i = m-2, m-3, \dots, 0 \\ f(\lambda) = a_0 + \lambda \cdot b_0 \end{cases}$$

## Twierdzenie

$$f(x) - f(\lambda) = (x - \lambda) \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i$$

Dowód (szkic):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i (x - \lambda) + f(\lambda)$$

$$f(x) = (b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_0)(x - \lambda) + f(\lambda)$$

$$f(x) = (b_{m-1}x^m + b_{m-2}x^{m-1} + \dots + b_0x) - \lambda(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_0) + f(\lambda)$$

$$f(x) = \underbrace{b_{m-1}x^m}_{a_m} + \underbrace{(b_{m-2} - \lambda b_{m-1})x^{m-1}}_{a_{m-1}} + \dots - \lambda b_0 + f(\lambda)$$

Czyli:

$$b_{i-1} = a_i + \lambda \cdot b_i$$

Wniosek: można stosować algorytm Hornera do dzielenia wielomianu przez czynnik liniowy  $(x - \lambda)$



# Deflacja czynnikiem liniowym

$$f(x) = (x - \lambda) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i}_{g(x)} + f(\lambda) \quad (1)$$

Gdy  $f(\lambda) = 0$ , wtedy  $x = \lambda$  – pierwiastek funkcji  $f$ .

Pozostałe  $m - 1$  zer w  $g(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i$  – deflated equation

## Uwaga

Następuje kumulowanie błędów:  $\lambda$  z błędem,  $b_i$  z błędem itd. . .

## Pochodna – Różniczkując równanie (1)

$$f'(x) = (x - \lambda) \cdot g'(x) + g(x)$$

$$f'(\lambda) = g(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \lambda^i$$

Stosowanie deflacji musi być **ostrożne!**

**Powód:** – pierwiastki są wyznaczone ze skończoną dokładnością (kilka deflacji pociąga kumulację błędu).

- **Forward deflation** – nowe współczynniki  $Q(x)$  obliczane od najwyższych potęg  $x \dots$  Stabilna, gdy zaczynamy od pierwiastków o **najmniejszej** wartości bezwzględnej,
- **Backward deflation** – współczynniki  $Q(x)$  wyznaczone poczynając od wyrazu wolnego. Stabilna, gdy zaczynamy od pierwiastków o **największej** wartości bezwzględnej.

## Podejście minimalizujące błędy

- Kolejne pierwiastki uzyskane w procesie deflacji są *próbnymi* (*tentative*),
- *Polishing* (*re-solving*) – wygładzanie – z użyciem pełnego  $P(x)$  np. metodą Newtona-Raphsona,
- Niebezpieczeństwo – zlanie się dwóch pierwiastków w jeden.

# Wygładzanie pierwiastków (root polishing)

## Pierwiastki rzeczywiste – metoda Newtona-Raphsona

Metoda Newtona

$$t_{i+1} = t_i - \frac{p(t_i)}{p'(t_i)}$$

Wykonujemy schemat Hornera aby obliczyć wartość

$$p(t) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot t^i.$$

$$\begin{cases} b_{m-1} = a_m \\ b_i = a_{i+1} + t \cdot b_{i+1}, & i = m-2, m-3, \dots, 0 \\ p(t) = a_0 + t \cdot b_0 \end{cases}$$

Dla  $t$  – pochodną  $p'(t) = q(t)$  można obliczyć przy wyliczaniu  $p(t)$  również schematem Hornera, ponieważ od razu wyliczamy i korzystamy z  $b_i$

$$p(x) = (x - t)q(x) + p(t)$$

$$p'(x) = q(x) + (x - t)q'(x)$$

$$p'(t) = q(t) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \cdot t^i$$

$$\begin{cases} c_{m-2} = b_{m-1} \\ c_i = b_{i+1} + t \cdot c_{i+1}, & i = m-3, m-4, \dots, 0 \\ q(t) = b_0 + t \cdot c_0 \end{cases}$$

## Pojedynczy krok algorytmu:

```
1 //Horner (uwaga: przenumerowanie indeksów !)  
  b[n] := a[n]  
3  c[n] := b[n]  
  for k = n - 1 downto 1  
5    b[k] := a[k] + t * b[k + 1]  
    c[k] := b[k] + t * c[k + 1]  
7  b[0] := a[0] + t * b[1]  
  
9  //b[0] == p(t),  
  //c[1] == p'(t)  
11 p := b[0]  
  p1 := c[1]  
13  
  if p1 == 0  
15    raise error("Derivative should not vanish.")  
  
17 //Newton-Raphson step  
  t := t - p / p1  
19
```

# Met. Laguerre'a znajdowania pierwiastków wielomianu

## Metoda ogólna

- dla pierwiastków rzeczywistych i zespolonych,
- dla pierwiastków pojedynczych i wielokrotnych,
- *most straightforward*,
- *sure-fire*.



**Istota** wynika z poniższych związków między:

- wielomianem,
- jego pierwiastkami,
- jego pochodnymi:

$$\text{I. } P_n(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

$$\text{II. } \ln |P_n(x)| = \ln |x - x_1| + \ln |x - x_2| + \dots + \ln |x - x_n|$$

$$\text{III. } \frac{d \ln |P_n(x)|}{dx} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} \equiv G$$

$$\text{IV. } -\frac{d^2 \ln |P_n(x)|}{dx^2} = \frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{1}{(x - x_n)^2} =$$

$$\left[ \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} \right]^2 - \frac{P''_n(x)}{P_n(x)} \equiv H$$

W oparciu o te związki – drastyczne założenie:

### Założenie

$x$	odgadnięte (bieżące) położenie pierwiastka
$a = x - x_1$	odległość od pierwiastka
$b = x - x_i, i = 2, 3, \dots, n$	odległość pozostałych pierwiastków

### Wniosek

$$\left. \begin{array}{l} \text{wtedy z III. } \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b} = G \\ \text{IV. } \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2} = H \end{array} \right\}$$

$G, H$  – wyznaczone dla aktualnego  $x$  (z  $P, P', P''$ )

## Rozwiązanie układu

$$a = \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}}$$

- $a$  – odległość od szukanego pierwiastka. Bierzemy rozwiązanie dające mniejsze  $a$ ,
- $a$  może być zespolone – metoda „sama z siebie” zaczyna przeszukiwać  $\mathbb{C}$ ,
- Rozpoczynamy od przybliżenia  $x$ , potem  $(x - a)$ , itd. aż do osiągnięcia żądanej bliskości.

$$x_{i+1} = x_i - a$$

**Zaleta:** Dla  $P(x)$  o współczynnikach rzeczywistych – zbieżna niezależnie od wyboru początkowego  $x$ .

**Wada:** Potrzebne  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  w każdym kroku (ale to wielomiany, więc łatwe)

Więcej o metodzie – przykłady konkretnych rozwiązań [ADAMS]

Deflacja czynnikiem kwadratowym:  $x^2 + px + q$ 

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i = (x^2 + px + q) \cdot \sum_{i=0}^{m-2} c_i x^i + Rx + S$$

Porównując współczynniki mamy:

$$\begin{cases} c_{m-2} = a_m \\ c_{m-3} = a_{m-1} - p \cdot c_{m-2} \\ c_i = a_{i+2} - p \cdot c_{i+1} - q \cdot c_{i+2}, & i = m-4, m-5, \dots, 0 \\ R = a_1 - p \cdot c_0 - q \cdot c_1 \\ S = a_0 - q \cdot c_0 \end{cases}$$

Można to zapisać wygodniej, przyjmując  $c_m = c_{m-1} = 0$ ,  $c_{-1} = R$ :

$$\begin{cases} c_i = a_{i+2} - p \cdot c_{i+1} - q \cdot c_i + 2, & i = m-2, m-3, \dots, 0, -1 \\ S = a_0 - q \cdot c_0 \end{cases}$$

Oczywiście:  $c_i$ ,  $R$ ,  $S$  – zależne od wybranego  $p$  i  $q$ .

Jeżeli  $p, q$  takie, że  $R = 0$  i  $S = 0$  to

$x^2 + px + q$  – czynnik kwadratowy  $f$ ,

W nim zawarte są dwa pierwiastki funkcji  $f$  (ewentualnie zespolone).

# Metoda Bairstowa

**Metoda Bairstowa** polega na szukaniu czynników kwadratowych. Czynniki kwadratowe mogą objąć 2 pierwiastki rzeczywiste lub zespolone, np.

$$x_1 = \alpha + i\beta, \quad x_2 = \alpha - i\beta$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2 \cdot \alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) = x^2 + p \cdot x + q$$

Dzięki "wyłuskaniu" czynnika kwadratowego o pierwiastkach zespolonych możemy jak najdłużej pozostać w arytmetyce rzeczywistej

$$P(x) = (x^2 + p \cdot x + q) \cdot Q(x) + R \cdot x + S \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} R(p, q) = 0 \\ S(p, q) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{met. Newtona-Raphsona dla dwóch zmiennych}$$

Przypomnienie dla jednej zmiennej

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$$

Dla dwóch zmiennych:

$$\begin{pmatrix} p_{(n+1)} \\ q_{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{(n)} \\ q_{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial S}{\partial p} & \frac{\partial S}{\partial q} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R(p_n, q_n) \\ S(p_n, q_n) \end{pmatrix}$$



W każdym kroku  $R(p_n, q_n)$  oraz  $S(p_n, q_n)$  znajdujemy poprzez syntetyczne dzielenie wielomianu  $P(x)$  przez  $(x^2 + p_n \cdot x + q_n)$   
 Pochodne znajdujemy w następujący sposób:

$P(x)$  – nie zależy od  $p, q$ ,

Z równania (2) mamy:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (x^2 + p \cdot x + q) \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} + Q + x \cdot \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\partial S}{\partial q} \\ 0 &= (x^2 + p \cdot x + q) \cdot \frac{\partial Q}{\partial p} + x \cdot Q + x \cdot \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\partial S}{\partial p} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\left( \leftarrow \frac{\partial P}{\partial q} \right) \\ &\left( \leftarrow \frac{\partial P}{\partial p} \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (x^2 + p \cdot x + q) \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial q} \cdot x + \frac{\partial S}{\partial q} &= -Q(x) \\ (x^2 + p \cdot x + q) \cdot \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial R}{\partial p} \cdot x + \frac{\partial S}{\partial p} &= -x \cdot Q(x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) mają podobną strukturę jak (2)  $\rightarrow$  pochodne  $\frac{\partial R}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial q}$  mogą być uzyskane przez syntetyczne dzielenie wielomianów

$$\left. \begin{array}{l} -Q(x) \\ -xQ(x) \end{array} \right\} \text{ przez czynnik kwadratowy.}$$

# Pro. Maehly'ego – technika wygładzania pierwiastków

Wykorzystujemy znane pierwiastki bez stosowania deflacji.  
Równocześnie zapobiega zlewaniu się w jeden dwóch różnych pierwiastków (na etapie wygładzania)

Zredukowany wielomian

$$P_j(x) \equiv \frac{P(x)}{(x - x_1) \dots (x - x_j)}$$

Pochodna

$$P'_j(x) = \frac{P'(x)}{(x - x_1) \dots (x - x_j)} - \frac{P(x)}{(x - x_1) \dots (x - x_j)} \sum_{i=1}^j \frac{1}{x - x_i}$$

Wykorzystujemy znane pierwiastki  $(x_1, \dots, x_j)$  do znalezienia kolejnych.

Pojedynczy krok metody Newtona-Raphsona można zapisać używając zredukowanego wielomianu:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_j(x_k)}{P'_j(x_k)}$$

Zastępujemy zredukowany wielomian początkowym wielomianem, ale uwzględniamy informację o już znalezionych pierwiastkach:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k) - P(x_k) \cdot \sum_{i=1}^j \frac{1}{(x_k - x_i)}}$$

# Bibliografia



Adams, Arthur G.

Remark on Algorithm 304 [S15]: Normal Curve Integral

Commun. ACM, 1969