Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

5. Aproksymacja

Marian Bubak, Katarzyna Rycerz

Department of Computer Science
AGH University of Science and Technology
Krakow, Poland
kzajac@agh.edu.pl
dice.cyfronet.pl

Contributors
Paweł Urban
Jakub Ptak
Łukasz Janeczko

Outline

Aproksymacja

Aproksymacja:

- przybliżanie lub zastępowanie funkcji za pomocą innej funkcji
- jest ogólniejsza niż interpolacja

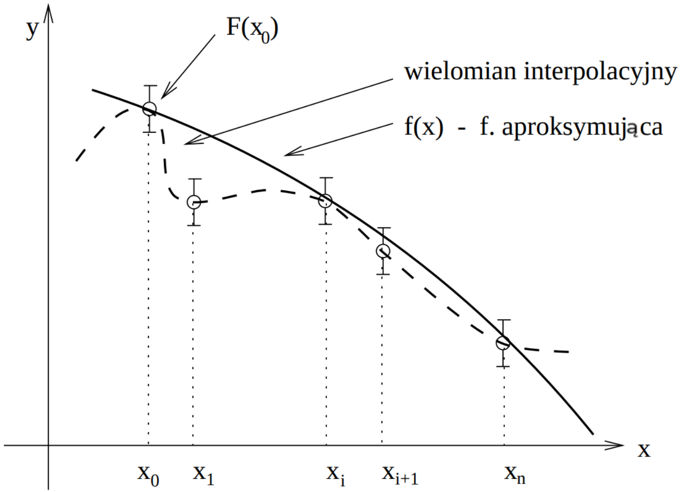
Funkcja aproksymowana i aproksymująca

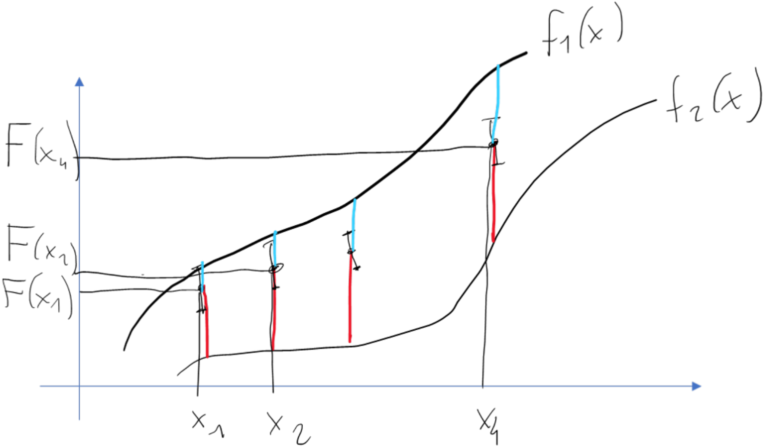
$F(x)$ - to funkcja aproksymowana i może być:

- znana
- podana jako tablica wartości eksperymentalnych (z błędami, ale wtedy interpolacja nie ma sensu)

$f(x)$ - to funkcja aproksymująca = przybliżenie F(x)

Aproksymacja średniokwadratowa




$f_1(x)$
$f_2(x)$
$F(x_4)$
$F(x_2)$
$F(x_1)$
x_1
x_2
x_4

Postawienie problemu

Dane:

- $(x_i, y_i = F(x_i)), i = 0, 1, \ldots, n$, czyli mamy (n+1) węzłów
- układ funkcji bazowych: $\varphi_j(x), j = 0, 1, \ldots, m$.

Szukamy wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

czyli $\{a_j\}_{j=0}^{m}$, dla których:

$$min \parallel F(x) - f(x) \parallel = \underbrace{min \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \underbrace{\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2}_{\text{odchylenie}}}_{H(a_0, a_1, \ldots, a_m)}$$

Pochodzenie nazwy: postać normy $F(x)$ na $[a, b]$

Przypadek ciągły

Dla przypadku ciągłego minimalizujemy wartość całki:

$$min \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx$$

$\Rightarrow$ aproksymacja średniokwadratowa funkcji ciągłych

$w(x)$ - funkcja wagowa, $w(x) \geqslant 0$
Zwykle: $w(x_i) \sim \frac{1}{[\text{błąd } F(x_i)]^2}$ lub $w(x) = 1$

Współczynniki wielomianu uogólnionego

Współczynniki $\{a_j\}$ znajdujemy z warunku:
$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, \ldots, m \Rightarrow$ układ $(m+1)$ równań liniowych o $(m+1)$ niewiadomych

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \cdot \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right] \varphi_k(x_i) = 0; \, k = 0, 1, \ldots, m$$

Powyższy układ równań zwany jest układem normalnym.

Aproksymacja wielomianowa

Dane:
funkcje bazowe $\rightarrow$ ciąg jednomianów $\varphi_j(x) = x^j, j = 0, 1, \ldots, m$

funkcja aproksymująca: $f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$

$F(x)$ - zadana na zbiorze dyskretnym $\{x_i\}, i = 0, 1, \ldots, n$

Szukamy takich współczynników a_j, że :

$$min \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2$$

Układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right] x_i^{k \leftarrow \frac{\partial f}{\partial a_k}} = 0, k = 0, 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k, k = 0, 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=0}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k}\right)}_{g_{k,j}} a_j = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k}_{b_k}$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \dots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \dots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \dots & \sum w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

$$\underline{G \cdot A = B}$$

Jeżeli:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - są różne
2. $m \leqslant n$

to $det\ G \neq 0 \rightarrow$ układ ma jedno rozwiązanie.

W praktyce

- $m \ll n$ (korzystamy z dużej ilości informacji)
- m - wysoki - by dobrze przybliżyć funkcję
- m - niski - by wygładzić błędy
- zwykle $m \leqslant 6$

Ortogonalność funkcji

Definicja ortogonalności funkcji

Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $\{x_i, i = 0, 1, .., n\}$, jeżeli:

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g(x_i) = 0, \sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0, \sum_{i=0}^{n} [g(x_i)]^2 > 0$$

Ortogonalność ciągów

Definicja ortogonalności ciągów

Ciągi funkcyjne $\{\varphi_k(x)\}$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $\{x_i\}$, jeżeli:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ > 0 & j = k \quad \rightarrow (*) \end{cases}$$

$(*)$ - nie wszystkie x_i to miejsca zerowe.

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami ortogonalnymi

Dla wielomianów ortogonalnych układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]\varphi_k(x_i) = 0, k = 0, 1, .., m$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\varphi_k(x_i)\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{j=0}^{m} a_j\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)\varphi_k(x_i) = a_k\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\varphi_k^2(x_i)$$

$\rightarrow$ macierz staje się diagonalna $\rightarrow$ znika:

- złe uwarunkowanie
- konieczność ponowanego rozwiązywania układu normalnego przy zmianie stopnia wielomianu aproksymującego

Najczęściej stosowane wielomiany ortogonalne:

- Czebyszewa $T_j(x)$
- Legendre'a $P_n(x)$ ($\rightarrow$ zwłaszcza dla $w(x_i) = 1$)

Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi

Możliwa jest aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi.

Przykład: `https://pl.wikibooks.org/wiki/Metody_numeryczne_fizyki/Aproksymacja`

Wielomiany Legendre'a

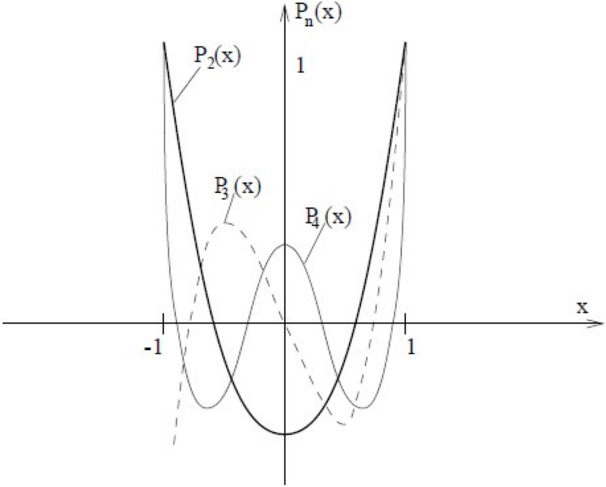
Określone wzorem

$$P_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], x \in [-1,1], n = 0, 1, \ldots$$

Spełniają wzór rekurencyjny (dla $n \geqslant 1$):

$$(2n+1) \cdot x \cdot P_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + n \cdot P_{n-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&P_0 = 1 \\
&P_1(x) = x \\
&P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
&P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
&P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
&\vdots \\
&P_n(1) = 1; |P_n(x)| \leqslant 1, x \in [-1,1]
\end{aligned}$$


$P_n(x)$
1
$P_2(x)$
$P_3(x)$
$P_4(x)$
x
-1
1

Własności

Wielomiany Legendre'a spełniają zależność:

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x)$$

spełniają równania różniczkowe:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Ortogonalność:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

Aproksymacja jednostajna

Dla $F(x)$ określonej na $[a, b]$ szukamy $f(x)$:

$$min||F(x) - f(x)|| = min \underbrace{sup_{x \in [a,b]}|F(x) - f(x)|}_{\text{norma Czebyszewa}}$$

Twierdzenie Weierstrassa

Jeżeli $F(x) \in C^0[a,b]$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać $n(\varepsilon)$ takie, że istnieje $W_n(x) : |F(x) - W_n(x)| < \varepsilon$

Wniosek: $F(x)$ można aproksymować jednostajnie wielomianami.

Szukamy a_i:
$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ aby $minE_n$,
$E_n = max_{x \in [a,b]} |F(x) - W_n(x)|$

Twierdzenie Borela

Jeśli $F(x) \in C^0[a, b]$, n - naturalna, to istnieje $W_n(x)$ będący najlepszym przybliżeniem $F(x)$.

Twierdzenie Czebyszewa

Wielomian $W_n(x)$ będący najlepszym przybliżeniem $F(x)$ jest tylko jeden.

Metoda szeregów potęgowych - szereg Taylora

Prostą metodą aproksymacji jednostajnej jest metoda szeregów potęgowych t.j. używamy pierwszych n+1 wyrazów szeregu Taylora:

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

oszacowanie błędu aproksymacji $\longrightarrow$ reszta Lagrange'a:

$$F(x) - W_n(x) = \frac{F^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \eta \in [a, b]$$

Przybliżenia Padé

ang. Padé approximation, rational function approximation

Aproksymujemy funkcję $F(x)$ za pomocą funkcji wymiernej $r(x)$.
Funkcja wymierna $r(x)$ stopnia $N = n + m$ ma postać:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \ldots + q_m x^m}$$

- nieredukowalna (p, q - są względnie pierwsze - nie mają wspólnych dzielników)
- określona w $x = 0 \Rightarrow q_0 \neq 0, \Rightarrow q_0 = 1$ (zwykle)
- do określenia $N + 1 = n + m + 1$ współczynników

Technika aproksymacji Padé

Jest to sposób określenia $\{p_i, q_j\}, i = 0, .., n, j = 0, .., m$ przy zadanych n, m

$$F(x) - r(x) = F(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{F(x) \cdot q(x) - p(x)}{q(x)}$$

Niech $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i \rightarrow$ szereg Maclaurina

$$F(x) - r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)}$$

Należy dobrać $p_0, p_1, .., p_n$ i $q_1, .., q_m$ tak, aby rozwinięcia $F(x)$ i $r(x)$ w szereg Maclaurina były jak najbardziej zgodne czyli możliwie najwięcej pochodnych $F(x)$ i $r(x)$ w $x = 0$ było równych:

$$F^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, .., N$$

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ w(0) = d \text{ i } w(0) = 0 \rightarrow d = 0$$

$$w'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\ w'(0) = c \text{ i } w'(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$w''(x) = 6ax + 2b,\ w''(0) = 2b \text{ i } w''(0) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$w'''(x) = 6a,\ w'''(0) = 6a \text{ i } w'''(0) = 0 \rightarrow a = 0$$

To znaczy, że licznik:

$$(a_0 + a_1 x + ..)(1 + q_1 x + .. + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + .. + p_n x^n)$$

nie powinien mieć wyrazów stopnia $\leqslant N$. Dla uproszczenia zapisu:

$$p_{n+1} = p_{n+2} = .. = p_N = 0 \text{ i } q_{m+1} = q_{m+2} = .. = q_N = 0$$

Wtedy współczynniki: $\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} - p_k$ powinny być równe 0, a znalezienie $p(x)$ i $q(x)$ polega na rozwiązaniu układu równań liniowych:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} - p_k = 0; k = 0, 1, ..., N$$

$$(a_0 + a_1 x + \ldots)(1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_m x^m)$$

współczynnik przy x^0 $\quad a_0$

przy x^1 $\quad a_0 \cdot q_1 + a_1$

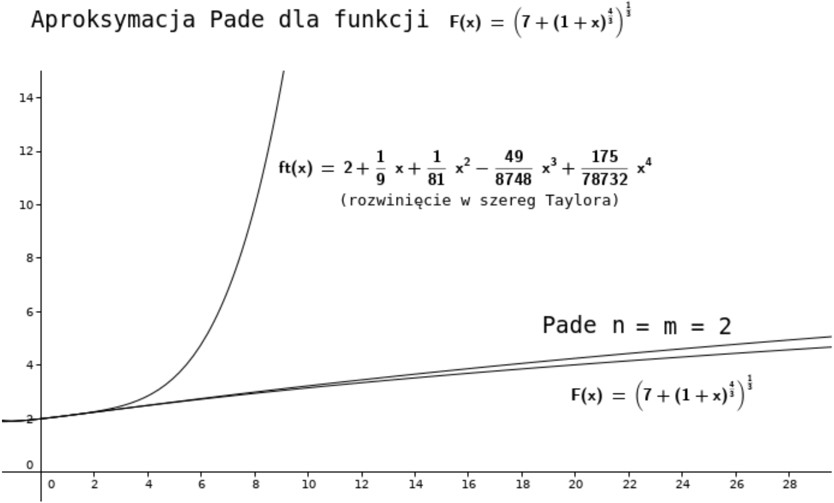
przy x^k $\quad \sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}$

Typowy przykład

$$F(x) = \left[7 + (1+x)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \approx 2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{81}x^2 - \frac{49}{8748}x^3 + \frac{175}{78732}x^4 + \ldots$$

Uwagi

- w praktyce: $N = n + m$ - ustalone: $\begin{cases} n = m \\ n = m+1 \end{cases}$


Aproksymacja Pade dla funkcji $F(x) = \left(7 + (1+x)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$
$ft(x) = 2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{81}x^2 - \frac{49}{8748}x^3 + \frac{175}{78732}x^4$
(rozwinięcie w szereg Taylora)
Pade n = m = 2
$F(x) = \left(7 + (1+x)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28

Wielomiany Czebyszewa

Reprezentacja trygonometryczna.
Wiemy, że $\forall x \in [-1, 1]\ \exists \varphi \in [0, \pi] : \cos\varphi = x$
Dla $x \in [-1, 1]$ podstawmy $\varphi = \arccos x$ i definiujemy wielomiany Czebyszewa:

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos x]$$

Z tożsamości trygonometrycznej:

$$\cos(n\varphi) + \cos[(n-2)\varphi] = 2\cos[(n-1)\varphi] \cdot \cos\varphi$$

$$\cos(n\varphi) = 2\cos[(n-1)\varphi] \cdot \cos\varphi - \cos[(n-2)\varphi]$$

Wynika relacja rekurencyjna:
$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, dla $n \geqslant 2$

Relacja rekurencyjna

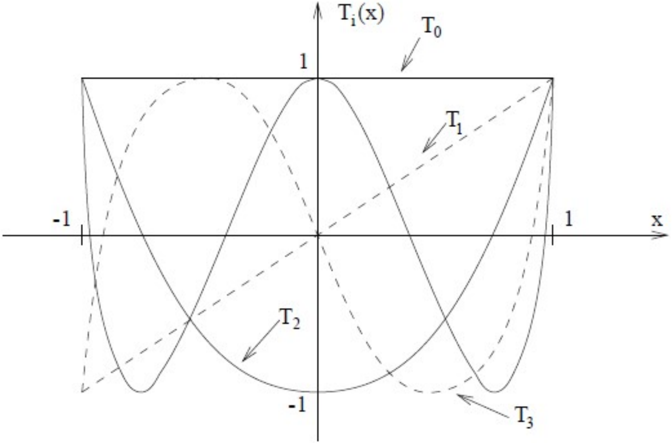
$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&\vdots\\
T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ dla } n \geqslant 2
\end{aligned}
$$

Czynnik wiodący

Czynnik wiodący w $T_n(x)$ jest to czynnik przy najwyższej potędze x, czyli $2^{n-1}(dla\ n \geqslant 1)$

Symetria

$$T_k(-x) = (-1)^k \cdot T_k(x)$$



Miejsca zerowe $T_n(x)$ - węzły Czebyszewa

$T_n(x)$ ma w $[-1, 1]$ n miejsc zerowych:

$$T_n(x) = \cos(n \underbrace{\arccos x}_{\alpha}) = 0$$

wtedy, gdy:

$$\cos(n \cdot \alpha) = 0 \text{ dla } n \cdot \alpha = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \alpha \in [0, \pi]$$

czyli

$$\alpha = \frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, .., n-1$$

$$\arccos x_k = \frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, .., n-1$$

Tak więc miejsca zerowe:

$$x_k = \cos(\frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}), k = 0, 1, .., n-1$$

Ortogonalność

Przypadek ciągły

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x) \cdot T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0 \rightarrow \text{repr. tryg.} \end{cases}$$

Przypadek dyskretny x_k - miejsca zerowe $T_{m+1}(x)$

$$\sum_{k=0}^{m} T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{m+1}{2} & i = j \neq 0 \\ m+1 & i = j = 0 \end{cases}$$

Własność minimaksu wielomianów Czebyszewa

Twierdzenie o normie $T_n(x)$

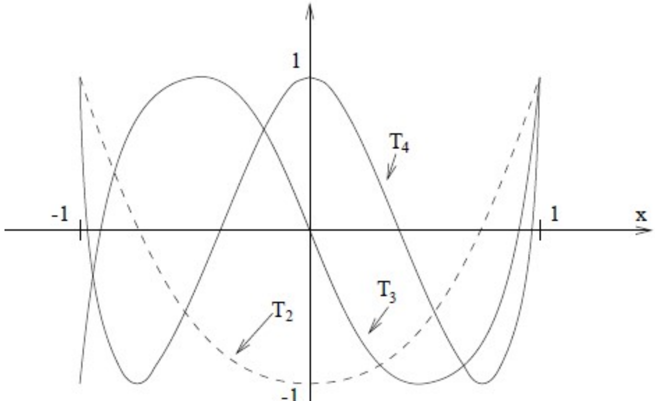
Ze wszystkich wielomianów stopnia $n \geqslant 1$ z czynnikiem wiodącym równym 1 najmniejszą normę maksymalną w $[-1, 1]$

$$\|W_n\|_\infty = max_{x \in [a,b]} |W_n|$$

ma wielomian $2^{1-n} \cdot T_n(x)$. Wynosi ona 2^{1-n}

Dowód (nie wprost)

Załóżmy, że $\exists p_n(x)$ o współczynniku wiodącym $= 1$ taki, że:
$\forall_{x \in [-1,1]} |p_n(x)| < 2^{1-n}$
Możemy zdefiniować punkty ekstemalne, czyli takie dla których $|T_n(x)| = 1$



dla $n=4$

4 przedziały

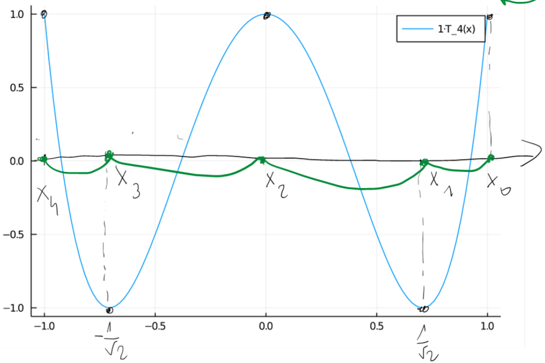
$x_0 = \cos 0 = 1$ — 1 przedział

$x_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — 2 przedział

$x_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ — 3 przedział

$x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ — 4 przedział

$x_4 = \cos \pi = 1$



x'_k jest punktem ekstremalnym jeśli $T_n(x'_k) = (-1)^k$,
analogicznie jak dla przypadku miejsc zerowych zachodzi:
$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ., n$
Dla $\forall x'_k$ powinno zachodzić:
$p_n(x'_0) < 2^{1-n} \cdot T_n(x'_0)$,
$p_n(x'_1) > 2^{1-n} \cdot T_n(x'_1)$,
$p_n(x'_2) < 2^{1-n} \cdot T_n(x'_2)$,
$\ldots$, aż do x'_n
$\Rightarrow$ czyli wielomian $[p_n(x) - 2^{1-n} \cdot T_n(x)]$
powinien zmieniać znak w każdym z przedziałów:
(x'_{k+1}, x'_k), $k = \underbrace{n-1, n-2, .., 1, 0}_{\text{n przedziałów} \rightarrow \text{n zer}}$
$\Rightarrow$ czyli powinien być wielomianem stopnia n w $[-1, 1]$,
ale $p_n(x)$ i $2^{1-n} \cdot T_n(x)$ mają ten sam współczynnik wiodący,
Zatem ich różnica jest stopnia $n-1$ i mamy sprzeczność.

Interpolacja węzłami $T_{n+1}(x)$

$W_n(x)$ - wielomian interpolacyjny (Lagrange'a) stopnia n; $W_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, .., n$ Ze wzoru na błąd interpolacji Lagrange'a mamy:

$$f(x) = W_n(x) + E_n(x); E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}_{\omega_{n+1}}, c \in [x_0, x_n]$$

Przez optymalny wybór rozmieszczenia węzłów x_k można zminimalizować $max|\omega_{n+1}(x)|$

Rozwiązanie: Wprost z własności minimaksu - wielomianem mającym najmniejszy $max|\omega_{n+1}(x)|$ jest $2^{-n} \cdot T_{n+1}(x)$, który możemy przedstawić przy pomocy jego zer x_i jako:

$$2^{-n} \cdot T_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Czyli jako węzły interpolacji należy wziąć zera wielomianu $T_{n+1}(x)$

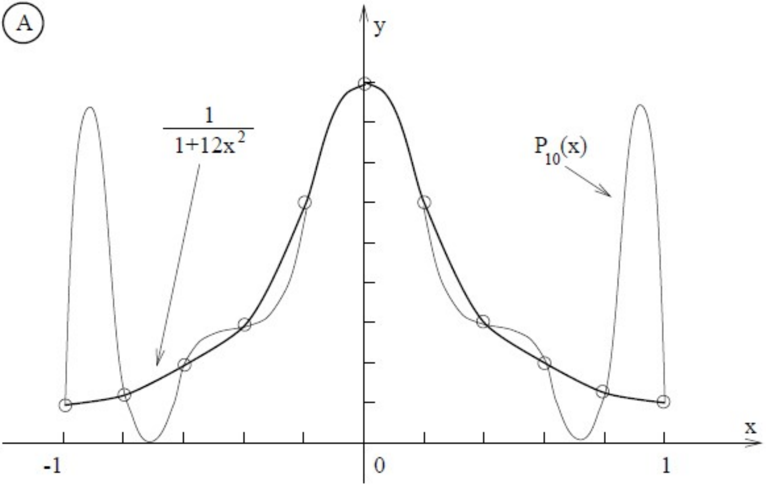
$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), k = 0, 1, .., n$$

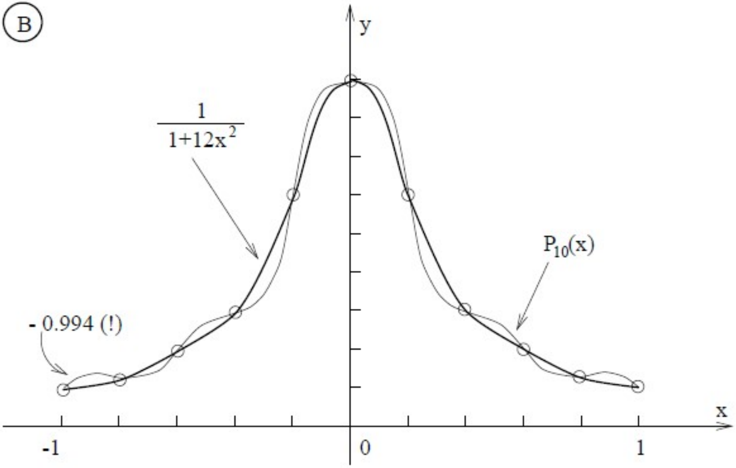
Uwaga

Transformacja przedziału $x \in [a, b] \rightarrow t \in [-1, 1]$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

Na następnych slajdach porównanie:
- interpolacja z równoodległymi węzłami (11 węzłów)
- interpolacja z węzłami Czebyszewa $\rightarrow$ zera $T_{11}(x)$


A
y
$\frac{1}{1+12x^2}$
$P_{10}(x)$
x
-1
0
1


B
y
$\frac{1}{1+12x^2}$
$P_{10}(x)$
- 0.994 (!)
x
-1
0
1

Interpolujący wielomian Czebyszewa

$T_n(x)$ zachowują się równomiernie w $[-1,1]$; min = -1, max = 1 - **ważna własność**
Do utworzenia wielomianu interpolacyjnego można wykorzystać liniową kombinację:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x)$$

Współczynniki c_j wyznaczamy z własności ortogonalności dla przypadku dyskretnego:
Jeśli $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right)$ są zerami $T_{n+1}(x), k = 0, 1, .., n$ to:

$$\sum_{k=0}^{n} T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ n+1 & i = j = 0 \\ \frac{n+1}{2} & i = j \neq 0 \end{cases}$$

Wyznaczanie współczynników c_i

Korzystamy z warunku interpolacji:

$$f(x_k) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x_k)$$

Następnie dla każdego węzła mnożymy ten warunek obustronnie przez $T_i(x_k)$ i składamy je w sumę:

$$f(x_k) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x_k) \Bigg| \, T_i(x_k)) \Bigg| \sum_{k=0}^{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_i(x_k) = \sum_{j=0}^{n} c_j \underbrace{\sum_{k=0}^{n} T_i(x_k) T_j(x_k)}_{\text{ortogonalność}}$$

Współczynniki c_i

Z warunku ortogonalności znikają wszystkie składniki $\sum_{j=0}^{n}$ poza $j = i$ i mamy:

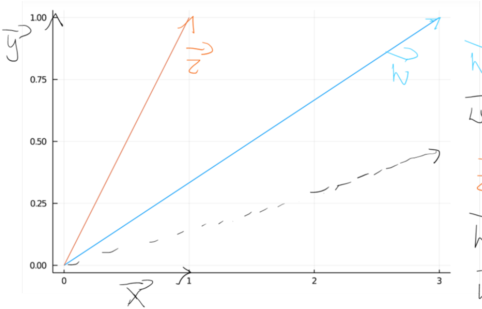
$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_i(x_k) = c_i \underbrace{\sum_{k=0}^{n} T_i(x_k) T_i(x_k)}_{\text{ortogonalność}}$$

$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_0(x_k) = c_0(n+1)$ czyli $c_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_0(x_k)$

$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_i(x_k) = c_i \frac{n+1}{2}$ czyli $c_i = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_i(x_k)$
dla $i = 1, .., n$
Współczynniki są od siebie niezależne ! (pomocny: alg. Clenshawa)
Jeśli wyliczymy ich mniej - aproksymacja. Porównaj (slajd 17)

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) \varphi_k(x_i) = a_k \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \varphi_k^2(x_i)$$

Analogia do wektorów R^2



$$\vec{w} = 3\vec{x} + 1\cdot\vec{y}$$

$$\vec{w} = a\vec{x} + b\cdot\vec{y}$$

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$$

$$\vec{w} = c\cdot\vec{x} + d\cdot\vec{z}$$

$$\vec{w} = c\cdot\vec{x} + d(\vec{x}+\vec{y})$$

$$\vec{w} = \underbrace{(c+d)}_{a}\vec{x} + d\cdot\vec{y}$$

W przykładowej bazie wektorów nieortogonalnych
Zmiana d pociąga za sobą zmianę a=c+d

Współczynniki są zależne!

Szacowanie błędu aproksymacji

Maksymalna odległość między "kolejnymi" aproksymacjami w bazie wielomianów Czebyszewa liczona przy użyciu normy aproksymacii jednostajnej $sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$ to:

$$f(x) = a_n \cdot T_n(x) + a_{n-1} \cdot T_{n-1}(x) + ... + a_1 \cdot T_1(x) + a_0 \cdot T_0(x)$$

$$g(x) = a_{n-1} \cdot T_{n-1}(x) + ... + a_1 \cdot T_1(x) + a_0 \cdot T_0(x)$$

$$|g(x) - f(x)| < |a_n| \cdot \underbrace{|T_n(x)|}_{max 1} \leqslant |a_n|$$

Kolejne współczynniki mówią nam o błędach przybliżenia!
Jeśli współczynniki wyższych rzędów maleją $\rightarrow$ wskaźnik, że funkcja "nadaje się" do aproksymacji wielomianami.

Co przy pomiarach?

Problem: Trzeba znać wartości funkcji aproksymowanej w węzłach Czebyszewa.
Możliwe (alternatywne) rozwiązania:

- mierzyć w węzłach Czebyszewa
- mierzyć wystarczająco gęsto
- użyć aproksymacji wielomiami Czebyszewa w "złych" punktach, ale z dobranymi wagami mówiącymi o jakości tych punktów.

Aproksymacja wielomianami Czebyszewa (p. ciągły)

Aproksymacja jednostajna: $minsup_{x\in[a,b]}|F(x) - f(x)|$
Baza $T_i(x)$ wygodna, bo $T_i(x)$ - równomierne w $[-1,1]$

Pierwszy sposób (podobnie jak w metodzie szeregów potęgowych):
$F(x)$ **zastępujemy sumą częściową:**

$$F(x) \approx \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x)$$

z c_j wyznaczonymi z warunku ortogonalności w przypadku ciągłym

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(x) \Bigg| \cdot \frac{T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Bigg| \int_{-1}^{1} dx$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{F(x)T_0(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad c_i = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{F(x)T_i(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}, i = 1,..,n$$

Drugi sposob analogiczny do aproksymacji Pade.
Tworzymy wyrażenia wymierne postaci:

$$T_{n,k}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)}{\sum_{i=0}^{k} b_i T_i(x)}$$

o a_i, b_i dobranych tak, licznik wyrażenia

$$F(x) - T_{n,k}(x) = \frac{\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(x)\right] \cdot \left[\sum_{i=0}^{k} b_i T_i(x)\right] - \sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)}{\sum_{i=0}^{k} b_i T_i(x)}$$

był równy kombinacji liniowej wielomianów Czebyszewa o wskaźnikach większych od k+n.
Dla zainteresowanych: `https://pl.wikibooks.org/wiki/Metody_numeryczne_fizyki/Aproksymacja`

Clenshaw's recurrence formula

Elegancki i efektywny sposób sumowania wyrazów spełniających pewien wzór rekurencyjny:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k F_k(x)$$

przy czym c_k znane oraz $F(x)$ - spełnia wzór rekurencyjny:

$$F_{n+1}(x) = \alpha(n, x) \cdot F_n(x) + \beta(n, x) \cdot F_{n-1}(x)$$

gdzie: $\alpha(n, x), \beta(n, x)$ - pewne funkcje
Przykładem takiej sumy jest suma stosowana przy wyznaczaniu współczynników dla interpolacji Czebyszewa.

Jak działa?
Określamy rekurencyjnie pomocnicze zmienne
$y_k, k = N, N-1, .., 1$ (downward order; k - decreasing) jako:

$$y_{N+2} = y_{N+1} = 0, y_k(x) = \alpha(k,x) \cdot y_{k+1} + \beta(k+1,x) \cdot y_{k+2} + c_k$$

Stąd wyliczamy zależność:
$c_k = y_k - \alpha(k,x) \cdot y_{k+1} - \beta(k+1,x) \cdot y_{k+2}$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$f(x) = \sum_{k=N}^{0} [y_k - \alpha(k,x)y_{k+1} - \beta(k+1,x)y_{k+2}] \cdot F_k(x) =$$

$$\begin{array}{lccccccl}
=[& y_N & - & 0 & - & 0 &]F_N(x) \\
+[& y_{N-1} & - & \alpha(N-1,x)\cdot y_N & - & 0 &]F_{N-1}(x) \\
 & \dots & & \dots & & \dots & \\
+[& \boxed{y_8} & - & \alpha(8,x)y_9 & - & \beta(9,x)y_{10} &]\boxed{F_8(x)} \\
+[& y_7 & - & \boxed{\alpha(7,x)y_8} & - & \beta(8,x)y_9 &]\boxed{F_7(x)} \\
+[& y_6 & - & \alpha(6,x)y_7 & - & \boxed{\beta(7,x)y_8} &]\boxed{F_6(x)} \\
+[& y_5 & - & \alpha(5,x)y_6 & - & \beta(6,x)y_7 &]F_5(x) \\
 & \dots & & \dots & & \dots & \\
+[& y_2 & - & \alpha(2,x)y_3 & - & \beta(3,x)y_4 &]F_2(x) \\
+[& y_1 & - & \alpha(1,x)y_2 & - & \beta(2,x)y_3 &]F_1(x) \\
+[& y_0 & - & \alpha(0,x)y_1 & - & \beta(1,x)y_2 &]F_0(x) =
\end{array}$$

"Czerwone" składniki dają:

$$y_8[F_8(x) - \alpha(7,x)F_7(x) - \beta(7,x)F_6(x)]$$

ponieważ z założenia $F_8(x) = \alpha(7,x)F_7(x) + \beta(7,x)F_6(x)$ to "czerwone" składniki się zerują.
Jedynymi składnikami, które pozostaną są te w "dolnym lewym trójkącie" czyli:

$$(*)y_1F_1(x) + [y_0 - \alpha(0,x)y_1]F_0(x)$$

Ponieważ $c_0 = y_0 - \alpha(0,x)y_1 - \beta(1,x)y_2$ to (*) można przekształcić do:

$$F_1(x)y_1 + \beta(1,x)y_2F_0(x) + c_0F_0(x)$$

Tak więc wyznaczanie $f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k F_k(x)$
dla $F_k(x)$: $F_{n+1}(x) = \alpha(n,x) \cdot F_n(x) + \beta(n,x) \cdot F_{n-1}(x)$
sprowadza się do:

1. wyznaczenia y_1 i y_2 z formuły rekurencyjnej:

$$\begin{cases} y_{N+2} = y_{N+1} = 0 \\ y_k(x) = \alpha(k,x) \cdot y_{k+1} + \beta(k+1,x) \cdot y_{k+2} + c_k \end{cases}$$

2. obliczenia sumy

$$f(x) = \beta(1,x) \cdot y_2(x) \cdot F_0(x) + y_1(x) \cdot F_1(x) + c_0 \cdot F_0(x)$$

Clenshaw's recurrence in upward direction:

W zależności od róznic pomiędzy

$$\begin{array}{cl} F_k(x) & \text{dla małych i dużych k} \\ c_k & \text{dla małych i duzych k} \end{array}$$

może mieć znaczenie, czy współczynniki y_k są liczone od większych do mniejszych k, czy na odwrót.
Wykrywanie utraty dokładności:
$\beta(1,x) \cdot y_2 \cdot F_0$ oraz $y_1 \cdot F_1$ - przeciwnych znaków i prawie równe

Wtedy stosować **Clenshaw's recurrence in upward direction:**

$$y_{-2} = y_{-1} = 0$$

$$y_k = \frac{1}{\beta(k+1,x)}[y_{k-2} - \alpha(k,x)y_{k-1} - c_k], k = 0, 1.., N-1$$

$$f(x) = c_N F_N(x) - \beta(B,x)F_{N-1}(x)y_{N-1} - F_N(x)y_{N-2}$$

`https://www.ams.org/journals/mcom/1955-09-051/S0025-5718-1955-0071856-0/S0025-5718-1955-0071856-0.pdf`