Dominik Szot

Laboratorium 4

Efekt Rungego

Zadanie 1.

Dla danych funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2} \ , \ x \in [-1, 1]$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \ , \ x \in [0, 2\pi]$$

wyznaczyć wielomiany interpolujące używając:

– wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami

$$x_j = x_o + jh, \ j = 0, 1, \ldots, n, \text{ gdzie } h = (x_n - x_0)/n$$

– kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami

$$x_j = x_o + jh, \ j = 0, 1, \ldots, n, \text{ gdzie } h = (x_n - x_0)/n$$

– wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \cos(\theta_j) \quad \theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \leq j \leq n \ldots$$

W celu obliczenia wielomianu Lagrange'a korzystałem ze wzoru poznanym na Laboratorium 4.

Wzór na wielomianu Lagrange'a:

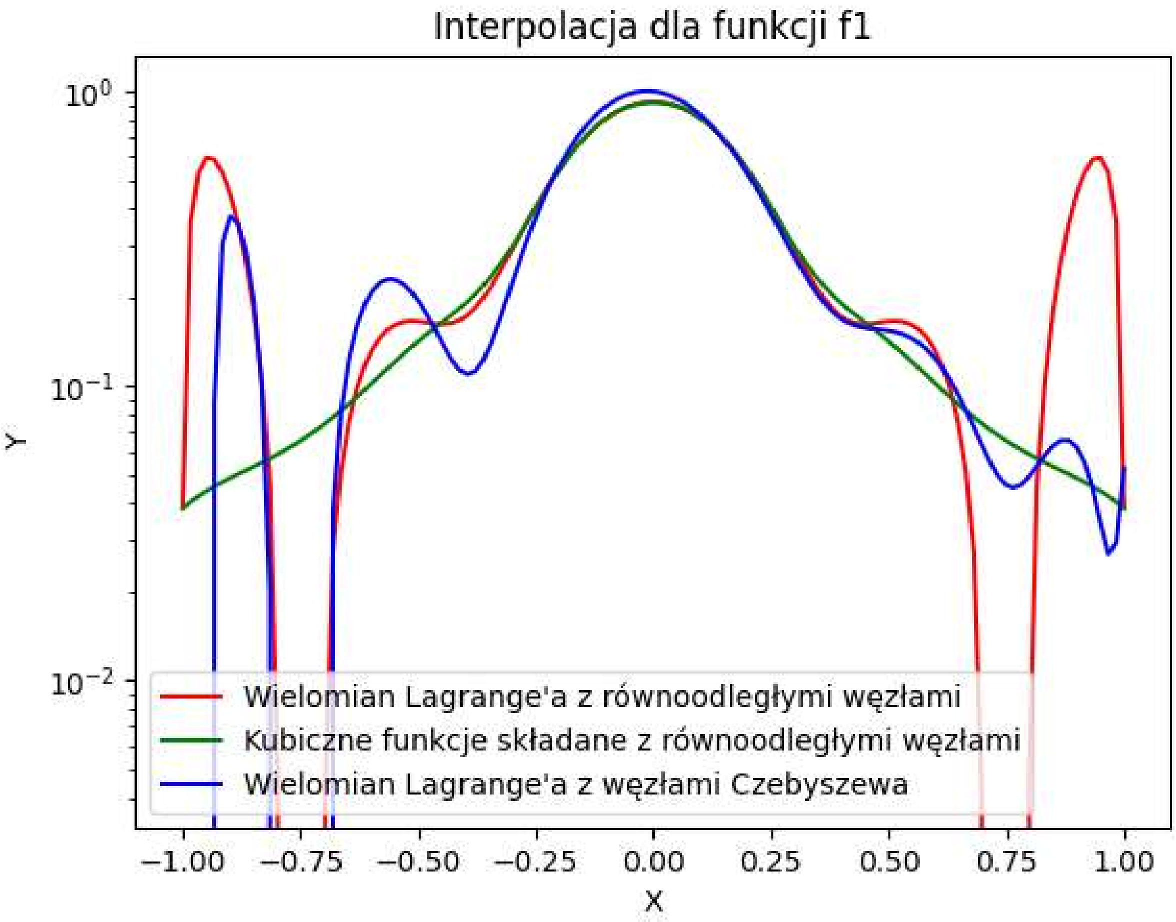
$$w_j(x) = \frac{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(x_j - x_k)} \quad j = 1, \dots, n$$

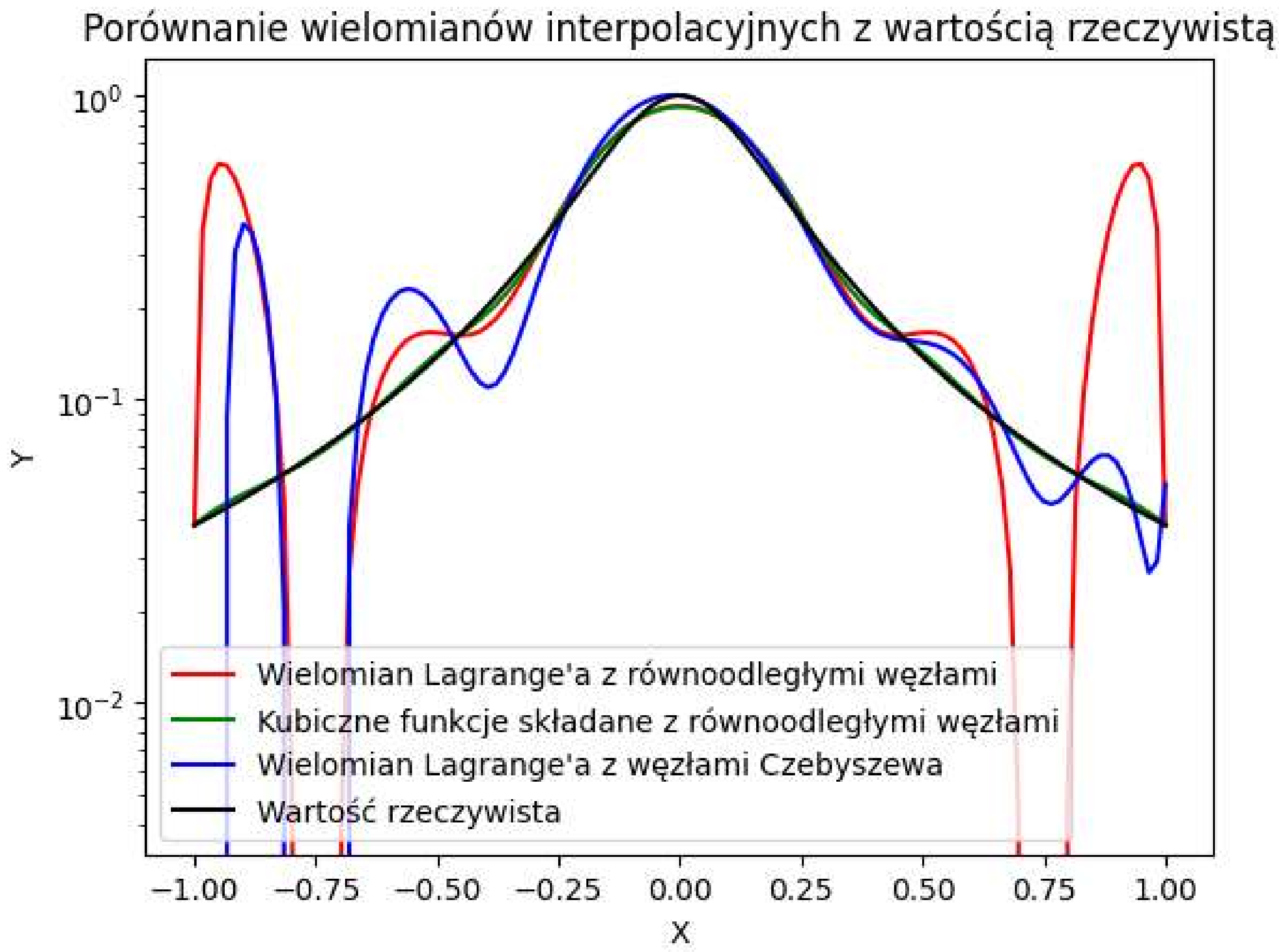
$$w_j(x_i) = \begin{cases} 1 \; if \; i = j \\ 0 \; if \; i \neq j \end{cases} \quad i, j =, \dots, n$$

$$p_{n-1}(x) = y_1 w_1(x) + y_2 w_2(x) + \cdots + \; y_n w_n(x)$$

Aby obliczyć wartości wielomianów dla metody kubicznych funkcji sklejanych, używałem funkcji interpolacyjnych z biblioteki **scipy:**

interpolate.splrep oraz **interpolate.splev**

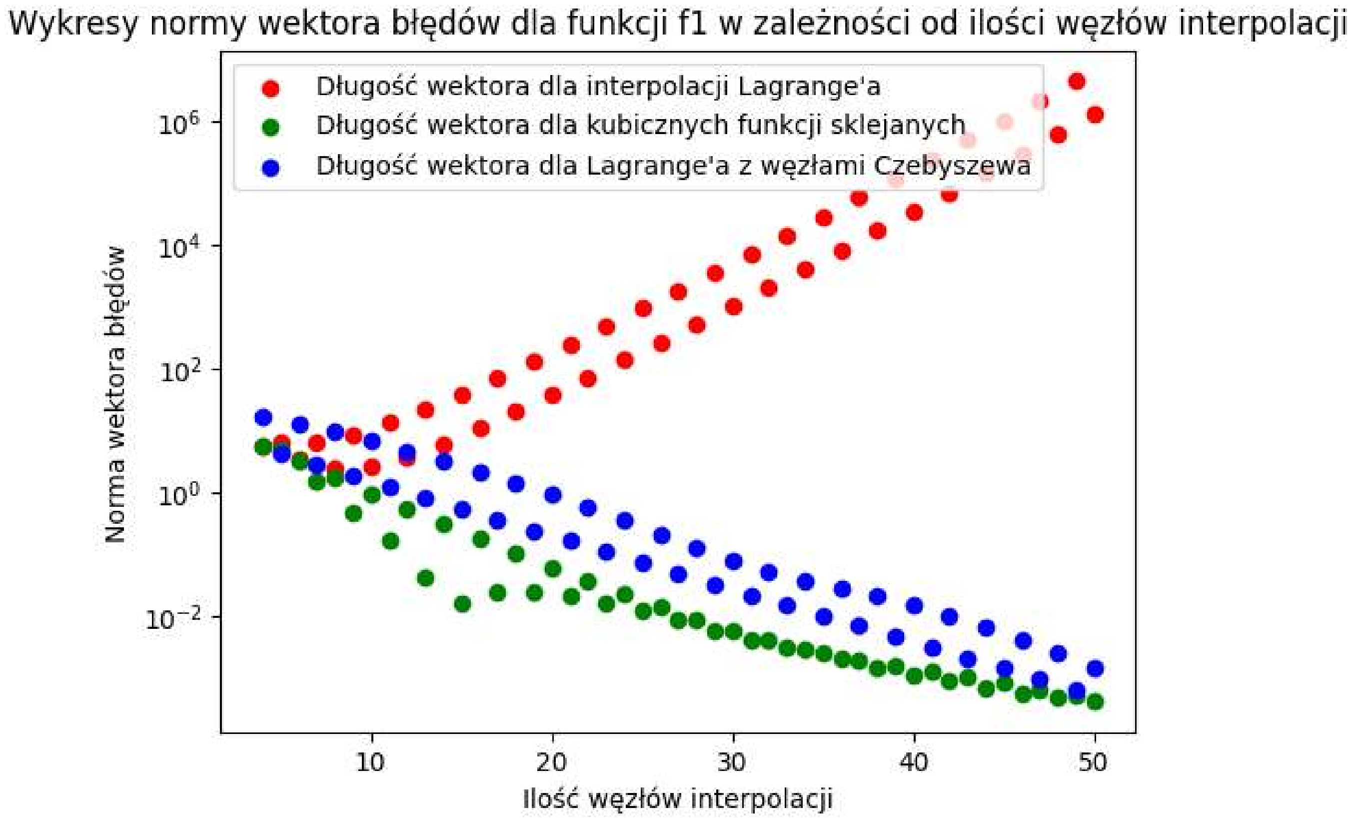




Wielomiany interpolujące poradziły sobie z zadaniem z różnym efektem.

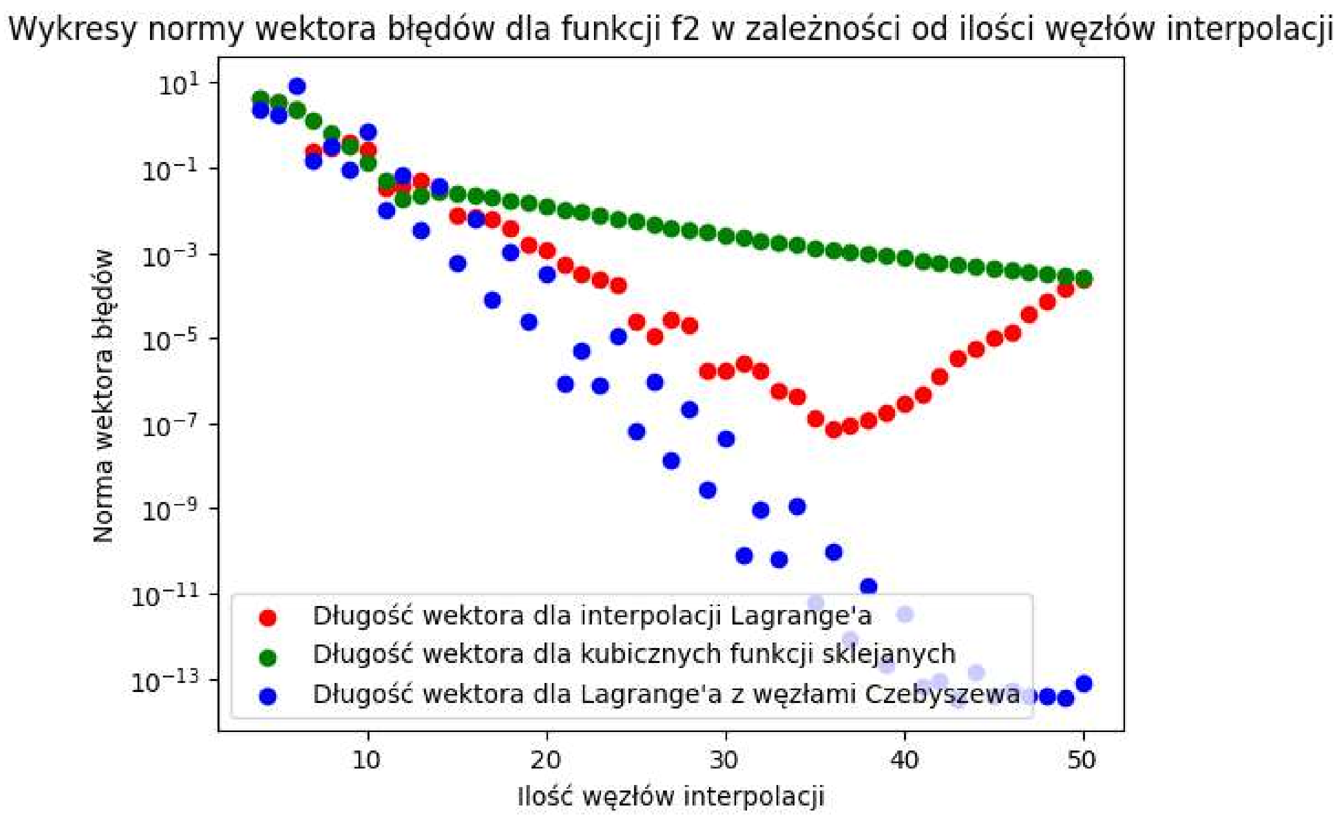
Powyższy wykres porównujący wartości wielomianów na zbiorze wynoszącym dziesięciokrotność liczby węzłów interpolacyjnych pokazuje, że tylko metoda kubicznych funkcji sklejanych oddaje kształt funkcji na prawie całym zbiorze.

Funkcja $f_1(x)$



Wykres wektorów błędów na zbiorze 500 losowych punktów w zależności od liczby węzłów pokazuje, że metoda kubicznych funkcji sklejanych dla funkcji $f_1(x)$ posiada najmniejszy błąd. Możemy więc założyć, że dla tej funkcji ta metoda jest najdokładniejsza. Metoda interpolacji używająca wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami jest najmniej dokładna i w sposób znaczący odbiega od reszty metod.

Funkcja $f_2(x)$



Dla funkcji $f_2(x)$ najdokładniejszą metodą okazała się metoda Lagrange'a używająca węzłów Czebyszewa. Największy błąd posiadała zaś metoda kubicznych funkcji sklejanych.

Wnioski

Różne wyniki dokładności metod interpolacji dla różnych funkcji powodują, że trudno jest mi wybrać metodą najdokładniejszą.

Ponieważ jednak metoda kubicznych funkcji składanych jako jedyna oddała kształt funkcji na prawie całym zbiorze, skłaniam się do uznania ją za najdokładniejszą.

Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
- Materiały z zajęć: Efekt Rungego