Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 1. Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. *first-order system of ODEs*):

(a) równanie Van der Pol'a:

$y'' = y'(1 - y^2) - y.$

(b) równanie Blasiusa:

$y''' = -yy''.$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \tag{1}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}. \tag{2}$$

Zadanie 2. Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

(b) Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(c) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.

(d) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(e) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

Zadanie 3. Ważnym problemem mechaniki klasycznej jest wyznaczanie ruchu dwóch ciał poddanych wzajemnemu przyciąganiu grawitacyjnemu. Załóżmy, że ciało o masie m orbituje wokół drugiego ciała o znacznie większej masie M (np.

Ziemia wokół Słońca). Zgodnie z zasadami dynamiki Newton'a trajektoria ruchu $(x(t), y(t))$ jest opisana przez układ równań drugiego rzędu:

$$x'' = -GMx/r^3, \tag{3}$$

$$y'' = -GMy/r^3, \tag{4}$$

gdzie G jest stałą grawitacji, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ jest odległością orbitującego ciała od środka masy dwóch ciał. Dla potrzeb zadania jednostki dobrane są tak, że $GM = 1$.

Rozwiąż powyższy układ równań stosując:

- jawną metodę Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f'(t_k, y_k)$$

- niejawną metodę Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f'(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- półjawną metodę Eulera

$$v_{n+1} = v_n + h_k g(t_n, x_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + h_k f(t_n, v_{n+1})$$

- metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$
$$k_2 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_1/2)$$
$$k_3 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_2/2)$$
$$k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$$

Jako warunki początkowe przyjmij

$$x(0) = 1 - e, \qquad y(0) = 0,$$

$$x'(0) = 0, \qquad y'(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2},$$

gdzie e jest ekscentrycznością (mimośrodem) orbity eliptycznej o okresie 2π. Wykonaj eksperymenty dla wartości $e = 0$ (orbita kołowa). Wykonaj osobne wykresy x względem t, y względem t, i y względem x.

Sprawdź w jakim stopniu otrzymane numerycznie rozwiązania zachowują energię i moment pędu, które powinny pozostawać stałe zgodnie z zasadami zachowania:

(a) Prawo zachowania energii:

$$\frac{(x')^2 + (y')^2}{2} - \frac{1}{r}, \tag{5}$$

(b) Prawo zachowania momentu pędu:

$$xy' - yx'. \tag{6}$$

Dla każdej z powyższych czterech metod stwórz następujące wykresy:

- Wykres x w funkcji t, y w funkcji t oraz wykresy fazowe x w funkcji y i v_r w funkcji r (łącznie 4 wykresy).
- Wykresy energii oraz momentu pędu w funkcji czasu (2 wykresy).

Wykresy powinny uwzględniać wiele okresów.