Dominik Szot, 20.04.2023

Laboratorium 06

Kwadratury

Zadanie 1

Import potrzebnych bibliotek

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.linalg as scp
import scipy.integrate as integrate
import matplotlib.ticker
```

Funkcja dzięki której będziemy obliczać przybliżona wartość PI

```
f_x = lambda x : 4./(1 + x**2)
```

Funkcja do obliczania kwadratur prostokątów

```
def rectangular_method(nodes, values) -> None:
    accumulated = 0.

    for i in range(1, len(nodes)):
        accumulated += (nodes[i] - nodes[i-1])*values[i]

    return accumulated
```

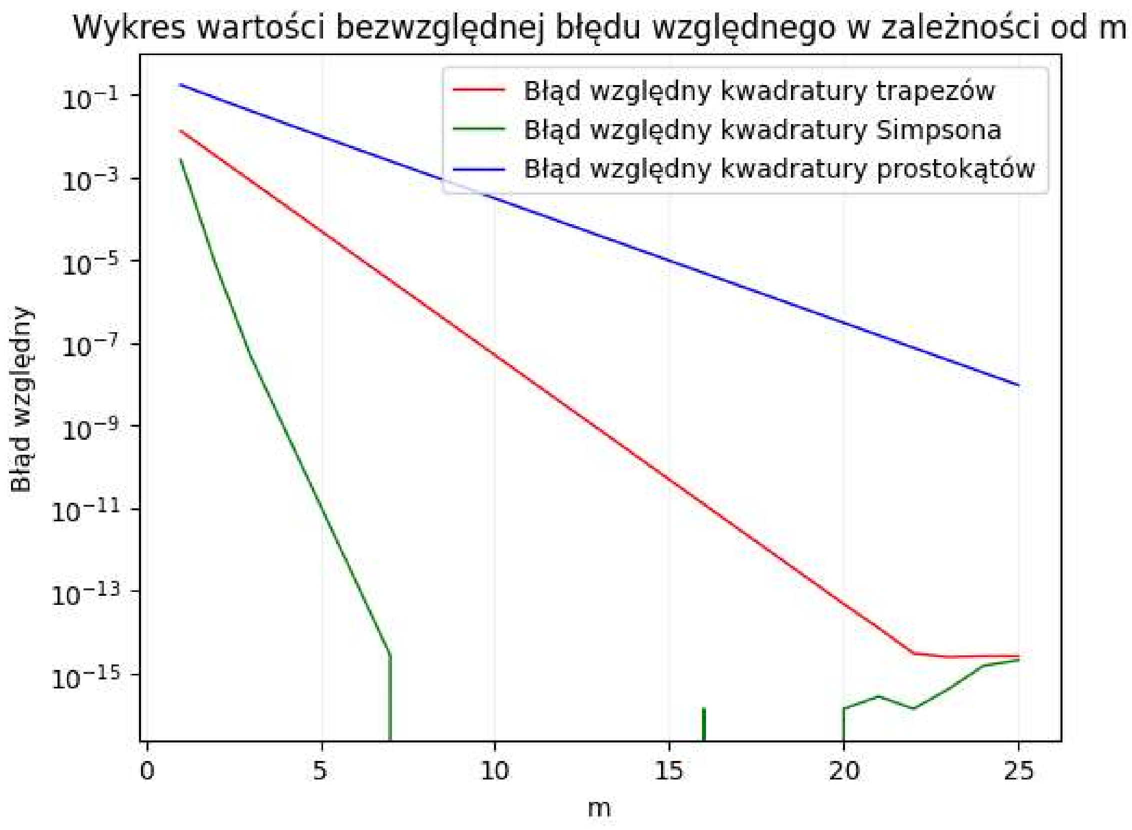
Funkcja obliczająca wartość całki

```
m = 26

a = 0
b = 1

# Tablica wartości błędów względnych
error_trapz = [np.double(0) for _ in range(m-1)]
error_simps = [np.double(0) for _ in range(m-1)]
error_rectangle = [np.double(0) for _ in range(m-1)]

for i in range(1, m):
    no_nodes = 2**i + 1

    # Rozmieszczanie 2**i + 1 równoodległych węzłów
    quadrature_nodes = np.array([np.double(a) + np.double(i) * np.double((b-a))/
```

```
    quadrature_points = [f_x(i) for i in quadrature_nodes]

    # Rozwiazywanie całki
    result_trapz = integrate.trapezoid(quadrature_points, quadrature_nodes, 1)
    result_simps = integrate.simpson(quadrature_points, quadrature_nodes, 1)
    result_rectangle = rectangular_method(quadrature_nodes, quadrature_points);

    error_trapz[i-1]=(np.abs((np.pi - result_trapz)/np.pi))
    error_simps[i-1]=(np.abs((np.pi - result_simps)/np.pi))
    error_rectangle[i-1]=(np.abs((np.pi - result_rectangle)/np.pi))
```

In [ ]:

```
x_no_points = [i for i in range(1, m)]

plt.semilogy(x_no_points, error_trapz, linewidth=1,  color="red", label="Błąd wz
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())

plt.semilogy(x_no_points, error_simps, linewidth=1,  color="green", label="Błąd 
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())

plt.semilogy(x_no_points, error_rectangle, linewidth=1,  color="blue", label="Bł
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())
plt.grid(axis='x', color='0.95')


plt.title("Wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od m")
plt.xlabel("m")
plt.ylabel("Błąd względny")
plt.legend()
plt.show()
```



In [ ]:

```
h_min_t = 0
h_min_r = 0
h_min_s = 0
```

```
for i in range(1, len(error_trapz)):
    if error_trapz[i] < error_trapz[i-1] and error_trapz[i-1] > 0:
        h_min_t = error_trapz[i-1]
    else:
        break

for i in range(1, len(error_trapz)):
    if error_trapz[i] < error_rectangle[i-1] and error_rectangle[i-1] > 0:
        h_min_r = error_rectangle[i-1]
    else:
        break

for i in range(1, len(error_trapz)):
    if error_simps[i] < error_simps[i-1] and error_simps[i-1] > 0:
        h_min_s = error_simps[i-1]
    else:
        break

d = pd.Series([h_min_t, h_min_r, h_min_s], index=["K. Trapezów","K. Prostokątów"
print(d)
```

```
K. Trapezów       3.109876e-15
K. Prostokątów    1.897257e-08
K. Simpsona       2.827160e-15
dtype: float64
```

Przy obliczaniu całki korzystając z kwadratur prostokątów i Simpsona
jesteśmy w stanie wyznaczyć wartość h_{min} wynoszącą odpowiednio
K. Trapezów 3.109876e-15
K. Prostokątów 1.897257e-08
K. Simpsona 2.827160e-15

Należy wspomnieć że w programie korzystam z typu np.double posiadającego podwójna precyzję.

In [ ]:
```
def machineEpsilon(func=float):
    machine_epsilon = func(1)
    while func(1)+func(machine_epsilon) != func(1):
        machine_epsilon_last = machine_epsilon
        machine_epsilon = func(machine_epsilon) / func(2)
    return machine_epsilon_last

print("Eps. maszynowy dla np.double: ", machineEpsilon(np.double))
```

```
Eps. maszynowy dla np.double:  2.220446049250313e-16
```

Wartości Epsilona Maszynowego wyliczone używając funkcji z laboratorium 01
są zbliżone do wartości h_{min} dla kwadratur Simpsona i Trapezów.

Oznacza to że dla tych kwadratur zbliżyliśmy się do maksymalnej precycji obliczeń całki dla typu double z podwójną precyzją (float64).

Dla kwadratur prostokątów błąd metody przeważa nad
błędem numerycznym dla 1 <= m <= 25 , więc nie jesteśmy w stanie porównać
wartości h_{min} oraz Epilona Maszynowego.

Zadanie 2

In [ ]:
```
f_x_2 = lambda x : np.double(4)/(1 + x**2)
```

Aby obliczyć wartość całki metodą Gaussa-Legendre'a skorzystałem z funkcji leggauss z biblioteki numpy.

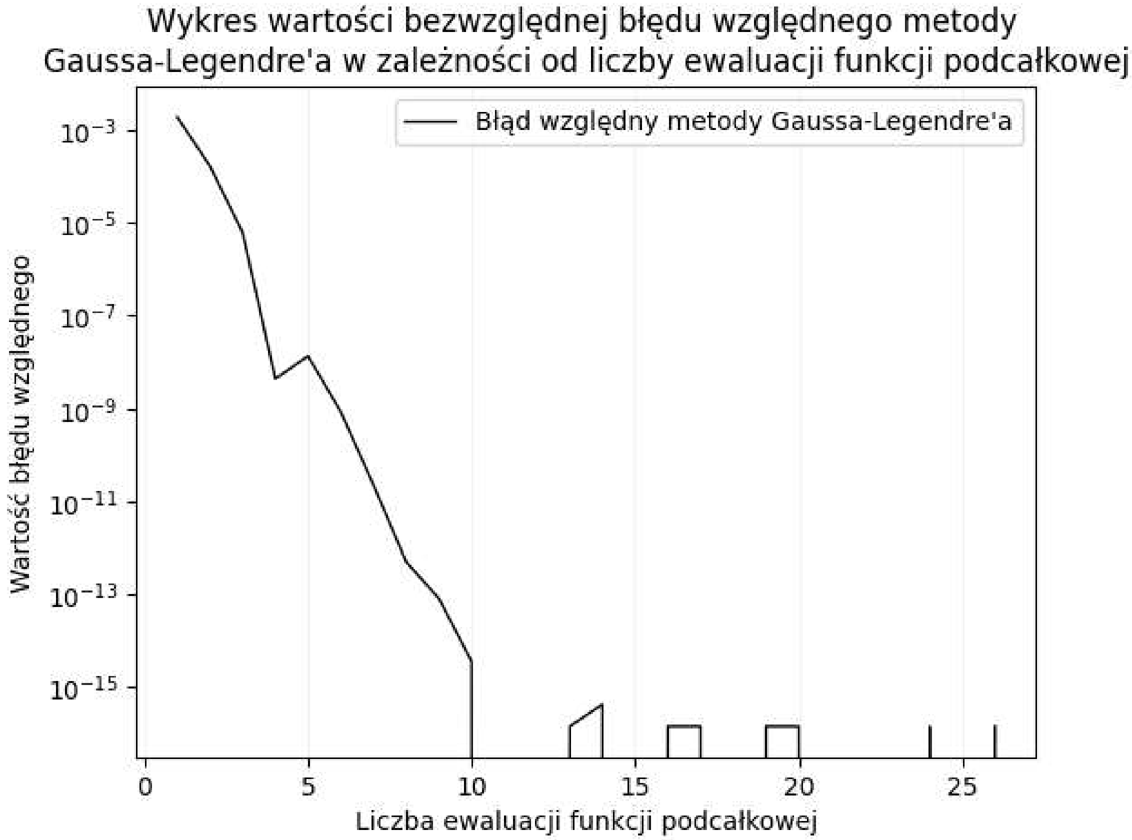
In [ ]:
```
def gauss_l(f_x_2, a, b, n):
    l, c = np.polynomial.legendre.leggauss(n)

    l = (b-a)/2 * l + (b+a)/2
    c = (b-a)/2 * c

    return np.double(np.sum(c * f_x_2(l), dtype=np.float64))
```

Obliczam wartości całki oraz wartość bezwzględna błedu względnego.

In [ ]:
```
f_2_values = np.array([gauss_l(f_x_2, np.double(0), np.double(1), i) for i in ra
gauss_l_errors = [np.abs((np.pi - f_2_values[i])/np.pi) for i in range(1, m+1)]
```

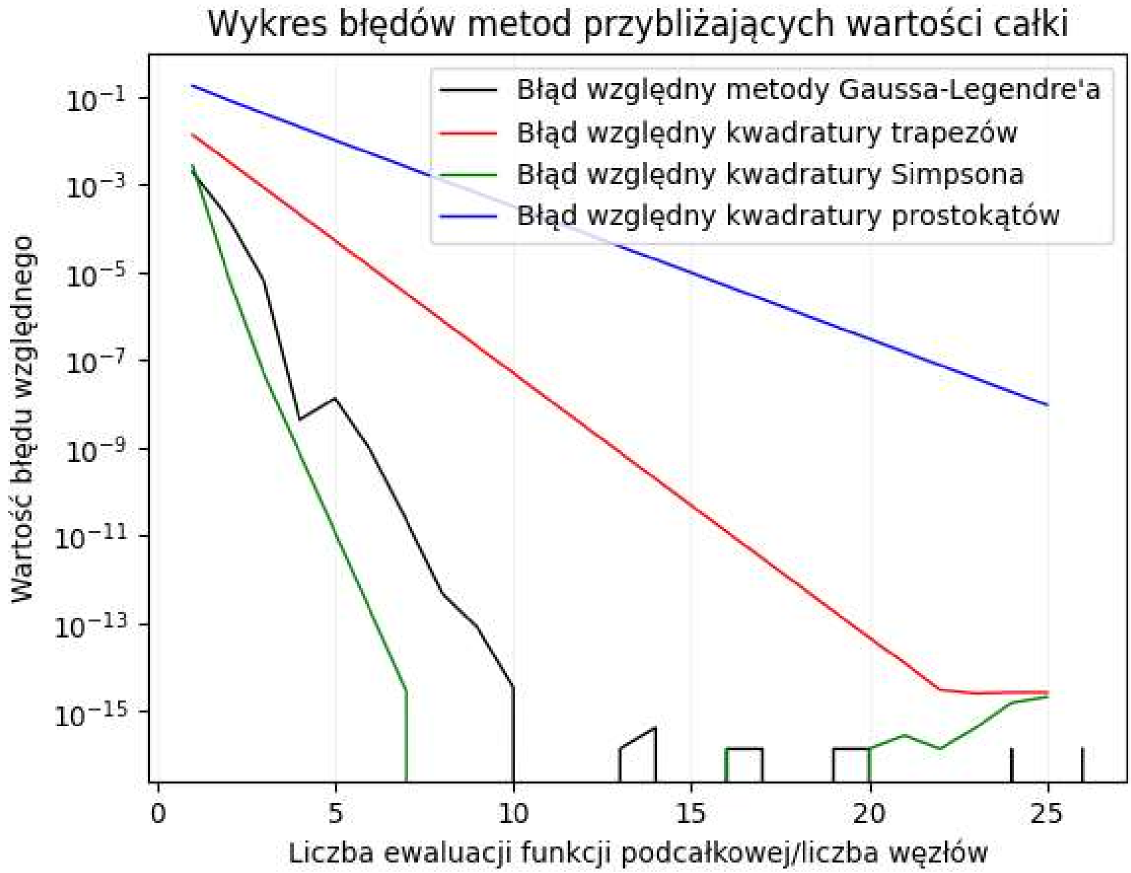
Wartości błędu względnego maleją prawie zawsze dla 0 < n < 10. Dla n > 10 błąd numeryczny zaczyna dominować nad błędem metody.

In [ ]:
```
plt.semilogy([i for i in range(1, m+1)], gauss_l_errors, linewidth=1,  color="bl
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())
plt.grid(axis='x', color='0.95')
plt.title("Wykres wartości bezwzględnej błędu względnego metody \nGaussa-Legendr
plt.xlabel("Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej")
plt.ylabel("Wartość błędu względnego")

plt.legend()
plt.show()
```



In [ ]:

```
plt.semilogy([i for i in range(1, m+1)], gauss_l_errors, linewidth=1,  color="bl
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())
plt.grid(axis='x', color='0.95')

plt.title("Wykres błędów metod przybliżających wartości całki")
plt.xlabel("Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej/liczba węzłów")
plt.ylabel("Wartość błędu względnego")

plt.semilogy(x_no_points, error_trapz, linewidth=1,  color="red", label="Błąd wz
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())

plt.semilogy(x_no_points, error_simps, linewidth=1,  color="green", label="Błąd 
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())

plt.semilogy(x_no_points, error_rectangle, linewidth=1,  color="blue", label="Bł
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotation())

plt.legend()
plt.show()
```



Porównanie metod przybliżających wartość całki.

Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
- Marcin Kuta: Materiały z zajęć - Quadratures
- https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials