Dominik Szot, 27.04.2023

Laboratorium 07

Kwadratury adaptacyjne

Zadanie 1 - Obliczanie wartości całki

Imoportowanie bibliotek.

```
In [ ]: import pandas as pd
        import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        import scipy.linalg as scp
        import scipy.integrate as integrate
        import matplotlib.ticker
```

Równania do numerycznego obliczenia oraz rozwiązania równań.

```
In [ ]: # Array of functions
        functions = [int for _ in range(3)]

        f3_h  = lambda x,a,b : 1/((x-a)**2 + b)

        functions[0] = lambda x: np.double(4./(x**2 + 1))
        functions[1] = lambda x: 0 if x == 0 else np.double(x ** 0.5 * np.log(x))
        functions[2] = lambda x: f3_h(x, 0.3, 0.001) + f3_h(x, 0.9, 0.004) - 6
```

```
In [ ]: # Solutions of equasions
        solutions = [None for _ in range(3)]

        f3_helper_ans = lambda x0, a : 1/np.power(a, 0.5) * (np.arctan((1-x0)
                        /np.power(a, 0.5))+np.arctan((x0)/np.power(a, 0.5)) )

        solutions[0] = np.pi
        solutions[1] = -4/9
        solutions[2] = f3_helper_ans(0.3, 0.001) + f3_helper_ans(0.9, 0.004) - 6
```

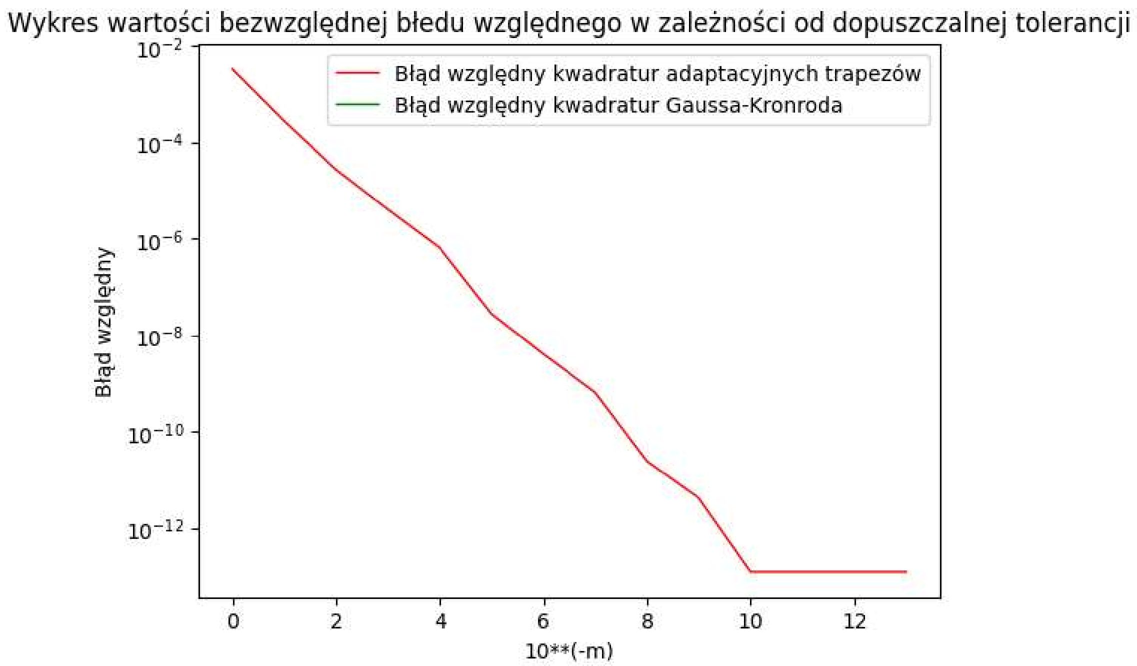
- W celu obliczenia wartości całki za pomocą kwadratur adaptacyjnych trapezów używam funkcji `scipy.integrate.quad_vec()`
- Kwadratury adaptacyjne Gaussa-Kronroda nie działają

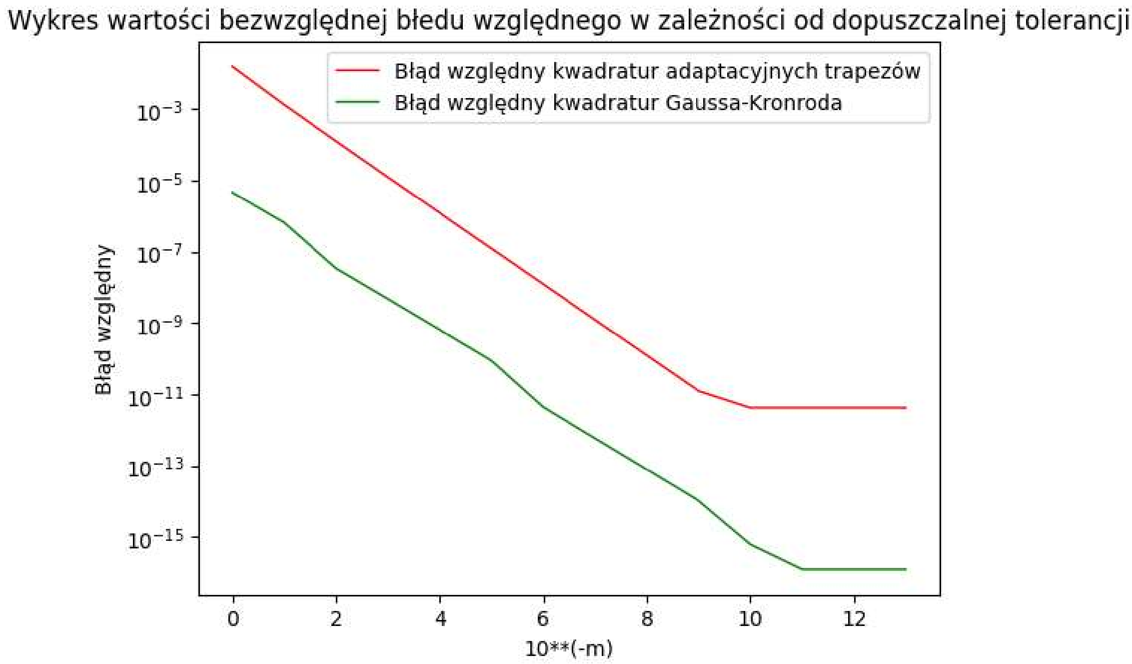
```
In [ ]: def draw_plot(x_axis, y_axis, color, label, x_label):
            plt.gca().yaxis.set_major_formatter(matplotlib.ticker.LogFormatterSciNotatic
            plt.semilogy(x_axis, y_axis, linewidth=1, color=color, label=label)
            plt.legend()
            plt.xlabel(x_label)
            plt.ylabel("Błąd względny")
```

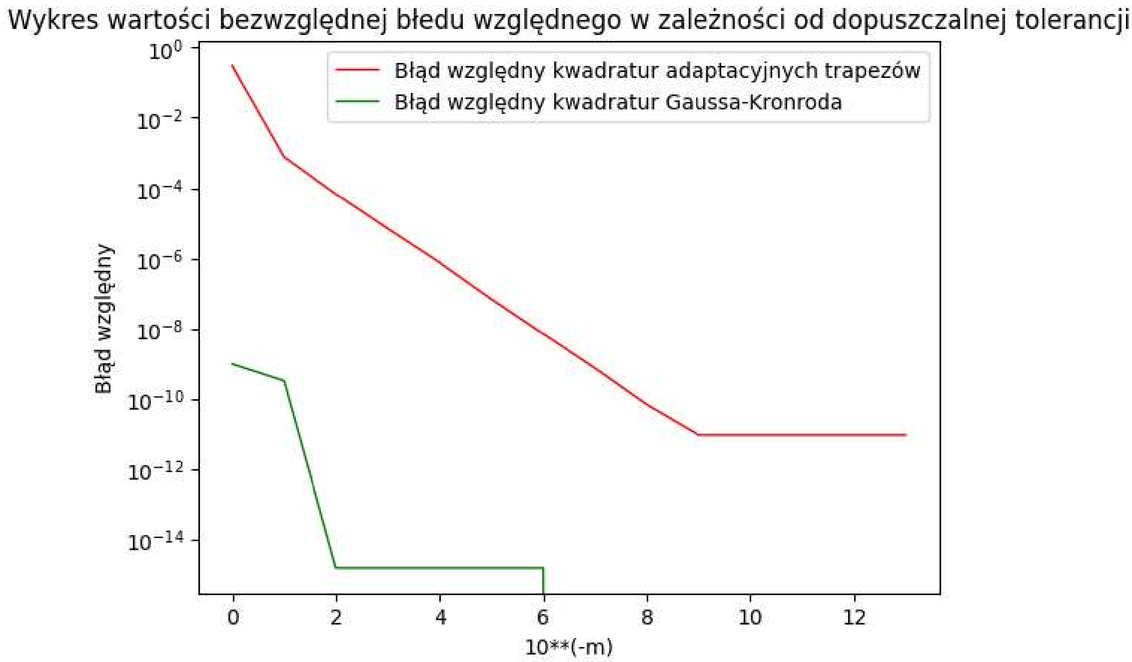
Obliczanie kwadratur adaptacyjnych

```
In [ ]: def adaptive_quadratures(f_x, f_actual):
            max_no_evaluations = 14
            a = 0
            b = 1

            error_trapz = [np.double(0) for _ in range(max_no_evaluations)]
            error_gauss = [np.double(0) for _ in range(max_no_evaluations)]

            for i in range(max_no_evaluations + 1):
                error = 10**(-i)
                y1 = integrate.quad_vec(f_x, a, b, limit=10**7, epsrel=error,
                                        quadrature='trapezoid')[0]

                y2 = integrate.quad_vec(f_x, a, b, limit=10**7, epsrel=error,
                                        quadrature='gk21')[0]

                error_trapz[i-1] = np.abs((f_actual - y1)/f_actual)
                error_gauss[i-1] = np.abs((f_actual - y2)/f_actual)

            draw_plot([i for i in range(max_no_evaluations)], error_trapz,
                      "red", "Błąd względny kwadratur adaptacyjnych trapezów", "10**(-m)

            draw_plot([i for i in range(max_no_evaluations)], error_gauss,
                      "green", "Błąd względny kwadratur Gaussa-Kronroda", "10**(-m)" )
```

```
In [ ]: adaptive_quadratures(functions[0], solutions[0])
        plt.title("Wykres wartości bezwzględnej błedu względnego w zależności od dopuszc
        plt.show()

        adaptive_quadratures(functions[1], solutions[1])
        plt.title("Wykres wartości bezwzględnej błedu względnego w zależności od dopuszc
        plt.show()

        adaptive_quadratures(functions[2], solutions[2])
        plt.title("Wykres wartości bezwzględnej błedu względnego w zależności od dopuszc
        plt.show()
```







In [ ]:
```
def rectangular_method(nodes, f_x) -> None:
    accumulated = 0.

    for i in range(1, len(nodes)):
        accumulated += (nodes[i] - nodes[i-1])*f_x(nodes[i-1] + (nodes[i] - node

    return accumulated
```

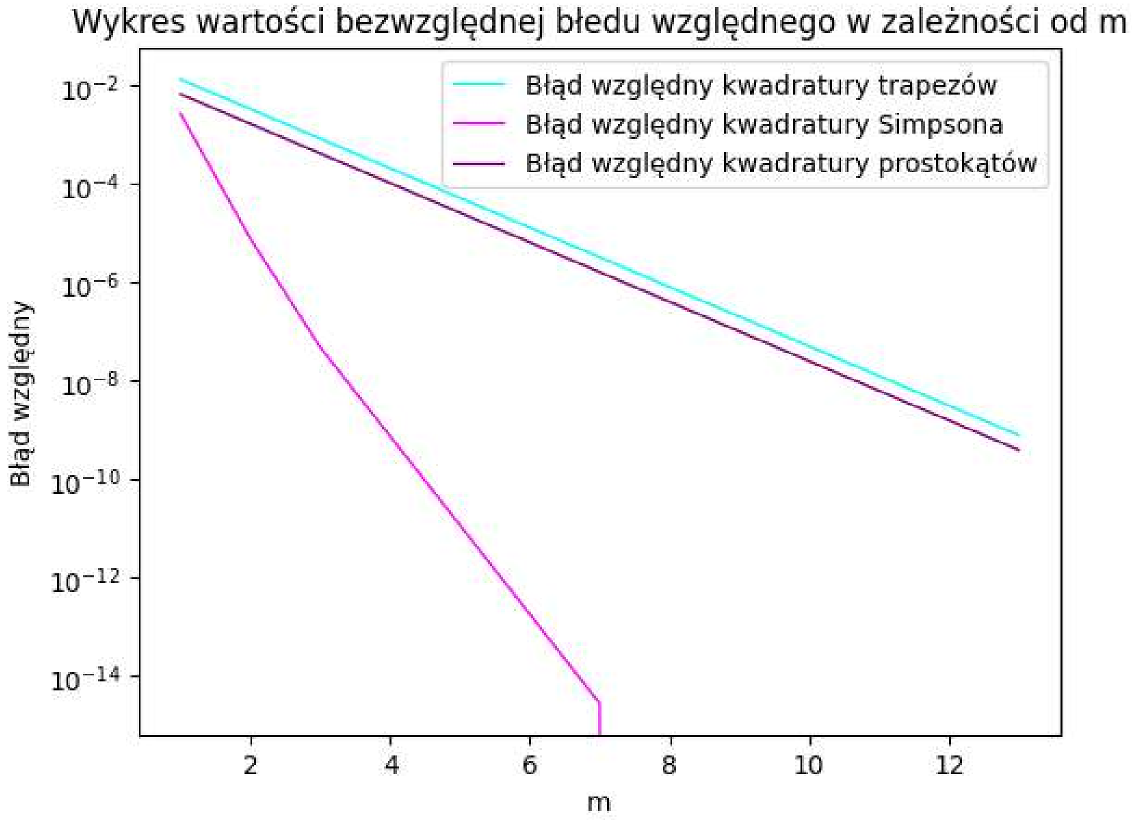
Powtórzone obliczenia z laboratorium 6.

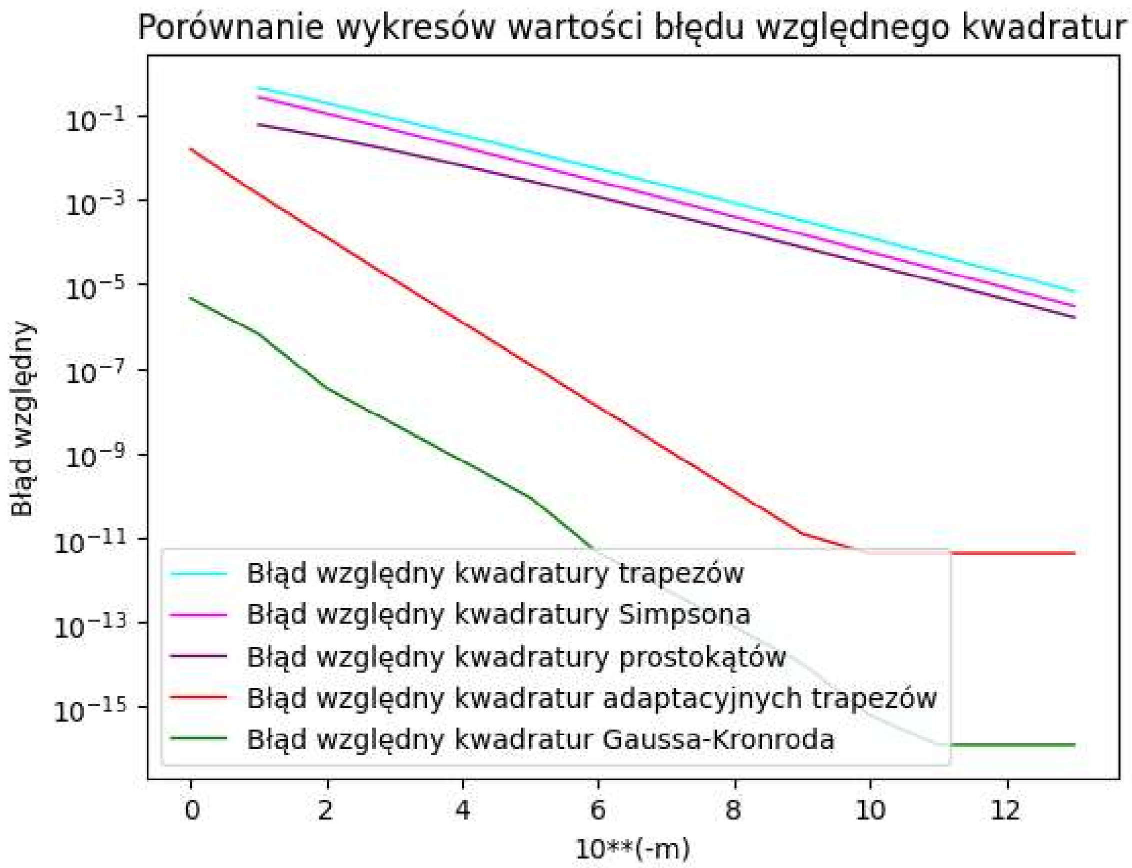
In [ ]:
```
def quadrature_methods(f_x, f_actual):
    max_no_evaluations = 14
    a = 0
    b = 1

    error_trapz = [np.double(0) for i in range(max_no_evaluations-1)]
    error_simps = [np.double(0) for i in range(max_no_evaluations-1)]
    error_rectangle = [np.double(0) for i in range(max_no_evaluations-1)]
```

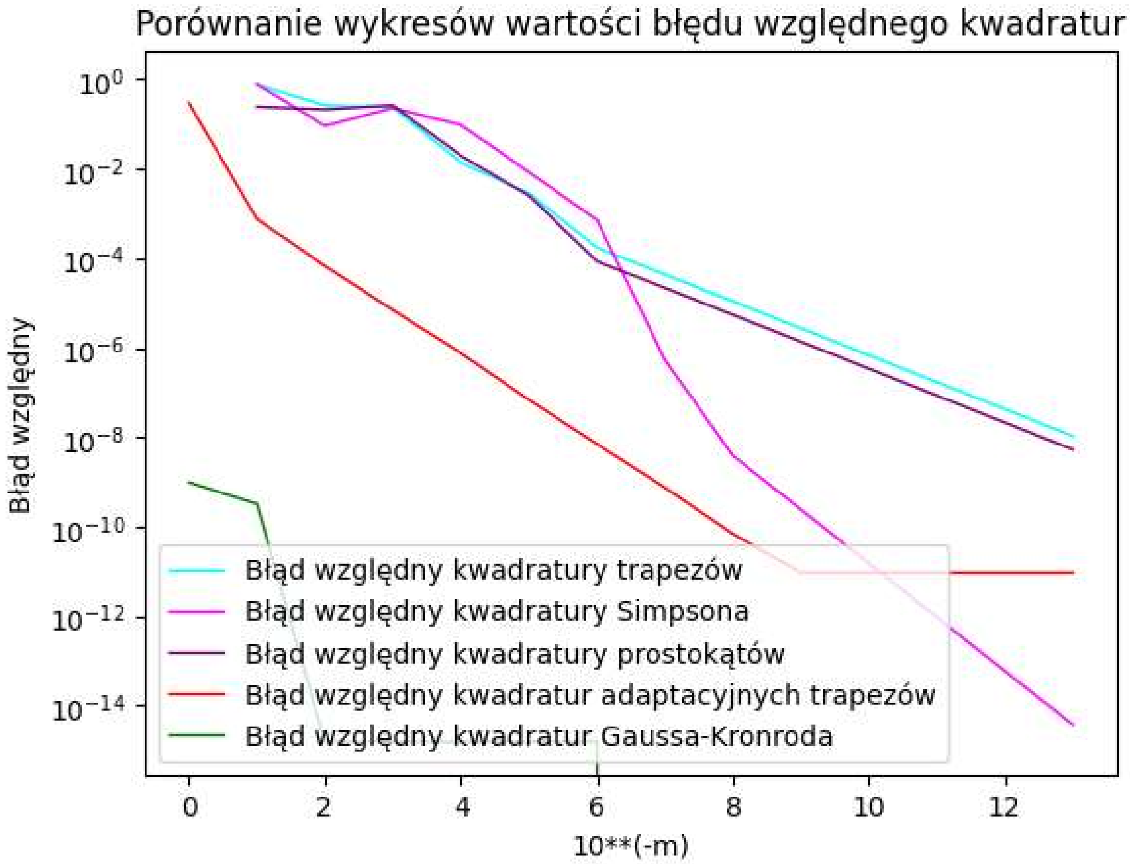
```
    for i in range(1, max_no_evaluations):
        no_nodes = 2**i + 1
        quadrature_nodes = np.array([np.double(a) + np.double(i) *
                        np.double((b-a))/(no_nodes-1) for i in range(no_nodes)])

        quadrature_points = [f_x(i) for i in quadrature_nodes]

        result_trapz = integrate.trapezoid(quadrature_points, quadrature_nodes,
        result_simps = integrate.simpson(quadrature_points, quadrature_nodes, 1)
        result_rectangle = rectangular_method(quadrature_nodes, f_x);

        error_trapz[i-1]=np.abs(((f_actual - result_trapz)/f_actual))
        error_simps[i-1]=np.abs(((f_actual - result_simps)/f_actual))
        error_rectangle[i-1]=np.abs((( f_actual - result_rectangle)/f_actual))

    draw_plot([i for i in range(1, max_no_evaluations)], error_trapz,
              "cyan", "Błąd względny kwadratury trapezów", "m")

    draw_plot([i for i in range(1, max_no_evaluations)], error_simps,
              "magenta", "Błąd względny kwadratury Simpsona", "m")

    draw_plot([i for i in range(1, max_no_evaluations)], error_rectangle,
              "purple", "Błąd względny kwadratury prostokątów", "m")
```

In [ ]:

```
quadrature_methods(functions[0], solutions[0])
plt.title("Wykres wartości bezwzględnej błedu względnego w zależności od m")
plt.show()

quadrature_methods(functions[1], solutions[1])
adaptive_quadratures(functions[1], solutions[1])
plt.title("Porównanie wykresów wartości błędu względnego kwadratur")
plt.show()

quadrature_methods(functions[2], solutions[2])
adaptive_quadratures(functions[2], solutions[2])
plt.title("Porównanie wykresów wartości błędu względnego kwadratur")
plt.show()
```


Wykres wartości bezwzględnej błedu względnego w zależności od m
Błąd względny kwadratury trapezów
Błąd względny kwadratury Simpsona
Błąd względny kwadratury prostokątów
Błąd względny
m


Porównanie wykresów wartości błędu względnego kwadratur
Błąd względny kwadratury trapezów
Błąd względny kwadratury Simpsona
Błąd względny kwadratury prostokątów
Błąd względny kwadratur adaptacyjnych trapezów
Błąd względny kwadratur Gaussa-Kronroda
Błąd względny
10**(-m)



Kwadratury adaptacyjne dają zdecydowanie dokładniejsze wyniki niż kwadratury zwyczajne.
Jest to spowodowane automatycznym dobieraniem liczby węzłów do obliczania funkcji.
W porównaniu kwadratur adaptacyjnych wartość błędu względnego prawie zawsze spadała szybciej na korzyść kwadratur `Gaussa-Kronroda`.

Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: Wykłady z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
- Marcin Kuta: Materiały z zajęć - Quadratures