Computerphysik WS 2013/2014

Prof. Dr. Roland Netz, FU Berlin

Übungsblatt 8: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Suliman Adam, Klaus Rinne

8. Dezember 2013

Allgemeine Hinweise

Abgabetermin für die Lösungen ist

- **Sonntag, 15.12., 24:00 Uhr.**

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$y'(t) = F(t, y) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.

Euler Verfahren

Die numerische Lösung kann über folgenden Ansatz erfolgen

$$y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = F(t_n, y(t_n)) \tag{2}$$

Ein Lösungsverfahren ist das Euler-Verfahren mit der Rekursionsvorschirft

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n) \tag{3}$$

mit $y_n = y(t_n)$, $y_{n+1} = y(t_{n+1})$, und n=0,...N-1.

Mittelpunktsregel

Eine Verbesserung des Euler-Verfahrens ist das Mittelpunktverfahren mit der Rekursionsvorschirft

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}F(t_n, y_n)). \tag{4}$$

Runge-Kutta Verfahren

Im klassischen vierstufigen Runge-Kutta Verfahren ist die Rekursionsform

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_2 + K_4) \tag{5}$$

Darin sind

$$K_1 = F(t_n, y_n) \tag{6}$$

$$K_2 = F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \tag{7}$$

$$K_3 = F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \tag{8}$$

$$K_4 = F(t_n + h, y_n + hK_3). \tag{9}$$

Aufgabe 8.1: Differentialgleichung erster Ordnung (5 Punkte)

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$y'(t) = 3y - 4\exp(-t) \tag{10}$$

mit $y(0)$=1.

Wie lautet die analytische Lösung der Gleichung? Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der Euler-Methode, der Mittelpunktsregel und der Runge-Kutta-Methode.

a) Integrieren Sie bei Gleichung im Intervall t=[0, 2] mit den Schrittweiten h=[0.1, 0.01, 0.001] und plotten Sie in einen einzigen Graphen die Lösungen y, welche Sie mit den drei Verfahren erhalten haben, gemeinsam mit der exakten Lösung.

b) Berechnen Sie für alle drei Verfahren die Abweichungen von der exakten Lösung an der Stelle $t = 1$ für die drei Schrittweiten. Zeigen Sie die Abweichungen als Funktion von h in einem einzigen log-log Plot. Wie lauten die Fehlerordnungen der Verfahren?

Aufgabe 8.2: Tierpopulation (5 Punkte)

Die zeitliche Entwicklung einer Tierpopulation $y(t)$ sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$y'(t) = \alpha y^2(R - y) - \beta y, \tag{11}$$

wobei $\alpha > 0$ die Reproduktionsrate, $\beta = 0,01$ die Sterberate und $R = 1$ eine Limitierung durch Ressourcen darstellt. Die Anfangsbedingung sei $y(0)$=1.

a) Berechnen Sie mit einem der drei Verfahren aus 8.1 die Lösungen der Differentialgleichung (11) für verschiedene, sinnvolle Werte von α und plotten Sie die resultierenden $y(t)$ zusammen in einem Graphen. Wählen Sie das Zeitintervall lang genug, um das stationäre Verhalten für lange Zeiten zeigen zu können.

b) Berechnen Sie analytisch die Reproduktionsrate α_{min}, die für ein Überleben der Population nötig ist.

- Tipp: Für große Zeiten gilt $y' = 0$ unabhängig von den anderen Parametern.

c) Ergänzen Sie die Lösungen $y(t)$ für α_{min}, $\alpha_{\text{min}} - 0,01$ und $\alpha_{\text{min}} + 0,01$ zu Ihrem Plot aus 8.2 a).

8.3 Das Doppelpendel (10 Punkte)

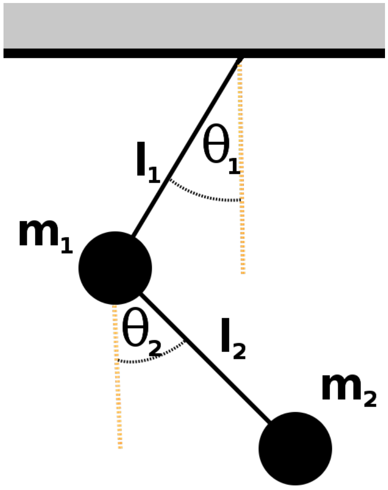

Abbildung 1: An ein Pendel der Länge l_1 und Pendelmasse m_1 wird ein weiteres Pendel (Länge l_2 und Pendelmasse m_2) befestigt. Das System wird durch die Winkel θ_1 und θ_2 sowie die Ableitungen $\dot{\theta}_1$ und $\dot{\theta}_2$ beschrieben.

Das Doppelpendel (siehe Abb. 1) ist ein typisches Beispiel für ein einfaches chaotisches System. Die aktuellen Positionen (x_i,y_i) der Massenelemente m_1 und m_2 können durch die Winkel θ_1 und θ_2 beschrieben werden.

Die potentielle Energie des Systems beträgt:

$$V = -g(m_1 + m_2)l_1 \cos\theta_1 - g m_2 l_2 \cos\theta_2 \tag{12}$$

und die kinetische Energie ist gegeben durch:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{13}$$

Mithilfe der Lagrange-Gleichung lassen sich die folgenden Bewegungsgleichungen herleiten:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 = 0 \tag{14a}$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g m_2 \sin\theta_2 = 0 \tag{14b}$$

Für alle Aufgaben gilt: $l_1 = l_2 = 1\,\mathrm{m}$, $m_1 = m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

8.3.1 (2 Punkte)

Das Ziel ist es nun ein Gleichungssystem ordinärer Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \omega_1 && (15)\\
\dot{\theta}_2 &= \omega_2 && (16)\\
\dot{\omega}_1 &= f_3(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) && (17)\\
\dot{\omega}_2 &= f_4(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) && (18)
\end{aligned}$$

herzuleiten. Nutzen Sie hierzu $\ddot{\theta}_i = \dot{\omega}_i$ und stellen Sie die Gleichungen (14a) und (14b) nach $\dot{\omega}_1$ bzw. $\dot{\omega}_2$ um.

8.3.2 (2 Punkte)

Erweitern Sie Ihren Code für das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren, sodass dieser zum Lösen des Gleichungssystems (15)-(18) genutzt werden kann.

8.3.3 (1 Punkte)

Wie verhält sich das Doppelpendel für kleine Auslenkungen θ_1 und θ_2? Begründen Sie mit eigenen Worten.

Das Pendel wird bei $\theta_1 = \theta_2 = 0.5°$ losgelassen. Plotten Sie x_2 gegen y_2 für 1000 Schritte bei einer Schrittweite von $h = 0.01$.

8.3.4 (2 Punkte)

Eine geringere Schrittweite erhöht die Genauigkeit, aber auch die Rechenzeit. Dies fällt besonders dann auf, wenn das Pendel genug Energie hat, um sich zu überschlagen, und anfängt sich chaotisch zu verhalten. Plotten Sie x_2 gegen y_2 für:

a) 500 Schritte,h=0.2

b) 1000 Schritte, h=0.1

c) 10000 Schritte, h=0.01

Das Pendel wird für jeden Fall je einmal bei $\theta_1 = 0°, \theta_2 = 60°$ und einmal bei $\theta_1 = 160°, \theta_2 = 60°$ losgelassen.

8.3.5 (1 Punkt)

Erstellen Sie für jede der beiden Massen einen Phasenraumplot für 5000 Schritte und $h = 0.01$. Plotten Sie hierzu ω_1 gegen y_1 und ω_2 gegen y_2.

8.3.6 (2 Punkte)

Plotten Sie ein 2D-Histogramm der Häufigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten (ω_1,ω_2) für 1.000.000 Schritte und $h = 0.01$. (Ausgangsposition: $\theta_1 = 160°$, $\theta_2 = 60°$).

Zum Plotten können Sie verwenden:

```
H, xedges, yedges = np.histogram2d(position[0],position[1],bins=(256,256))
plt.imshow(H, extent=[yedges[0], yedges[-1], xedges[-1], xedges[0]])
```