LaTeX- Grundlagen

von

Dominik Wille

22 Oktober 2013

Freie Universität Berlin
Zentraleinrichtung für Datenverarbeitung
Betriebsysteme und Programmieren

Dozent:
Dr. Herbert Voß

1 ...

1.1 ...

1.2 ...

1.3 Rundungsfehler

Rechenoperationen mit reelen zahlen im Computer $\rightarrow$ Rundungsfehler.

1.3.1 Gleitkommaaritmetik

Im Vergleich zum Festpunktformat: geringerer Speicherplatzbedarf.

n-stellige Gleitkommazahl, Basis B:

$$x = \pm \left(0, z, z_2, ..., z_n\right)_B \cdot B^E = \pm \sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot Z_i! = 0 \tag{1}$$

(Normalisierte Gleitkommadarstellung) Exponent: $Ee\mathbb{Z} : m <= E <= M$
Bsp: $+1234,567 = +(0,1234567)_{10} \cdot 10^4$
$(B = 10, n = 7)$ Die Werte n, B, m, M maschienenabhängig (Hardware und Compiler) Übliche Basen:

- $B = 2$ (Dualzahlen, im Computer)
- $B = 8$ (Oktalzahlen)
- $B = 10$ (Dezimal)
- $B = 16$ (Hexdezimal)

Bsp: binäre Darstellung:

$$(5,0625)_{10} = 0,50625 \cdot 10^1 \tag{2}$$
$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \tag{3}$$
$$= (101,0001)_2 = (0,1010001)_2 \cdot 2^3 \tag{4}$$

manche Zahlen lassen sich nur schwer als Dualzahlen darstellen:

- $(3)_{10} = (11)_2$ geht
- $(0,3)_{10} = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + ... = (0,010011001...)_2$ geht nicht

Genauigkeit der Darstellung

23 Stellen $11111111111111111111111 = 2^{23} - 1 = 8.388.608$
$\Rightarrow$ 6 Ziffren können unterschieden werden.

52 Stellen $2^{52} = 4.503.599.627.370.496$
$\Rightarrow$ 15 Stellen können unterschienden werden. Die größte darstellbare Zahl entspricht der größten Maschienenzahl.

$$x_{max} = (0, [B-1][B-1]...[B-1])_B \cdot B^M = (1 - B^{-n}) \cdot B^M \tag{5}$$

kleinste darstellbare Zahl

$$x_{min} = (0, 1000000)_B \cdot B^m = (1 - B^{-n}) \cdot B^{m-1} \tag{6}$$

$\Rightarrow$ *Die menge der Maschienenzahlen ist endlich*

Bsp:
$x_{max} + x_{max} = \infty$
$x_{min} \cdot B^{-1} = 0$

1.3.2 Rundungsfehler

Beim runden einer Zahl x wird eine Näherung $rd(x)$ unter den Maschienenzahlen geliefert, so dass der absolute Fehler $|x - rd(x)|$ minimal ist, der unvermeidbare Fahler ist der Rundungsfehler. Eine n-stellige Dezimalzahl im Gleitkommaformat

$$x = \pm(0, z_1, ..., z_n)_{10} = rd(x) \tag{7}$$

hat einen maximalen absoluten Fehler :

$$|x - rd(x)| <= 0,000..005 \cdot 10^E \tag{8}$$
$$= 0,5 \cdot E^{E-n} \tag{9}$$

, für allgemeine Basis B:

$$|x - rd(x)| <= \frac{B \cdot 1}{2 \cdot B} B^{E-n} = \frac{1}{2} B^{E-n} \tag{10}$$

Rundungsfehler werden durch die rechnung getragen!

n-stellige Gleitkommaaritmetik:
jede einzelne Rechenoperation $(+, -, \times, \div)$wird auf $n + 1$ Stellen genau berechnet und dann auf n stellen gerundet. Jedes Zwischenergebnis, nicht Endergebnis!

Bsp:
rechne $2590 + 4 + 4$ in 3 stelliger dez G.P.A.

links
1. $2590 + 4 \to 2590$
2. $2590 + 4 \to 2590$

rechts
1. $4 + 4 \to 10$
2. $2590 + 10 \to 2600$

$\Rightarrow$ Rechenwege unterscheiden sich!

Regel: *beim Addieren Summanden in der Reihenfolge aufsteigender Beträge addieren.*

Maß für der Rechenzeit eines Computers: “flops” floating point operations per second
(typisch Multiplikation oder Division)
(top500.org) 1 Tiake-2 3 Mio Cores, 54.000 T Flops, 17 MW

relative Fehler wichtiger aks absoluter Fehler:
Näherung $\tilde{x}$ zu exaktem wert x, rel. fehler $E = \left| \frac{x-x}{x} \approx \frac{x-x}{\tilde{x}}\right.$ für duale rechniungen am Computer B=2 $\to E_{max} = 2^{-n}$
E_{max} wird auch maschienenzahlgenauigkeit genannt, und gibt die kleinste potentielle Zahle an, für die gilt $|E_{max}|$; E_{max} kann aus Rechenergebnissen errechnet werden (ÜB1)