Computerphysik WS 2013/2014

Prof. Dr. Roland Netz, FU Berlin

Übungsblatt 3: Lineare Algebra

Alexander Schlaich, Matej Kanduč

31. Oktober 2013

Allgemeine Hinweise

Abgabetermin für die Lösungen ist

- **Sonntag, 10.11., 24:00 Uhr.**

Aufgabe 3.1: Lineare Gleichungssysteme: Gauß-Eliminierung (7 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem $\mathbf{Fy} = \mathbf{d}$ mit

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 36000 & 2 & 0 \\ -2 & 1400 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 72002 \\ 1399 \end{pmatrix}.$$

- 3.1.1 (4 Punkte): Löse das Gleichungssystem, indem du den Gauß-Algorithmus in ein Python-Programm implementierst. Überprüfe dabei, ob die Eliminierung durchgeführt werden kann und nimm ggf. Vertauschungen von Zeilen vor.
- 3.1.2 (1 Punkt): Emuliere eine 4-stellige Gleitpunktarithmetik, d.h. nach jeder arithmetischen Operation wird die Zahl entsprechend gerundet. Welche Lösung erhält man nun?
  Hinweis: Verwende die wieder die Methode `mround(...)` von Übungsblatt 1.
- 3.1.3 (2 Punkte): Beim Eliminationsschritt können etwaige Eingangsfehler bei der Multiplikation der Matrix- und Vektorelemente mit $\lambda = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ verstärkt werden. Durch geeignete Zeilenvertauschung kann $|\lambda| \leq 1$ erreicht werden: Bei dieser sog. Spaltenpivotisierung werden Zeilen so vertauscht, dass das betragsgrößte Element der jeweiligen Spalte zum Diagonalelement wird.

  Erweitere dein Programm so, dass Spaltenpivotisierung benutzt werden kann.

  Wie sieht die Lösung des o.g. Gleichungssystems in 4-stelliger Gleitpunktarithmetik aus, wenn Spaltenpivotisierung benutzt wird?

```
def mround(x,N):
    if (x==0):
        return x
    return round(x, int(N - math.ceil(math.log10(abs(x)))))
```

Aufgabe 3.2: LR-Zerlegung (7 Punkte)

Betrachten die folgende Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 64 & -40 & 16 \\ -40 & 29 & -4 \\ 16 & -4 & 62 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

- 3.2.1 (2 Punkte): Führe eine LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ mit Hilfe des Gauss-Eliminations-Algorithmus aus, wobei $\mathbf{L}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen 1 ist und $\mathbf{R}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
  Gib die beiden Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ an und überprüfe dein Ergebnis durch Einsetzen.
- 3.2.2 (3 Punkte): Implementiere eine Cholesky-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{R^T R}$ und prüfe ob $\mathbf{A}$ positiv definit ist. Führe ggf. die Zerlegung auf $\mathbf{A}$ durch und gib die Zerlegung $\mathbf{R}$ an und überprüfe das Ergebnis $\mathbf{R^T R}$.

Sobald eine Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ vorliegt, ist es einfach die Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen. Zunächst wird die Gleichung zu $\mathbf{LRx} = \mathbf{b}$ umgeformt. Mit der Notation $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$ erhält man:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \tag{2}$$

Diese Gleichung kann man mittels Vorwärts-Substitution nach $\mathbf{y}$ auflösen. Schließlich erhält man $\mathbf{x}$ durch Rückwärts-Substitution aus:

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y} \tag{3}$$

- 3.2.3 (2 Punkte): Benutze die LR-Zerlegung, um die Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = [-8, 15, 34]^T$ zu lösen.

Aufgabe 3.3: Kondition und Fehler linearer Gleichungssysteme (6 Punkte)

Betrachte nun die folgenden beiden Gleichungssyteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 36000 & 2 & 0 \\ -2 & 1400 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 72002 \\ 1399 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_{2,i} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}.$$

- 3.3.1 (2 Punkte): Implementiere zunächst eine Funktion, die die Frobenius-Norm einer Matrix berechnet

  $$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

  sowie für Vektoren die euklidische Norm (2-Norm) berechnet. Es gilt $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$, wobei $\|A\|_2$ die 2-Norm der Matrix A bezeichnet.

- 3.3.2 (3 Punkte): Wir wollen nun untersuchen wie sich Fehler auf der rechten Seite eines Gleichungssystemes auf den Lösungsvektor auswirken. Dazu nehmen wir an, dass $\mathbf{b}'$ die Fehlerbehaftete rechte Seite ist mit

  $$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 1.1b_1 \\ 0.9b_2 \\ 1.05b_3 \end{pmatrix}.$$

  Das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{b}'$ soll dann mit unterschiedlich gewichteten Störungen $\lambda \in [1, 0.1, 5]$ gelöst werden.

  Gebe nun für jede dieser Störungen folgendes aus: Abweichung $\|\Delta\mathbf{b}\|_2$, Schätzung für den maximalen absoluten Fehler, tatsächlicher absoluter Fehler $\|\Delta\mathbf{x}\|_2$, Schätzung für den maximalen relativen Fehler, tatsächlicher relativer Fehler $\|\Delta\mathbf{x}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$. Nutze bei den Abschätzungen die Frobenius- Norm für die Matrix und ihr Inverses.

  Führe dies für beide der oben angegebenen Gleichungssysteme durch.

  Für die Berechnung der Lösung kann die Funktion `numpy.linalg.solve(...)` und zur Berechnung der Inverse `numpy.linalg.inv(...)` benutzt werden.

- 3.3.3 (1 Punkt): Vergleiche Fehlerabschätzung und die tatsächliche Abweichung.

  Wie unterscheiden sich die Ergebnisse für die beiden Gleichungssysteme? Erläutere die Unterschiede.