Computerphysik WS 2013/2014

Prof. Dr. Roland Netz, FU Berlin

Übungsblatt 5: Interpolation

Alexander Schlaich, Matej Kanduč

18. November 2013

Allgemeine Hinweise

Abgabetermin für die Lösungen ist

- **Sonntag, 24.11., 24:00 Uhr.**

Aufgabe 5.1: Interpolation von Daten (12 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Interpolation von Messdaten. Dabei soll aus einer Messreihe der Regenintensität im Verlauf eines Tages (Tabelle 1) mit verschiedenen Methoden eine Interpolationsfunktion erstellt und die erhaltenen Interpolationsfunktionen zusammen mit den Datenpunkten in einem einzigen Plot dargestellt werden.

Tabelle 1: Regenintensität im Tagesverlauf

Zeit(h)	Regenintensität pro Stunde(mm/h)
1	3.4
2	4.1
3	2.2
4	2.9
5	2.9
6	3.1
7	3.6
8	4.1
9	3.9
10	1.1
11	0.7
12	1.1
13	2.1

5.1.1 Polynominterpolation

Eine häufig genutzte Interpolationsmethode ist die Polynominterpolation. Bei einem Polynomgrad n ist

$$P_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad \text{for } i = 0, ...n$$

und $P_n(x) = f_i$. Für einen gegebenen Datensatz (x_i, f_i) kann folgende Matrix konstruiert werden:

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & ... & x_0^n \\ x_1^0 & .. & .. & x_1^n \\ . & . & . & . \\ . & & & \\ x_n^0 & .. & .. & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .. \\ .. \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ .. \\ .. \\ f_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Aus der Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{X} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}$ ergeben sich die Koeffizienten a_i.

- 5.1.1 (2 Punkte): Implementieren Sie die Koeffizientenmethode und interpolieren Sie damit die Daten. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie eine geeignete Methode Ihrer Wahl verwenden.

Ein Polynom vom Grad n, welches durch $n+1$ Datenpunkte verläuft, lässt sich auch mit der Lagrange-Formel konstruieren:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

mit

$$l_i(x) = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n} = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- 5.1.2 (2 Punkte): Implementieren Sie die Lagrange-Formel zum Interpolieren der Daten.

Ein schnellerer Algorithmus zur Polynominterpolation ist das Newtonverfahren, bei dem das Polynom folgende Form hat:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_0, \ldots, x_i) n_j(x) \qquad \text{wobei} \qquad n_j(x) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) & \text{falls} \quad j > 0 \\ 1 \quad \text{falls} \quad j = 0 \end{cases} \tag{2}$$

und $f(x_0, \ldots, x_i)$ dividierte Differenzen der Ordung i sind.

- 5.1.3 (2 Punkte): Implementieren Sie das Newton-Verfahren und interpolieren Sie damit die Messdaten.

5.1.2 Interpolation mit kubischen Splines

Ein weiteres Verfahren zur Interpolation stellen Splines dar. Für die (unbekannten) Momente $M_i = s''(x_i)$ eines zu interpolierenden kubischen Splines zu den Wertepaaren $(x_i, y_i), i = 0, .., n$ gilt:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + (1 - \mu_i) M_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

mit $\mu_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ für $i = 1, ..., n-1$. Die rechte Seite enthält dabei wieder die dividierten Differenzen und die Momente $\mathbf{M}$ erhält man dann durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Die Berechnung des Splines folgt dann auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n$ als

$$s(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_i \Big(x - \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2} \Big) + D_i,$$

wobei $h_i = x_i - x_{i-1}$ und

$$C_i = \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}),$$

sowie

$$D_i = \frac{(y_i + y_{i-1})}{2} - \frac{h_i^2}{12}(M_i + M_{i-1}).$$

Hinweis: Bei einem natürlichen Spline fordert man zusätzlich $M_0 = M_n = 0$ als Randbedingung.

- 5.1.4 (2 Punkte): Implementieren Sie auch die Interpolation mittels natürlicher kubischer Splines und fügen Sie das Resultat ebenfalls Ihrem Plot hinzu.
- 5.1.5 (2 Punkte): Vergleichen Sie die Laufzeit aller 4 Interpolationsmethoden.
  Hinweis: Mitteln Sie dazu über mehrere Läufe mittels einer Schleife um eine genauere Abschätzung der benötigten Zeit zu erhalten.
- 5.1.6 (2 Punkte): Erstellen Sie einen neuen Plot, in dem Sie nur die Ergebnisse einer der Polynominterpolationsmethoden darstellen. Was passiert wenn Sie nur die Datenpunkte $n = 0, 2, 4, \dots$ für den Fit berücksichtigen? Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Aufgabe 5.2: Tabellierung von Funktionen (8 Punkte)

Bevor Taschenrechner die Berechnung von Funktionen übernehmen konnten, wurde auf tabellierte Werte zurückgegriffen und dann entsprechend zum gewünschten Wert interpoliert. Wir möchten dies nun in dieser Aufgabe anhand der Sinusfunktion nachvollziehen.

- 5.2.1 (2,5 Punkte): Verwenden Sie jeweils Newtonverfahren und kubische Splines zur Interpolation von $f(x) = \sin(2\pi x)$ durch n äquidistante Interpolationspunkte auf dem Intervall [0,1] für $n \in [5, 7, 9, \dots, 19]$.
- 5.2.2 (2,5 Punkte): Bestimmen Sie den maximalen Fehler, der bei der Interpolation der Funktion f durch ein Polynom (bzw. Spline) p auftritt,

  $$E = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \,. \tag{3}$$

  Dazu soll die Auswertung an mindestens 250 Stellen x erfolgen. Plotten Sie die maximale Abweichung semi-logarithmisch gegen n.
  Wie unterscheiden sich hier die Polynom- und die Splineinterpolation?

Der Interpolationsfehler kann folgendermaßen abgeschätzt werden:
Ist p eine Polynominterpolation vom Grad n für $x \in [a, b]$, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \,, \tag{4}$$

wobei $f^{(n+1)}$ die $(n + 1)$-te Ableitung von f ist.

- 5.2.3 (3 Punkte): Bestimmen Sie den maximalen Fehler aus Gleichung (4) für die Sinusfunktion im Intervall [0,1].
  Hinweis: Ihr Ergebnis sollte die Form $E \propto 1/n^\alpha$ haben.
  Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit ihrem numerisch berechneten Fehler.