| 3. Übung | Informatik A | WS 13/14 |
|---|---|---|
| Klaus Kriegel | | **Abgabe: 11.11.2011, 12:00 Uhr** |

**Aufgabe 1: Aussagenverknüpfung** (5+2 Punkte)

Die Studenten A(lice), B(ob) und C(arol) müssen zusammen 4 Übungsaufgaben bearbeiten. Dabei steigt der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben 1 bis 4 mit ihrer Nummerierung an. Bei der Verteilung sollen die folgenden Wünsche berücksichtigt werden:
1) A will Aufgabe 1 nicht bearbeiten, weil das eine reinen Fleißarbeit ist.
2) B möchte höchstens eine Aufgabe übernehmen, egal welche.
3) C kann nur die Aufgaben 1 bis 3 lösen, die vierte ist ihr zu schwer.
4) A möchte verhindern, dass C nur die leichteste Aufgabe bearbeitet, und fordert deshalb, dass C mindestens eine Aufgabe bearbeitet, deren Schwierigkeitgrad mindestens so hoch ist, wie die schwerste Aufgabe, die A bearbeitet.
5) Natürlich muss jede Aufgabe bearbeitet werden.

a) Formulieren ein Modell, in dem die Bedingungen 1) bis 5) exakt als Boolesche Terme ausgedrückt werden. Führen Sie dazu für jedes Paar $(S, i) \in \{A, B, C\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ eine Boolesche Variable ein, die den Wert 1 bekommen soll, wenn Student $S$ die Aufgabe $i$ bearbeitet. Gibt es eine erfüllende Belegung für die Konjunktion dieser Terme und ist sie eindeutig?

b) Beschreiben Sie einen weiteren Term für die Forderung, dass jede Aufgabe nur von einem Studenten bearbeitet wird! Gibt es eine erfüllende Belegung für die erweiterte Konjunktion und ist sie eindeutig?

**Aufgabe 2: Logische Äquivalenz** (3+3 Punkte)

Verwenden Sie das Substitutionstheorem und die in der Vorlesung aufgelisteten logischen Äquivalenzen, um die folgenden Terme in möglichst einfache äquivalente Terme umzuformen. Benennen Sie alle verwendeten Regeln und Gesetze, insbesondere dann, wenn mehrere in einem Schritt zusammengefasst werden.

$$s = ((x \vee y) \wedge z \vee x \wedge y) \vee (x \vee y) \wedge \neg z \qquad t = \neg((\neg x \vee y) \wedge y) \wedge (\neg y \vee \neg x)$$

**Aufgabe 3: DNF und KNF I** (3 Punkte)

Konstruieren Sie die kanonische DNF und die kanonische KNF für die 3-stellige Boolesche Funktion $f$, die durch folgende Eigenschaft definiert ist:

$$f(x, y, z) = 1 \iff \text{die Zahl } n = 4x + 2y + z \text{ ist eine Primzahl}$$

Hinweis: 0 und 1 sind keine Primzahlen!

**Aufgabe 4: DNF und KNF II** (3 + 4 Punkte)

Wir definieren rekursiv die aussagenlogischen Terme $t_n$ durch $t_1 = x_1$ und $t_{n+1} = t_n \oplus x_{n+1}$.

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass der Term $t_n$ für eine Belegung $\omega_n : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{B}$ genau dann den Wert 1 annimmt, wenn $\omega_n$ eine ungerade Anzahl von Variablen mit dem Wert 1 belegt.

b) Zeigen Sie, dass jede $n$-stellige Boolesche Funktion $f$, bei der sich weder die kanonische KNF noch die kanonische DNF durch Termzusammenfassungen vereinfachen lassen, entweder durch $t_n$ oder durch $\neg t_n$ repräsentiert wird.

Hinweise:
1) Man kann hier die Aussage aus Punkt a) auch ohne Beweis verwenden.
2) Welche von beiden Möglichkeiten zutrifft, kann bereits an $f(0, 0, \ldots, 0)$ abgelesen werden.