Zadanie numeryczne NUM2

1 Wstęp

Zadanie polegało na rozwiązaniu równań $A_i y_i = b$ oraz $A_i y_i' = b'$ dla $i = 1, 2$, gdzie

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.40827208 & -0.36066254 & 0.80575445 & 0.46309511 & 1.20708553 \\ -0.36066254 & 1.14839502 & 0.02576113 & 0.02672584 & -1.03949556 \\ 0.80575445 & 0.02576113 & 2.45964907 & 0.13824088 & 0.0472749 \\ 0.46309511 & 0.02672584 & 0.13824088 & 2.05614464 & -0.9434493 \\ 1.20708553 & -1.03949556 & 0.0472749 & -0.9434493 & 1.92753926 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2.61370745 & -0.6334453 & 0.76061329 & 0.24938964 & 0.82783473 \\ -0.6334453 & 1.51060349 & 0.08570081 & 0.31048984 & -0.53591589 \\ 0.76061329 & 0.08570081 & 2.46956812 & 0.18519926 & 0.13060923 \\ 0.24938964 & 0.31048984 & 0.18519926 & 2.27845311 & -0.54893124 \\ 0.82783473 & -0.53591589 & 0.13060923 & -0.54893124 & 2.6276678 \end{pmatrix}$$

$b \equiv (5.40780228, 3.67008677, 3.12306266, -1.11187948, 0.54437218)^T$ oraz $b' \equiv b + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$. Należało również wyznczyć $\Delta_i \equiv ||y_i - y_i'||_2$ oraz zinterpretować różnicę wartości Δ_1 i Δ_2.

2 Implementacja

Program napisałem w języku Python z wykorzystaniem modułu *linalg* z biblioteki numerycznej *numpy*.
Do rozwiązania równań $A_i y_i = b$ oraz $A_i y_i' = b'$ dla $i = 1, 2$, skorzystałem z funkcji *solve*:

```
y1 = np.linalg.solve(A1, b)
y1prim = np.linalg.solve(A1, bprim)

y2 = np.linalg.solve(A2, b)
y2prim = np.linalg.solve(A2, bprim)
```

Do wyznaczenia $\Delta_1 \equiv ||y_1 - y_1'||_2$ i $\Delta_2 \equiv ||y_2 - y_2'||_2$ użyłem funkcji *norm*:

```
delta1 = np.linalg.norm(y1 - y1prim)
delta2 = np.linalg.norm(y2 - y2prim)
```

Do wyznaczenia współczynników uwarunkowania κ_1 i κ_2 skorzystałem z funkcji *cond*:

```
kappa1 = np.linalg.cond(A1)
kappa2 = np.linalg.cond(A2)
```

3 Wyniki

Rozwiązanie równania $A_1 y_1 = b$ oraz $A_1 y_1' = b'$:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (3.28716602,\ 3.8029998,\ 0.25146854,\ \text{-}1.57875474,\ \text{-}0.50410395)^T \\
y_1' &= (16.74173332,\ \text{-}14.06233583,\ \text{-}2.70495914,\ \text{-}15.57494944,\ \text{-}25.34234556)^T
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie równania $A_2 y_2 = b$ oraz $A_2 y_2' = b'$:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= (3.18374857,\ 3.94032033,\ 0.27419287,\ \text{-}1.47117406,\ \text{-}0.31318674)^T \\
y_2' &= (3.18375389,\ 3.94032237,\ 0.27419131,\ \text{-}1.47117514,\ \text{-}0.31318814)^T
\end{aligned}
$$

Norma $\Delta_i \equiv ||y_i - y_i'||_2$ dla $i = 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= 36.35612431941617 \\
\Delta_2 &= 0.0000061667394655004 67
\end{aligned}
$$

Współczynnik uwarunkowania κ_i dla $i = 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= 39295747.83518957 \\
\kappa_2 &= 4.000000024553183
\end{aligned}
$$

Widzimy, że norma z różnic rozwiązań dla macierzy A_1 jest dużo większa niż dla macierzy A_2. Oznacza to, że jest ona bardziej wrażliwa na zaburzenia niż macierz A_2. Rozwiązania y_1 i y_1' znacznie się od siebie różnią. Macierz A_1 jest źle uwarunkowana. Wyznaczenie współczynnika uwarunkowania dla obu macierzy to potwierdza. Dla macierzy A_1 współczynnik wynosi ponad 39 milionów, poczas gdy $\kappa_2 \sim 4$.