Efekt Rungego

Laboratorium 4

Jakub Ciszewski, Wiktor Smaga

24 kwietnia 2024

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest zaobserwowanie czy zachodzi efekt Rungego przy interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$ oraz $f_2(x) = \exp(\cos(x)), x \in [0, 2\pi]$ oraz porównanie błędów uzyskiwanych przy użyciu wielomianów Lagrange'a, kubicznych funkcji sklejanych oraz wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

2 Efekt Rungego

2.1 Definicja

Efekt Rungego - pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

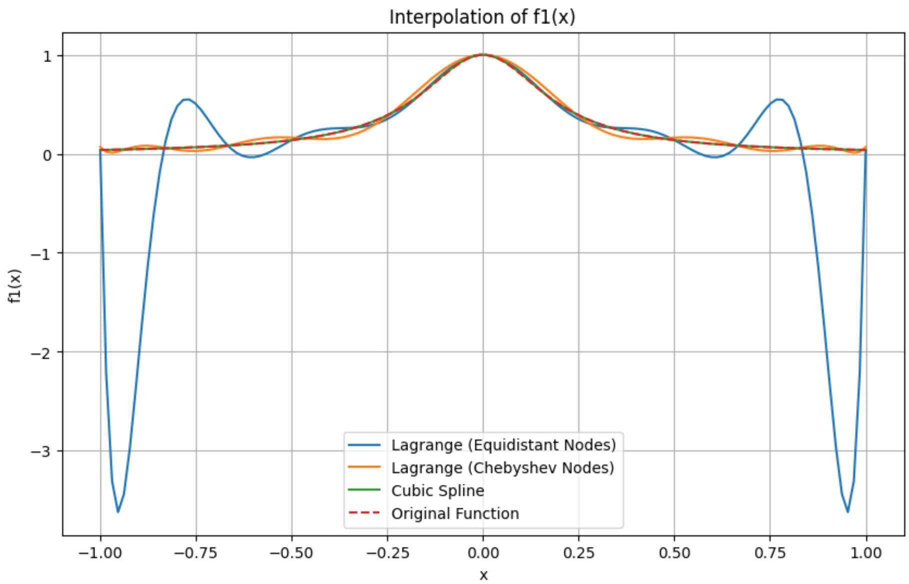
2.2 Rozwiązanie

Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Np. węzłami interpolacji n-punktowej wielomianowej powinny być miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa n-tego stopnia.
Wzór na węzły Czebyszewa:

$$\theta_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

3 Zadanie 1.

Tworzymy interpolacje funkcji f_1 dla $n = 12$ wezłów interpolacji, przy 10-krotnie gęstszym zbiorze:



Wykres 1: Porównanie wykresów interpolacji funkcji f_1

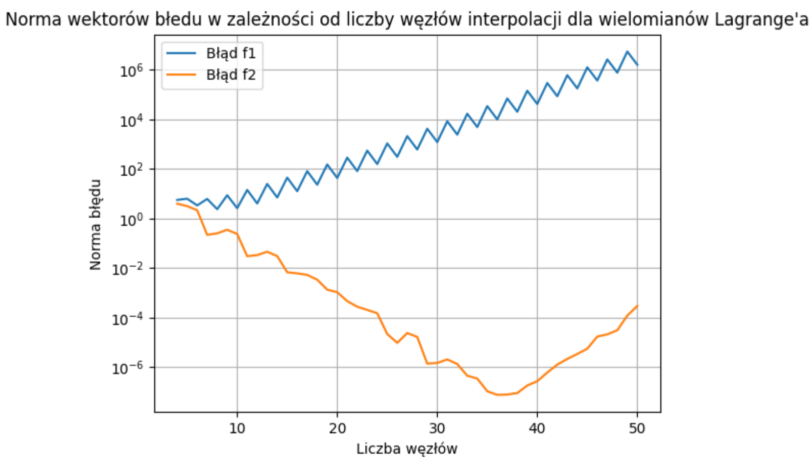
Na powyższym obrazku wyraźnie widać efekt Rungego przy jednostajnych węzłach interpolacji Lagrange'a. Natomiast dla węzłów Czebyszewa oraz kubicznych funkcji sklejanych interpolacja wyznaczona jest ze znacząco mniejszym błędem.

4 Zadanie 2.

Tworzymy interpolacje funkcji f_1 oraz f_2 dla $n = 4, 5, 6, ..., 50$ węzłów na zbiorze 500 losowo wygenerowanych punktów z dziedzin funkcji trzema metodami:

- Wielomianami Lagrange'a z równoodległymi węzłami.
- Kubicznymi funkcjami sklejanymi z równoodległymi węzłami.
- Wielomianami Lagrange'a z węzłami Czebyszewa.

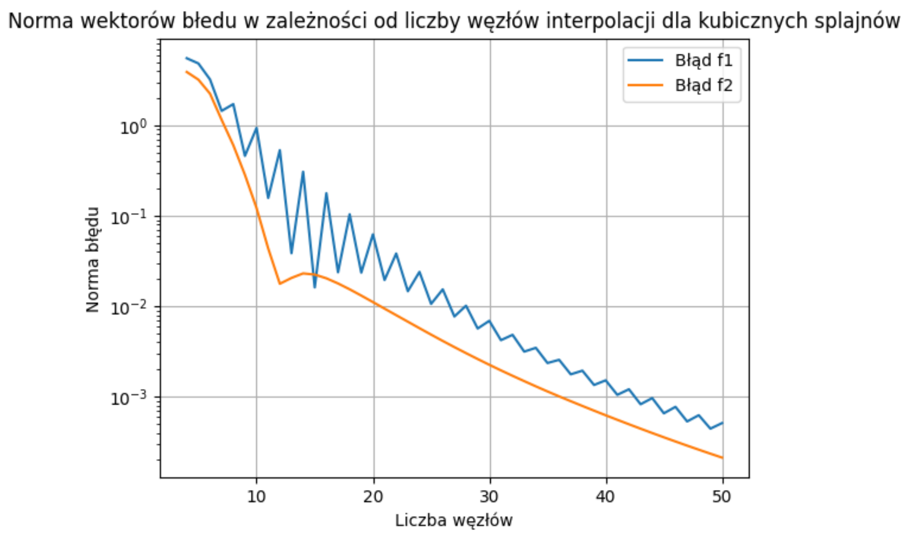
4.1 Wielomiany Lagrange'a z równoodległymi węzłami



Wykres 2: Norma wektorów błędu w zależności od liczby węzłów interpolacji dla wielomianów Lagrange'a.

Na powyższym wykresie możemy zauważyć wyraźny przykład efektu Rungego. Dla coraz większej liczby węzłów otrzymujemy coraz większy błąd.

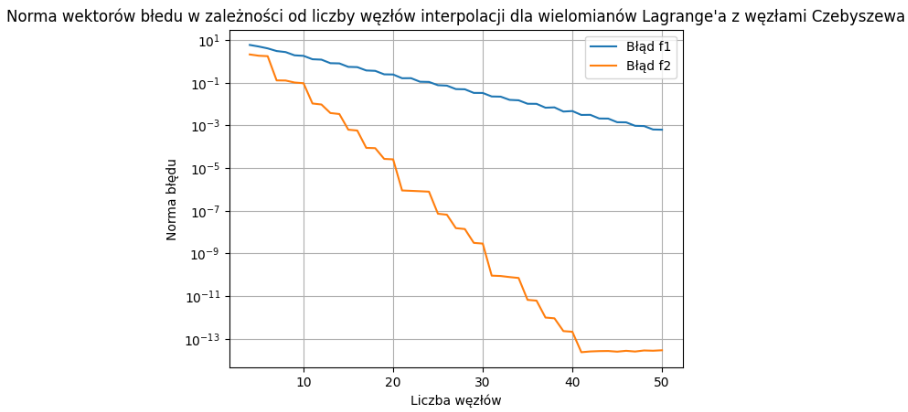
4.2 Kubiczne funkcje sklejane z równoodległymi węzłami



Wykres 3: Norma wektorów błedu w zależności od liczby węzłów interpolacji dla kubicznych splajnów

Na wykresie widać, że przez zastosowanie funkcji kubicznym możemy zniwelować efekt Rungego.

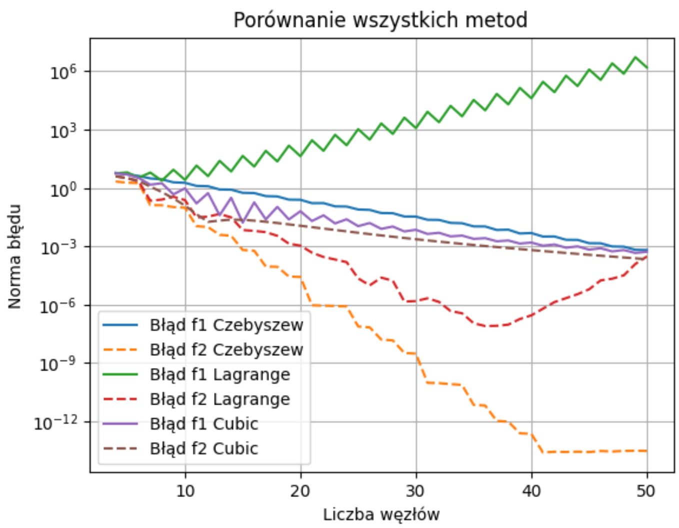
4.3 Wielomiany Lagrange'a z węzłami Czebyszewa



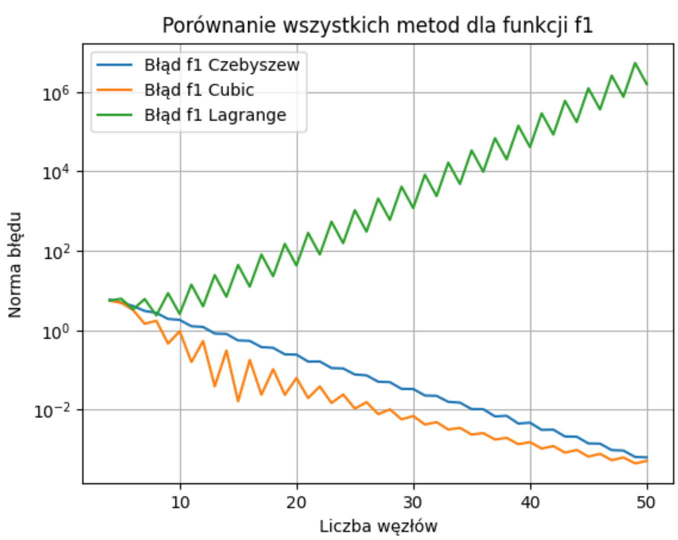
Wykres 4: Norma wektorów błędu w zależności od liczby węzłów w interpolacji dla wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Na powyższym wykresie również możemy zaobserwować zniwelowanie efektu Rungego poprzez zastosowanie węzłów Czebyszewa.

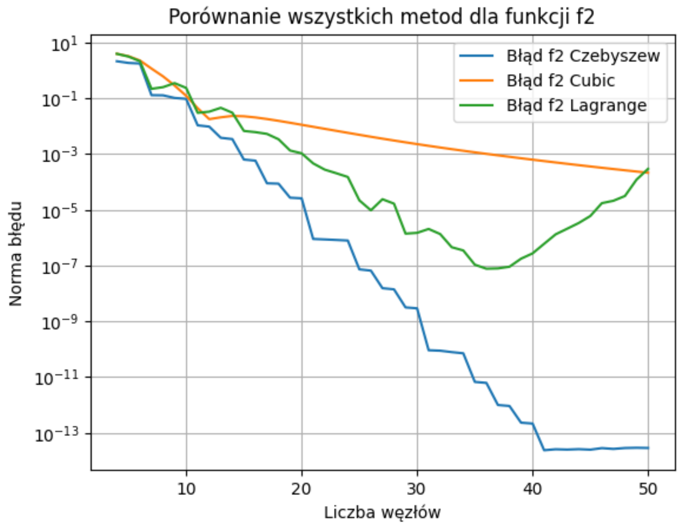
4.4 Porównanie



Wykres 5: Porównanie wszystkich metod



Wykres 6: Porównanie wszystkich metod dla funkcji f_1



Wykres 7: Porównanie wszystkich metod dla funkcji f_2

5 Wnioski

- Ciężko wskazać najdokładniejszą metodę, za to łatwo najmniej dokładną, którą jest metoda wykorzystująca wielomiany Lagrange'a dla równoodległych węzłów.
- Więcej węzłów nie zawsze wiąże się z większą dokładnością interpolacji.
- Stosując węzły Czebyszewa jesteśmy w stanie ograniczyć działanie efektu Rungego.