Równania różniczkowe zwyczajne

Laboratorium 9

Jakub Ciszewski, Wiktor Smaga

3 czerwca 2024

1 Zadanie 1

1.1 Przekształcenie równania Van der Pol'a na układ równań pierwszego rzędu

Oryginalne równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Krok 1: Wprowadzenie nowych zmiennych

Wprowadzamy zmienne:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

Krok 2: Wyrażenie pochodnych

Teraz możemy wyrazić pochodne y w terminach nowych zmiennych:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y''$$

Krok 3: Przekształcenie oryginalnego równania

Podstawiamy y_1 i y_2 do oryginalnego równania:

$$y_2' = y_2(1 - y_1^2) - y_1$$

Wynikowy układ równań pierwszego rzędu

Ostatecznie, równanie Van der Pol'a można zapisać jako układ dwóch równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_2(1 - y_1^2) - y_1 \end{cases}$$

1.2 Przekształcenie równania Blasiusa na układ równań pierwszego rzędu

Oryginalne równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy''$$

Krok 1: Wprowadzenie nowych zmiennych

Wprowadzamy zmienne:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

$$y_3 = y''$$

Krok 2: Wyrażenie pochodnych

Teraz możemy wyrazić pochodne y w terminach nowych zmiennych:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y'''$$

Krok 3: Przekształcenie oryginalnego równania

Podstawiamy y_1, y_2 i y_3 do oryginalnego równania:

$$y_3' = -y_1 y_3$$

Wynikowy układ równań pierwszego rzędu

Ostatecznie, równanie Blasiusa można zapisać jako układ trzech równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 y_3 \end{cases}$$

1.3 Przekształcenie równań II zasady dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał na układ równań pierwszego rzędu

Oryginalne równania:

$$y_1'' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}},$$
$$y_2'' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}.$$

Krok 1: Wprowadzenie nowych zmiennych

Wprowadzamy zmienne:

$$y_3 = y_1'$$
$$y_4 = y_2'$$

Krok 2: Wyrażenie pochodnych

Teraz możemy wyrazić pochodne y_1 i y_2 w terminach nowych zmiennych:

$$y_1' = y_3$$
$$y_2' = y_4$$
$$y_3' = y_1''$$
$$y_4' = y_2''$$

Krok 3: Przekształcenie oryginalnych równań

Podstawiamy y_1, y_2, y_3 i y_4 do oryginalnych równań:

$$y_3' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}},$$
$$y_4' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}.$$

Wynikowy układ równań pierwszego rzędu

Ostatecznie, równania II zasady dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał można zapisać jako układ czterech równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}} \\ y_4' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

2 Zadanie 2

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Analityczna stabilność

Definicja z wykładu

Rozwiązanie równania $y' = f(y, t)$ jest stabilne, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\|\hat{y}(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, to $\|\hat{y}(t) - y(t)\| < \epsilon$ dla $t \geqslant t_0$.

Rozwiązanie

- Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego $y' = -5y$ to:

  $$y(t) = y(0)e^{-5t}$$

- Dla $y(0) = 1$, rozwiązanie szczególne to:

  $$y(t) = e^{-5t}$$

- Rozwiązanie $y(t) = e^{-5t}$ dąży do zera, gdy $t \to \infty$.

- Dla małego zaburzenia w warunku początkowym, powiedzmy $\hat{y}(0) = y(0)+\delta$, rozwiązanie zaburzone to:

  $$\hat{y}(t) = (1 + \delta)e^{-5t}$$

- Różnica między rozwiązaniem zaburzonym a oryginalnym rozwiązaniem to:

  $$\|\hat{y}(t) - y(t)\| = |(1 + \delta)e^{-5t} - e^{-5t}| = |\delta e^{-5t}|$$

- Dla dowolnego $\epsilon > 0$, możemy wybrać $\delta = \epsilon e^{5t_0}$ dla $t_0 \geqslant 0$, aby zapewnić $\|\hat{y}(t_0) - y(t_0)\| < \delta$.

- Dla $t \geqslant t_0$:

  $$\|\hat{y}(t) - y(t)\| = |\delta e^{-5t}| = \epsilon e^{5t_0} e^{-5t}$$

  Ponieważ $t \geqslant t_0$, $e^{5t_0}e^{-5t} \leqslant 1$. Stąd $\|\hat{y}(t) - y(t)\| \leqslant \epsilon$.

- Zatem rowiązania tego równania **są stabilne**

(b) Numeryczna stabilność

Definicja z wykładu

Aby metoda Eulera była numerycznie stabilna, musi być spełniony warunek:

$$|1 + h\lambda| < 1$$

Rozwiązanie

- Metoda Eulera dla równania różniczkowego $y' = \lambda y$ jest opisana wzorem:

  $$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k$$

  Dla naszego równania $\lambda = -5$.

- Sprawdźmy, czy warunek stabilności jest spełniony dla kroku $h = 0.5$:

  $$|1 + h\lambda| = |1 + 0.5 \cdot (-5)| = |1 - 2.5| = |-1.5| = 1.5$$

- Widzimy, że:
  $$|1.5| \not< 1$$

- Zatem, metoda Eulera **nie jest stabilna numerycznie** dla tego równania różniczkowego przy kroku $h = 0.5$.

(c) Obliczenie numeryczne z użyciem metody Eulera

Dla jednego kroku, gdzie $\lambda = -5$:

$$y_1 = y_0 + h\lambda y_0 = 1 + 0.5 \cdot (-5) \cdot 1 = 1 - 2.5 = -1.5$$

Zatem, wartość przybliżona metodą Eulera dla $t = 0.5$ wynosi:

$$y = -1.5$$

(d) Numeryczna stabilność

Definicja z wykładu

Aby niejawna metoda Eulera była numerycznie stabilna, musi być spełniony warunek:

$$\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| < 1$$

Rozwiązanie

- Sprawdźmy, czy warunek stabilności jest spełniony dla kroku $h = 0.5$:

$$\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| = \left|\frac{1}{1 - 0.5 \cdot (-5)}\right| = \left|\frac{1}{1 + 2.5}\right| = \left|\frac{1}{3.5}\right| = \frac{1}{3.5} \approx 0.2857$$

- Widzimy, że:

$$0.2857 < 1$$

- Zatem, niejawna metoda Eulera **jest stabilna numerycznie** dla tego równania różniczkowego przy kroku $h = 0.5$.

(e) Niejawna metoda Eulera

Dla równania $y' = -5y$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$ i krokiem $h = 0.5$, niejawna metoda Eulera jest opisana wzorem:

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1}$$

Możemy to przekształcić:

$$y_{k+1}(1 - h\lambda) = y_k \implies y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - h\lambda}$$

Dla jednego kroku, gdzie $\lambda = -5$:

$$y_1 = \frac{y_0}{1 - h\lambda} = \frac{1}{1 - 0.5 \cdot (-5)} = \frac{1}{1 + 2.5} = \frac{1}{3.5} \approx 0.2857$$

Zatem, wartość przybliżona niejawnej metodą Eulera dla $t = 0.5$ wynosi:

$$y = 0.2857$$

3 Zadanie 3

Rozwiązanie układu równań różniczkowych Kermack'a-McKendrick'a:

$$S' = -\frac{\beta IS}{N} \tag{1}$$

$$I' = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \tag{2}$$

$$R' = \gamma I \tag{3}$$

gdzie:
S - liczba osób zdrowych
I - liczba osób zainfekowanych
R - liczba osób ozdrowiałych
$\beta = 1$
$\gamma = \frac{1}{7}$
$S(0) = 762$
$I(0) = 1$
$R(0) = 0$
$N = S(0) + I(0) + R(0) = 763$

Całkując od $t = 0$ do $t = 14$ z krokiem $h = 0.2$.
Przy pomocy:

- jawnej metody Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k) \tag{4}$$

- niejawnej metody Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}) \tag{5}$$

- metody Rungego-Kutty czwartego rzędu

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6}$$

gdzie:

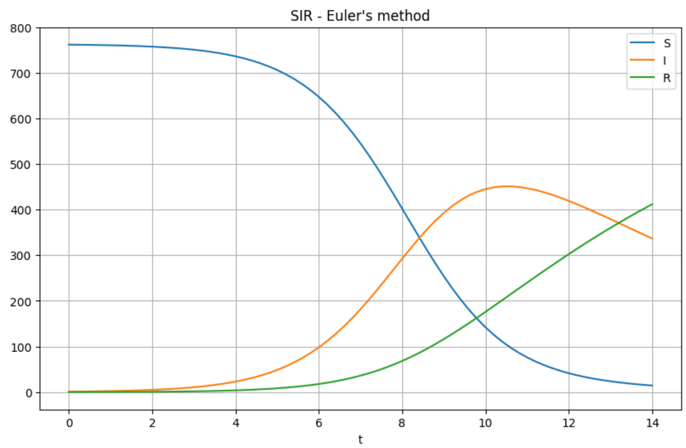
$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + h_k \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = f(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + h_k \frac{k_2}{2})$$

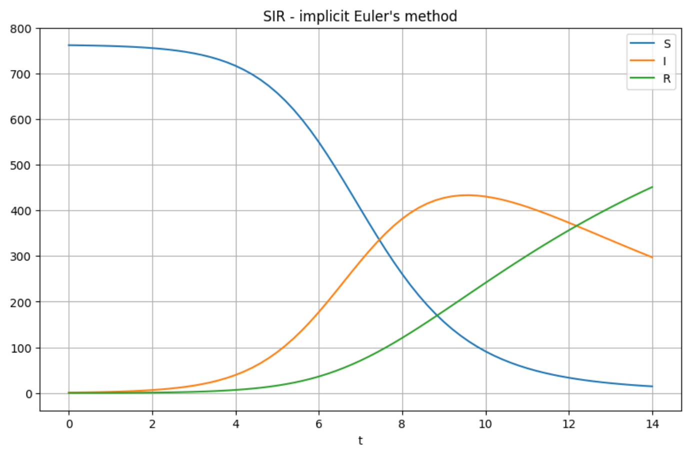
$$k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$$

3.1 Jawna metoda Eulera



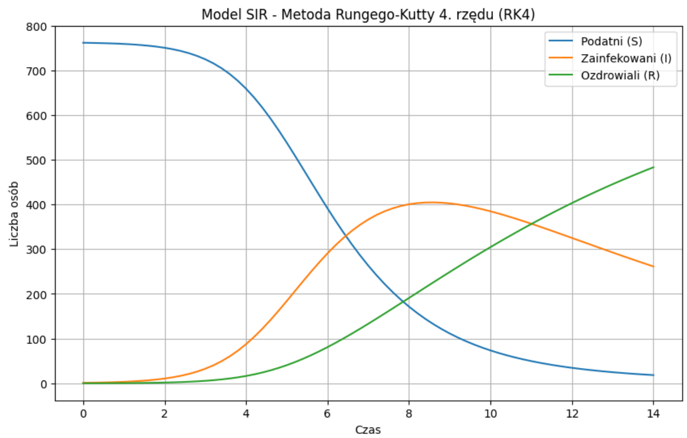
Wykres 1: SIR - metoda jawna Eulera

3.2 Niejawna metoda Eulera



Wykres 2: SIR - niejawna metoda Eulera

3.3 Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu



Wykres 3: SIR - metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu

3.4 Zachowanie populacji

t	N
0	763
1	763
2	763
3	763
4	763
5	763
6	763
7	763
8	763
9	763
10	763
11	763
12	763
13	763
14	763

Tabela 1: Populacja dla jawnej metody Eulera

t	N
0	763
1	763
2	763
3	763
4	763
5	763
6	763
7	763
8	763
9	763
10	763
11	763
12	763
13	763
14	763

Tabela 2: Populacja dla niejawnej metody Eulera

t	N
0	763
1	763
2	763
3	763
4	763
5	763
6	763
7	763
8	763
9	763
10	763
11	763
12	763
13	763
14	763

Tabela 3: Populacja dla metody Rungego-Kutty

3.5 Estymacja β i γ

Mając prawdziwe dane:

t	I_0
0	1
1	3
2	6
3	25
4	73
5	222
6	294
7	258
8	237
9	191
10	125
11	69
12	27
13	11
14	4

Tabela 4: Zestawienie liczby zakażonych w zależności od dnia epidemii

Przeprowadzono estymacje prawdziwych współczynników $\theta = [\beta, \gamma]$ stosując metode Rungego-Kutty. W tym celu wykonano minimalizacje funkcji kosztów:

- RSS - Residual Sum of Squares

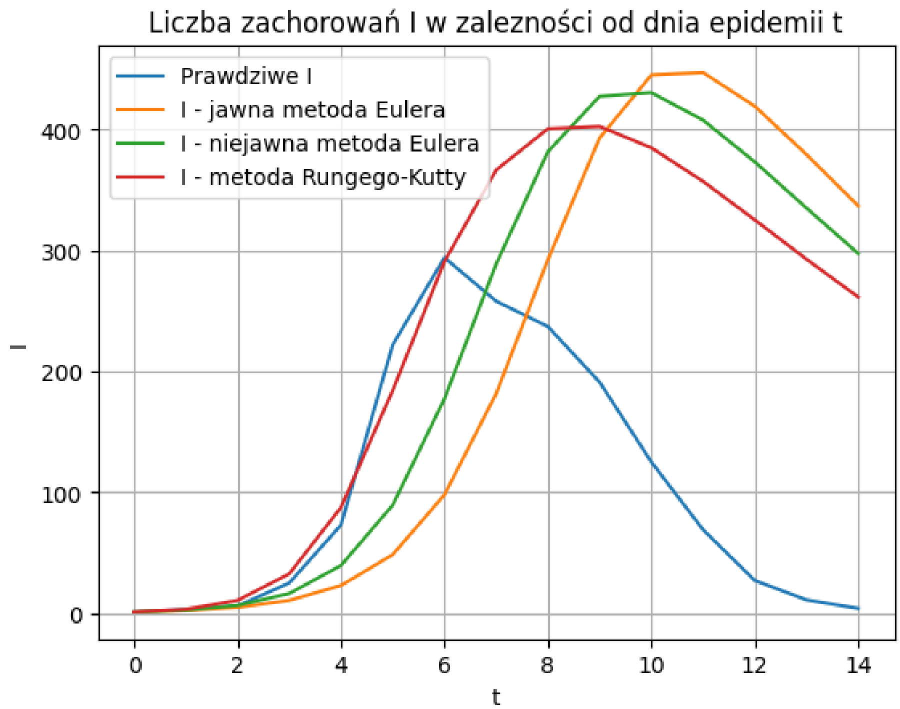
$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} (I_i - \hat{I}_i)^2$$

- NLL - Negative Log Likelihood

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} I_i \log \hat{I}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{I}_i$$

Z racji na nieznajomość gradientu $\nabla_\theta L(\theta)$ wykorzystano metode Neldera-Meada.
Wyniki:
$\beta_{RSS} = 6.5371637387741455$
$\gamma_{RSS} = 1.3316471395682492$
$R_{0RSS} = \frac{\beta_{RSS}}{\gamma_{RSS}} = 4.909081050475312$ $\beta_{NLL} = 1$
$\gamma_{NLL} == 0.14285714285714285 \approx \frac{1}{7}$
$R_{0NLL} = \frac{\beta_{NLL}}{\gamma_{NLL}} = 7$

3.6 Porównanie metod



Wykres 4: Porównanie metod względem prawdziwych wartości

	RSS	NLL
Jawna metoda Eulera	766515	-4690
Niejawna metoda Eulera	629069	-5045
Metoda Rungego-Kutty	**470011**	**-5336**

Tabela 5: Zestawienie wskaźników

4 Wnioski

- Wszystkie metody zachowują niezmiennik
- Najdokładniejszą metodą spośród omawianych jest metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu.