

Aproksymacja

Laboratorium 5

Jakub Ciszewski, Wiktor Smaga

17 kwietnia 2024

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się metodami aproksymacji.

2 Zadanie 1.

2.1 Opis

Przeprowadzono aproksymację średniokwadratową dla populacji Stanów Zjednoczonych w latach 1900-1980 z odstępami dziesięcioletnimi dla wielomianów stopni od 0 do 6. Następnie przeprowadzono ekstrapolację dla roku 1990 i porównano otrzymane wyniki z wartością rzeczywistą wynoszącą 248 709 873 oraz obliczono błędy względne dla każdego stopnia.

Następnie obliczono kryterium Akaikego AIC_c ze składnikiem korygującym wzorem:

$$AIC = 2k + n \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - \hat{y}(x_i))^2}{n}\right)$$

$$AIC_c = AIC = \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

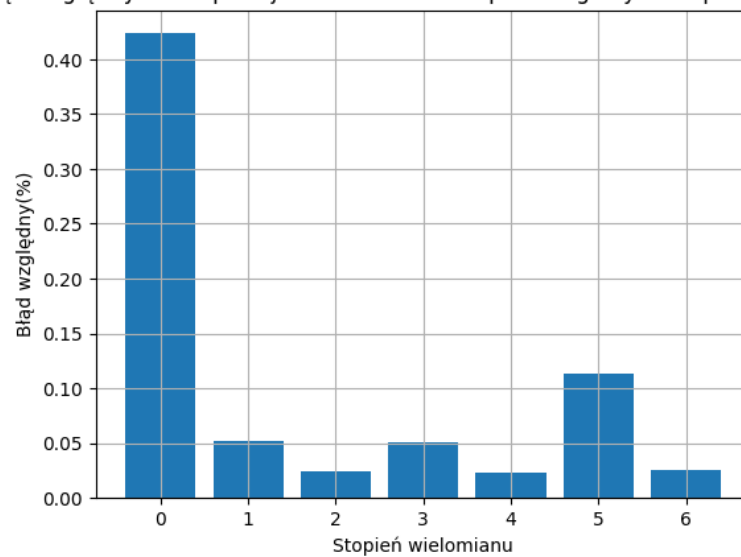
dla każdego ze stopni wielomianu oraz porównano czy wynik współczynnika pokrywa się z błędami względnymi.

2.2 Ekstrapolacja

| Stopień wielomianu | Wartość ekstrapolacji | Błąd względny[%] |
|--------------------|-----------------------|------------------|
| 0 | 143369177 | 42.35 |
| 1 | 235808109 | 5.19 |
| 2 | 2547129457 | 2.41 |
| 3 | 261439380 | 5.12 |
| 4 | 243106971 | 2.25 |
| 5 | 220442802 | 11.37 |
| 6 | 255044185 | 2.55 |

Tabela 1: Zestawienie stopnia wielomianu z wartością ekstrapolacji i błędem względnym

Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 dla poszczególnych stopni wielomianu



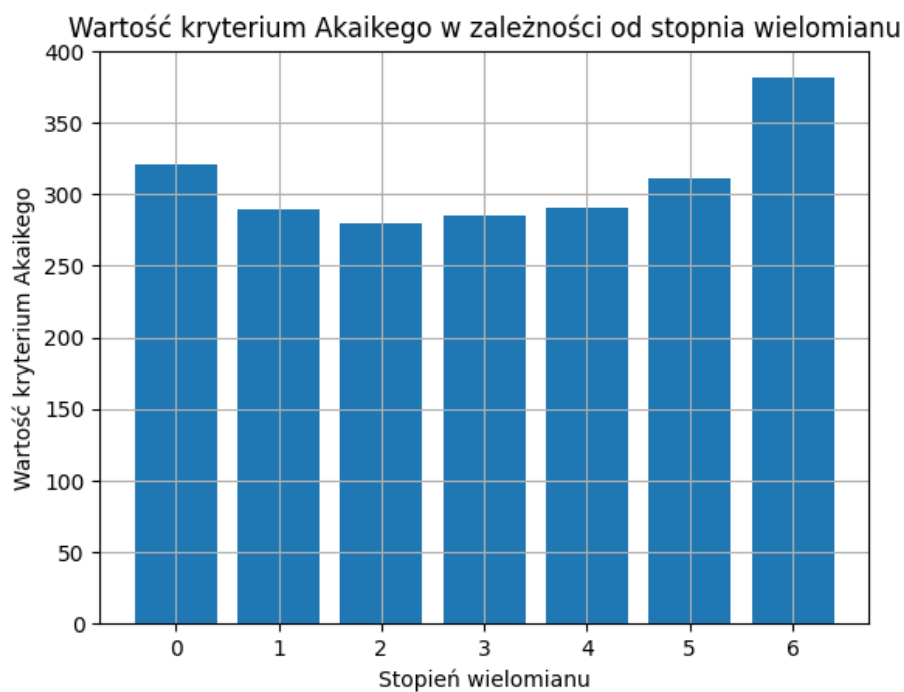
Wykres 1: Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 dla poszczególnych stopni wielomianu

Najmniejszy błąd względny jest osiągany dla wielomianu stopnia 4.

2.3 Kryterium Akaiego.

| Stopień wielomianu | Wartość współczynnika Akaiego |
|--------------------|-------------------------------|
| 0 | 321.01 |
| 1 | 289.06 |
| 2 | 279.45 |
| 3 | 284.88 |
| 4 | 290.93 |
| 5 | 311.26 |
| 6 | 381.27 |

Tabela 2: Zestawienie stopnia wielomianu ze współczynnikiem Akaiego



Wykres 2: Wartość kryterium Akaiego w zależności od stopnia wielomianu

Najmniejsza wartość kryterium Akaiego jest przyjmowana dla wielomianu 2 stopnia co nie pokrywa się z błędem względnym, który był najmniejszy dla wielomianu stopnia 4. Jednak wartość kryterium dla wielomianu stopnia 2 jest zbliżona do wartości dla stopnia 4.

3 Zadanie 2.

3.1 Opis

Wykonano aproksymację średniokwadratową ciągłą dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[0, 2]$ dla wielomianu 2 stopnia, używając wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju.

Funkcja wagowa:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Wielomian Czebyszewa 2-iego rodzaju stopnia k:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$$

Funkcja ϕ :

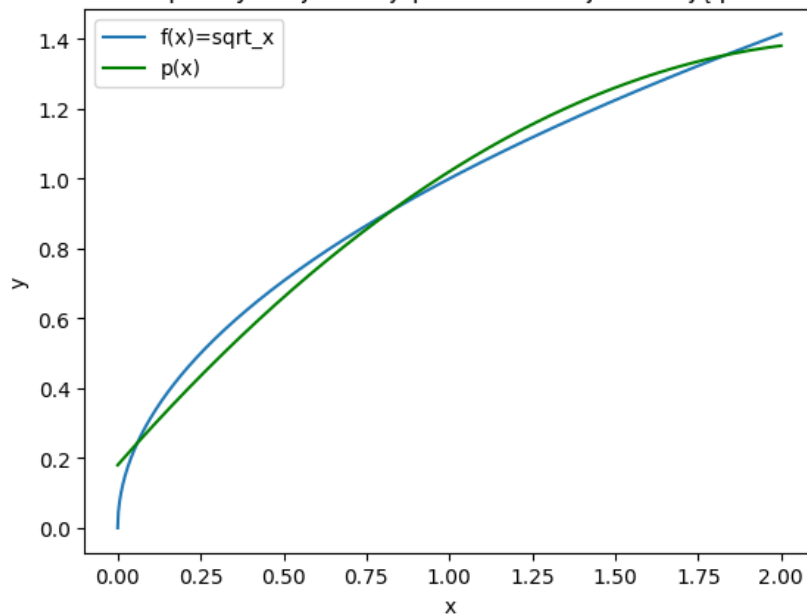
$$\phi(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = 0 \\ \pi, & k \neq 0 \end{cases}$$

Współczynnik wielomianu c_k :

$$c = \frac{\int_0^2 T_k(x) \sqrt{x} w(x) dx}{\phi(k)}$$

3.2 Aproksymacja

Porównanie aproksymacji funkcji pierwiastkowej z funkcją pierwiastkową



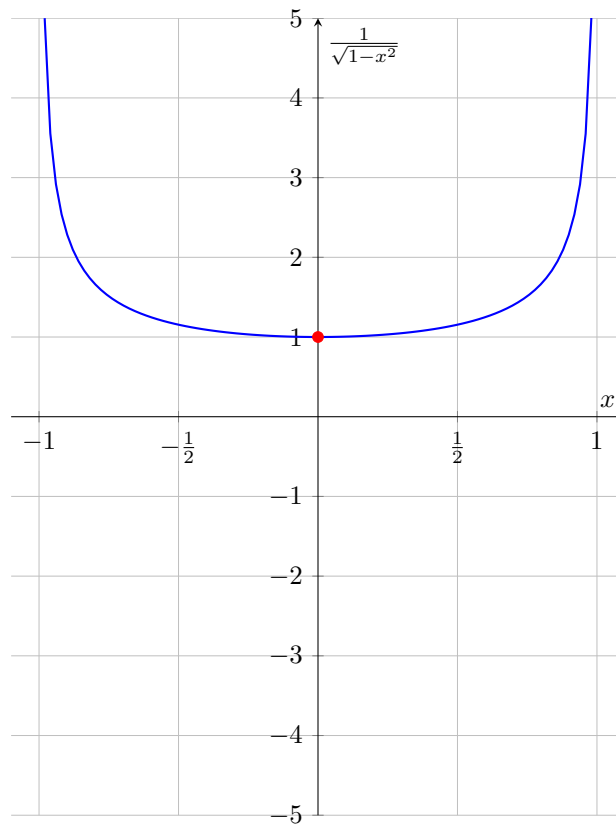
Wykres 3: Porównanie aproksymacji funkcji pierwiastkowej z funkcją pierwiastkową

Największy błąd względny aproksymacji jest przyjmowany dla $x = 0$. Niestety możemy tylko przybliżyć jego wartość z racji na to, że $\sqrt{0} = 0$, a wzór na błąd względny to:

$$\delta = \frac{|y - \hat{y}|}{y}$$

co prowadzi do dzielenia przez 0. Z racji na to obliczony błąd względny jest obliczany dla wartości: $2.2250738585072014e - 308$ i wynosi

$8.092462303818272e + 308\%$.



Wykres 4: Wykres funkcji wagowej w

Wartość funkcji w dla argumentu 0 wynosi 1. Jest to minimum globalne funkcji wagowej.

4 Wnioski

- Kryterium Akaikego pozwala nam względnie dobrze określić najlepszy stopień wielomianu do aproksymacji danej funkcji.