

# Efekt Rungego

## Laboratorium 4

Jakub Ciszewski, Wiktor Smaga

17 kwietnia 2024

## 1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest zaobserwowanie czy zachodzi efekt Rungego przy interpolacji funkcji  $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$  oraz  $f_2(x) = \exp(\cos(x)), x \in [0, 2\pi]$  oraz porównanie błędów uzyskiwanych przy użyciu wielomianów Lagrange'a, kubicznych funkcji sklepanych oraz wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

## 2 Efekt Rungego

### 2.1 Definicja

Efekt Rungego - pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów  $n$  przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście  $n$ , zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

### 2.2 Rozwiązanie

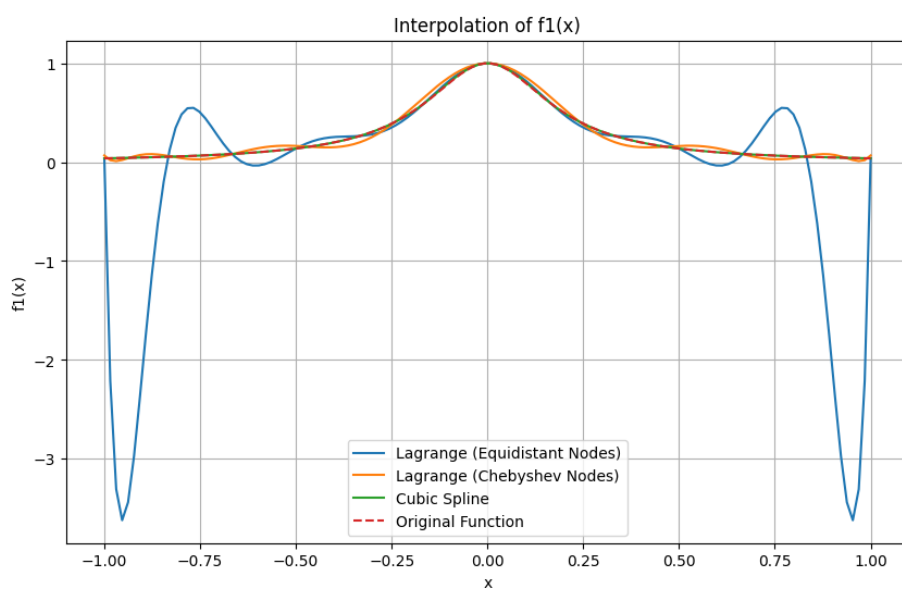
Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Np. węzłami interpolacji  $n$ -punktowej wielomianowej powinny być miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa  $n$ -tego stopnia.

Wzór na węzły Czebyszewa:

$$\theta_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad 0 \leq j \leq n$$

### 3 Zadanie 1.

Tworzymy interpolacje funkcji  $f_1$  dla  $n = 12$  węzłów interpolacji, przy 10-krotnie gęstszym zbiorze:



Wykres 1: Porównanie wykresów interpolacji funkcji  $f_1$

Na powyższym obrazku wyraźnie widać efekt Rungego przy jednostajnych węzłach interpolacji Lagrange'a. Natomiast dla węzłów Czebyszewa oraz kubicznych funkcji sklepanych interpolacja wyznaczona jest ze znacząco mniejszym błędem.

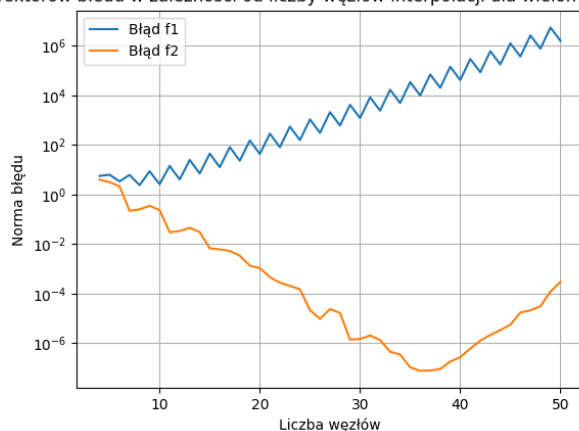
## 4 Zadanie 2.

Tworzymy interpolacje funkcji  $f_1$  oraz  $f_2$  dla  $n = 4, 5, 6, \dots, 50$  węzłów na zbiorze 500 losowo wygenerowanych punktów z dziedzin funkcji trzema metodami:

- Wielomianami Lagrange'a z równoodległymi węzłami.
- Kubicznymi funkcjami sklejanymi z równoodległymi węzłami.
- Wielomianami Lagrange'a z węzłami Czebyszewa.

### 4.1 Wielomiany Lagrange'a z równoodległymi węzłami

Norma wektorów błędów w zależności od liczby węzłów interpolacji dla wielomianów Lagrange'a

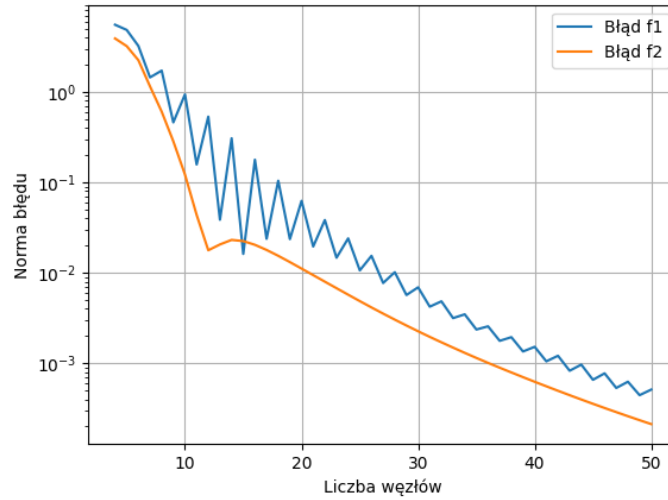


Wykres 2: Norma wektorów błędów w zależności od liczby węzłów interpolacji dla wielomianów Lagrange'a.

Na powyższym wykresie możemy zauważyć wyraźny przykład efektu Rungego. Dla coraz większej liczby węzłów otrzymujemy coraz większy błąd.

## 4.2 Kubiczne funkcje sklejane z równoodległymi węzłami

Norma wektorów błędu w zależności od liczby węzłów interpolacji dla kubicznych splajnów

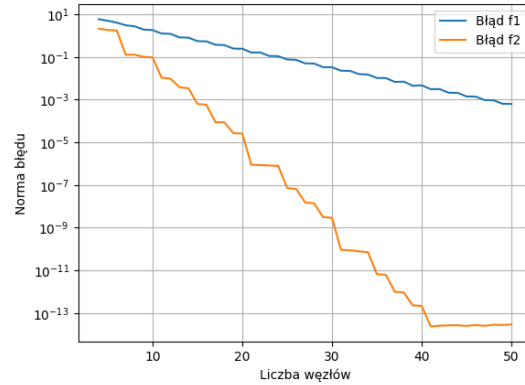


Wykres 3: Norma wektorów błędu w zależności od liczby węzłów interpolacji dla kubicznych splajnów

Na wykresie widać, że przez zastosowanie funkcji kubicznych możemy zniwelować efekt Rungego.

### 4.3 Wielomiany Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

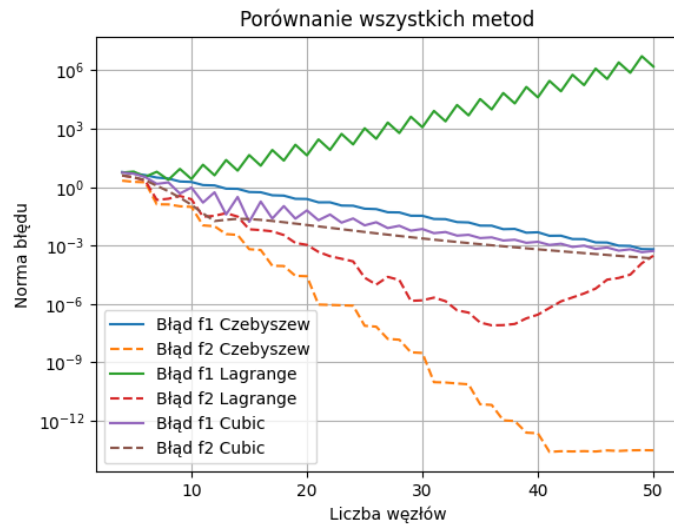
Norma wektorów błędów w zależności od liczby węzłów interpolacji dla wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa



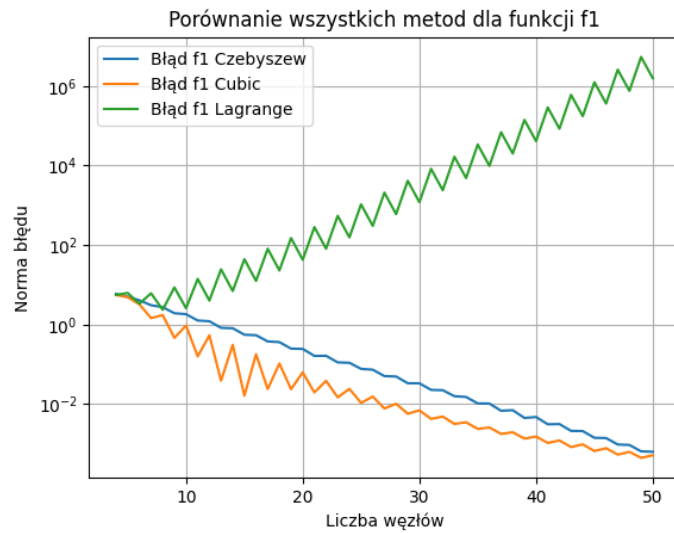
Wykres 4: Norma wektorów błędów w zależności od liczby węzłów w interpolacji dla wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Na powyższym wykresie również możemy zaobserwować zniwelowanie efektu Rungego poprzez zastosowanie węzłów Czebyszewa.

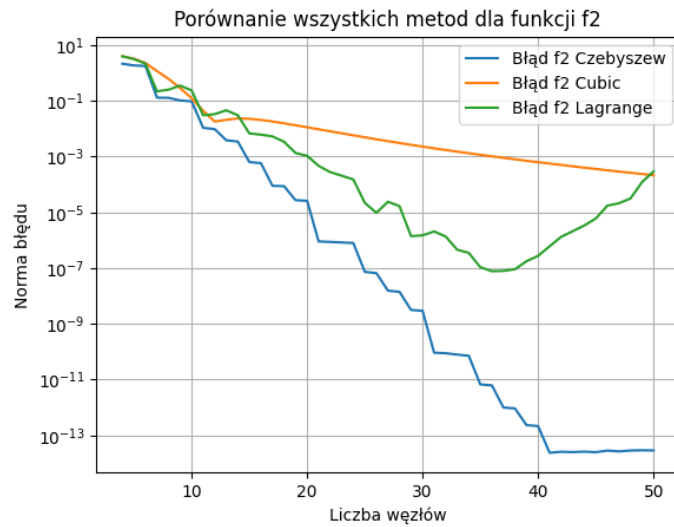
## 4.4 Porównanie



Wykres 5: Porównanie wszystkich metod



Wykres 6: Porównanie wszystkich metod dla funkcji  $f_1$



Wykres 7: Porównanie wszystkich metod dla funkcji  $f_2$

## 5 Wnioski

- Ciężko wskazać najdokładniejszą metodę, za to łatwo najmniej dokładną, którą jest metoda wykorzystująca wielomiany Lagrange'a dla równoodległych węzłów.
- Więcej węzłów nie zawsze wiąże się z większą dokładnością interpolacji.