

Interpolacja

Laboratorium 3

Jakub Ciszewski, Wiktor Smaga

21 marca 2024

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami Lagrange'a oraz Newtona do interpolacji wielomianu.

2 Macierzy Vandermond'a

2.1 Wzór

Macierz Vandermond'a to macierz, której kolumny składają się z kolejnych potęg wektora x .

$$V(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Funkcja bazowa	Wartość
$\phi_1(t) = t^{j-1}$	$3.002196188862143 \times 10^{36}$
$\phi_2(t) = (t - 1900)^{j-1}$	$6.306532437721142 \times 10^{15}$
$\phi_3(t) = (t - 1940)^{j-1}$	$9.315536053349441 \times 10^{12}$
$\phi_4(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1}$	1605.4437004786828

Tabela 1: Wartości funkcji bazowych dla podanych punktów danych.

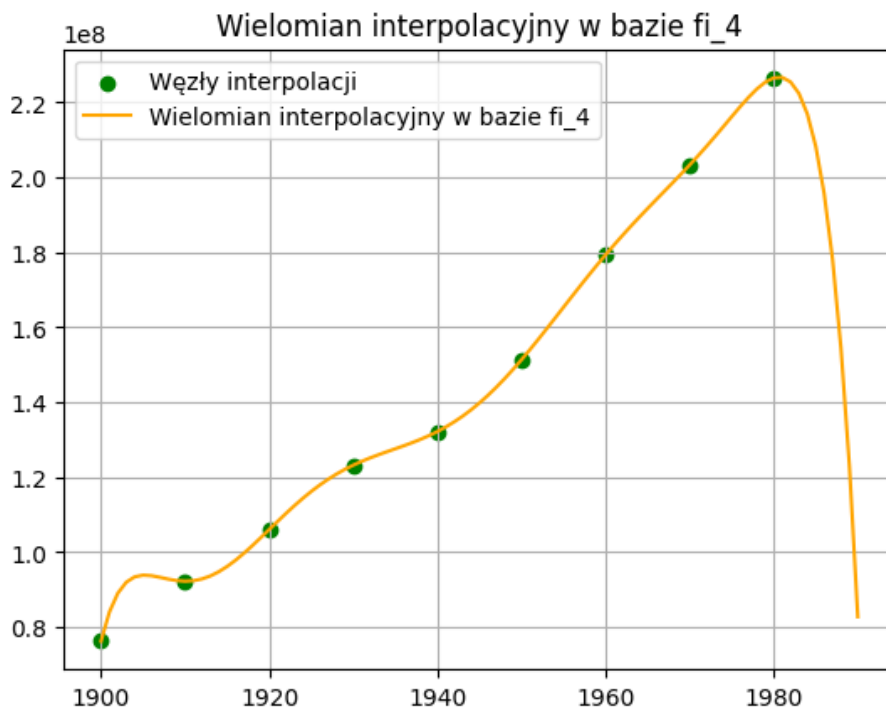
Najlepiej uwarunkowana (wartość funkcji cond jest najmniejsza) jest macierz Vandermond'a dla funkcji bazowej:

$$\phi_4(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1}$$

3 Wielomian interpolacyjny w bazie $\phi_4(t)$

Współczynniki wielomianu interpolacyjnego w bazie $\phi_4(t)$ są wyznaczane na podstawie wzoru:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \phi_3(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



Rysunek 1: Wielomian interpolacyjny w bazie $\phi_4(t)$.

3.1 Ekstrapolacja wielomianu

Porównujemy wartość rzeczywistą z wartością ekstrapolowaną.

dane	wartość
Wartość rzeczywista	248709873
Wartość ekstrapolowana	109000000
Różnica	139709872
Błąd względny	56.17%

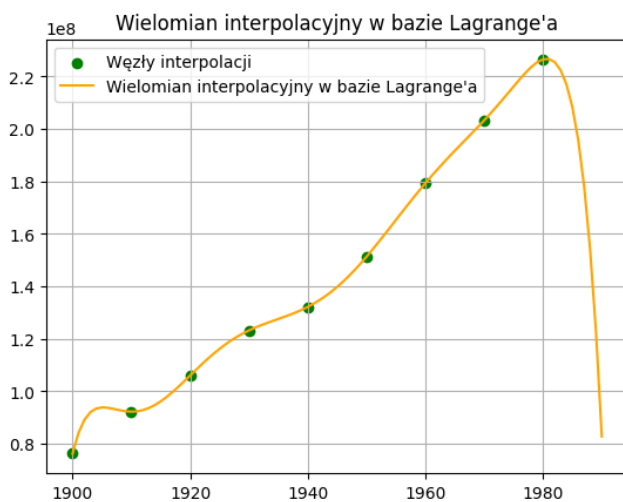
Tabela 2: Porównanie wartości rzeczywistej i ekstrapolowanej

Wyniki wskazują na znaczne odchylenie od wartości rzeczywistej, wynika to z tego, że ekstrapolacja na obszarze, na którym wielomian nie został zbudowany, jest bardzo podatna na błędy i zachowuje się niestabilnie.

4 Wielomian interpolacyjny w bazie Lagrange'a

Wyznaczamy wielomian interpolacyjny w bazie Lagrange'a na podstawie 9 węzłów interpolacji.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n [f(x_0, x_1, \dots, x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)]$$

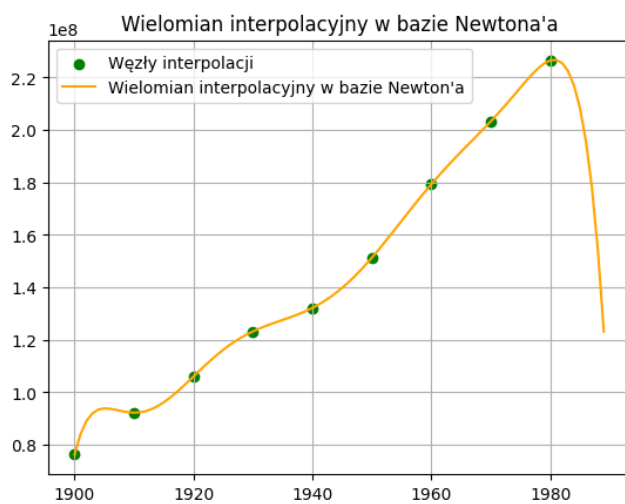


Rysunek 2: Wielomian interpolacyjny w bazie Lagrange'a

5 Wielomian interpolacyjny w bazie Newtona

Wyznaczamy wielomian interpolacyjny w bazie Newtona na podstawie 9 węzłów interpolacji.

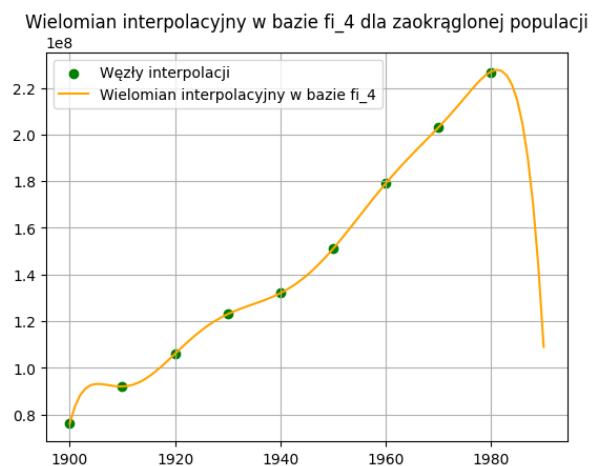
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \left[f(x_0, x_1, \dots, x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right]$$



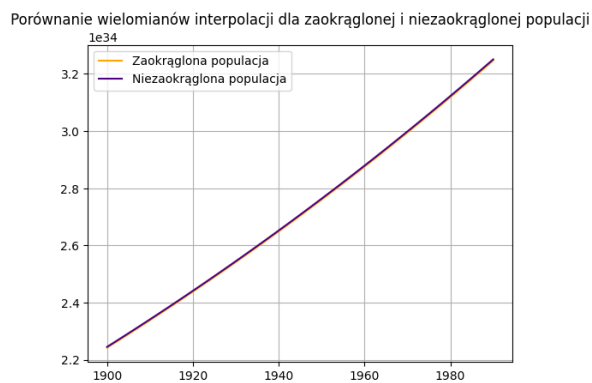
Rysunek 3: Wielomian interpolacyjny w bazie Newtona

6 Zaokrąglenie do miliona

Wyznaczamy wartość wielomianu interpolacyjnego w bazie $\phi_4(t)$ zaokrągloną do miliona.



Rysunek 4: Wielomian interpolacyjny w bazie $\phi_4(t)$ zaokrąglony do miliona



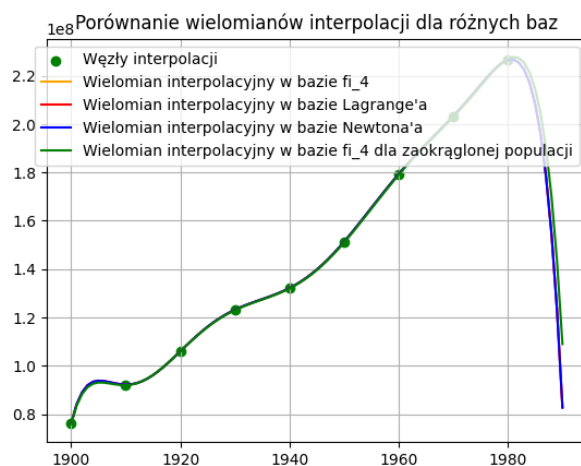
Rysunek 5: Porównanie wyznaczonych współczynników, ze współczynnikami z punktu 3.

6.1 Ekstrapolacja wielomianu przy zaokrągleniu

dane	wartość
Wartość rzeczywista	248709873
Wartość ekstrapolowana	109000000
Różnica	139709872
Błąd względny	56.17%

Tabela 3: Porównanie wartości rzeczywistej i ekstrapolowanej przy zaokrągleniu

7 Porównanie dla różnych baz



Rysunek 6: Porównanie wielomianów interpolacji dla różnych baz

8 Wnioski

- Wielomian interpolacyjny w bazie $\phi_4(t)$ jest najlepiej uwarunkowany.
- Ekstrapolacja wielomianu jest niestabilna i prowadzi do dużych błędów.
- Wielomian interpolacyjny w bazie Lagrange'a oraz Newtona dają bardzo zbliżone wyniki.
- Zaokrąglenie wartości wielomianu interpolacyjnego do miliona nie zmienia znacząco wyniku.

9 Bibliografia

- https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial
- https://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt07.pdf
- https://pracownik.kul.pl/files/10382/public/aan_w2_1819_1.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial