Kwadratury
Laboratorium 6

Jakub Ciszewski, Wiktor Smaga

3 czerwca 2024

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest porównanie jakie błędy generują metody Simpsona, trapezów oraz środkowych prostokątów.

2 Zadanie 1.

2.1 Opis

Zadanie polega na obliczeniu wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx = \pi$$

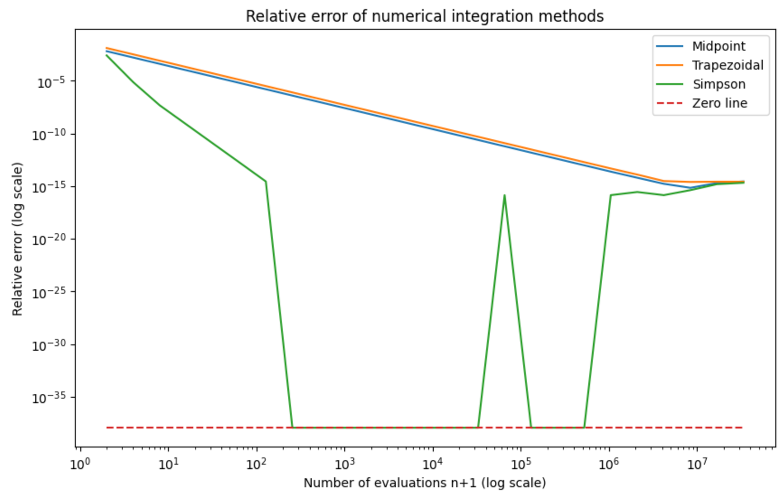
przy pomocy metody środkowych prostokątów, trapezów oraz Simpsona, dla liczby węzłów

$$2^m + 1 \quad \text{dla} \quad m \in \{1, ..., 25\}$$

Przy zadaniu skorzystałem z integrate.trapz i integrate.simps z biblioteki scipy oraz ze własnej funkcji liczącą całkę metodą środkowych prostokątów.

2.2 Porównanie wartości bezwzględnych błędów względnych

Metoda trapezów ma największy błąd bezwzględny. Bardzo podobny błąd występuje też dla metody środkowych prostokątów. Metoda Simpsona uzyskuje znacząco mniejsze błędy.



Wykres 1: Błąd względny w zależnosci od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej

2.3 Porównanie $h_{\mathbf{min}}$ z wartością z laboratorium 1

Metoda	Minimalny błąd względny	Wartość h dla minimalnego błędu
Środkowe prostokąty	7.07×10^{-16}	2.38×10^{-7}
Trapezy	2.54×10^{-15}	2.38×10^{-7}
Simpson	1.41×10^{-16}	5.96×10^{-8}

Tabela 1: Minimalne błędy względne dla różnych metod całkowania

wartość h z laboratorium 1 wynosiła:

$$h_{\text{min}} = 9.12 \times 10^{-9}$$

Metoda całkowania	Różnica od h_{min} z laboratorium 1
Środkowe prostokąty	25.13%
Metoda trapezów	25.13%
Metoda Simpsona	5.53%

Tabela 2: Różnice od h_{min} dla różnych metod całkowania

2.4 Porównanie empirycznego rzędu zbieżności z rzędem teoretycznym

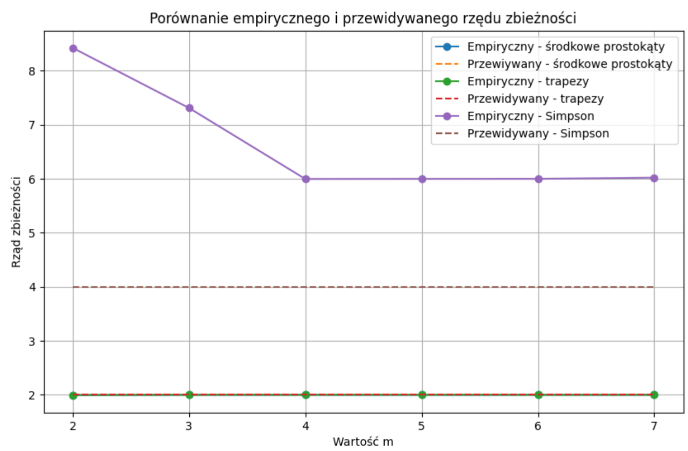
Empiryczny rząd zbieżności definiujemy jako stosunek dwóch kolejnych błędów:

$$p = \frac{\log\left(\frac{E_{i-1}}{E_i}\right)}{\log\left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)}$$

Czyli w naszym przypadku przez to że wartość h zwiększa nam się dwukrotnie przy każdej iteracji:

$$p = \frac{\log\left(\frac{E_{i-1}}{E_i}\right)}{\log(2)}$$

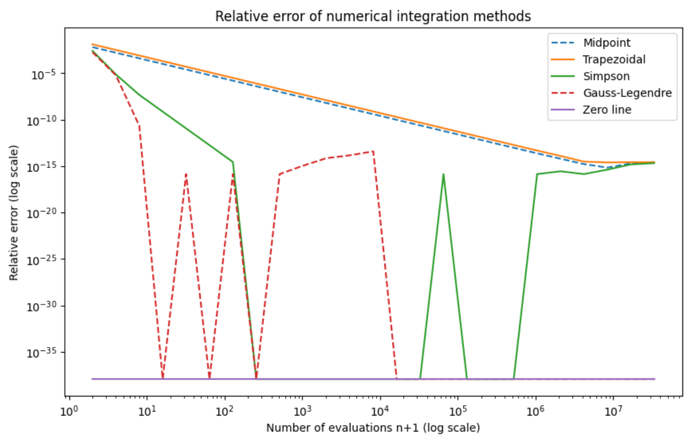
Do obliczenia rzędu zbieżności empirycznej zastosowałem przedział m od 1 do 7, ponieważ dla większych m błąd metody simpsona przyjmuje wartość 0. Z wykresu wynika, że metoda środkowych prostokątów i trapezów ma zbieżny rząd zbieżności do rzedu przewidywanego. Natomiast wykres Simpsona jest znacząco różny od rzędu przewidywanego



Wykres 2: Porównanie empirycznego rzedu zbieżności z rzędem teoretycznym

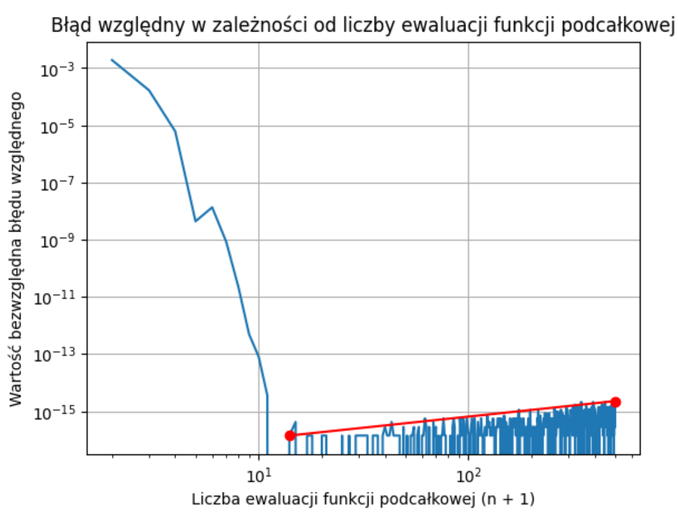
3 Zadanie 2.

Celem zadania jest pokazanie różnicy między błędami metod z zadania 1 oraz metodą Gaussa-Legendre'a. Z racji tego, że metoda Gaussa Legendre'a dla mniejszych h oblicza się bardzo długo zamieściłem na wykresie tylko jego część.



Wykres 3: Porównanie metody Gaussa-Legendre'a z pozostałymi metodami

Jak wynika z tego wykresu dla ponad 10 ewaluacji zaczynna przeważać błąd obliczeniowy na błędem metody.



Wykres 4: Błąd względny w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej dla metody Gaussa-Legendre'a

4 Wnioski

1. Metoda Gaussa-Legendre'a jest dokładniejsza od pozostałych metod dla małej liczby węzłów, natomiast zwiększenie liczby węzłów skutkuje szybkim wzrostem błędu numerycznego
2. Metody obliczania całki mają minimalne błedy względne dla podobnego hmin uzyskanego na pierwszych zajęciach
3. Empirycznie metoda Simpsona ma zdecydowanie większy rząd zbieżności niż teoretycznie, natomiast empiryczny rząd zbieżności metody środkowych prostokątów oraz trapezów jest podobny do przewidywanego