

Cvičení MV011 Statistika I

3. Podmíněná pravděpodobnost a Bayesův vzorec

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2019



Podmíněná pravděpodobnost: $A|B$ = jev A , za podmínky, že nastal jev B ,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Odtud plyne obecný vztah $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$.

Jevy A a B jsou **nezávislé**, když platí $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Pokud lze el. prostor Ω **rozložit** na (konečný) systém jevů $\{B_i\}_{i=1}^n$, platí

vzorec úplné pravděpodobnosti $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$

a **Bayesův vzorec** $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)}.$

Příklad 1

Házíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padly dvě pětky, když je známo, že padl součet dělitelný pěti?

Příklad 2

Rodina má dvě děti, jedno z nich je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dívky? Pravděpodobnosti narození chlapce/dívky jsou 50 %.

Příklad 3 (*)

Rodina má dvě děti, jedno z nich je dívka jménem Kunhuta. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dívky? (Varianty: jiná jména.)

Příklad 4

Pojišťovna rozlišuje kategorie řidičů A, B a C, zahrnující 70 %, 20 % a 10 % pojištěných. Během jednoho roku má řidič kategorie A nehodu s pravděpodobností 0,03, řidič kategorie B 0,06 a řidič kategorie C 0,10.

Určete pravděpodobnosti následujících jevů: (a) náhodně vybraný řidič měl nehodu, (b) řidič, o němž víme, že měl nehodu, je v kategorii A (resp. B, C), (c) náhodně vybraný řidič měl nehodu a je v kategorii A (resp. B, C).

Příklad 5

Některou formu rakoviny má průměrně 5 lidí z 1000. Používaný lékařský test dá pozitivní výsledek u 95 % pacientů s rakovinou (senzitivita) a negativní výsledek u 95 % osob bez tohoto onemocnění (specifita). U náhodně vybrané osoby hlásí test pozitivní výsledek. S jakou pravděpodobností má tato osoba rakovinu?

Příklad 6

V jednom městě jezdí jen bílé a žluté taxíky, přitom žluté tvoří 40 % všech taxíků. Svědek noční dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič žlutého taxíku, který pak ujel. Znalecký posudek tvrdí, že svědek v noci správně identifikuje barvu jen se spolehlivostí 80 %. Jaká je pravděpodobnost, že taxík byl skutečně žlutý?

Výsledky

1. $1/7$
4. 0,043; 0,488; 0,279; 0,233; 0,021; 0,012; 0,010
5. 0,087
6. 0,73