Cvičení MV011 Statistika I

5. Náhodná veličina a rozdělení pravděpodobnosti

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2019

Příklad 1

Řidič dodávkového auta projíždí 4 křižovatkami řízenými nezávislými semafory. Na každé křižovatce je řidič nucen zastavit s pravděpodobností 0,5. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X popisující počet křižovatek, které řidič projede, než bude nucen poprvé zastavit. Spočítejte:

(A) distribuční funkci $F(x)$; (B) $\mathrm{P}(X \leq 2)$; (C) $\mathrm{P}(X = 3)$; (D) $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)$; (E) $\mathrm{P}(X = 3{,}5)$; (F) $\mathrm{P}(X \leq 3{,}5)$.

Příklad 2

Tramvaje odjíždí ze zastávky v pravidelném intervalu 10 minut. Přicházející cestující právě vidí odjíždět tramvaj a přizpůsobí svoji rychlost, aby na zastávku přišel určitě dříve než přijede následující tramvaj. Náhodná veličina X popisuje dobu čekání na zastávce a má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{x}{50}, & 0 \leq x < 10 \\ 0, & \textit{jinak} \end{cases}.$$

(A) Nakreslete graf hustoty $f(x)$; (B) spočítejte distribuční funkci $F(x)$; (C) spočítejte $\mathrm{P}(X \leq 5)$; (D) spočítejte $\mathrm{P}(X \geq 2)$; (E) spočítejte $\mathrm{P}(3 \leq X \leq 8)$.

Příklad 3

Náhodný vektor (X,Y) *reprezentuje se stejnou pravděpodobností volbu jednoho ze tří bodů v rovině o souřadnicích:* $(-1,0)$, $(0,1)$ *a* $(1,0)$. *Jsou souřadnice* X,Y *stochasticky nezávislé náhodné veličiny? Určete simultánní rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru* X,Y *a simultánní distribuční funkci* $F(x,y)$, *obě marginální rozdělení pravděpodobnosti a jejich distribuční funkce* $F_X(x), F_Y(y)$.

Příklad 4

V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 nekvalitní. Mezi 8 kvalitními je 5 výrobků I. jakosti a 3 výrobky II. jakosti. V obchodě zakoupíme 2 náhodně vybrané výrobky z uvedené zásilky. Označíme $X =$ *počet zakoupených kvalitních výrobků a* $Y =$ *počet zakoupených výrobků I. jakosti.*

Určete simultánní rozdělní pravděpodobnosti náhodného vektoru (X,Y) *a obě marginální rozdělení pravděpodobnosti. Jsou náhodné veličiny* X,Y *stochasticky nezávislé? Dále spočítejte:*

(A) $F(1,1)$; *(B)* $F(2,1)$; *(C)* $F_X(x)$; *(D)* $F_Y(y)$; *(E)* $\mathrm{P}(X \geq 1)$.

Příklad 5

Nad hlavní diagonálou čtverce $[0, 10] \times [0, 10]$ *zvolíme zcela náhodně bod* (X, Y)*. Určete simultánní a obě marginální rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru* (X, Y)*. Jsou náhodné veličiny* X, Y *stochasticky nezávislé? Dále spočítejte pravděpodobnost* $\mathrm{P}(X \geq 4)$*.*

Příklad 6

Doby provozuschopnosti 2 akumulátorů X a Y jsou popsány stochasticky nezávislými náhodnými veličinami X *a* Y *s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti a průměrnými životnostmi 1 rok pro X a 2 roky pro Y.*

(A) Určete simultánní rozdělení pravděpodobnosti vektoru (X, Y)*;*
(B) spočítejte pravděpodobnost, že akumulátor X bude fungovat alespoň 2 roky;
(C) pravděpodobnost, že oba akumulátory budou fungovat alespoň 2 roky;
(D) pravděpodobnost, že právě jeden z akumulátorů bude fungovat alespoň 2 roky;
(E) pravděpodobnost, že alespoň jeden akumulátor bude fungovat alespoň 2 roky.

Výsledky

1. (B) 7/8; (C) 1/16; (D) 7/16; (E) 0; (F) 15/16
2. (C) 3/4; (D) 0,64; (E) 0,45
3. veličiny nejsou nezávislé
4. (A) 17/45; (B) 35/45; (E) 44/45
5. $f(x,y) = \frac{1}{50}$, $f_X(x) = \frac{10-x}{50}$, $f_Y(y) = \frac{y}{50}$, veličiny nejsou nezávislé; 0,36
6. (A) $f(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x-y/2}$; (B) $\mathrm{e}^{-2} = 0{,}135$; (C) $\mathrm{e}^{-3} = 0{,}05$;
   (D) $\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} - 2\,\mathrm{e}^{-3} = 0{,}404$; (E) $\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-3} = 0{,}45$