MV011 Statistika I

1. Úvod do teorie pravděpodobnosti

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Zásadní otázka

Jaký je rozdíl mezi **pravděpodobností** a **matematickou statistikou**?

Motivační příklady

Příklad 1

Házíme opakovaně mincí. Ze 100 náhodných pokusů: 56 × „hlava" a 44 × „orel".
Otázka: *je tato mince „spravedlivá"?*

Úloha **teorie pravděpodobnosti**:	matematicky popsat pravděpodobnostní model, kterým se řídí „spravedlivá" mince
Úloha **matematické statistiky**:	na základě naměřených hodnot (56 × „hlava" a 44 × „orel") rozhodnout, zda se mince řídí daným modelem nebo nějakým jiným modelem

Pokud se umíme na základě naměřených hodnot rozhodnout pro správný model, umíme pak odpovědět na další otázky:

- Jaká je pravděpodobnost, že ve 100 pokusech padne vždy „orel"? Je to vůbec možné?
- Jaká je pravděpodobnost, že toto nastane při 5, 10, 50 pokusech?
- Jaké je riziko, že jsme zvolili špatný model?

Motivační příklady

Příklad 2

Sledujeme počet vadných pixelů na 50 náhodně vybraných monitorech. Naměřené hodnoty jsou $(0, 3, 1, 2, 5, \dots)$.
Otázka: *Jaký je „očekávaný" počet vadných pixelů na monitorech naší firmy?*

Úloha **teorie pravděpodobnosti**:	matematicky popsat model, kterým se řídí počet vadných pixelů
Úloha **matematické statistiky**:	na základě naměřených hodnot rozhodnout, jaké jsou parametry tohoto modelu

Pokud se umíme na základě naměřených hodnot rozhodnout pro správný model, umíme pak odpovědět na další otázky:

- Jaké je procento monitorů s 0 vadnými pixely? (marketing)
- Jaké je procento monitorů s více než 5 vadnými pixely? (reklamace)
- Jaké je riziko, že jsme zvolili špatný model?

Motivační příklady

Příklad 3

Balicí linka plní 1 kg balíčky mouky. Sledujeme hmotnost 20 náhodně vybraných balíčků. Naměřené hodnoty v gramech jsou $(987{,}3; 991{,}1; 1009{,}2; \dots)$.
Otázka: *Jaká je „očekávaná" hmotnost jednoho balení?*

Úloha **teorie pravděpodobnosti**:	matematicky popsat model, kterým se řídí hmotnost jednoho balení
Úloha **matematické statistiky**:	na základě naměřených hodnot rozhodnout, jaké jsou parametry tohoto modelu

Pokud se umíme na základě naměřených hodnot rozhodnout pro správný model, umíme pak odpovědět na další otázky:

- Jaké je procento balíčků s hmotností větší než 1 kg? (ztráty)
- Jaká je přesnost plnicí linky? (srovnání více linek)
- Jaké je procento balíčků splňujících nějakou normu? (inspekce)

Teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti se zabývá matematickými modely náhodných dějů, jejichž výsledek není jednoznačně určen. Takovému náhodnému jevu budeme říkat **náhodný pokus**.

Výsledkem takového pokusu může být

- *číslo*, například počet bodů na horní straně hrací kostky při jednom vrhu, nebo počet vrhů hrací kostkou než padne šestka,
- naměřená *veličina*, například krevní tlak pacienta,
- *číselné vektory* a *posloupnosti*, časový průběh nějaké *funkce* na daném intervalu
- libovolný *kvalitativní ukazatel*, například vytažení koule dané barvy z osudí obsahující různorodé barvy, odpověď ano či ne respondenta při průzkumu mínění.

Náhodný pokus

O **náhodném pokusu** hovoříme tedy tehdy, když

- konáme pokus, jehož výsledek **není jednoznačně určen** podmínkami, za nichž je prováděn;
- přitom nás zajímají jen takové pokusy, u kterých sledovaný jev, označme jej A, vykazuje v opakovaných pokusech jakousi **stabilitu** (tzv. **statistickou stabilitu**), tj. relativní četnost $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ výskytu jevu A v posloupnosti n „nezávislých“ pokusů má tendenci při velkých hodnotách n se příliš neměnit

Dále již budeme předpokládat, že **náhodný** (nebo též **stochastický**) pokus je statisticky stabilní.

Značení

Ω **prostor elementárních jevů**, který chápeme jako množinu všech možných „nejjemnějších“ (tj. těch, které lze ještě rozlišovat) výsledků daného pokusu.
Předpokládá se, že

- $\Omega \neq \emptyset$ je neprázdná abstraktní množina,
- počet jejich prvků může být konečný, spočetný i nespočetný,
- je vyčerpávající, tj. obsahuje absolutně všechny možné výsledky,
- výsledky jsou neslučitelné.

ω **elementární jev**, který chápeme jako jednobodovou množinu. Například při jednom hodu kostkou jsou elementárními jevy jednotlivé možné výsledky, tj. padnutí 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Značení

$A, B, \ldots$ $A_1, \ldots, A_n$	**jevy** (značené velkými písmeny ze začátku abecedy) získáme množinovými operacemi nad elementárními jevy. Speciálními jevy jsou: $\emptyset$ **nemožný** jev Ω **jistý** jev
$\exp \Omega = 2^{\Omega}$	systém všech podmnožin množiny Ω.

Například při jednom hodu kostkou kromě elementárních jevů (padnutí 1, 2, 3, 4, 5, 6) můžeme uvažovat i další jevy jako je padnutí sudého či lichého čísla, padnutí čísla menšího než šest, apod.

Značení

Mezi jednotlivými jevy mohou platit různé vztahy a můžeme pomocí nich vytvářet nové jevy, například

$C = A \cup B$	jev C nastane, pokud nastane jev A nebo jev B
$C = A \cap B$	jev C nastane, pokud společně nastane jev A i jev B. Pokud $A \cap B = \emptyset$, jevy A a B se nazývají **neslučitelné**.
$C = A - B$	jev C nastane, pokud nastane jev A při vyloučení (nenastoupení) jevu B
$\overline{A} = \Omega - A$	jev $\overline{A}$ je jev opačný k jevu A
$C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$	jev C nastane, pokud nastane alespoň jeden z jevů $A_1, \dots, A_n, \dots$
$C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$	jev C nastane, pokud nastanou všechny jevy $A_1, \dots, A_n, \dots$

Jevové pole

Definice 1

Mějme neprázdnou množinu $\Omega \neq \emptyset$ a neprázdný systém podmnožin $\mathcal{A} \subseteq \exp \Omega$, pro který platí

$$
\begin{array}{rlcll}
(i) & \Omega \in \mathcal{A} & & & \\
(ii) & A \in \mathcal{A} & \Rightarrow & \overline{A} \in \mathcal{A} & \\
(iii) & A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A} & \Rightarrow & \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} & (\sigma \text{ aditivita}),
\end{array}
$$

pak $\mathcal{A}$ nazýváme **jevovou σ–algebrou na Ω**, dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme **jevové pole** (events field) a libovolný prvek $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodný jev** (random event) (vzhledem k $(\Omega, \mathcal{A})$).

Příklady jevového pole

Ad **Příklad 1**

prostor elementárních jevů: $\Omega = \{$„hlava“;„orel“$\}$

elementární jevy: $\omega_1 =$„hlava“, $\omega_2 =$„orel“

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \omega_2, \Omega\}$

interpretace jevů: $A = \emptyset$ ... „nepadne ani hlava ani orel“
nebo „padne hlava a současně orel“

$B = \omega_1$ ... „padne hlava“

$C = \omega_2$ ... „padne orel“

$D = \Omega$ ... „padne hlava nebo orel“

Příklady jevového pole

Ad **Příklad 2**:

Označme $N = 1600 \times 1200$ počet všech pixelů na monitoru.

prostor elem. jevů: $\Omega = \{$„0 vadných“;„1 vadný“;… „N vadných“$\}$

elementární jevy: $\omega_i =$„i vadných“, $i = 1, \ldots, N$

jevová $\sigma-$ algebra:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_0, \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \Omega\}$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_0, \omega_1, \{\omega_0, \omega_1\}, \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}, \{\omega_0, \omega_2, \ldots, \omega_N\}, \{\omega_2, \ldots, \omega_N\}, \Omega\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$$

interpretace jevů:

$A = \{\omega_0\} \cap \{\omega_1\} = \emptyset$ … „není žádný vadný a současně je jeden vadný pixel“

$B = \{\omega_0\} \cup \{\omega_1\}$ … „není žádný vadný nebo je jeden vadný pixel“

$C = \Omega - \{\omega_0\}$ … „alespoň jeden pixel je vadný“

Příklady jevového pole

Ad **Příklad 3**:

prostor elem. jevů: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

elementární jevy: $\omega = x$ (hmotnost balíčku v gramech)

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega) \subseteq 2^{\Omega}$ ... „borelovská“ $\sigma-$ algebra

interpretace jevů:

$A = \{638{,}8745\}$ ... „hmotnost balíčku je právě 638,8745 g“

$B = \{871\} \cup \{934{,}216\}$ ... „hmotnost balíčku je 871 g nebo 934,216 g“

$C = \langle 0; 978)$ ... „hmotnost balíčku je menší než 978 g“

Definice pravděpodobnostního prostoru

Definice 2 (Axiomatická definice pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole a P je množinová funkce definovaná na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi

(i) $P(\Omega) = 1$ (tj. P je **normovaná**)

(ii) pro $\forall\, A \in \mathcal{A}$ je $P(A) \geq 0$ (tj. P je **nezáporná**)

(iii) je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost náhodných jevů, které jsou po dvou neslučitelné, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

(tj. P je σ–**aditivní**)

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** (**probability**) a trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **pravděpodobnostním prostorem**.

Vlastnosti pravděpodobnosti

Věta 3

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor. Pak pravděpodobnost* P *má následující vlastnosti:*

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(B - A) = P(B) - P(A)$

(4) $\quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$

(5) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

(6) $\quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(7) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(8) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$

Klasická pravděpodobnost

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	konečná množina elementárních jevů
$\mathcal{A} = 2^\Omega$	$\mathcal{A}$ je systém všech podmnožin množiny Ω
P	pravděpodobnost libovolného jevu $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{A}$
	je rovna $P(A) = \sum\limits_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j})$, přitom platí $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.

Jestliže platí $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ mluvíme o **klasickém** pravděpodobnostním prostoru, ve kterém platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$ značí počet elementárních jevů v A.

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Ad **Příklad 1**

prostor elementárních jevů: $\Omega = \{$„hlava“;„orel“$\}$ konečná, tj. $|\Omega| = 2$

elementární jevy: $\omega_1 =$„hlava“, $\omega_2 =$„orel“

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \omega_2, \Omega\} = 2^\Omega$

Model „spravedlivé“ mince:

Pravděpodobnost: $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$

$$P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{2} = 0$$

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{2}{2} = 1$$

Ad **Příklad 2**

V případě, že by počet vadných pixelů byl náhodný a každá možnost stejně pravděpodobná $\Rightarrow$ klasická pst. V praxi však jsou psti různé a s klasickým modelem si nevystačíme. Je třeba modelovat jinak, např. Poissonovo rozdělení.

Ad **Příklad 3**

Ω není konečná.

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Příklad 4 (S čerty nejsou žerty)

Princezna si vybírá ženicha z 5 princů tak, že náhodně hodí zlaté jablko a ten, ke komu se dostane, stane se jejím ženichem.

prostor elem. jevů: $\Omega = \{$„princ 1“,...,„princ 5“$\}$ konečná, tj. $|\Omega| = 5$

elementární jevy: $\omega_i =$„princ i“, $i = 1, \ldots, 5$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \ldots, \omega_5, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \ldots, \Omega\} = 2^{\Omega}$

Model „spravedlivé“ koule:

Pravděpodobnost: $P(\omega_i) = \frac{1}{5}$

$$P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}) &= P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_3\} \cup \{\omega_5\}) \\ &= P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_5) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{5}{5} = 1$$

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Příklad 5 (Párty)

Tři kamarádi (Aleš, Boris, Cyril) přijedou svými auty na luxusní párty a odevzdají klíče na recepci, aby jim byla auta zaparkována. Roztržitý recepční si však nepoznačí klíče a tak neví, komu jaké vrátit. Kamarádi odcházejí společně, a tak se rozhodne, že jim klíče rozdá náhodně.

prostor elem. jevů:	$\Omega = \{$AaBbCc,AbBaCc,...,AbBcCa$\}$, tj. $\lvert\Omega\rvert = 6$, kde velké písmeno značí člověka a malé písmeno klíče
elementární jevy:	ω_i = posloupnost střídajících se 3 velkých a 3 malých písmen, $i = 1, \ldots, 6$
jevová $\sigma-$ algebra:	$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

Model „roztržitého" recepčního:

PST: $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$

A = „Pouze Cyril dostane svoje klíče" $\Rightarrow A = \{$AbBaCc$\}$, tj. $\lvert A\rvert = 1$

A = „Alespoň Cyril dostane svoje klíče" $\Rightarrow A = \{$AaBbCc$\} \cup \{$AbBaCc$\}$, tj. $\lvert A\rvert = 2$

Příklad 6 (Kulečník)

Sedm kamarádů si chce zahrát kulečníkový turnaj. Náhodně losují 3 dvojice, které spolu budou hrát v 1. kole. Hráč, který zůstane navíc, dostane „divokou“ kartu.

prostor elem. jevů: $\Omega = \{\{AB, CD, EF\}, \{AB, CD, EG\}, \dots, \{BC, DE, FG\}\}$,
tj. $|\Omega| = \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{3!} = 105$, kde velké písmeno značí hráče

elementární jevy: $\omega_i =$ množina tří dvojic hráčů, v nichž se žádný neopakuje a nezáleží na pořadí, $i = 1, \dots, 105$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

Model „náhodného“ losu:

PST: $P(\omega_i) = \frac{1}{105}$

$A =$ „Hráč A dostane divokou kartu“ $\Rightarrow A = \{\{BG, CD, EF\}, \{BF, CD, EG\}, \dots, \{BC, DE, FG\}\}$, tj. $|A| = 15$, $P(A) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$

$A =$ „Kamarádi A a B se potkají už v 1. kole“ $\Rightarrow A = \{\{AB, CD, EF\}, \{AB, CD, EG\}, \dots, \{AB, DE, FG\}\}$, tj. $|A| = 15$, $P(A) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$

Geometrická pravděpodobnost

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	borelovská podmnožina
$\mathcal{A} = \mathcal{B}^n(\Omega)$	$\mathcal{A}$ je nejmenší borelovská σ–algebra nad Ω
P	pravděpodobnost jevu A je rovna $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde Lebesgueova míra μ je konečná a kladná.

Příklady na geometrickou pst

Příklad 7

Náhodně vybereme reálné číslo z intervalu $\langle 0;1\rangle$.

prostor elem. jevů:	$\Omega = \langle 0;1\rangle$
elementární jevy:	$\omega = x,\ x \in \langle 0;1\rangle$
jevová $\sigma-$ algebra:	$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\langle 0;1\rangle)$

Model „náhodného" výběru čísla:

PST: $P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$, délka intervalu

$A = (a;b)$ nebo $A = \langle a;b\rangle$, $0 \le a < b \le 1$, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{b-a}{1}$

$A = \{x\}, P(A) = \mu(\{x\}) = 0$

Příklady na geometrickou pst

Příklad 8

Náhodně vybereme bod z množiny $\langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$.

prostor elem. jevů: $\Omega = \langle 0;1\rangle^2$

elementární jevy: $\omega = (x,y),\ x \in \langle 0;1\rangle,\ y \in \langle 0;1\rangle$

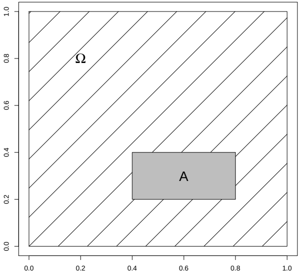
jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\langle 0;1\rangle^2)$

Model „náhodného" výběru bodu:

PST: $\mu(\Omega) = 1 \cdot 1$, obsah čtverce

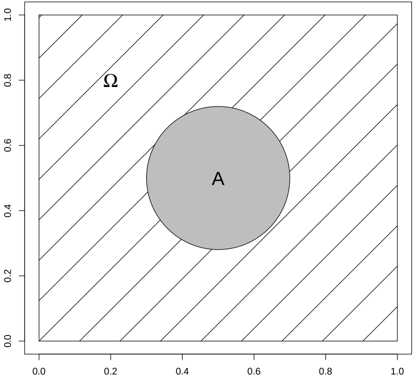
$A = (0,4;0,8) \times \langle 0,2;0,4\rangle$,

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(0{,}8-0{,}4)(0{,}4-0{,}2)}{1} = 0,08$



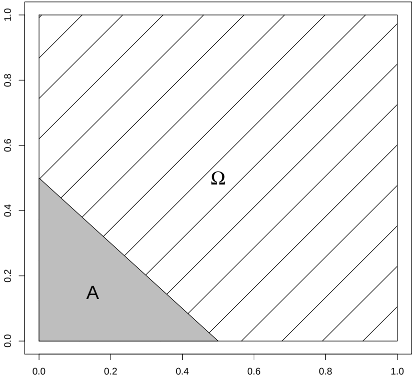
Příklady na geometrickou pst

$A = \{(x,y) \in \langle 0;1\rangle^2;\ (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \leq 0,2^2\}$
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi 0{,}2^2}{1} = 0,1257$



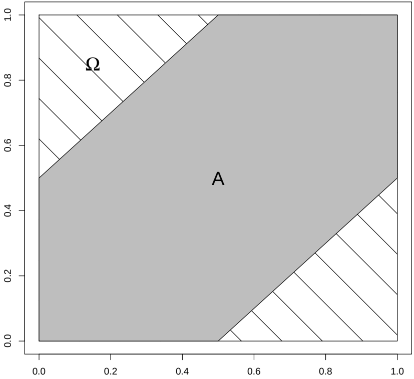
Příklady na geometrickou pst

$A = \{(x,y) \in \langle 0;1\rangle^2;\ x+y \leq 0,5\}$
$P(A) = \mu(A)/1 = 0,5^2/2 = 0,125$



Příklady na geometrickou pst

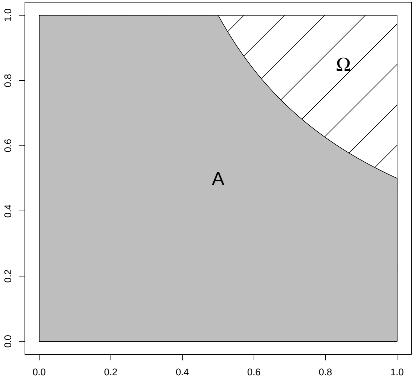
$A = \{(x, y) \in \langle 0; 1\rangle^2;\ |x - y| \leq 0,5\}$
$P(A) = \mu(A)/1 = 1 - 0,5^2 = 0,75$



Příklady na geometrickou pst

$A = \{(x, y) \in \langle 0; 1 \rangle^2;\ xy \leq 0,5\}$

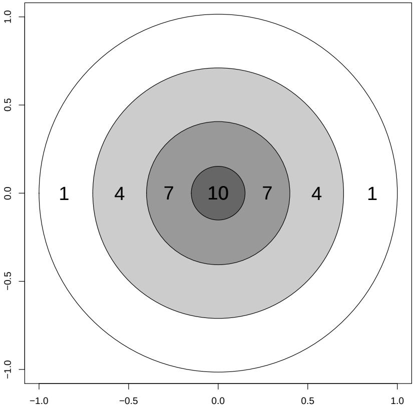
$P(A) = \mu(A)/1 = 0,5 + \int\limits_{0,5}^{1} \frac{1}{2x} dx = 0,8466$



Příklady na geometrickou pst

Příklad 9 (Střelec)

Střelec střílí na terč o poloměru 1 m a předpokládáme, že se vždy trefí. Poloměry jednotlivých výsečí jsou $0,15; 0,4; 0,7; 1$.



Příklady na geometrickou pst

prostor elem. jevů: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, tj. $\mu(\Omega) = \pi \cdot 1^2 = \pi$

elementární jevy: $\omega = (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$

Model „náhodného“ střelce:

PST: $P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi}{\pi} = 1$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 0,15^2\}$ ... „střelec trefí 10“

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 0,15^2}{\pi} = 0,0225$$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0,15^2 < x^2 + y^2 \leq 0,4^2\}$ ... „střelec trefí 7“

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 0,4^2 - \pi \cdot 0,15^2}{\pi} = 0,1375$$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0,4^2 < x^2 + y^2 \leq 0,7^2\}$ ... „střelec trefí 4“

$$P(C) = \frac{\mu(C)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 0,7^2 - \pi \cdot 0,4^2}{\pi} = 0,33$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0,7^2 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ... „střelec trefí 1“

$$P(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 1 - \pi \cdot 0,7^2}{\pi} = 0,51$$

Příklady na geometrickou pst

Jiný „pohled" na Příklad 9:

prostor elem. jevů: $\Omega = \{1, 4, 7, 10\}$, tj. $|\Omega| = 4$

elementární jevy: $\omega_i = 3i - 2,\ i = 1, \ldots, 4$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

- Jedná se o **klasickou** pst?
- Jak by se definoval „náhodný" střelec?

Psti elementárních jevů:

PST: $A = \{\omega_4\}$ … „střelec trefí 10"

$P(A) = 0,0225$

$B = \{\omega_3\}$ … „střelec trefí 7"

$P(B) = 0,1375$

$C = \{\omega_2\}$ … „střelec trefí 4"

$P(C) = 0,33$

$D = \{\omega_1\}$ … „střelec trefí 1"

$P(D) = 0,51$

Příklady na geometrickou pst

Příklad 10

Tramvaj jezdí v 10 minutových intervalech. Náhodně přijdeme na zastávku a měříme čas čekání na tramvaj.

prostor elem. jevů: $\Omega = \langle 0; 10 \rangle$
elementární jevy: $\omega = x, \; x \in \langle 0; 10 \rangle$
jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\langle 0; 10 \rangle)$

Model „náhodného“ příchodu:

PST: $\mu(\Omega) = 10$, délka intervalu

$A = (0; 2)$, ... „čekám méně než 2 minuty“

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$B = (6; 10)$, ... „čekám více než 6 minut“

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{10-6}{10} = 0,4$$