Cvičení MV011 Statistika I

4. Náhodná veličina a rozdělení pravděpodobnosti

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2019

Náhodná veličina

Náhodná veličina je zobrazení $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, každému elementárnímu jevu (výsledku pokusu) přiřazuje nějaké reálné číslo. Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X – tzv. **rozdělení pravděpodobnosti** – je popsáno níže uvedenými funkcemi. Rozlišujeme přitom dvě typické skupiny:

X **diskrétní** – nabývá hodnot z nejvýše spočetné množiny $M \subset \mathbb{R}$	X **spojitá** – nabývá hodnot z nespočetné množiny
pravděpodobnostní funkce $$p(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$	hustota pravděpodobnosti $f(x) = F'(x)$ $$P(X \in \text{interval od } a \text{ do } b) = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$
distribuční funkce je zprava spojitá $$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} p(u)$$	distribuční funkce je spojitá $$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$$

funkce pro práci s náhodnými veličinami:

- `d`*zkratka* – pravděpodobnostní funkce, resp. hustota pravděpodobnosti
- `p`*zkratka* – distribuční funkce
- `q`*zkratka* – kvantilová funkce
- `r`*zkratka* – generování vzorku z daného rozdělení pravděpodobnosti

zkratky některých rozdělení pravděpodobnosti:

- `binom` – binomické $Bi(n, \theta)$ (alternativní $A(\theta)$ – speciální případ $n = 1$)
- `geom` – geometrické $Ge(\theta)$
- `pois` – Poissonovo $Po(\lambda)$
- `unif` – rovnoměrné spojité $Ro(a, b)$
- `exp` – exponenciální $Ex(\lambda)$
- `norm` – normální (Gaussovo) $N(\mu, \sigma^2)$
- `gamma` – $Gamma(\mu, a)$
- `beta` – $Beta(a, b)$

V následujících příkladech určete a graficky znázorněte rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin. Zkoumejte pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu, distribuční funkci a význam parametrů.

Příklad 1

Náhodná veličina X udává, kolikrát padl líc, když 10$\times$ házíme mincí.

(A) $P(X = 5) = ?$, *(B)* $P(X \leq 5) = ?$, *(C)* $P(X > 6) = ?$, *(D)* $P(X \textit{ je liché}) = ?$

Příklad 2

Náhodná veličina X udává, kolikrát padla "6" když 20$\times$ házíme kostkou.

(A) $P(X = 5) = ?$, *(B)* $P(X < 5) = ?$, *(C)* $P(X \geq 6) = ?$, *(D)* $P(X \textit{ je liché}) = ?$

Příklad 3

Máme 5 karet s čísly od 2 do 6. V každém kole hry si náhodně jednu kartu vybereme. Pokud je na ní liché číslo, hra končí. Pokud je číslo sudé, kartu vrátíme, balíček zamícháme a hrajeme další kolo. Náhodná veličina X udává, kolik kol odehrajeme předtím, než vytáhneme kartu s lichým číslem.

(A) $P(X \leq 10) = ?$, *(B)* $P(X \geq 4) = ?$, *(C)* $P(5 \leq X \leq 8) = ?$

Příklad 4

Výpadek napájecího zdroje serveru nastává průměrně 1$\times$ za týden. Náhodná veličina X udává počet výpadků v období 2.–29. března.

(A) $P($*výpadek nenastane*$) = ?$, *(B)* $P($*nastanou nejvýše 4 výpadky*$) = ?$,
(C) $P($*nastane alespoň 1 výpadek*$) = ?$, *(D)* $P($*nastane 2–6 výpadků*$) = ?$

Příklad 5

Údaje o ceně akcií na Burze Cenných Papírů Praha jsou na webové stránce aktualizovány každých 10 minut. Náhodná veličina X popisuje dobu, jakou bude muset uživatel čekat než budou ceny uvedené na stránce aktualizovány, když se na webovou stránku podívá v náhodném okamžiku.

(A) $P($*2 minuty*$) = ?$, *(B)* $P($*nejvýše 5 minut*$) = ?$, *(C)* $P($*alespoň 2 minuty*$) = ?$,
(D) $P($*3 až 8 minut*$) = ?$

Příklad 6

Okamžiky příchodů požadavků zobrazení webové stránky na web server jsou náhodné a mají charakter řídkých jevů s průměrným počtem 4 požadavků za minutu. Náhodná veličina X popisuje dobu mezi příchody dvou po sobě následujících požadavků.

(A) $P(X < 15\ s) = ?$, *(B)* $P(30\ s\ \leq X \leq 90\ s) = ?$,

Příklad 7

Náhodná veličina X udává teplotu procesoru bez zátěže. Předpokládejte, že naměřená hodnota má normální rozdělení s parametry $\mu = 40\ ^\circ C$, $\sigma = 4\ ^\circ C$. Výpočty proveďte také pomocí standardizace.

(A) $P(X \leq 50) = ?$, *(B)* $P(X > 35) = ?$, *(C)* $P(35 < X < 45) = ?$,
(D) $P(\mu - 1{,}96\,\sigma < X < \mu + 1{,}96\,\sigma) = ?$

Příklad 8

Vykreslete grafy hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce Gamma rozdělení rozdělení pro různé hodnoty jejich parametrů.

Výsledky

1. 0,246; 0,623; 0,172; 0,5
2. 0,129; 0,769; 0,102; 0,5
3. 0,996; 0,130; 0,068
4. 0,018; 0,629; 0,982; 0,798
5. 0; 0,5; 0,8; 0,5
6. 0,632; 0,133
7. 0,994; 0,894; 0,789; 0,95