Cvičení MV011 Statistika I

7. Transformace, centrální limitní věta

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2019

Transformace, centrální limitní věta

- Hustota $f_Y(y)$ prosté transformace $Y = T(X)$ spojité náhodné veličiny $X \sim f_X(x)$:

$$f_Y(y) = f_X\Big(T^{-1}(y)\Big) \cdot \left|\frac{\partial T^{-1}(y)}{\partial y}\right|.$$

- Centrální limitní věta (Lindenbergova-Lévyho):
Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin s $EX_i = \mu$ a $DX_i = \sigma^2 > 0$. Potom:

$$U = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \ - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \ \overset{A}{\sim}\ N(0;1).$$

- Moivreova-Laplaceova věta:
Nechť Y_n udává počet úspěchů v n nezávislých opakováních alternativního náhodného pokusu s pravděpodobností úspěchu θ, tzn. $Y_n \sim Bi(n, \theta)$.
Potom:

$$\frac{Y_n \ - n\,\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}} \ \overset{A}{\sim}\ N(0;1).$$

Příklad 1

Doba Y, kterou zákazník stráví při odbavení u pokladny, se skládá z náhodné doby čekání X s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 2 min a z fixní doby odbavení 1 min. Určete hustotu $f_Y(y)$ pro dobu Y vyjádřenou v sekundách.

Příklad 2

Délka strany čtverce je náhodná veličina X s rovnoměrným spojitým rozložením na intervalu od 90 do 110 cm. Určete hustotu pravděpodobnosti obsahu Y tohoto čtverce a střední hodnotu EY.

Příklad 3

Náhodná veličina X udává počet projetých křižovatek v příkladu **1** *ze cvičení* **5***. Určete rozdělení pravděpodobnosti transformované veličiny $Y = (X-2)^2$.*

Příklad 4

Automatická linka plní láhve mléka. Je známo, že objemy mléka v láhvích jsou nezávislé a mají rovnoměrné spojité rozdělení v intervalu od 0,98 do 1,02 litru. Při kontrole se vyberou 4 láhve. Spočítejte pravděpodobnosti jevů:
(A) v nejméně naplněné láhvi bude alespoň 1,00 litru mléka;
(B) v nejvíce naplněné láhvi bude nejvýše 1,01 litru mléka.

Příklad 5

Náhodné veličina X má rovnoměrné spojité rozdělení na intervalu $[0; 2]$. Určete hustotu pravděpodobnosti transformované náhdné veličiny $Y = \ln(1 + X)$.

Příklad 6

Počet bodů z IQ testu považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením se střední hodnotou 100 a rozptylem 225. Jaké procento z účastníků testování dosáhne na více než 105 bodů?

Příklad 7

Pan Novák jezdí do práce a z práce tramvají, na zastávku přichází přichází zcela náhodně. Tramvaj jezdí v 10minutových intervalech, Určete pravděpodobnost, že pan Novák za 20 pracovních dní čekáním na tramvaj straví méně než 4 hodiny.

Příklad 8

V příkladu **7** *z minulého cvičení spočítejte hledanou pravděpodobnost pomocí Moivreovy-Laplaceovy věty.*

Příklad 9

Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech klasickou kostkou padne šestka nejvýše dvacetkrát? Použijte Moivreovu-Laplaceovu větu.

Příklad 10

Pomocí skriptu v R zkoumejte konvergenci k normálnímu rozdělení pravděpodobnosti v limitních větách.

Výsledky

2. $EY = 10\,033{,}33$
4. (A) 1/16; (B) 81/256
6. 0,37
7. 0,986
8. 0,9998
9. 0,846