



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

MODOS CUASINORMALES DE AGUJEROS NEGROS

Presentado por:

Dominik Pastuszka Malek

Curso Académico 2023/2024

Resumen

El principal objetivo de este trabajo es el estudio de los modos cuasinormales en agujeros negros, definidos como las frecuencias complejas asociadas a las oscilaciones amortiguadas que presentan estos objetos relativistas tras sufrir una perturbación.

Para ello, comenzaremos presentando los principales resultados de aplicar teoría de perturbaciones hasta orden lineal a la relatividad general, desarrollando así el marco teórico necesario con enfoque a geometrías sencillas y estáticas que presenten simetría esférica. Esto nos llevará a una ecuación diferencial de segundo orden de tipo Schrödinger, transformando el problema de obtener los modos cuasinormales en un problema de autovalores, que resolveremos a través del método de la iteración asintótica mediante un código numérico desarrollado en *Python*.

Finalmente, se discutirán los resultados obtenidos, comparándolos con los valores disponibles en la literatura y analizando el significado físico de los mismos, ofreciendo también un análisis más detallado de la validez y comportamiento del método utilizado.

Abstract

The main goal of this current work is the study of quasinormal modes in black holes, defined as the complex frequencies associated to the damped oscillations that these relativistic objects suffer after being subjected to some perturbation.

For this purpose, we first present the main results of applying linear order perturbation theory to general relativity, developing the necessary theoretical background while focusing on simple, static and spherically symmetric geometries. This will lead us to a second order Schrödinger-like differential equation, transforming the problem of obtaining the quasinormal modes into an eigenvalue problem, which we will solve using the asymptotic iteration method via a numerical code developed in *Python*.

Finally, the obtained results will be analyzed, comparing them to the values available in the literature and analyzing their physical meaning, as well as offering a more detailed analysis on the used method and its behaviour.

Índice

1. Introducción	4
2. Fundamento teórico	6
2.1. Algunos resultados importantes de la relatividad general	6
2.2. Teoría de perturbaciones en relatividad general	9
2.3. Estabilidad del agujero negro de Schwarzschild: potenciales efectivos, y las ecuaciones de Regge-Wheeler y Zerilli	11
3. Metodología	17
3.1. El método de la iteración asintótica	17
3.2. Breve descripción del código numérico desarrollado	20
4. Resultados	21
4.1. Modos cuasinormales del potencial de Pöschl-Teller	21
4.1.1. Potencial de Pöschl-Teller estándar	22
4.1.2. Comportamiento del método: complejidad temporal y dependencia con el punto de evaluación	23
4.1.3. Aproximación al potencial de Regge-Wheeler	25
4.2. Modos cuasinormales del agujero negro de Schwarzschild	27
4.2.1. Perturbaciones gravitacionales ($s = 2$)	28
4.2.2. Convergencia del método: dependencia con el punto de evaluación y error iterativo	30
4.2.3. Límite <i>eikonal</i> ($\ell \rightarrow +\infty$)	35
4.2.4. Perturbaciones escalares ($s = 0$) y electromagnéticas ($s = 1$)	36
5. Conclusiones	38
Referencias	39

1. Introducción

A pesar de haber sido predicha por A. Einstein poco después del desarrollo de la teoría de la relatividad general a principios del siglo XX, no fue hasta prácticamente cien años más tarde, en 2016, que las primeras observaciones directas de ondas gravitacionales han sido realizadas como resultado de la colaboración entre los observatorios de LIGO y Virgo [1]. Con esto comenzó una nueva era de estudiar el universo, la denominada astronomía gravitacional, la cual ha permitido obtener información completamente novedosa sobre algunos de los fenómenos más misteriosos y violentos de la astrofísica y cosmología que no pueden ser tratados con otros métodos [2].

Estas ondas, de carácter transversal con dos posibles polarizaciones y propagándose a la velocidad de la luz [3], son emitidas como consecuencia de una variación temporal en la dinámica de densidades de energía o materia, de manera que la curvatura del espaciotiempo que éstas generan se extiende por el resto del espacio [4]. Este fenómeno se manifiesta como deformaciones oscilatorias en el espaciotiempo, modificando así las distancias medidas por un observador entre dos objetos en caída libre (esto es, sin fuerzas externas aplicadas, salvo la aparente gravedad) [5].

Una de las principales diferencias que presentan las ondas gravitacionales con respecto de la radiación electromagnética es su débil interacción con la materia [6], lo cual hace que puedan propagarse prácticamente sin sufrir atenuación externa y nos permitan estudiar regiones del universo inaccesibles para los fotones [7]. Sin embargo, esta débil interacción también implica que son extremadamente difíciles de detectar, por lo cual es de gran importancia disponer de modelos teóricos que permitan predecir la forma de estas ondas según sea su foco emisor [8].

Una de las fuentes astrofísicas más energéticas de ondas gravitacionales (y que por tanto más fácil es de detectar) son las fusiones de sistemas binarios de agujeros negros, un proceso que puede dividirse en tres fases [9]. Durante la primera fase, llamada *inspiral*, los agujeros negros orbitan uno alrededor del otro mientras disipan energía poco a poco en forma de radiación gravitatoria. Esto hace que las órbitas sean cada vez mas pequeñas y las emisiones gravitatorias cada vez de mayor amplitud. La segunda fase, de fusión o *merger*, ocurre cuando la distancia entre los agujeros negros se reduce tanto que comienzan a interactuar, formando un horizonte de sucesos nuevo que engloba a ambos y formando otro agujero negro mayor. Durante esta fase la amplitud de las ondas emitidas llega rápidamente a su máximo.

Finalmente, ocurre la fase de estabilización o *ringdown*, proceso mediante el cual el agujero negro resultante trata de volver a su posición de equilibrio, disipando la energía sobrante como ondas gravitacionales con frecuencias características que decaen exponencialmente con el tiempo [7]. Justamente estas serán las frecuencias de los llamados modos cuasinormales que se estudiarán a lo largo de este trabajo.

El análisis de estos modos cuasinormales y sus frecuencias permite inferir directamente las propiedades de los agujeros negros involucrados [10], además de servir como campo de pruebas para estudiar la validez de la teoría de la relatividad de Einstein o de teorías alternativas [11]. Se ha encontrado también que estas frecuencias pueden contener información sobre el comportamiento a nivel cuántico de los agujeros negros, siendo especialmente interesantes para el desarrollo de teorías de gravedad cuántica [12]. Se espera que la siguiente generación de detectores de ondas gravitacionales, como por ejemplo el detector espacial LISA [13], cuente con la precisión suficiente para poder detectar por primera vez estas frecuencias.

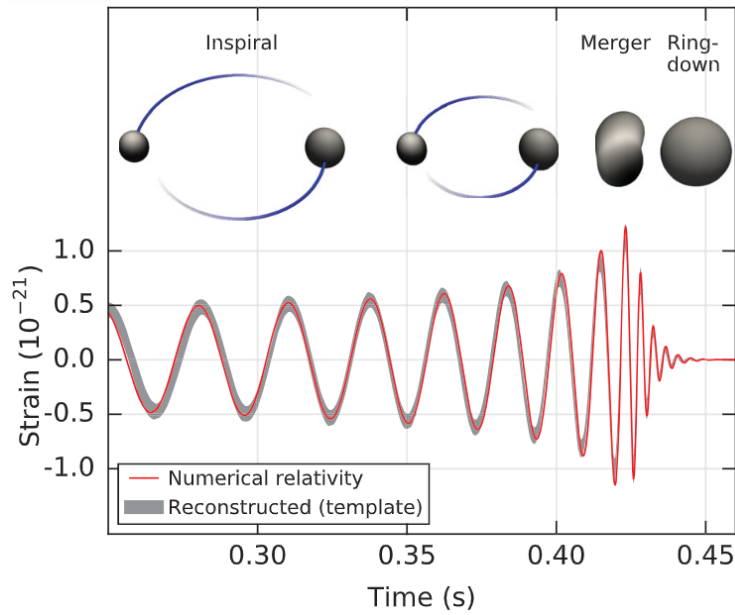


Figura 1: Esquema ilustrativo de las distintas fases que presenta la fusión de dos agujeros negros junto con la forma de las ondas gravitacionales emitidas en cada fase. En este trabajo, centraremos nuestra atención a la última fase, *ringdown*, donde las ondas (caracterizadas por el decaimiento exponencial de su amplitud con el tiempo) son emitidas siguiendo las frecuencias complejas de los modos cuasinormales conforme el agujero negro resultante de la fusión recupera su simetría esférica. Fuente de la imagen: B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) [1].

Mediante el estudio de la estabilidad de la solución de Schwarzschild (que describe los agujeros negros más sencillos), los trabajos de T. Regge y J. A. Wheeler [14], y posteriormente F. Zerilli [15], permitieron describir el problema de obtener los modos cuasinormales como un problema de autovalores, descrito por una ecuación diferencial de tipo Schrödinger con un potencial efectivo particular. Desde entonces, múltiples métodos para calcular las frecuencias de estos modos han sido desarrollados [16, 17]. Este trabajo se centrará en aplicar el método de la iteración asintótica [18] al cálculo de estas frecuencias para el agujero negro de Schwarzschild [19], estudiando en el proceso el comportamiento del método y su convergencia.

2. Fundamento teórico

2.1. Algunos resultados importantes de la relatividad general

La relatividad general, desarrollada por A. Einstein en la primera mitad del siglo XX, consigue explicar la interacción gravitatoria entre cuerpos masivos, no a través de una fuerza instantánea a distancia, sino como consecuencia de las propiedades y curvatura del llamado espaciotiempo. Este tejido tetradimensional sirve como fondo para todas las interacciones físicas y combina las tres coordenadas espaciales habituales con la coordenada temporal.

Partiendo de unos postulados básicos (considerando una velocidad finita y constante de la luz en el vacío, la independencia de las leyes de la física según el observador, y el principio de equivalencia), esta teoría afirma que un cuerpo debe provocar una deformación local en el espaciotiempo, de alguna forma proporcional a su masa o energía. Esta curvatura puede llegar a modificar las trayectorias de otros cuerpos, los cuales también curvarán el espaciotiempo a su alrededor.

De esta forma, el espacio y tiempo ya no se consideran entes estáticos, absolutos e independientes, sino que se han combinado en un único ente dinámico, que puede deformarse localmente y que interacciona activamente con los cuerpos o campos que contenga [20].

Para describir este espaciotiempo curvo hacemos uso de la métrica $g_{\mu\nu}$, un tensor simétrico de rango-2 que contiene toda la información sobre la geometría y curvatura del espaciotiempo. Este tensor es de gran importancia, ya que además de definir un producto escalar entre vectores, también permite subir y bajar los índices de otros tensores, por ejemplo:

$$g_{\nu\alpha} X_{\mu}^{\alpha} = X_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde se ha hecho uso del convenio de suma de Einstein (y que se usará a lo largo del trabajo), de manera que dos índices contraídos, es decir, repetidos en posiciones opuestas, implican una sumatoria sobre los mismos, esto es:

$$x_{\mu}y^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu}y^{\mu}.$$

Es habitual describir la métrica de un espacio a través de su elemento de línea, que no es más que la contracción de la métrica con los elementos infinitesimales de desplazamiento en unas coordenadas dadas:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

Sería interesante poder estudiar cómo varían los vectores y tensores en este espacio curvo. Sin embargo, la derivada parcial usual ∂_{μ} ya no sirve, ya que aplicada sobre un tensor general no resulta en otro tensor. Para poder definir

correctamente una derivada que sí transforme como un tensor, debemos hacer uso de la derivada covariante, la cual corrige el valor de la derivada parcial mediante un pseudo-tensor llamado conexión ¹, expresado mediante los símbolos de Christoffel definidos como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} [\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}], \quad (2.2)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la métrica, definida de forma que su contracción con ella misma resulta en la delta de Krönecker:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.3)$$

Con esto, ya podemos definir una derivada covariante ∇_{μ} que sí transforme como un tensor bajo cambios de coordenadas. Su aplicación a un tensor genérico será:

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} X^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} &= \partial_{\rho} X^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &+ \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu_1} X^{\alpha \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} + \dots + \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu_m} X^{\mu_1 \dots \alpha}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &- \Gamma_{\rho\nu_1}^{\alpha} X^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\alpha \dots \nu_n} - \dots - \Gamma_{\rho\nu_n}^{\alpha} X^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \alpha}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Con estas herramientas básicas, podemos definir una serie de tensores que describan matemáticamente la curvatura intrínseca de nuestro espaciotiempo. El primero de estos tensores de curvatura es el llamado tensor de Riemman $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda}$, que engloba toda la información sobre la manera en la que el espaciotiempo está deformado. Su expresión viene dada por:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}. \quad (2.5)$$

A partir de las contracciones del tensor de Riemann podemos calcular otros tensores de curvatura útiles, por ejemplo el tensor de Ricci, que puede expresarse en términos de los símbolos de Christoffel como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu} &= \mathcal{R}_{\mu\rho\nu}^{\rho} \\ &= \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Podemos también construir el escalar de Ricci (especialmente útil por ser un invariante escalar, cuyo valor será independiente de las coordenadas escogidas), que simplemente será la traza de dicho tensor:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Como ya se ha mencionado, la fuente de la curvatura del espaciotiempo son las densidades de materia y energía presentes en el mismo. Para cuantificar esto, se hace uso del tensor energía-momento $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, que caracteriza la distribución de estas cantidades en el espaciotiempo en términos macroscópicos.

¹Como es habitual, usaremos la conexión de Levi-Civita, en la cual los términos adicionales de torsión se anulan, simplificando considerablemente las expresiones, y que además presenta algunas propiedades importantes (simetría en los índices inferiores y compatibilidad con la métrica) de las que haremos uso más adelante.

Con esto, ya podemos escribir la relación que existe entre la materia o energía presente y la curvatura del espacio tiempo, la cual vendrá dada por las famosas ecuaciones de campo de Einstein:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde κ es una constante necesaria para recuperar las leyes de gravitación universal en el límite newtoniano, y Λ la llamada constante cosmológica.

Estas ecuaciones de Einstein representan 10 ecuaciones² diferenciales no lineales y acopladas entre sí, de forma que resolverlas de manera general implica una gran dificultad [20]. Afortunadamente, existen varias suposiciones que podemos realizar para simplificar considerablemente la forma de (2.8). En particular, vamos a considerar que estamos en vacío, por lo cual el tensor energía-momento será el tensor nulo ($\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$). Además, en este trabajo sólo consideraremos las soluciones llamadas asintóticamente planas³, con una constante cosmológica también nula ($\Lambda = 0$).

Bajo estas condiciones, las ecuaciones de Einstein se simplifican considerablemente, pudiendo escribirse como una condición únicamente para el tensor de Ricci:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

A lo largo de este trabajo vamos a centrar nuestro estudio en soluciones en vacío, estáticas, y con simetría esférica, es decir la solución de Schwarzschild, que representará la curvatura del espaciotiempo debida a un objeto masivo no rotante sin carga eléctrica situado en el origen. Esta métrica puede escribirse en coordenadas esféricas como⁴:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.10)$$

donde $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ es el elemento de línea de una 2-esfera S^2 , y con M la masa geométrica, una constante de integración relacionada con la masa física del cuerpo.

Esta solución es particularmente útil para describir la estructura del espacio-tiempo alrededor de estrellas o planetas. En estos casos, la masa del cuerpo está distribuida en una esfera de radio $R \gg 2M$, por lo cual solamente tiene sentido estudiar distancias radiales $r > R$, de forma que la métrica será regular en todos los puntos.

²Realmente son 16 ecuaciones (dadas por las posibles combinaciones de 2 índices libres, cada uno pudiendo tomar 4 valores distintos), aunque debido a la simetría de los tensores involucrados solamente 10 son independientes.

³Soluciones que tienden al espacio plano o de Minkowski para puntos muy alejados $r \gg 2M$.

⁴En este trabajo, consideraremos el sistema de unidades geométrico, tomando $c = G_N = 1$. Además, elegimos el convenio $g \sim (-, +, +, +)$ para los signos de la métrica.

Sin embargo, el estudio de objetos ultracompactos como agujeros negros, donde la masa está concentrada en un radio $R \ll 2M$, implica que la coordenada radial puede tomar todos los valores $r \in [0, \infty)$, lo cual hace que aparezcan ciertos puntos que provoquen la divergencia de algunas componentes de la métrica.

Estos puntos, llamados singularidades, ocurren para $r = \{0, 2M\}$. La singularidad en el radio de Schwarzschild $r = r_s = 2M$, a pesar de ser una singularidad de coordenadas ⁵, representa el horizonte de eventos o sucesos del agujero negro, una especie de frontera en cuya superficie la velocidad de escape se iguala a la de la luz, de manera que cualquier onda emitida u objeto acelerado no podrá escapar de su influencia, creando así una región causalmente inconexa del resto del universo. Justamente dentro de esta región se encuentra la singularidad física del agujero negro, en $r = 0$, que representa una región de curvatura infinita hacia la cual apuntarán todas las posibles trayectorias una vez cruzado el horizonte.

A pesar de ser ésta una solución completamente válida a las ecuaciones de Einstein en vacío, no ofrece información acerca de si los agujeros negros que predice pueden existir en la realidad. En su modelo de colapso estelar, J. R. Oppenheimer y H. Snyder [21] demostraron por primera vez que algunas estrellas al final de su ciclo de vida pueden acabar formando un agujero negro, aunque no se sabía si este objeto sería estable o si desaparecería poco después de formarse.

2.2. Teoría de perturbaciones en relatividad general

Una forma de estudiar la estabilidad de las métricas soluciones a las ecuaciones de Einstein es analizando su comportamiento tras someterlas a una pequeña perturbación. Esto puede conseguirse considerando una solución conocida, a la cual se le añade un término perturbativo suficientemente pequeño. De esta forma, si el sistema regresa al estado de equilibrio previo a la perturbación, podemos afirmar que es estable.

Comenzaremos considerando una métrica general conocida $g_{\mu\nu}$ (también llamada de fondo o *background*), solución de las ecuaciones de vacío (2.9), a la cual se le sumará un término perturbativo $\delta g_{\mu\nu}$. De esta forma, la nueva métrica total será:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Denotaremos con \tilde{X} objetos calculados mediante la métrica total, incluyendo la perturbación, mientras que δX representará las pequeñas desviaciones de estos objetos debido únicamente a la perturbación. Además, suponemos que el término perturbativo es lo suficientemente pequeño como para no alterar significativamente el comportamiento general del espaciotiempo, por lo cual seguiremos utilizando la métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ para subir y bajar índices, y las derivadas covariantes ∇_μ seguirán estando definidas mediante la conexión sin perturbar $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$.

⁵Que puede eliminarse considerando un cambio de coordenadas adecuado.

Con esta nueva métrica, y manteniendo siempre todos los términos a orden lineal en la perturbación, podemos calcular los nuevos tensores de curvatura perturbados, comenzando con los símbolos de Christoffel. Sustituyendo en su definición (2.2) la expresión de la nueva métrica (2.11), encontramos que los símbolos de Christoffel resultantes pueden ser escritos como la suma de una parte sin perturbar y otra debida únicamente a la perturbación:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} [\nabla_{\mu} \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_{\lambda} \delta g_{\mu\nu}],\end{aligned}\quad (2.12)$$

donde se ha tenido que utilizar la forma inversa de la métrica perturbada, que puede escribirse como:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

A partir de aquí, podemos obtener el tensor de Riemann sustituyendo directamente los símbolos de Christoffel perturbados (2.12) en la definición (2.5). De esta forma, el tensor de Riemann después de la perturbación seguirá cumpliendo la descomposición en una parte no perturbada y otra debido a la perturbación, y puede escribirse en términos de la conexión como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} &= \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} + \delta\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} \\ &= \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} + \partial_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \\ &\quad - \delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Podemos reescribir esta expresión combinando las derivadas parciales con las contracciones entre los símbolos de Christoffel, de manera que el tensor de Riemann perturbado queda:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} &= \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} + \delta\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} \\ &= \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} + \nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \nabla_{\nu} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

A partir de este resultado, es sencillo calcular el tensor de Ricci simplemente contrayendo los índices segundo y cuarto:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} &= \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \mathcal{R}_{\mu\nu} + \delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \\ &= \mathcal{R}_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\rho\nu}^{\rho} - \nabla_{\rho} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Desarrollando los términos, podemos reescribir la variación del tensor de Ricci explícitamente en términos de las componentes de la métrica perturbada:

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_{\rho} \nabla^{\rho} \delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \delta g_{\rho}^{\rho} - \nabla_{\mu} \nabla^{\rho} \delta g_{\rho\nu} - \nabla_{\rho} \nabla_{\nu} \delta g_{\mu}^{\rho}. \quad (2.17)$$

Finalmente, podemos insertar este nuevo tensor de Ricci en las ecuaciones de Einstein en vacío (2.9), de forma que:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} + \delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

El tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ calculado mediante la métrica de fondo sin perturbar $g_{\mu\nu}$ debe cumplir la condición $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ (ya que la métrica de fondo es solución de las ecuaciones de Einstein), por lo que necesariamente:

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_\rho \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_\rho{}^\rho - \nabla_\mu \nabla^\rho \delta g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \nabla_\nu \delta g_\mu{}^\rho = 0. \quad (2.19)$$

La expresión anterior se conoce como la ecuación de Einstein linealizada, y encapsula 10 ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, esta vez lineales en la perturbación $\delta g_{\mu\nu}$. Además, la presencia del operador d'Alembertiano ($\square = \nabla_\rho \nabla^\rho$) en el primer término indica que las soluciones obtenidas a partir de estas ecuaciones pueden representarse mediante ondas gravitacionales [20].

2.3. Estabilidad del agujero negro de Schwarzschild: potenciales efectivos, y las ecuaciones de Regge-Wheeler y Zerilli

Una vez obtenidos los tensores de curvatura perturbados y las ecuaciones de Einstein linealizadas, podemos regresar al problema de la estabilidad del agujero de Schwarzschild tomando la métrica de fondo dada por el elemento de línea (2.10). A priori, desconocemos por completo la forma que tiene la perturbación métrica δg , aunque podemos describirla de manera general con sus componentes mediante la siguiente forma matricial ⁶:

$$\delta g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cc|cc} h_{tt} & h_{tr} & h_{t\theta} & h_{t\varphi} \\ " & h_{rr} & h_{r\theta} & h_{r\varphi} \\ \hline " & " & h_{\theta\theta} & h_{\theta\varphi} \\ " & " & " & h_{\varphi\varphi} \end{array} \right). \quad (2.20)$$

La métrica de fondo de Schwarzschild, por ser esféricamente simétrica, presenta simetría bajo rotaciones sobre la 2-esfera S^2 , esto es, rotaciones arbitrarias sobre los ángulos $\{\theta, \varphi\}$. Por tanto, resulta lógico estudiar también cómo transforman las componentes de $\delta g_{\mu\nu}$ bajo estas mismas rotaciones, suponiendo siempre que la perturbación es lo suficientemente pequeña como para no alterar significativamente la simetría global del sistema. En particular, se puede demostrar que las componentes $\{h_{tt}, h_{tr}, h_{rr}\}$ transforman como escalares, $\{(h_{t\theta}, h_{t\varphi}), (h_{r\theta}, h_{r\varphi})\}$ transforman como dos 2-vectores, y las componentes $\{(h_{\theta\theta}, h_{\theta\varphi}, h_{\varphi\varphi})\}$ (junto con la componente simétrica $h_{\varphi\theta}$) transforman como un tensor 2×2 simétrico [22].

De esta forma, podemos descomponer la perturbación en una base que refleje la simetría de la métrica de fondo. Esta factorización puede realizarse considerando una función $h = h(t, r)$ que depende únicamente de las coordenadas temporal y radial, y otra función $Y(\theta, \varphi)$ que dependerá de las coordenadas angulares, de forma que cada componente podrá escribirse como:

$$h_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}(t, r) Y_{\mu\nu}(\theta, \varphi). \quad (2.21)$$

⁶Las entradas denotadas con (") indican elementos simétricos de la matriz (ya que la perturbación métrica debe ser una métrica también). Las líneas continuas dividen la matriz en componentes que transforman como escalares, vectores y tensores bajo rotaciones en S^2 .

Para que cada una de estas componentes transformen como deben bajo rotaciones angulares, vamos a considerar una base de armónicos esféricos escalares, y sus generalizaciones vectoriales y tensoriales, cuya superposición nos permita describir cualquier dependencia angular de la perturbación [23]. De esta manera, cada componente de la perturbación tendrá asociada un momento angular ℓ , con tercera componente m , y una paridad P según cómo transforme bajo inversiones espaciales ($x \rightarrow -x$, o bien en términos de ángulos $\theta \rightarrow \theta - \pi$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$). Las funciones que tengan paridad $(-1)^\ell$ se llamarán polares, y aquellas con paridad $(-1)^{\ell+1}$ serán llamadas axiales.

Para las componentes escalares de la perturbación, podemos utilizar los armónicos esféricos escalares habituales (que serán funciones de paridad polar). En cuanto a las componentes vectoriales, podemos construir una base de armónicos esféricos vectoriales formados a partir de los escalares tomando su gradiente sobre la 2-esfera, y calculando su contracción con el tensor completamente antisimétrico $\epsilon_\mu{}^\nu = \text{antidiag}(-\sin(\theta), \sin(\theta))$ ⁷ para obtener la componente axial [24]. De esta forma, obtenemos⁸:

$$\begin{aligned} \left(Y^{(p)}_\ell{}^m\right)_\mu(\theta, \varphi) &\propto \nabla_\mu Y_\ell{}^m(\theta, \varphi), \\ \left(Y^{(a)}_\ell{}^m\right)_\mu(\theta, \varphi) &\propto \epsilon_\mu{}^\nu \nabla_\nu Y_\ell{}^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

De igual modo, podemos construir también los armónicos esféricos tensoriales a partir de los vectoriales tomando de nuevo el gradiente sobre la 2-esfera, contrayendo con su métrica $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(1, \sin^2(\theta))$ y con el tensor totalmente antisimétrico $\epsilon_\mu{}^\nu$, para obtener así todas las posibles combinaciones y paridades [22]:

$$\begin{aligned} \left(Y^{(p_1)}_\ell{}^m\right)_{\mu\nu}(\theta, \varphi) &\propto \nabla_\mu \nabla_\nu Y_\ell{}^m(\theta, \varphi), \\ \left(Y^{(p_2)}_\ell{}^m\right)_{\mu\nu}(\theta, \varphi) &\propto \gamma_{\mu\nu} Y_\ell{}^m(\theta, \varphi), \\ \left(Y^{(a)}_\ell{}^m\right)_{\mu\nu}(\theta, \varphi) &\propto \epsilon_\mu{}^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\nu Y_\ell{}^m(\theta, \varphi) + \epsilon_\nu{}^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu Y_\ell{}^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.23)$$

De esta manera, siguiendo la factorización (2.21), cada componente podrá ser escrita como una suma de los armónicos esféricos correspondientes sobre todos los posibles momentos angulares $\ell \in [0, +\infty]$ y tercera componente $m \in [-\ell, \dots, +\ell]$, multiplicados por una función del tiempo y la coordenada radial (que también dependerá de ℓ).

⁷Utilizamos la notación de antidiagonal para referirnos a aquellos elementos situados en una matriz a lo largo de la diagonal tomada desde el elemento superior derecho hacia el inferior izquierdo. De esta forma,

$$\text{antidiag}(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

⁸El superíndice (a) o (p) en los armónicos esféricos denota su paridad, axial o polar respectivamente.

Además, debido a que estamos sumando sobre armónicos esféricos con distintas paridades en cada componente, podemos separar la perturbación métrica en una parte de paridad axial y otra de paridad polar [22]:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(p)} + h_{\mu\nu}^{(a)}. \quad (2.24)$$

Con esto ya podemos escribir la forma matricial general de las perturbaciones axiales y polares siguiendo los resultados de T. Regge y J. A. Wheeler [14]:

$$h_{\mu\nu}^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0 s_\theta^{-1} \partial_\varphi & h_0 s_\theta \partial_\theta \\ " & 0 & -h_1 s_\theta^{-1} \partial_\varphi & h_1 s_\theta \partial_\theta \\ " & " & h_2 s_\theta^{-1} (\partial_\theta \partial_\varphi - c_\theta s_\theta^{-1} \partial_\varphi) & \frac{1}{2} h_2 (s_\theta^{-1} \partial_\varphi^2 + c_\theta \partial_\theta - s_\theta \partial_\theta^2) \\ " & " & " & -h_2 (s_\theta \partial_\theta \partial_\varphi - c_\theta \partial_\varphi) \end{pmatrix} Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (2.25)$$

$$h_{\mu\nu}^{(p)} = \begin{pmatrix} H_0(1-2M/r) & H_1 & h_0 \partial_\theta & h_0 \partial_\varphi \\ " & H_2(1-2M/r)^{-1} & h_1 \partial_\theta & h_1 \partial_\varphi \\ " & " & r^2(K+G\partial_\theta^2) & r^2 G(\partial_\theta \partial_\varphi - c_\theta s_\theta^{-1} \partial_\varphi) \\ " & " & " & r^2[Ks_\theta^2 + G(\partial_\varphi \partial_\theta + s_\theta c_\theta \partial_\theta)] \end{pmatrix} Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (2.26)$$

dónde, siguiendo la notación de estos autores, los coeficientes ($h_0, h_1, h_2, H_0, H_1, K, G$) son funciones de la coordenada radial y temporal, y pueden depender de los momentos angulares ℓ y sus terceras componentes m .

Como podemos observar, las perturbaciones axiales presentan una forma (2.25) más simple comparada con las polares, con tan sólo tres funciones $h_{\{0,1,2\}}$. Por tanto, centraremos nuestro desarrollo teórico en estas perturbaciones axiales, siendo el procedimiento para las polares completamente análogo. Podemos simplificar algo más este problema si consideramos la libertad que existe en la elección de coordenadas para la perturbación métrica [25]. En particular, se puede encontrar que bajo el siguiente cambio infinitesimal de coordenadas:

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (2.27)$$

donde ξ^μ es un vector arbitrario del mismo orden que la perturbación, la métrica total perturbada a orden lineal presenta una forma equivalente:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}' = g_{\mu\nu} + \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu + \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}'. \quad (2.28)$$

Es decir, las métricas (2.28) y (2.11) representan la misma perturbación observada desde dos sistemas distintos de coordenadas, indicando así la presencia de una simetría de tipo gauge. Por tanto, mediante una elección adecuada del vector gauge ξ^μ podemos reducir el número de términos h a determinar. De hecho, V. Moncrief [26] demostró que es posible descomponer (2.25) en una parte correspondiente a los grados de libertad espúreos (que podremos elegir nulos debido a esta simetría de gauge), y otra parte independiente-gauge correspondiente a grados de libertad físicos con los que trabajaremos.

Adicionalmente, centraremos nuestro estudio en $\ell \geq 2$ que representará el valor mínimo de momento angular que permita la emisión de radiación gravitatoria, y tomaremos $m = 0$ debido a la simetría esférica del problema, lo cual simplificará el problema sin afectar a los resultados [23].

Con estas consideraciones, las componentes de la perturbación métrica axial pueden escribirse en términos de únicamente dos funciones $h_{\{0,1\}}$, independientes de la elección del gauge, como:

$$h_{\mu\nu}^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0 s_\theta^{-1} \partial_\varphi & h_0 s_\theta \partial_\theta \\ " & 0 & -h_1 s_\theta^{-1} \partial_\varphi & h_1 s_\theta \partial_\theta \\ " & " & 0 & 0 \\ " & " & " & 0 \end{pmatrix} Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (2.29)$$

Introduciendo esta forma de la perturbación métrica en las ecuaciones de Einstein en vacío (2.9), se obtiene un sistema de tres ecuaciones que puede reducirse a únicamente una ecuación en términos de h_1 [27, 23]. Para escribir esta ecuación de la forma más reducida posible, vamos a primero considerar un reescalado:

$$\Psi(t, r) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) h_1(t, r). \quad (2.30)$$

Se define también una coordenada tortuga o *tortoise*⁹ de la siguiente forma:

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (2.31)$$

Finalmente, vamos a suponer también que la perturbación es armónica en el tiempo, de manera que podemos descomponer cualquier perturbación como la superposición de modos con frecuencias discretas ω_n , en general complejas [22]:

$$\Psi(t, r) = e^{i\omega_n t} \psi(r). \quad (2.32)$$

Tras realizar estas transformaciones, llegamos a una ecuación diferencial radial que permite describir las perturbaciones de tipo axial (y, como veremos brevemente, también polar) para el agujero negro de Schwarzschild:

$$\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^{*2}} - \left(\omega^2 + V_{\text{eff}} \right) \psi(r) = 0, \quad (2.33)$$

donde el potencial efectivo en este caso para las perturbaciones axiales es el llamado potencial de Regge-Wheeler:

$$V_{\text{RW}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right]. \quad (2.34)$$

⁹Esta coordenada efectivamente desplaza el horizonte del agujero negro hacia $r^* \rightarrow -\infty$, manteniendo el infinito en $r^* \rightarrow +\infty$.

Cabe destacar que, a pesar de ser este potencial únicamente válido para perturbaciones gravitacionales, con *spin* $s = 2$, existe una generalización del potencial anterior para perturbaciones con *spin* s entero, es decir, perturbaciones escalares $s = 0$ y electromagnéticas $s = 1$. Aunque el proceso para obtener dicho potencial en estos casos es distinto al mostrado aquí, resulta que la ecuación final también toma la forma (2.33), y por tanto el potencial de Regge-Wheeler para cualquier perturbación de *spin* entero $s = \{0, 1, 2\}$ puede escribirse como [28]:

$$V_{\text{RW}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (1-s^2) \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (2.35)$$

Siguiendo un procedimiento muy similar, F. Zerilli [15] encontró que la ecuación correspondiente para perturbaciones polares también pueden escribirse de la forma (2.33), aunque esta vez con un potencial efectivo distinto llamado potencial de Zerilli, cuya forma para perturbaciones gravitacionales es:

$$V_Z = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 6\lambda^2Mr^2 + 18\lambda M^2r + 18M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2}, \quad (2.36)$$

donde se ha introducido el factor $\lambda = (\ell-1)(\ell+2)/2$ para simplificar su forma.

Las frecuencias complejas ω_n que se han considerado para la descomposición en modos de la parte temporal de la perturbación, obtenidas a partir de (2.33) con unas condiciones de contorno adecuadas que discutiremos más adelante, representarán los modos cuasinormales del agujero negro. Éstas serán las frecuencias que determinarán las oscilaciones que presentan estos objetos después de sufrir una perturbación, mediante las cuales disiparán la energía sobrante. Como demostraron S. Chandrasekhar y S. Detweiler [29], obtener los modos cuasinormales mediante el potencial de Regge-Wheeler o el potencial de Zerilli ofrece resultados equivalentes, propiedad conocida como isoespectralidad. Por tanto, a lo largo de este trabajo centraremos nuestro estudio en la ecuación de Regge-Wheeler debido a su forma más simple.

En la figura 2 podemos ver representados los potenciales de Regge-Wheeler y Zerilli para perturbaciones gravitacionales y algunos valores de momento angular. Se observa que ambos potenciales presentan una gran similitud, siendo prácticamente indistinguibles para valores de $\ell > 2$ y cuyo máximo ocurre prácticamente en los mismos puntos r^* . Además, ambos son definidos positivos y tienden a anularse en $r^* \rightarrow \pm\infty$, condiciones necesarias para la aparición de modos cuasinormales.

Para resolver la ecuación de Regge-Wheeler (2.33) con potencial efectivo (2.34), debemos en primer lugar imponer unas condiciones de contorno que reflejen la realidad física del sistema que estamos estudiando. En particular, recordamos que nada puede salir desde el interior del agujero negro, por tanto impondremos que en $r = 2M$, o equivalentemente $r^* \rightarrow -\infty$, las únicas perturbaciones posibles serán aquellas que representen ondas entrantes hacia el agujero negro. De igual modo,

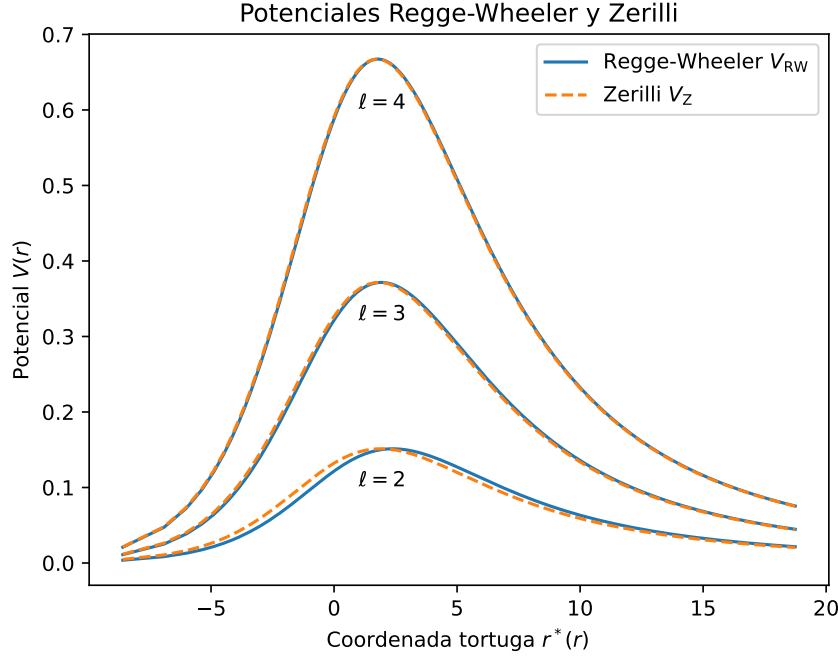


Figura 2: Representación gráfica de los potenciales Regge-Wheeler y Zerilli en función de las coordenadas tortuga r^* definidas por (2.31) para distintos valores de momento angular ℓ (considerando $M = 1, s = 2$).

queremos estudiar la radiación emitida por el agujero negro después de aplicarle una perturbación, por tanto en $r^* \rightarrow +\infty$ exigimos que no haya ondas entrantes hacia el sistema, siendo la única radiación presente la emitida por el agujero negro, sea saliente [27, 22].

La ecuación (2.33) en el límite $r^* \rightarrow \pm\infty$ admite soluciones de exponenciales en la coordenada r^* , de manera que estas condiciones de contorno pueden incluirse considerando un comportamiento asintótico de la función de onda según:

$$\begin{aligned} \psi(r) &\sim e^{-i\omega r^*} & (r^* \rightarrow -\infty), \\ \psi(r) &\sim e^{+i\omega r^*} & (r^* \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (2.37)$$

De esta forma, las soluciones ω_n de la ecuación (2.33) para el potencial de Regge-Wheeler (2.34) con las condiciones de contorno (2.37) representan las frecuencias de los modos cuasinormales del agujero negro de Schwarzschild. La parte real de estas frecuencias $\text{Re}(\omega_n)$ estará asociada a la frecuencia de oscilación de la onda, mientras que la parte imaginaria $\text{Im}(\omega_n)$ cuantificará el decaimiento exponencial de su amplitud. El modo fundamental ω_0 será el menos amortiguado, es decir, aquel cuyo módulo de la parte imaginaria $|\text{Im}(\omega_n)|$ sea mínimo [12]. Los modos con $\omega_{n>0}$ representan los armónicos o sobretonos, los cuales se ordenarán en orden creciente del módulo de la parte imaginaria, presentando así armónicos superiores un amortiguamiento mayor.

Se encuentra que para el caso del agujero negro de Schwarzschild, las únicas soluciones físicas se corresponden con partes imaginarias negativas, es decir, oscilaciones amortiguadas en el tiempo, lo cual indica que tras la perturbación, el agujero negro emite la energía amortiguadamente hasta retornar a su posición de equilibrio, demostrando así que se trata de una solución estable [23].

Por otro lado, se han encontrado también expresiones analíticas que permiten aproximar los modos cuasinormales del agujero negro de Schwarzschild en casos límite donde el orden del armónico n o bien el momento angular ℓ sean muy grandes. En particular, para el límite $n \rightarrow +\infty$, se tiene [27, 12]:

$$\omega_n \simeq \frac{\ln(3)}{8\pi} - i \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.38)$$

Mientras que en el límite de momentos angulares grandes $\ell \rightarrow +\infty$, también conocido como límite *eikonal*, los modos cuasinormales pueden aproximarse mediante [30, 31]:

$$\omega_n \simeq \frac{1}{3\sqrt{3}M} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) - i \frac{1}{3\sqrt{3}M} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.39)$$

3. Metodología

3.1. El método de la iteración asintótica

Originalmente desarrollado por Ciftci et al. [18] para ecuaciones de tipo Schrödinger, el método de la iteración asintótica (*asymptotic iteration method* o AIM) es un método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas de segundo orden que toman la forma:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \lambda_0(x) \frac{d\phi(x)}{dx} + s_0(x)\phi(x), \quad (3.1)$$

donde los coeficientes $\lambda_0(x) \neq 0$, $s_0(x)$ son funciones infinitamente diferenciables (o, al menos, con suficientes derivadas continuas).

El fundamento de la iteración asintótica reside en la simetría que presenta el lado derecho de la ecuación al aplicar sucesivas derivadas a ambos miembros de la igualdad, permitiendo reescribir estas nuevas ecuaciones con una forma similar a la original, y definiendo así para cada iteración los nuevos coeficientes $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$.

Puede comprobarse que tras derivar n veces ambos lados de la ecuación (3.1), se obtiene:

$$\frac{d^{n+2}\phi(x)}{dx^{n+2}} = \lambda_n(x) \frac{d\phi(x)}{dx} + s_n(x)\phi(x), \quad (3.2)$$

donde las nuevas funciones coeficientes se pueden obtener de manera iterativa en función de las anteriores:

$$\begin{aligned}\lambda_n(x) &= \frac{d\lambda_{n-1}(x)}{dx} + \lambda_0(x) \lambda_{n-1}(x) + s_{n-1}(x), \\ s_n(x) &= \lambda_{n-1}(x) s_0(x) + \frac{ds_{n-1}(x)}{dx}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Para que el método converja, debe ocurrir que los coeficientes $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$ cada uno tienda a un valor concreto, o equivalentemente, que la razón entre ambos coeficientes se mantenga constante en iteraciones sucesivas (tras haber realizado un número suficiente de iteraciones) con valor $\alpha(x)$, es decir:

$$\frac{s_n(x)}{\lambda_n(x)} = \frac{s_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}(x)} = \alpha(x).\tag{3.4}$$

Si se cumple esta condición, la solución general de la ecuación diferencial será:

$$\phi(x) = \exp\left(-\int^x \alpha(t) dt\right) \left[C_2 + C_1 \int^x \exp\left(\int^t (\lambda_0(\tau) + 2\alpha(\tau)) d\tau\right) dt \right].\tag{3.5}$$

Esta solución se corresponde con las autofunciones de la ecuación diferencial [32], donde C_1 y C_2 son constantes de integración y pueden hallarse mediante normalización [19]. Sin embargo, nuestro interés está en obtener los autovalores, los cuales se corresponderán con las frecuencias complejas de los modos cuasinormales que queremos calcular. Para obtenerlos, reescribimos la condición de convergencia (3.4), obteniendo así la llamada condición de cuantización:

$$\delta_n = s_n(x)\lambda_{n-1}(x) - s_{n-1}(x)\lambda_n(x) = 0.\tag{3.6}$$

Esta condición de cuantización (3.6), una vez evaluada en un punto $x = x_0$, nos dará un polinomio cuyas raíces serán los autovalores de la ecuación diferencial. En algunos casos, δ_n no dependerá de la variable x , por lo cual podemos asegurar que la solución será exacta. En caso contrario, debemos evaluar la expresión en un punto x_0 que proporcione resultados físicos, los cuales no deben depender (al menos dentro de un rango) del punto de evaluación [33].

Este método presenta una desventaja importante en cuanto a su implementación numérica, y es que realizar sucesivas derivadas de una función de manera simbólica es muy demandante a nivel computacional, ya que éstas suelen crecer rápidamente en complejidad, mientras que hacerlo numéricamente puede llevar a errores de precisión [34].

Para solventar esto, H. Cho et al. [19] introdujeron una mejora al método, dando lugar al método de la iteración asintótica mejorado (*improved* o IAIM). Esta mejora se basa en la expansión en serie de Taylor de las funciones $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$ en torno

del punto de evaluación x_0 . De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_n(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_{i,n}(x - x_0)^i, \\ s_n(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_{i,n}(x - x_0)^i,\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde $c_{i,n}$ y $d_{i,n}$ son los coeficientes de Taylor de orden i para el coeficiente correspondiente a la n -ésima iteración. Si ahora reemplazamos esto en la relación de recursividad de los coeficientes (3.3), tenemos:

$$\begin{aligned}c_{i,n} &= (i+1)c_{i+1,n-1} + d_{i,n-1} + \sum_{k=0}^i c_{k,0}c_{i-k,n-1}, \\ d_{i,n} &= (i+1)d_{i+1,n-1} + \sum_{k=0}^i d_{k,0}c_{i-k,n-1}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Finalmente, la condición de cuantización (3.6) puede reescribirse en términos de estos nuevos coeficientes como:

$$\delta_n = d_{0,n}c_{0,n-1} - d_{0,n-1}c_{0,n} = 0.\tag{3.9}$$

De esta forma, para realizar n iteraciones ya no hace falta calcular las derivadas n -ésimas de $\lambda_0(x)$ y $s_0(x)$, sino que basta con expandirlos en serie y operar con sus coeficientes.

Podemos pensar en los valores $c_{i,n}$ y $d_{i,n}$ como elementos de dos matrices C y D (3.10), de tamaño $n \times n$, con la primera columna $c_{i,0}$ y $d_{i,0}$ dada por los coeficientes de orden i de la expansión inicial de $\lambda_0(x)$ y $s_0(x)$, y con las demás entradas calculadas a partir de la relación de recursividad (3.8). Esto implica que, para realizar n iteraciones, necesitamos calcular primero la expansión en serie de los coeficientes iniciales hasta orden n [32].

$$C = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & \mathbf{c_{0,n-1}} & \mathbf{c_{0,n}} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n,n} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \cdots & \mathbf{d_{0,n-1}} & \mathbf{d_{0,n}} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,n-1} & d_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n,0} & d_{n,1} & \cdots & d_{n,n-1} & d_{n,n} \end{pmatrix}.\tag{3.10}$$

Además, para obtener la condición de cuantización (3.9) sólo necesitamos calcular los elementos de la primera fila de las dos últimas columnas (resaltados en negrita), los cuales debido a la relación iterativa que existe entre las entradas (3.8), se pueden calcular únicamente a partir de los elementos sobre y por encima de la antidiagonal (esto es, para cada columna j solamente necesitamos calcular hasta la fila i tal que $(i+j) \leq n$) [32].

Una vez obtenida la condición de cuantización (3.9) para el método mejorado, al igual que para el método original, podemos hallar los autovalores de la ecuación diferencial (3.1) simplemente calculando las raíces del polinomio encontrado.

3.2. Breve descripción del código numérico desarrollado

Para implementar el método de la iteración asintótica y calcular los modos cuasinormales numéricamente, se ha desarrollado un código numérico que toma como entradas las expresiones simbólicas de los coeficientes iniciales (λ_0 , s_0) y realiza n iteraciones, escribiendo en cada una las frecuencias encontradas. El código completo puede encontrarse en el siguiente repositorio:

<https://github.com/domipm/TFG-QNMs-BH>

Este código está escrito en el lenguaje de *Python* debido al gran número de librerías compatibles que permiten tanto el cálculo simbólico como herramientas matemáticas de gran precisión. Se han usado principalmente cuatro librerías externas: *numpy*, una librería esencial para realizar manipulación numérica sencilla; *sympy* y *symengine* para realizar cálculos simbólicos (principalmente derivadas y expansiones en series de Taylor) y trabajar así con expresiones matemáticas sin necesidad de convertirlas a valores numéricos, de manera que no se pierde precisión debido a aproximaciones internas; y *mpmath*, que permite realizar cálculos numéricos de alta precisión que principalmente será usado para obtener las raíces del polinomio característico.

El código principal *aim_qnm.py* es el que incluye todas las funciones necesarias para el cálculo de los modos cuasinormales, el cual debemos incluir en los códigos para cada caso específico, los cuales se pueden encontrar en las sub-carpetas del repositorio anterior.

La clase *aim_solver* se debe inicializar pasando los parámetros iniciales λ_0 y s_0 obtenidos previamente de manera manual (en función únicamente de la coordenada x general y las frecuencias ω , evaluando todos los demás valores numéricamente), expresando la ecuación diferencial que se quiera calcular de la forma (3.1). Además, también se debe incluir la variable x , el punto de evaluación x_0 , y el número de iteraciones que vamos a realizar, n_{iter} . Una vez creada una instancia de la clase, se debe llamar la función *(i)aim_init* que inicializa el método de la iteración asintótica (ya sea el método AIM o el mejorado IAIM), la cual crea todos los vectores necesarios y calcula la expansión en serie de potencias de los parámetros iniciales.

Tras esto, llamando la función *(i)aim_solve* hace que comience el cómputo de los modos cuasinormales con el método elegido siguiendo el procedimiento explicado en la sección anterior. De esta forma, en cada iteración realizada se obtiene la condición de cuantización δ_n , que nos dará un polinomio en ω cuyas raíces serán las frecuencias complejas. Se ha decidido obtener las raíces de este polinomio para cada iteración, de manera que podemos observar claramente cómo varían los valores en función de la iteración realizada y asegurarnos que los resultados se deben a la convergencia del método. Alternativamente, para ahorrar recursos y tiempo de cálculo, dichas raíces se podrían calcular únicamente para la última iteración, aunque en nuestra aplicación no es necesario ya que el tiempo de cálculo no es excesivo.

De todas las raíces obtenidas, solamente consideraremos aquellas que tengan parte real positiva y parte imaginaria negativa, de manera que representen modos cuasinormales. Además, ordenaremos las soluciones en orden creciente del módulo de la parte real, de forma que la frecuencia del modo fundamental ω_0 sea la menor, correspondiendo a la frecuencia menos amortiguada.

Se ha incluido también un filtro adicional que ignore soluciones con parte real mayor a la unidad. Esto se debe a que, en los casos estudiados a lo largo de este trabajo, todos los modos cumplen $\text{Re}(\omega_n) < 1$ (hasta orden $n = 5$ como máximo). Por tanto, este filtrado adicional nos permite eliminar frecuencias "residuales" que puedan aparecer al evaluar el método en posiciones alejadas a la región de convergencia (trataremos este comportamiento en secciones posteriores).

Una vez obtenidas y filtradas estas soluciones, consideramos soluciones físicamente relevantes solo aquellas que converjan a un valor estable en iteraciones, no dependan (fuertemente) del punto de evaluación, y cuyo valor pueda identificarse con los modos ya calculados mediante otros métodos en la literatura.

4. Resultados

4.1. Modos cuasinormales del potencial de Pöschl-Teller

Para comenzar con el cálculo de los modos cuasinormales, se ha elegido un potencial relativamente sencillo cuyos modos cuasinormales pueden ser resueltos de manera analítica, sirviéndonos como un modelo para verificar que los resultados obtenidos con el método son correctos. Para ello, se ha tomado el potencial de Pöschl-Teller, que además de disponer de una solución analítica cerrada ¹⁰, permite ser utilizado para aproximar otros potenciales similares como puede ser, por ejemplo, el potencial de Regge-Wheeler correspondiente al agujero negro de Schwarzschild [36]. Comenzamos considerando la siguiente forma generalizada del potencial de Pöschl-Teller [37, 11, 35]:

$$V(x) = V_0 \text{sech}^2(\alpha x), \quad (4.1)$$

donde se han introducido los parámetros V_0 y α que nos permitirán ajustar la altura y ancho del potencial, respectivamente. Insertando este potencial en la ecuación de tipo Schrödinger (2.33) encontramos:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\omega^2 - V_0 \text{sech}^2(\alpha x)\right) \psi(x) = 0. \quad (4.2)$$

Esta ecuación puede resolverse de manera analítica (algo que utilizaremos para comprobar los resultados obtenidos), de modo que la expresión para el modo n -ésimo tendrá la forma general [11]:

$$\omega_n = \sqrt{V_0 - \frac{\alpha^2}{4}} - i\alpha \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (4.3)$$

¹⁰Para una discusión más detallada acerca de potenciales con soluciones analíticas conocidas, véase [35].

Para aplicar el método de la iteración asintótica a este potencial, primero debemos reescribir la ecuación anterior en la forma (3.1). Para ello, seguiremos los pasos mostrados en [19], modificados ligeramente para tener en cuenta los parámetros libres introducidos. Primero, consideraremos una transformación que acote la variable a un dominio finito, simplificando también la función hiperbólica:

$$x = \frac{1}{\alpha} \operatorname{atanh}(y) \longleftrightarrow y = \tanh(\alpha x). \quad (4.4)$$

Este cambio de variable nos lleva de una coordenada $x \in (-\infty, +\infty)$ a una acotada $y \in (-1, +1)$, manteniendo el máximo del potencial en $x_0 = y_0 = 0$. Así, se tiene:

$$\alpha^2(1-y^2)^2 \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - 2\alpha^2 y(1-y^2) \frac{d\psi(y)}{dy} + \left(\omega^2 - V_0(1-y^2) \right) \psi(y) = 0. \quad (4.5)$$

Ahora, debemos también incluir las condiciones de contorno adecuadas para obtener los modos cuasinormales, esto es, la función de onda $\psi(y)$ debe representar ondas puramente entrantes hacia el horizonte (para $y \rightarrow -\infty$) y ondas puramente salientes hacia el infinito (para $y \rightarrow +\infty$). Esto puede considerarse teniendo en cuenta la expresión asintótica en forma de exponenciales de la función de onda, mostrada en (2.37). De esta forma, la función de onda puede escribirse como el producto:

$$\psi(y) = (1-y)^{-\frac{i\omega}{2\alpha}} (1+y)^{-\frac{i\omega}{2\alpha}} \phi(y) = (1-y^2)^{-\frac{i\omega}{2\alpha}} \phi(y). \quad (4.6)$$

Incorporando estas condiciones de contorno, y después de algunas simplificaciones algebraicas, llegamos a una ecuación diferencial de la forma (3.1) que cumple todos los requisitos necesarios para aplicarle el método de la iteración asintótica:

$$\frac{d^2\phi(y)}{dy^2} = \left[\frac{2y(1-i\omega)}{(1-y^2)} \right] \frac{d\phi(y)}{dy} + \left[\frac{V_0 - \omega(\omega + i\alpha)}{\alpha^2(1-y^2)} \right] \phi(y). \quad (4.7)$$

De aquí ya podemos identificar las funciones coeficientes λ_0 y s_0 del método. Además, se observa que la dependencia con los parámetros V_0 y α está incluida únicamente en el parámetro s_0 , mientras que λ_0 es independiente de los mismos.

4.1.1. Potencial de Pöschl-Teller estándar

Vamos a comenzar con un caso sencillo cuyos resultados pueden escribirse de manera exacta. Tomando $V_0 = 1/2$ y $\alpha = 1$, se recuperan los resultados mostrados en [19]:

$$\lambda_0 = \frac{2y(1-i\omega)}{1-y^2}, \quad s_0 = \frac{1-2i\omega-2\omega^2}{2(1-y^2)}. \quad (4.8)$$

Este caso es particularmente útil ya que las frecuencias obtenidas serán valores exactos (de forma que no tenemos que preocuparnos, al menos por ahora, por la

precisión numérica). Además, se sabe que los modos encontrados deben obedecer la siguiente relación [19] (consistente con la expresión (4.3)):

$$w_n = \frac{1}{2} - i \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.9)$$

La implementación numérica del método desarrollada en este trabajo corrobora esta relación, permitiendo obtener los 22 primeros modos mediante el método IAIM. Para un número superior de iteraciones, el tiempo necesario de cálculo aumenta considerablemente. Estos resultados también han sido obtenidos mediante el método AIM, aunque por ser más costoso a nivel computacional, solamente se han podido calcular las 10 primeras frecuencias.

Además, se observa que el número de soluciones obtenidas aumenta conforme aumentamos las iteraciones realizadas. Esto se debe a que el orden del polinomio característico, obtenido a través de las condiciones de cuantización (3.6) y (3.9), aumenta con el número de iteraciones.

La implementación numérica de este método encuentra todas las raíces del polinomio, y por tanto frecuencias cuasinormales, de manera exacta, lo cual no nos permite estudiar la convergencia del método. Sin embargo, sí podemos estudiar su comportamiento en función del punto de evaluación y su complejidad temporal.

4.1.2. Comportamiento del método: complejidad temporal y dependencia con el punto de evaluación

Debido a que los modos cuasinormales de este potencial han sido encontrados con su valor exacto dado por (4.3), no podemos estudiar el error intrínseco del método ni su convergencia. Sin embargo, este caso tan sencillo nos puede resultar útil para obtener una comparativa entre el tiempo necesario para obtener el mismo número de modos cuasinormales utilizando ambos métodos, el método original AIM y el mejorado IAIM, estudiando así su complejidad temporal.

En la figura 3 podemos encontrar una representación del tiempo de cálculo necesario para cada método en función de las iteraciones realizadas N . Como se puede observar, inicialmente ambos métodos tardan un tiempo similar, aunque conforme aumentamos el número de iteraciones realizadas la diferencia entre ambos métodos se hace evidente.

El método AIM sólo es capaz de realizar unas 10 iteraciones antes de verse limitado por falta de recursos computacionales, y su complejidad temporal aumenta a un ritmo mayor que una simple exponencial $t_{\text{AIM}} \gtrsim \exp(N)$. El método IAIM nos permite realizar un número mucho mayor de iteraciones, obteniendo así más modos cuasinormales, y su complejidad temporal parece seguir una exponencial $t_{\text{IAIM}} \sim \exp(N)$, de forma que el tiempo necesario de cálculo crece a un ritmo

menor que en el caso del AIM.

Por estas razones, y considerando que los resultados obtenidos con ambos métodos son exactamente iguales, en lo que queda de trabajo centraremos nuestro estudio en el método mejorado IAIM, de manera que todos los resultados mostrados serán obtenidos a través de éste.

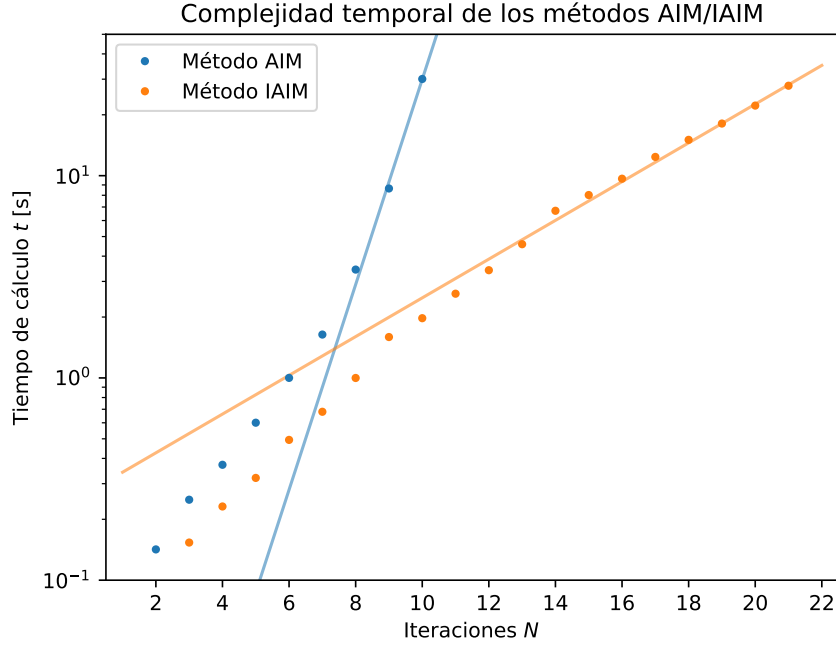


Figura 3: Tiempo de cálculo necesario en función del número de iteraciones realizadas para el método AIM original y el método mejorado IAIM. La línea continua muestra un ajuste realizado por mínimos cuadrados mediante una función de tipo exponencial.

Por otro lado, se ha estudiado también la dependencia que presentan las frecuencias encontradas con el punto de evaluación. Como ya mencionamos, los modos cuasinormales deben ser independientes de la posición sobre la cual evaluamos el método. No obstante, en nuestra implementación, se ha encontrado que esto sólo es así para algunos puntos suficientemente cercanos al máximo del potencial. Esto puede verse reflejado en la figura 4, donde se muestra cómo las frecuencias obtenidas de los cinco primeros modos varían significativamente según cuál sea el punto de evaluación considerado.

Se puede observar la existencia de un rango de convergencia, definido como el intervalo de posiciones donde las frecuencias obtenidas presentan una dependencia débil con el punto de evaluación. Este rango ofrece la mejor convergencia del método, y permite calcular el mayor número posible de armónicos. Este comportamiento parece indicar que existe un punto preferido de evaluación del método, en el máximo del potencial $x_0 = x_{\max} = 0$, que proporciona los mejores resultados.

Evaluar el método en posiciones suficientemente alejadas del máximo afectará la

exactitud de los resultados obtenidos, y evaluando fuera del rango de convergencia hará que los resultados no presenten una convergencia clara y por tanto no puedan ser considerados válidos ¹¹.

Se observa también que este rango de convergencia es mayor para el modo fundamental ω_0 , y decrece conforme consideramos armónicos de orden superior $\omega_{n>0}$. Algunos modos (como es el caso de ω_3 y ω_4) desaparecen para posiciones muy alejadas, y sólo pueden ser calculados sobre el punto $x_0 = 0$ o en su vecindad.

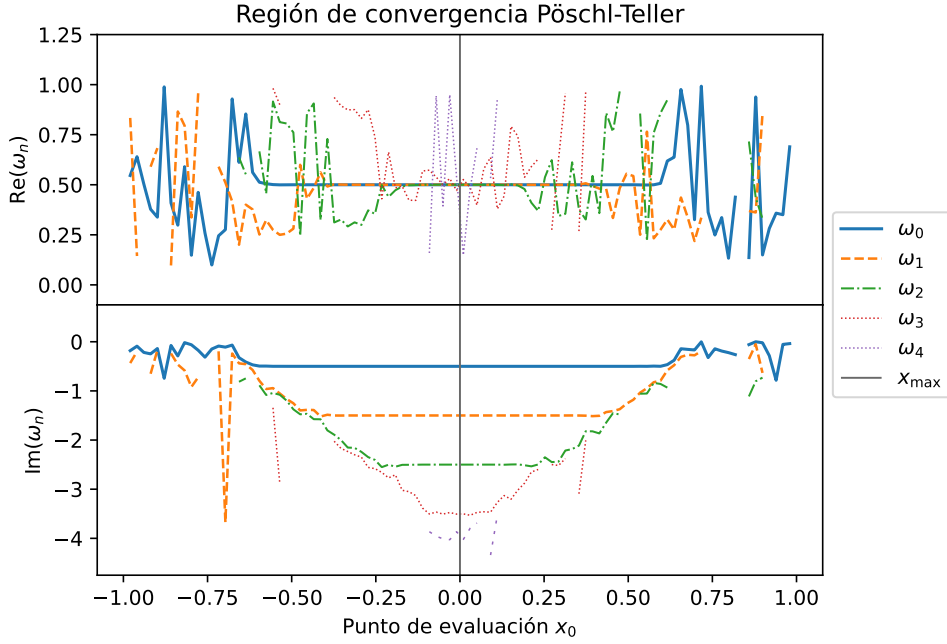


Figura 4: Dependencia de las frecuencias de los cinco primeros modos cuasinormales del potencial de Pöschl-Teller con el punto de evaluación, calculadas mediante el método IAIM con 20 iteraciones.

Por tanto, para asegurar que los resultados obtenidos tengan sentido físico y se obtenga el máximo número posible de armónicos, se evaluará el método siempre en el punto que haga máximo el potencial efectivo considerado.

4.1.3. Aproximación al potencial de Regge-Wheeler

El potencial de Pöschl-Teller generalizado (4.1) puede usarse para aproximar el potencial de Regge-Wheeler (2.34) y obtener así una estimación de los modos cuasinormales del agujero negro de Schwarzschild. Esto se consigue variando los parámetros V_0 y α hasta hacer coincidir de manera aproximada los puntos cercanos del máximo de ambos potenciales [11].

¹¹Resulta lógico pensar que quizás para posiciones alejadas del máximo son necesarias más iteraciones. Sin embargo, aumentar las iteraciones no siempre implica mejor convergencia para todos los armónicos, algo que veremos posteriormente al analizar la convergencia para el potencial de Regge-Wheeler en la sección 4.2.2.

Para encontrar de manera eficiente estos parámetros, se ha realizado un ajuste por mínimos cuadrados no lineal utilizando (4.1) como curva de ajuste y tomando los valores del potencial de Regge-Wheeler cerca de su máximo como datos a ajustar (para valores donde $V_{RW} \geq 0.13$)¹². En el caso de perturbaciones gravitatorias con $s = 2$ y momento angular mínimo $\ell = 2$, los parámetros que mejor ajustan las curvas son $\{V_0 \simeq 0.150353, \alpha \simeq 0.163452\}$. La comparación entre ambos potenciales puede verse representada en la figura 5. A pesar de que se logra una buena aproximación en los puntos cercanos del máximo, debido a la simetría del potencial de Pöschl-Teller, no es posible ajustar a la vez los dos lados asimétricos del potencial de Regge-Wheeler.

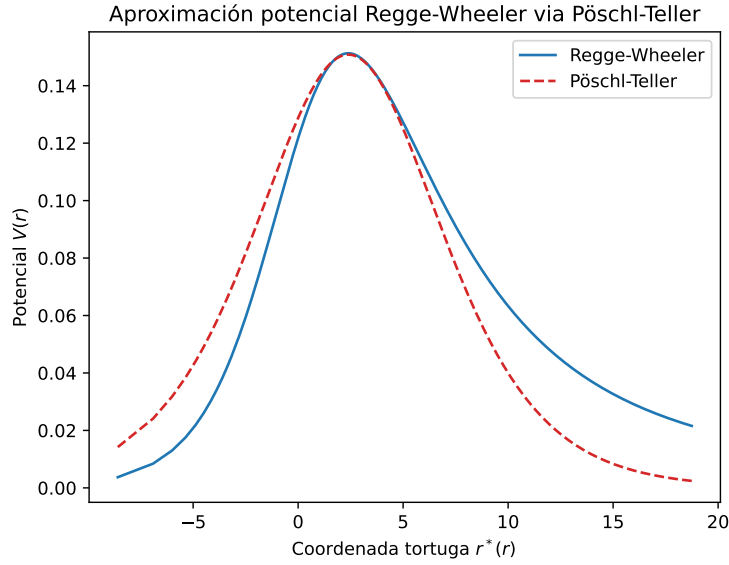


Figura 5: Potencial de Regge-Wheeler (con $M = 1, s = 2, \ell = 2$) para las perturbaciones axiales del agujero negro de Schwarzschild en función de la coordenada tortuga (2.31), junto con la aproximación realizada mediante el potencial de Pöschl-Teller generalizado.

Con esta aproximación, se ha conseguido obtener una estimación razonablemente buena del modo fundamental del agujero negro de Schwarzschild. Realizando 20 iteraciones, se obtiene un valor de $\omega_0 = 0.379043 - 0.081726i$, lo cual se corresponde con un error relativo del $\varepsilon_{\text{Re}} = 1.44\%$ para la parte real y $\varepsilon_{\text{Im}} = 8.13\%$ para la parte imaginaria con respecto de los resultados tabulados en [16].

Concluimos por tanto que este potencial permite estimar el valor de la frecuencia del modo fundamental, aunque no consigue aproximar los armónicos con $n > 0$. Esto es así independientemente del número de iteraciones realizadas o de la forma de realizar el ajuste por mínimos cuadrados de las parámetros (incluyendo más puntos alejados del máximo). Un estudio más detallado de la elección de estos parámetros podría reducir aún más el error, aunque en nuestro caso esto no será

¹²Para ello, ha sido necesario desplazar el potencial de Pöschl-Teller haciendo coincidir la posición de su máximo con la del potencial de Regge-Wheeler. Este desplazamiento no afectará a los modos cuasinormales obtenidos [11]. El ajuste se ha realizado con el método *curve_fit* de *scipy* que implementa el ajuste por mínimos cuadrados para funciones no lineales.

necesario, ya que el método de la iteración asintótica permite resolver el potencial de Regge-Wheeler de manera directa como veremos a continuación.

4.2. Modos cuasinormales del agujero negro de Schwarzschild

Las ecuaciones que gobiernan los modos cuasinormales en los agujeros negros de Schwarzschild son ecuaciones de tipo Schrödinger de la forma (2.33) con un potencial efectivo de Regge-Wheeler (2.34) para perturbaciones axiales o de Zerilli (2.36) para perturbaciones polares. Además, debido a la propiedad de la isoespectralidad, ambos tipos de perturbaciones deben ofrecernos exactamente los mismos modos cuasinormales, por lo cual podemos elegir trabajar con la ecuación de Regge-Wheeler únicamente. Esta ecuación presenta la siguiente forma:

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^{*2}} - \left[\omega^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (1-s^2) \frac{2M}{r^3} \right) \right] \psi(r) = 0, \quad (4.10)$$

donde r^* es la coordenada tortuga definida anteriormente según (2.31).

Para escribir esta ecuación diferencial de la forma (3.1), vamos a seguir los pasos mostrados en [19]. En primer lugar, consideramos un cambio de coordenadas:

$$y = 1 - \frac{2M}{r} \longleftrightarrow r = \frac{2M}{1-y}. \quad (4.11)$$

Estas coordenadas efectivamente desplazan el horizonte de eventos del agujero negro desde $r = 2M$ al punto $y_0 = 0$. De esta forma, pasamos de una coordenada radial $r \in [0, +\infty)$ a una nueva coordenada $y \in (-\infty, 1)$, donde $y \rightarrow -\infty$ representa acercarse hacia la singularidad del agujero negro, mientras que $y \rightarrow +1$ representa alejarse radialmente hacia el infinito¹³. En estas coordenadas, el horizonte de eventos pasa a estar localizado en $y_{EH} = 0$.

Con este cambio de coordenadas, la ecuación diferencial toma la forma:

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \frac{1-3y}{y(1-y)} \frac{d\psi(y)}{dy} + \left[\frac{4M^2\omega^2}{y^2(1-y)^4} - \frac{\ell(\ell+1)}{y(1-y)^2} - \frac{1-s^2}{y(1-y)} \right] \psi(y) = 0. \quad (4.12)$$

A continuación, debemos incluir las condiciones de contorno (2.37), considerando ondas salientes en el infinito y ondas entrantes hacia el horizonte de eventos. Para ello, reescribimos la función de onda como:

$$\psi(y) = y^{-2Mi\omega} (1-y)^{-2Mi\omega} \exp\left(\frac{2Mi\omega}{1-y}\right) \phi(y). \quad (4.13)$$

Tras incluir esta forma de la función de onda, obtenemos que la ecuación de

¹³Los valores $y > +1$ no son físicamente aceptables ya que corresponderían con radios negativos $r < 0$.

Regge-Wheeler puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(y)}{dy^2} = & \frac{4Mi\omega(2y^2 - 4y + 1) - (1 - 3y)(1 - y)}{y(1 - y)^2} \frac{d\phi(y)}{dy} \\ & + \frac{16M^2\omega^2(y - 2) - 8Mi\omega(1 - y) + \ell(\ell + 1) + (1 - s^2)(1 - y)}{y(1 - y)^2} \phi(y). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esta ecuación tiene la forma de (3.1) y por tanto podemos identificar los parámetros λ_0 y s_0 , los cuales cumplen todos los requisitos necesarios para poder aplicar el método de la iteración asintótica.

Al igual que vimos en el caso del potencial de Pöschl-Teller, para obtener resultados físicamente relevantes debemos evaluar el método en puntos dentro del rango de convergencia. Para asegurar esto, consideraremos el punto donde el potencial de Regge-Wheeler sea máximo, que en nuestras coordenadas puede expresarse como:

$$y_{\max} = 1 - \frac{4\ell(\ell + 1)}{3 \left(\ell(\ell + 1) + s^2 + \sqrt{\ell^2(\ell + 1)^2 + \frac{14}{9}\ell(\ell + 1)(1 - s^2) + (1 - s^2)^2} \right)}. \quad (4.15)$$

En lo que queda de trabajo y para simplificar los cálculos, se va a considerar un agujero negro de masa unitaria $M = 1$, expresando así las frecuencias obtenidas ω_n como valores adimensionales normalizados por esta masa. Además, nos centraremos en perturbaciones gravitatorias, tomando $s = 2$, y calculando las frecuencias para los momentos angulares más bajos permitidos $\ell \geq s$. Sin embargo, en la sección 4.2.4 también estudiaremos brevemente otros tipos de perturbaciones.

4.2.1. Perturbaciones gravitacionales ($s = 2$)

Los resultados obtenidos para los modos cuasinormales debido a perturbaciones gravitacionales (o tensoriales) $s = 2$, están incluidos en la tabla 1. Se indican los 5 primeros modos, para momentos angulares $\ell = \{2, 3, 4\}$, calculados con 20 iteraciones del método IAIM evaluado sobre el punto del máximo del potencial y_{\max} (4.15) correspondiente. Las frecuencias se muestran con 6 cifras decimales, igual que los resultados que tomamos como referencia obtenidos por E. W. Leaver [16], junto con el error relativo entre ambos.

Para cada valor de momento angular, se ha podido encontrar el modo fundamental ω_0 y los 4 primeros armónicos, presentando muy buen acuerdo con los valores presentes en la literatura. Esto se ve reflejado a través de un error relativo muy bajo, especialmente para los sobretonos más cercanos al modo fundamental. Los sobretonos de mayor orden presentan errores relativos considerablemente más altos, y no se han logrado identificar adecuadamente los de orden $n > 4$.¹⁴

¹⁴A efectos prácticos, estos sobretonos de mayor orden presentarán un amortiguamiento tan intenso que serán prácticamente indetectables.

Esto parece indicar que el método de la iteración asintótica es especialmente útil para calcular los primeros modos cuasinormales, pero puede fallar en cuanto a los de orden superior (algo que también ocurre en métodos similares [38]).

También se encuentra que el error relativo de la parte real, asociada a la frecuencia de oscilación de la onda emitida, suele ser inferior a la parte imaginaria, asociada al ritmo del decaimiento exponencial de la misma, aunque se desconoce el motivo de este efecto.

En nuestra experiencia se ha encontrado que aumentar el número de iteraciones ofrece un número mayor de soluciones. Sin embargo, esto no implica que todas ellas tengan significado físico. En general, encontramos que las frecuencias de los primeros modos convergen rápidamente y sus valores se estabilizan en pocas iteraciones.

ℓ	n	$\text{Re}(\omega_n)$	$\text{Im}(\omega_n)$	$\varepsilon_{\text{Re}} (\%)$	$\varepsilon_{\text{Im}} (\%)$
2	0	0.373672	-0.088962	0.00005	0.00021
	1	0.346711	-0.273914	0.00009	0.00023
	2	0.301052	-0.478318	0.00040	0.00848
	3	0.251091	-0.704468	0.16459	0.09644
	4	0.218505	-0.921488	5.29642	2.67809
3	0	0.599443	-0.092703	0.00004	0.00005
	1	0.582644	-0.281298	0.00003	0.00004
	2	0.551685	-0.479092	0.00001	0.00027
	3	0.511944	-0.690358	0.00353	0.00305
	4	0.469705	-0.914405	0.09966	0.13594
4	0*	0.809178	-0.094164	0.00267	0.03826
	1*	0.796632	-0.284334	0.00396	0.01208
	2*	0.772710	-0.479908	0.00124	0.00169
	3*	0.739834	-0.683923	0.00461	0.00333
	4*	0.701508	-0.898334	0.00109	0.01496

Tabla 1: Frecuencias obtenidas de los modos cuasinormales obtenidas hasta 6 cifras decimales para perturbaciones gravitacionales ($s = 2$) tras 20 iteraciones. Los errores relativos se han calculado comparando con los resultados de E. W. Leaver [16], salvo las frecuencias denotadas con n^* que fueron comparadas con las de S. Iyer [17].

Para armónicos de orden superior, esto no es así (especialmente evaluando el método en puntos alejados de y_{max}), pudiendo aparecer frecuencias “residuales” que son inestables conforme avanzamos en iteraciones, desapareciendo o cambiando su valor bruscamente. Debido a este comportamiento anómalo, y a que no pueden identificarse con resultados disponibles en la literatura, se cree que

estos valores deben ser el efecto de la naturaleza numérica del método utilizado. Un estudio más detallado sobre la convergencia de este método se realizará en la siguiente sección 4.2.2.

Se ha observado también que aumentando el número de iteraciones se mejora la precisión con la que encontramos los primeros modos fundamentales (con el coste de empeorar la de los otros). En particular, aumentando el número de iteraciones a 64, podemos encontrar los tres primeros modos con mayor precisión, obteniendo así los resultados mostrados en la tabla 2. Estos resultados se han comparado con los mostrados en [39] obtenidos con 29 cifras decimales.

n	$\text{Re}(\omega_n)$	$\text{Im}(\omega_n)$	$\varepsilon_{\text{Re}} \%$	$\varepsilon_{\text{Im}} \%$
0	0.373671685	-0.088962316	0.00000006	0.00000009
1	0.346710936	-0.273914693	0.00001750	0.00006649
2	0.299006935	-0.466006084	9.16053212	2.56564709

Tabla 2: Frecuencias de los tres primeros modos cuasinormales gravitacionales hasta 9 cifras decimales tras realizar 64 iteraciones. Los errores relativos se han calculado usando los resultados de H. Nakano y K. Ioka [39].

De esta forma, se ha conseguido calcular el modo fundamental con un error relativo del orden de $\varepsilon \sim 10^{-8} \%$ y hasta 9 cifras decimales correctas, demostrando la robustez de este método. El primer sobretono también ha disminuido su error relativo, aunque su orden de magnitud ha permanecido constante. Sin embargo, el segundo armónico ha sufrido un aumento relativamente grande del error, aumentando en tres órdenes de magnitud. Esto corrobora la hipótesis de que debe existir alguna relación entre el número de iteraciones realizadas, el error relativo, y el orden del armónico considerado.

Como se mencionó al principio de esta sección, el parámetro de masa M no afecta sustancialmente los resultados obtenidos salvo por un factor de normalización, por lo que se ha tomado $M = 1$. De esta forma, cualquier valor $M > 0$ obtiene resultados equivalentes. Para el caso $M \leq 0$, se ha encontrado que todas las soluciones obtenidas poseen una parte imaginaria positiva, implicando una perturbación creciente exponencialmente con el tiempo y por tanto inestable. Esto es consistente con el hecho de que la métrica de Schwarzschild para masas negativas representa una singularidad desnuda (sin horizonte de eventos), la cual es inestable [40].

4.2.2. Convergencia del método: dependencia con el punto de evaluación y error iterativo

Para el estudio de la convergencia del método, se ha calculado el valor de los cuatro primeros modos cuasinormales obtenidos en todo el rango de puntos de evaluación posibles, fijando el número de iteraciones a realizar en 20. La figura 6

muestra el rango de convergencia del potencial de Regge-Wheeler utilizando el método IAIM para puntos de evaluación $y_0 \in (-1, 1)$.

Como podemos observar, existe un rango de convergencia aproximadamente centrado en el punto que hace máximo el potencial, y_{\max} , dónde los resultados obtenidos presentan una dependencia débil con el punto de evaluación, y por tanto será esta región dónde se obtendrán los mejores y más fiables resultados. Se vuelve a encontrar que el rango de convergencia es mayor para el modo fundamental, mientras que disminuye conforme consideramos armónicos de orden superior.

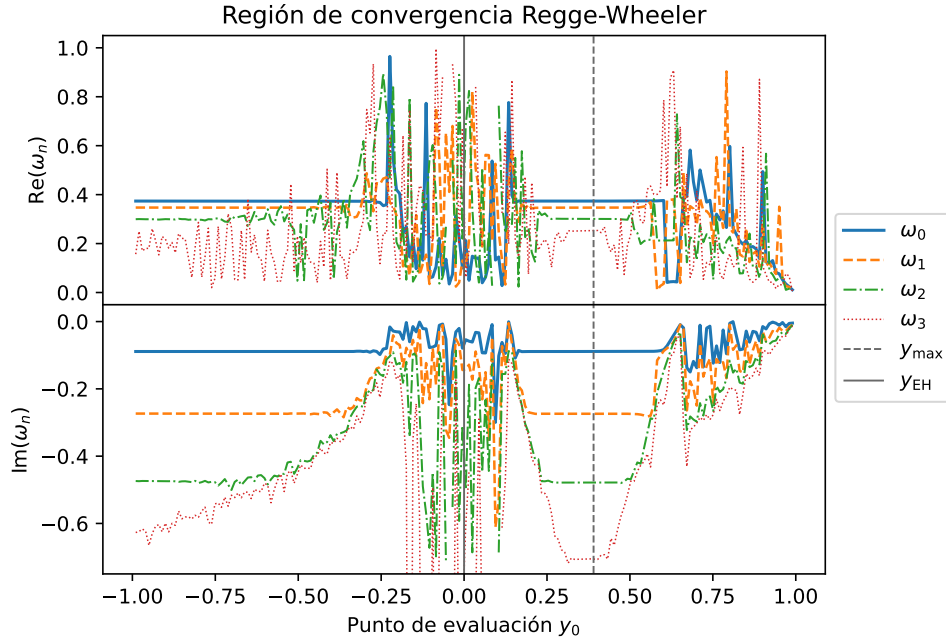


Figura 6: Frecuencias de los cuatro primeros modos cuasinormales ω_n para distintos puntos de evaluación del método y_0 , calculadas para perturbaciones gravitatorias $s = 2$ con momento angular $\ell = 2$ fijo tras 20 iteraciones. La línea vertical continua muestra la posición del horizonte de eventos mientras que la discontinua muestra la posición del máximo del potencial de Regge-Wheeler.

Para puntos cercanos al horizonte del agujero negro $y_0 = y_{\text{EH}} = 0$, las frecuencias obtenidas toman valores erráticos sin una convergencia clara, por tanto se considera que no representan soluciones físicas. Algo muy similar ocurre para puntos de evaluación muy alejados del agujero negro, $y_0 \rightarrow +1$, aunque esta vez el comportamiento general tiende a anular tanto la parte real como la imaginaria de las frecuencias. Es decir, para puntos infinitamente alejados del agujero negro, no esperamos encontrar modos cuasinormales.

Algo interesante ocurre conforme tomamos $y_0 \rightarrow -1$, es decir, conforme nos acercamos a la singularidad del agujero negro. Se puede observar una posible región de convergencia adicional, donde los tres primeros modos también parecen converger (aunque el último armónico no lo consigue). Para el modo fundamental

y primer armónico, esta zona de convergencia parece mucho mayor. Además, el segundo armónico también llega a converger, aunque en un punto de evaluación sustancialmente más alejado del cero que los anteriores. Esto nos podría llevar a pensar que evaluando el método en puntos negativos alejados del cero, también encontraríamos soluciones físicas.

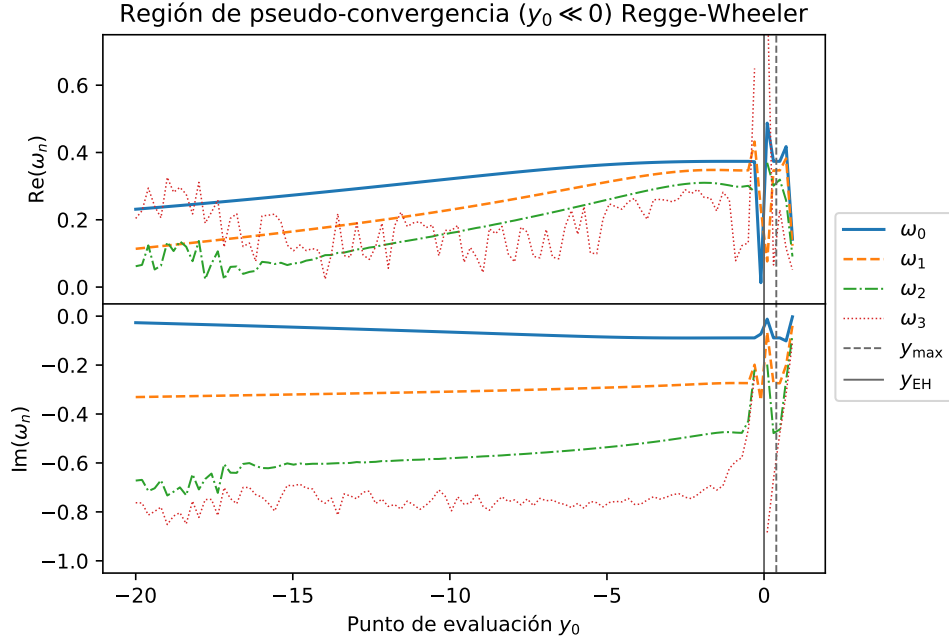


Figura 7: Frecuencias de los cuatro primeros modos cuasinormales ω_n para puntos de evaluación en el rango de pseudo-convergencia $y_0 \ll 0$, calculadas para perturbaciones gravitatorias $s = 2$ con momento angular $\ell = 2$ fijo tras 20 iteraciones.

Sin embargo, como podemos ver en la gráfica 7, esto no es así. A pesar de que para $y_0 \ll 0$ los valores obtenidos parecen converger y su dependencia es débil con la posición, se encuentra que las frecuencias encontradas van modificando lentamente su valor conforme más nos alejamos del cero, indicando así que los resultados obtenidos en esta región de pseudo-convergencia no son fiables. Además, se observa que el segundo armónico pierde su convergencia, mientras que el tercero no llega nunca a converger, demostrando así que tomar esta región para evaluar el método produce resultados significativamente peores y menos fiables que para puntos de evaluación cercanos al máximo del potencial.

Pasamos ahora al estudio del error asociado a la implementación de este método, con el objetivo de comprobar que los resultados obtenidos se deben a una convergencia del método. Para ello, a partir de ahora todas las frecuencias se calcularán evaluando en el punto del potencial máximo $y_0 = y_{\max}$.

En primer lugar, en la figura 8 se muestra la evolución en iteraciones de la diferencia entre las frecuencias obtenidas mediante el método IAIM con los resultados obtenidos por el método de Leaver [16].

El modo fundamental presenta una convergencia mucho más rápida, llegando a alcanzar la misma precisión que la referencia con tan sólo unas 12 iteraciones aproximadamente. Para armónicos superiores, se encuentra que esta convergencia necesita de más iteraciones, y los errores en general serán mayores conforme aumentamos el orden del armónico considerado.

Adicionalmente, podemos observar que el primer armónico presenta un rango de iteraciones para la cual su error es mínimo, y posteriormente vuelve a aumentar. Algo similar ocurre también para armónicos superiores, aunque este mínimo generalmente ocurre para un número de iteraciones más bajo. Después de alcanzar este mínimo del error, su valor vuelve a aumentar uno o varios órdenes de magnitud según el orden del modo hasta una aparente estabilización. Esto confirma nuestra hipótesis que aumentar el número de iteraciones realizadas no tiene por qué implicar una mejora en la precisión de los resultados, especialmente si nuestro objetivo es calcular el mayor número de modos posibles.

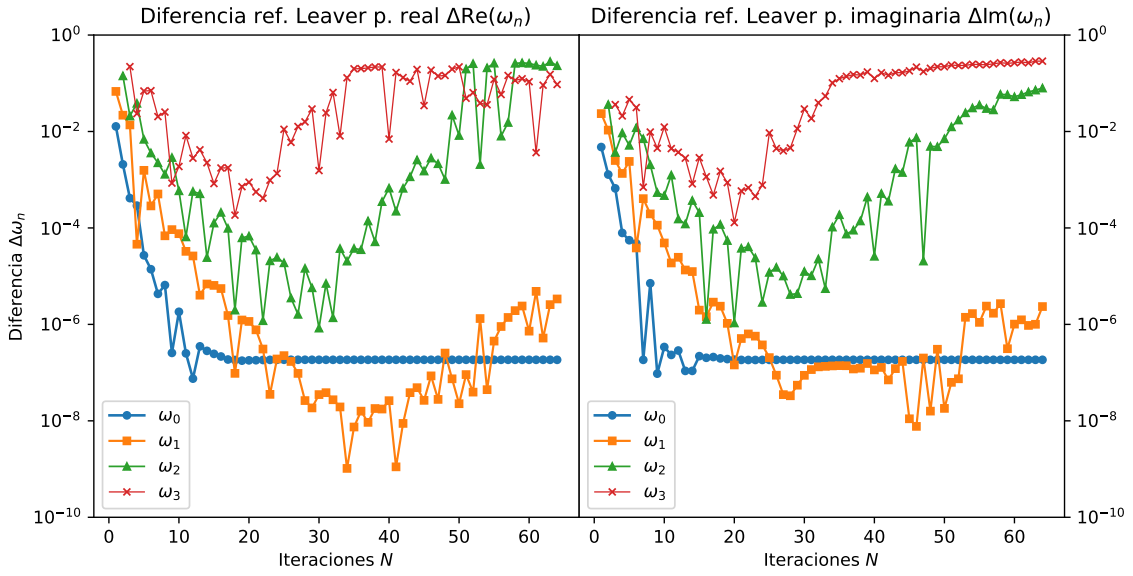


Figura 8: Diferencia de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de los cuatro primeros modos cuasinormales ω_n en función del número de iteraciones entre los valores calculados y los resultados de E. W. Leaver [16].

Por otro lado, se ha estudiado también el error iterativo, definido como el error relativo entre las frecuencias de dos iteraciones sucesivas. Estos resultados pueden hallarse representados en la figura 9.

En estas figuras podemos observar cómo el error iterativo disminuye continuamente hasta llegar a un número de iteraciones dónde parece estabilizarse temporalmente, indicando que la variación entre los valores encontrados entre dos iteraciones sucesivas se mantiene aproximadamente constante. Esta variación será mínima para el modo fundamental, y mayor para armónicos superiores. Después de esto, los errores iterativos vuelven a aumentar, con un aumento más drástico de nuevo en los sobretonos de mayor orden. Esto refleja el comportamiento observado en la figura 8, donde para iteraciones elevadas el error relativo con los valores tabulados parece aumentar para estos armónicos.

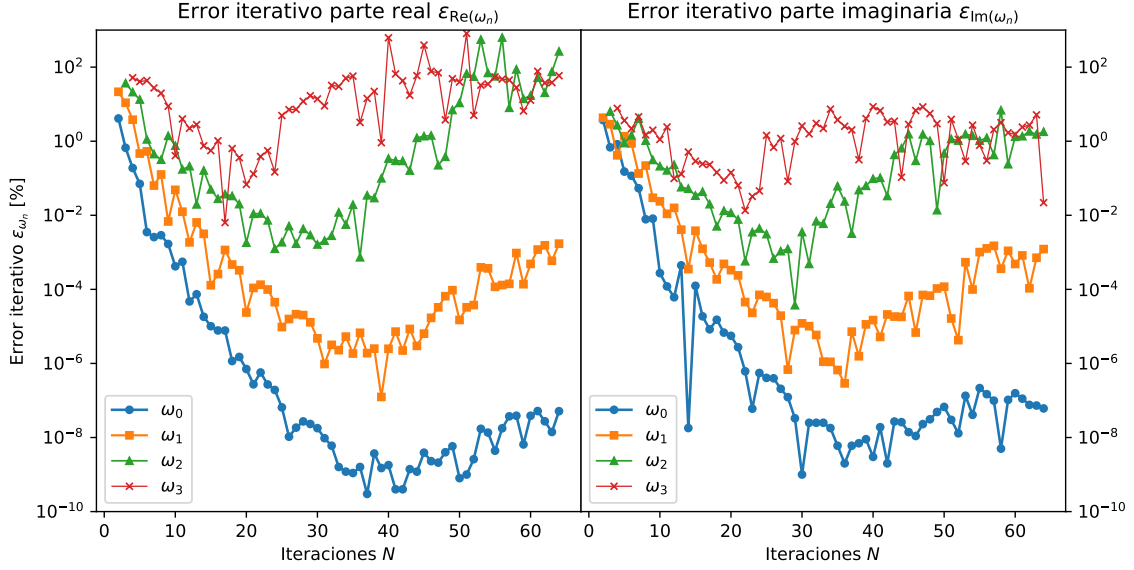


Figura 9: Error iterativo ε_{ω_n} de las partes real (izquierda) e imaginaria (derecha) de los cuatro primeros modos cuasinormales ω_n en función de las iteraciones realizadas.

4.2.3. Límite *eikonal* ($\ell \rightarrow +\infty$)

Como se ha podido observar en las últimas secciones, nuestra implementación del método de la iteración asintótica no es capaz de obtener los armónicos de orden superior a $n > 4$, por lo cual no se ha podido verificar la relación (2.38) en el límite $n \rightarrow +\infty$. En esta sección, vamos a estudiar brevemente el comportamiento del método en función del valor del momento angular ℓ . En la figura 10 se muestra la evolución de los cuatro primeros modos cuasinormales conforme aumenta ℓ de la perturbación (considerando perturbaciones gravitatorias $s = 2$).

En esta gráfica, se observa que para momentos angulares suficientemente pequeños ($\ell \lesssim 20$) existe una clara convergencia de la parte imaginaria de cada modo a un valor constante, siendo esta constante directamente proporcional al modo del armónico n . Por otro lado, la parte real claramente muestra una tendencia lineal en función de ℓ . Comparando con (2.39), este comportamiento es exactamente el esperado, y los valores obtenidos presentan muy buen acuerdo con esta relación.

Por otro lado, podemos observar que conforme aumentamos el momento angular ℓ , esta convergencia en la parte imaginaria se va perdiendo poco a poco, algo que ocurre antes para armónicos superiores. De igual forma, los valores de la parte real oscilarán, cada vez con mayor amplitud, en torno a la recta de la tendencia inicial. Este comportamiento presenta una similitud con el estudio anterior de la convergencia según el punto de evaluación: existe un rango de valores de ℓ que cumplirán la relación (2.39), pero si consideramos momentos angulares mucho mayores esta convergencia se pierde, y los resultados obtenidos dejan de ser fiables.

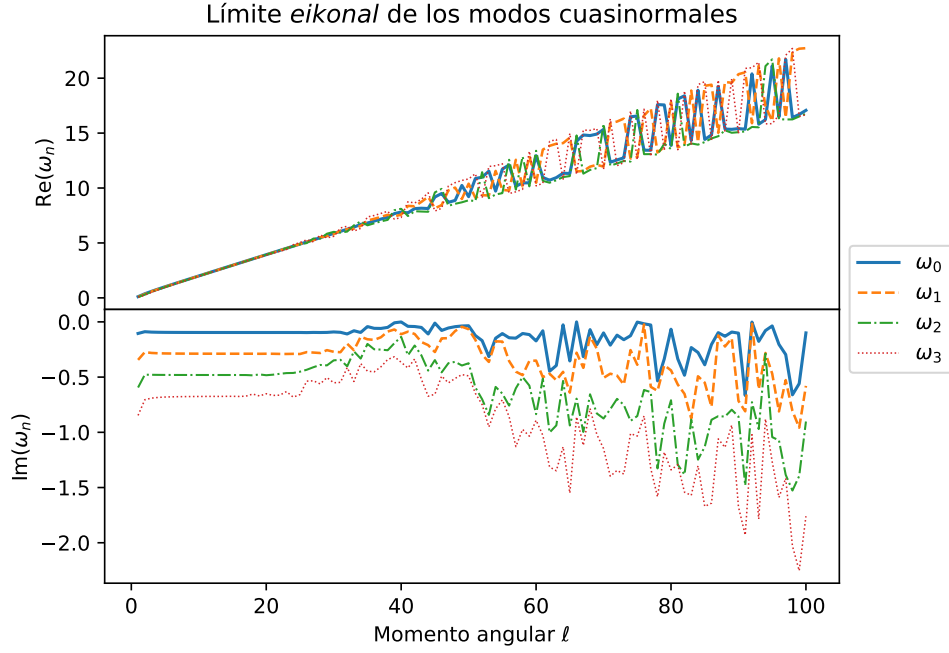


Figura 10: Frecuencias de los modos cuasinormales obtenidos para valores crecientes de momento angular ℓ , obtenidos tras realizar 20 iteraciones, evaluado en el punto y_{\max} , y considerando perturbaciones gravitatorias $s = 2$.

4.2.4. Perturbaciones escalares ($s = 0$) y electromagnéticas ($s = 1$)

Además de estudiar perturbaciones gravitatorias, las ecuaciones de Regge-Wheeler permiten también obtener los modos cuasinormales para perturbaciones escalares $s = 0$ y electromagnéticas (o vectoriales) $s = 1$ a través del potencial dado por (2.35).

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos para perturbaciones escalares, mientras que los resultados para perturbaciones electromagnéticas pueden encontrarse en la tabla 4. Para estos casos, perturbaciones con $\ell = 1$ permiten la emisión de ondas y por tanto podemos obtener sus modos cuasinormales. No se tratarán los modos con $\ell = 0$, ya que consideraremos que estas perturbaciones están incluidas en la simetría esférica de la métrica de fondo.

En ambos casos, el comportamiento general de los resultados es el mismo que para perturbaciones gravitatorias. Evaluando el método en el punto del máximo del potencial, los resultados muestran una clara convergencia, con errores relativos menores para armónicos de menor orden y por tanto presentando buen acuerdo con los valores encontrados en la literatura. Por lo general, se han podido identificar entre 3 y 4 armónicos, además del fundamental, salvo en el caso $\ell = 1$ para perturbaciones escalares, dónde solamente se han encontrado dos modos.

En general, se encuentra que las frecuencias cuasinormales obtenidas presentan una parte real mayor tanto en el caso de perturbaciones escalares como electromagnéticas con respecto de las gravitatorias, de forma que la frecuencia de oscilación de estas ondas será mayor. La parte imaginaria toma valores muy parecidos en los tres casos, indicando que el amortiguamiento será similar.

Podemos concluir, por tanto, que nuestra implementación del método es válida para obtener también los modos cuasinormales para perturbaciones escalares y electromagnéticas del agujero negro de Schwarzschild, con errores relativos similares en magnitud a los correspondientes a perturbaciones gravitatorias.

ℓ	n	$\text{Re}(\omega_n)$	$\text{Im}(\omega_n)$	ε_{Re}	ε_{Im}
1	0	0.292936	-0.097660	0.00004	0.00010
	1	0.264428	-0.306242	0.00782	0.00499
2	0	0.483644	-0.096759	0.00003	0.00023
	1	0.463851	-0.295604	0.00008	0.00010
	2	0.430537	-0.508568	0.00153	0.00199
	3*	0.230151	-0.539905	0.28370	0.03605
	4*	0.200509	-0.790630	1.37262	0.29562
3	0	0.675366	-0.096500	0.00003	0.00039
	1	0.660672	-0.292285	0.00008	0.00007
	2	0.633626	-0.496008	0.00007	0.00001
	3	0.598766	-0.711229	0.00119	0.00116
4	0	0.867416	-0.096392	0.00004	0.00032
	1	0.855808	-0.290876	0.00001	0.00001
	2	0.833692	-0.490325	0.00001	0.00004
	3	0.803284	-0.697484	0.00045	0.00033

Tabla 3: Frecuencias de los modos cuasinormales hasta 6 cifras decimales obtenidas para perturbaciones escalares ($s = 0$) tras realizar 20 iteraciones. El error relativo se ha calculado comparando con [32], salvo para los valores denotados por n^* que se ha comparado con [17].

ℓ	n	$\text{Re}(\omega_n)$	$\text{Im}(\omega_n)$	ε_{Re}	ε_{Im}
1	0	0.248263	-0.092488	0.000012	0.000214
	1	0.214507	-0.293596	0.003932	0.024606
	2*	0.176303	-0.525309	0.859995	0.020836
	3*	0.140916	-0.776765	3.614416	0.630250
2	0	0.457596	-0.095004	0.000107	0.000450
	1	0.436543	-0.290710	0.000138	0.000041
	2	0.401173	-0.501598	0.003608	0.002166
	3*	0.362894	-0.730131	0.081146	0.009418
3	0	0.656899	-0.095616	0.000050	0.000228
	1	0.641737	-0.289728	0.000069	0.000138
	2	0.613832	-0.492066	0.000043	0.000034
	3	0.577913	-0.706345	0.001096	0.002177
4	0	0.853095	-0.095860	0.000023	0.052119
	1	0.841267	-0.289315	0.000007	0.000113
	2	0.818728	-0.487838	0.000041	0.000040
	3	0.787748	-0.694246	0.000004	0.000554
	4	0.751541	-0.910143	0.001071	0.010842

Tabla 4: Frecuencias de los modos cuasinormales hasta 6 cifras decimales obtenidas para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$) tras realizar 20 iteraciones. Los errores relativos se ha calculado comparando los valores con [32], excepto los valores marcados con n^* que se han comparado con [17].

5. Conclusiones

En este trabajo se ha logrado implementar, mediante un código numérico desarrollado en *Python*, el método de la iteración asintótica para el cálculo de modos cuasinormales del agujero negro de Schwarzschild.

Para comenzar, se ha ofrecido un repaso de los conceptos más fundamentales de la relatividad general y de la teoría de perturbaciones, ofreciendo así el marco teórico necesario para estudiar el comportamiento de un agujero negro tras sufrir una perturbación. Este análisis se ha realizado sumando un pequeño término a la métrica de fondo que la desvíe ligeramente de su simetría esférica. La perturbación general se ha descompuesto en una base de armónicos esféricos, lo cual nos ha permitido estudiar perturbaciones con distintas paridades, polares y axiales, por separado. Centrando nuestro estudio en las perturbaciones axiales, a través de las ecuaciones de Einstein linealizadas se llega a que estas perturbaciones cumplen una ecuación diferencial de tipo onda, cuyos autovalores permiten obtener las frecuencias de los modos cuasinormales.

Para comprobar la validez y el correcto funcionamiento del código, se ha comenzado aplicando este método al potencial de Pöschl-Teller. Los resultados obtenidos cumplen exactamente la relación analítica disponible para este potencial. Además, analizando su complejidad temporal, se ha verificado que el método mejorado IAIM es mucho más eficiente que el AIM. Adicionalmente, este potencial se ha aplicado para aproximar el potencial de Regge-Wheeler, obteniendo así una estimación de la frecuencia del modo fundamental del agujero negro de Schwarzschild con un error relativo $\varepsilon < 10\%$. Sin embargo, esta aproximación no resulta válida para encontrar ningún armónico más allá del fundamental.

Una vez comprobado el correcto funcionamiento de la implementación del método, enfocamos nuestro estudio al agujero negro de Schwarzschild, logrando calcular de manera satisfactoria tanto el modo fundamental como los primeros cuatro armónicos $n \leq 4$ para perturbaciones gravitacionales ($s = 2$). Para la frecuencia fundamental, ésta se ha podido obtener con un error relativo del orden de $\varepsilon \sim 10^{-7}\%$ y hasta 9 cifras significativas, demostrando la robustez de este método. Se ha encontrado una dependencia entre el número de iteraciones realizadas y el orden del armónico considerado, concluyendo que este método presenta una mayor exactitud para hallar los primeros armónicos, mientras que puede fallar encontrando modos de órdenes superiores $n > 4$.

Se ha estudiado también la dependencia de los resultados con el punto de evaluación del método, encontrando una región de convergencia dónde el método presenta mayor fiabilidad. Además, un estudio del error iterativo ha permitido afirmar que los resultados encontrados resultan de una convergencia del método. Adicionalmente, se ha analizado la dependencia que presenta este método con el valor del momento angular de la perturbación, ℓ . Con ello, se ha podido confirmar el límite *eikonal* y así confirmar también la relación (2.39), aunque solamente para valores $\ell \lesssim 20$. Finalmente, se han obtenido también los primeros modos cuasinormales con $n \leq 4$ para perturbaciones de tipo escalar ($s = 0$) y electromagnéticas ($s = 1$), presentando buen acuerdo con los valores de la literatura y mostrando un comportamiento similar en cuanto a errores iterativos y convergencia.

Existen varias posibles mejoras a la implementación del método desarrollada en este trabajo. En particular, optimizar aún más el código podría mejorar el tiempo de cálculo, al igual que la precisión numérica. Por otro lado, sería interesante poder obtener una estimación directa del error asociado al método, y así controlar de manera precisa la exactitud del mismo. Sin embargo, esta tarea se complica debido a las distintas maneras que presentan las librerías utilizadas de almacenar los valores y expresiones simbólicas, por lo que es necesario un estudio más detallado.

Concluimos por tanto que el método de la iteración asintótica es un método verdaderamente robusto para calcular el modo fundamental y los primeros armónicos de distintas geometrías en relatividad general.

Referencias

- [1] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [2] W. H. Press and K. S. Thorne. Gravitational-wave astronomy. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 10:335–374, 1972.
- [3] M. Bailes, B. K. Berger, P. R. Brady, et al. Gravitational-wave physics and astronomy in the 2020s and 2030s. *Nature Reviews Physics*, 3(5):344–366, January 2021.
- [4] Kip S. Thorne. Gravitational waves, 1995.
- [5] Patrick R. Brady and Jolien D.E. Creighton. Gravitational wave astronomy. In Robert A. Meyers, editor, *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*, pages 33–48. Academic Press, New York, third edition edition, 2003.
- [6] Jordan Camp and Neil Cornish. Gravitational wave astronomy. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 20:525–77, 12 2004.
- [7] Scott A. Hughes. Listening to the universe with gravitational-wave astronomy. *Annals of Physics*, 303(1):142–178, 2003.
- [8] Michael Boyle, Lawrence E. Kidder, Serguei Ossokine, and Harald P. Pfeiffer. Gravitational-wave modes from precessing black-hole binaries, 2014.
- [9] Joan Centrella, John G. Baker, Bernard J. Kelly, and James R. van Meter. The final merger of black-hole binaries. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 60(1):75–100, November 2010.
- [10] Leonardo Balart, Grigoris Panotopoulos, and Ángel Rincón. Regular charged black holes, energy conditions, and quasinormal modes. *Fortschritte der Physik*, 71(12), September 2023.
- [11] Sebastian H. Völkel. Quasinormal modes from bound states: The numerical approach. *Physical Review D*, 106(12), December 2022.
- [12] Michele Maggiore. Physical interpretation of the spectrum of black hole quasinormal modes. *Physical Review Letters*, 100(14), April 2008.
- [13] Manish M. Jadhav and Lior M. Burko. Black hole quasinormal mode spectroscopy with lisa. *The Astrophysical Journal*, 698(1):562–566, May 2009.
- [14] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, Nov 1957.
- [15] Frank J. Zerilli. Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.*, 24:737–738, Mar 1970.
- [16] E. W. Leaver. An Analytic representation for the quasi normal modes of Kerr black holes. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 402:285–298, 1985.

- [17] Sai Iyer. Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, 35:3632–3636, Jun 1987.
- [18] Hakan Ciftci, Richard L Hall, and Nasser Saad. Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(47):11807–11816, November 2003.
- [19] H. Cho, Alan Cornell, Jason Doukas, T. Huang, and Wade Naylor. A new approach to black hole quasinormal modes: A review of the asymptotic iteration method. *Advances in Mathematical Physics*, 2012, 11 2011.
- [20] Bert Janssen. *Gravitación y geometría*. Editorial Universidad de Granada, 2022. Primera edición, ISBN 978-84-338-6913-5.
- [21] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, Sep 1939.
- [22] Fanidakis Nikolaos. *Quantizing Gravity: Insights from Quasinormal Modes of Black Holes*. PhD thesis, Aristotle University of Thessaloniki, 2005.
- [23] C. V. Vishveshwara and Charles W. Misner. Stability of the schwarzschild metric. *Physical Review D*, 1:2870–2879, 1970.
- [24] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, Nov 1957.
- [25] Michele Lenzi and Carlos F. Sopuerta. Master functions and equations for perturbations of vacuum spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 104(8), Oct 2021.
- [26] Vincent Moncrief. Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. i. the exterior problem. *Annals of Physics*, 88(2):323–342, 1974.
- [27] Hans-Peter Nollert. Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars. *Classical and Quantum Gravity*, 16(12):R159, dec 1999.
- [28] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Andrei O Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16):163001, 2009.
- [29] S. Chandrasekhar and Steven L. Detweiler. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 344:441–452, Aug 1975.
- [30] M. S. Churilova. Analytical quasinormal modes of spherically symmetric black holes in the eikonal regime. *The European Physical Journal C*, 79(7), July 2019.
- [31] Etera R. Livine, Clara Montagnon, Naritaka Oshita, and Hugo Roussille. Scalar Quasi-Normal Modes of a Loop Quantum Black Hole. 5 2024.
- [32] Luis A. H. Mamani, Angel D. D. Masa, Lucas Timotheo Sanches, and Vilson T. Zanchin. Revisiting the quasinormal modes of the schwarzschild black hole: Numerical analysis. *The European Physical Journal C*, 82(10), October 2022.

- [33] Ibsal Assi and A.J. Sous. Introducing a new family of short-range potentials and their numerical solutions using the asymptotic iteration method. *The European Physical Journal Plus*, 133, 05 2018.
- [34] Mesut Karakoç. Aimpy: A python code to solve schrödinger-like equations with the asymptotic iteration method. *International Journal of Modern Physics C*, 32(02):2150017, November 2020.
- [35] Petarpa Boonserm and Matt Visser. Quasi-normal frequencies: key analytic results. *Journal of High Energy Physics*, 2011(3), March 2011.
- [36] Valeria Ferrari and Bahram Mashhoon. New approach to the quasinormal modes of a black hole. *Physical Review D*, 30(2):295, 1984.
- [37] Marc Casals, Sam Dolan, Adrian C. Ottewill, and Barry Wardell. Self-force calculations with matched expansions and quasinormal mode sums. *Physical Review D*, 79(12), June 2009.
- [38] Kostas D. Kokkotas and Bernd G. Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2(1), September 1999.
- [39] Hiroyuki Nakano and Kunihiro Ioka. Second-order quasinormal mode of the schwarzschild black hole. *Physical Review D*, 76(8), October 2007.
- [40] Reinaldo J Gleiser and Gustavo Dotti. Instability of the negative mass schwarzschild naked singularity. *Classical and Quantum Gravity*, 23(15):5063–5077, July 2006.

Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Física

Tutor/a: Javier Antonio Olmedo Nieto
Departamento y Área de Conocimiento: Física Teórica y del Cosmos / Física Teórica
Correo electrónico: javolmedo@ugr.es

Cotutor/a:
Departamento y Área de Conocimiento:
Correo electrónico:

Título del Trabajo: Modos cuasinormales de agujeros negros

Tipología del Trabajo: (Segun punto 3 de las Directrices del TFG aprobadas por Comisión Docente el 10/12/14)	(Marcar con X)	1. Revisión bibliográfica		4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio	
		2. Estudio de casos teórico-prácticos	X	5. Elaboración de un proyecto	
		3. Trabajos experimentales		6. Trabajo relacionado con prácticas externas	

Breve descripción del trabajo:

En los últimos años, la física de agujeros negros ha experimentado un gran avance en lo que respecta a aspectos observacionales que pueden ser detectados por observatorios como LIGO-Virgo-KAGRA y el Event Horizon Telescope. La relatividad general ha permitido profundizar en las propiedades de estos objetos ultracompactos, mediante el estudio, por ejemplo, de modos cuasinormales [1-3]. Las observaciones de ondas gravitacionales han sido utilizadas no solo para poner a prueba la teoría de la relatividad de Einstein, sino también para descartar otras teorías candidatas. Aquí, el periodo de relajación después de la formación del agujero negro final (tras una fusión de objetos ultrarelativistas) descrito por los modos cuasinormales por ahora ha sido acotado observacionalmente, habiendo acuerdo con la teoría. El objetivo de este trabajo es aplicar el método de la iteración asintótica para el cálculo de los modos cuasinormales propuesto en la Ref. [4], y si la evolución del trabajo lo permite, desarrollar códigos numéricos para después aplicar este método a modelos que van más allá de la relatividad general, como las descripciones clásicas modificadas y las geometrías efectivas dentro de las teorías de gravedad cuántica.

Objetivos planteados:

1. Lectura de la bibliografía propuesta.
2. Alcanzar un dominio apropiado sobre la teoría de perturbaciones en agujeros negros no rotantes.
3. Reproducir el método de la iteración asintótica propuesto en la Ref. [4].
4. Si la evolución del trabajo lo permite, su implementación en un código numérico de manipulación algebraica.
5. Si la evolución del trabajo lo permite, su aplicación a modelos de agujeros negros de relatividad general y más allá.

Metodología:

Se aplicarían conocimientos básicos de geometría diferencial, relatividad general y teoría de perturbaciones sobre escenarios esféricamente simétricos. Todo esto posiblemente será complementado con métodos numéricos de álgebra abstracta para la manipulación de tensores a un problema de interés en física gravitacional.

Bibliografía:

- [1] T. Regge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. 108, 1063-1069 (1957).
- [2] F. J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. 24, 737-738 (1970).
- [3] S. Chandrasekhar and S. L. Detweiler, Proc. Roy. Soc. Lond. A 344, 441-452 (1975).



UNIVERSIDAD
DE GRANADA



Facultad de
Ciencias
Sección de
Físicas

[4] H. T. Cho, A. S. Cornell, Jason Doukas, T. R. Huang, Wade Naylor, arXiv:1111.5024.

A rellenar sólo en el caso que el alumno sea quien realice la propuesta de TFG

Alumno/a propuesto/a: Dominik Pastuszka

Granada, de 2023

Sello del Departamento

Campus
Fuentenueva
Avda. Fuentenueva
s/n
18071 Granada
Tfno. +34-958242736
almartin@ugr.es

Comisión Docente de Físicas
Facultad de Ciencias