VI Mostra de Iniciação Científica da FAMAT
25 e 26 de maio de 2017

Transformação linear aplicada em sistemas de cores

Domitila Crispim Pietropaolo, Ana Paula Tremura Galves
Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia
domitilacrispim@gmail.com, ana.galves@ufu.br

Objetivo

O terremoto é um fenômeno natural, ele ocorre pois as placas tectônicas se movem devido à pressão do magma, com isso as placas se chocam e geram um tremor na superfície, caso seja no oceano é chamado de maremoto, no continente nomeamos de terremoto.

Será utilizados conceitos de sistemas equações diferenciais odinárias, números complexos e lei de Hooke. Um sistema de EDO é basicamente um sistema de equacações onde uma ou mais variavéis estão com algum grau de derivação. Números complexos se utilizam do numero i e basicamente são divididas entre parte real e imaginária, são escritos da forma X = a + i b onde X eh o numero complexo, a e b são números reais.

A lei de Hooke vem da física e diz que F = m*k, onde f representa força, m massa e K uma constante elástica que varia de cada material. Entretanto não vamos usar ela de forma pura, como é enunciada, vamos usar um modelo enunciado a partir dela.

Metodologia

O modelo

Tome um prédio com n andares, podemos aplicar a lei de Hooke com uma constante elástica que abrange o espaço entre os andares da seguinte forma:

$$F = k_i \times (X_{i+1} - X_i)$$

Nessa fórmula o ni representa o deslocamento horizontal no i-ésimo andar. Para completar o modelo vamos relacionar com a 2ª lei de Newton, que enuncia a fórmula:

$$F = m \times a$$

Sabendo dessas informações podemos relacionar os dois conceitos em um sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} m_1 x"_1 = k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 x"_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ \vdots \\ m_n x"_n = k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

O exemplo

Para ilustrar essa explicação, vamos associar a teoria a um exemplo prático: Seja um prédio com 2 andares e cada andar tem massa m = 6000kg e uma força $k = 18000 kg/s^2$. A partir dessas informações obtemos o seguinte sistema, já simplicado :

$$\begin{cases} x"_1 = -6x_1 + 3x_2 \\ x"_2 = 3x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Como o sistema possui uma 2ª derivada, será necessário fazer uma substituição.

Resultados

A representação do espaço espectral das cores é um espaço vetorial de dimensão finita. Neste trabalho, iremos utilizar o espaço vetorial R^3.

1. Sistemas de cores RGB

O olho humano possui três tipos de células cones, as quais captam as cores e levam-nas até o cérebro. Young-Helmholtz estabelece, no seu modelo tricromático, que sistemas de processamento de cor do olho humano baseiam-se na amostragem das faixas vermelha, verde e azul do espectro visível, feitas pelas moléculas fotossensíveis do olho. E com isso, surge o primeiro modelo padrão básico: CIE-RGB (CIE: Commission Internationale de l'Eclairage).

2. O modelo XYZ e a mudança de coordenadas em relação ao RGB

Devido a incapacidade que o monitor possuía em projetar todas as cores visíveis pelo olho humano, o sistema CIE-XYZ foi criado para trazer modificações de proporções de intensidade das cores.

No sistema XYZ as coordenadas das cores primárias (RGB) são dadas pelos seguintes vetores: $R = (0.73467, 0.26533, 0.0)$, $G = (0.27376, 0.71741, 0.00883)$, $B = (0.16658, 0.00886, 0.82456)$, os quais correspondem aos vetores $R = (1, 0, 0)$, $G = (0, 1, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ no sistema RGB. Para obter uma transformação entre esses dois sistemas devemos buscar um outro conjunto de vetores comum aos espaços XYZ e RGB. Uma escolha natural consiste em tomar os vetores que correspondem a cor branca em cada um dos sistemas, que tem coordenadas $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Dessa forma, a transformação linear do sistema RGB no sistema XYZ é definida por $T(R, G, B) = (X, Y, Z)$ e, usando o fato que $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ obtemos uma matriz de transformação de coordenadas dada por:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.17697 & 0 \\ 0.31 & 0.81240 & 0.01 \\ 0.2 & 0.01063 & 0.99 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

que faz a mudança de coordenadas no sistema RGB para o sistema XYZ.

3. O modelo CMY e a mudança de coordenadas em relação ao RGB

Baseando-se nas cores complementares, o CMY é designado por modelo subtrativo de cor, opondo-se ao modelo RGB que é designado por modelo aditivo de cor. É muito utilizado em impressão a cores em papel branco (como já foi citado na introdução).

A transformação do espaço CMY no espaço RGB é a mais simples, basicamente consiste em

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix}.$$

Isso ocorre, pois as cores no sistema CMY localizam-se em um subespaço com a forma de um cubo, no qual três vértices representam as cores base desse sistema, como podemos observar na figura seguinte.

4. O modelo YIQ e a mudança de coordenadas em relação ao RGB

Utilizado no sistema NTSC (National Television Standards Committee) o modelo YIQ foi criado para permitir que as emissões dos sistemas de televisão em cores fossem compatíveis com os receptores em preto e branco. Baseia-se na divisão dos sinais de cor RGB em um sinal de luminosidade, ou luminância (Y), dada por:

$$Y = 0.299\,R + 0.587\,G + 0.114\,B.$$

Os parâmetros I e Q estão relacionados às cores propriamente, então envolvem luminância e as cores RGB em suas fórmulas, como podemos observar:

$$I = 0.74(R - Y) - 0.27(B - Y)$$

$$Q = 0.48(R - Y) + 0.41(B - Y).$$

Dessa forma, isolando as variáveis Y, I e Q em função de R, G e B, chegamos na seguinte matriz de transformação do espaço de cor RGB para o espaço YIQ

$$\begin{pmatrix} Y \\ I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.523 & -0.311 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

Conclusão

No trabalho podemos observar que a álgebra linear auxiliou processos de cálculo para que as cores possam ser exibidas e transmitidas em diferentes plataformas, como televisores, monitores, etc. O ponto mais importante desse trabalho é como vários sistemas de cores podem ser reduzidos a espaços vetoriais e manipulados facilmente através de transformações lineares.

Referências

[1] Biezuner, R. J.; Macedo, E. A. A.; Moreira, B. T. *Mudanças de coordenadas em sistemas de cores.* Belo Horizonte: UFMG. Google Acadêmico. PDF.

[2] Gomes, J. (1994). *Computação gráfica: imagem.* Rio de Janeiro: IMPA/SBM.

[3] Howard, A.; Rorres, C. (2001). *Álgebra linear com aplicações.* Porto Alegre: Bookman.