Giải gần đúng phương trình vi phân thường (PTVPT)

Nguyễn Ngọc Đăng Duy
Lê Hữu Kiệt
Phan Thanh Tâm
Nguyễn Hiếu Thanh

Tháng 11 năm 2020

Nội dung

Một số khái niệm

Định nghĩa 6.1. Phương trình vi phân thường cấp n là phương trình có dạng:

$$F\left(x, y, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad (1)$$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm và $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ là các đạo hàm của hàm số $y = y(x)$.

- **Cấp** của phương trình là cấp của đạo hàm cao nhất có mặt trong phương trình.
- **Nghiệm** của phương trình là mọi hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình (1).
- **Giải** phương trình vi phân thường là tiến hành tìm tất cả các nghiệm của phương trình vi phân đó.

Định nghĩa 6.2. Xét phương trình vi phân cấp n có dạng:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x)\right) \qquad (2)$$

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân (2) là tìm hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình (2) và các điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \ \ldots; \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Một số khái niệm

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1 là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

Một số khái niệm

Phương trình vi phân (3) tương đương với phương trình tích phân:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \qquad (5)$$

theo nghĩa mọi nghiệm của phương trình (3) là nghiệm liên tục của (5) và ngược lại.

Báo cáo này sẽ trình bài ba phương pháp sau:

- Phương pháp Euler và Euler cải tiến 1.
- Phương pháp Runge – Kutta.
- Phương pháp Adams, gồm: Công thức nội suy Adams và Công thức ngoại suy Adams.

Phương pháp Euler

Xét bài toán Cauchy

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0 \tag{6}$$

Giả sử hàm f thỏa mãn điều kiện

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

và $\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M$ trong hình chữ nhật:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\right\}$$

Phương pháp Euler

Giả sử x_0 là giá trị ban đầu và h là số dương cho trước đủ nhỏ với $x_i = x_0 + ih$, với $i = 0, 1, 2, \ldots, h$ được gọi là độ dài bước.

(6) tương đương với $\mathrm{d}y = f\,(x, y)\,\mathrm{d}x$, lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x \text{ hay } y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\mathrm{d}x$$

Giả sử $f(x,y) \approx f(x_0,y_0)$ với $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, khi đó:

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0,y_0)(x_1 - x_0) \text{ hay } y_1 \approx y_0 + hf(x_0,y_0)$$

Tương tự, với $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, ta có $y_2 \approx y_1 + hf(x_1,y_1)$.
Từ đó, ta có công thức tổng quát:

Phương pháp Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n), n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

Ví dụ

Ví dụ 6.7 *(Trang 127)* Bằng phương pháp Euler, giải phương trình gần đúng phương trình:

$$y' = 2xy + \mathrm{e}^{x^2}, y(0) = 1$$

trong đoạn $[0; 1.5]$, so sánh với nghiệm chính xác $\varphi(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2}$ của phương trình.

Ví dụ: $y' = 2xy + e^{x^2}, y(0) = 1$

Giải

Với $x_0 = 0,\ y_0 = 1$, chọn $h = 0.25$.

Áp dụng công thức (7), ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	$\varphi(x_n)$
0	0.0	1.0	1.0
1	0.25	1.25	1.3306
2	0.5	1.6724	1.926
3	0.75	2.4115	3.0713
4	1.0	3.7545	5.4366
5	1.25	6.3114	10.7341
6	1.5	11.4487	23.7193

Ví dụ: $y' = 2xy + e^{x^2}, y(0) = 1$

Nếu chọn $h = 0.1$, ta cũng có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	$\varphi(x_n)$	n	x_n	y_n	$\varphi(x_n)$
0	0.0	1.0	1.0	8	0.8	3.0338	3.4137
1	0.1	1.1	1.1111	9	0.9	3.7088	4.271
2	0.2	1.223	1.249	10	1.0	4.6012	5.4366
3	0.3	1.376	1.4224	11	1.1	5.7933	7.0423
4	0.4	1.568	1.6429	12	1.2	7.4031	9.2855
5	0.5	1.8108	1.926	13	1.3	9.602	12.4648
6	0.6	2.1203	2.2933	14	1.4	12.6404	17.0384
7	0.7	2.518	2.7749	15	1.5	16.8897	23.7193

Ví dụ

Ví dụ 6.8 *(Trang 128)* Bằng phương pháp Euler, giải gần đúng phương trình vi phân:

$$y' + 2y = 2 - \mathrm{e}^{-4x}, y(0) = 1$$

với $h = 0.1$ cho trước.

Ví dụ: $y' + 2y = 2 - e^{-4x}, y(0) = 1$

Giải

Phương trình vi phân đã cho có nghiệm chính xác là:

$$y = 1 + \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Phương trình vi phân đã cho tương đương với:

$$y' = 2 - e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2y$$

Với $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ và $h = 0.1$. Khi đó ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	$\varphi(x_n)$
0	0.0	1.0	1.0
1	0.1	0.9	0.925795
2	0.2	0.852968	0.889504
3	0.3	0.837441	0.876191
4	0.4	0.839834	0.876284
5	0.5	0.851677	0.883728

Ví dụ: $y' + 2y = 2 - e^{-4x}, y(0) = 1$

Nếu ta thay đổi độ dài bước lần lượt là $h = 0.05,\ h = 0.01,\ h = 0.005$ và $h = 0.001$, ta có bảng giá trị của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác tại các thời điểm $x = 1; x = 2; x = 3; x = 4$ và $x = 5$ là:

x	$\varphi(x)$	Nghiệm gần đúng			
		$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
1	0.9414902	0.9364698	0.9404994	0.9409957	0.9413914
2	0.9910099	0.9911126	0.9910193	0.9910139	0.9910106
3	0.9987637	0.9988982	0.9987890	0.9987763	0.9987662
4	0.9998323	0.9998657	0.9998390	0.9998357	0.9998330
5	0.9999773	0.9999837	0.9999786	0.9999780	0.9999774

Sai số phương pháp

Phần trăm sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng được xác định bởi:

$$P = \frac{\left|n_{\text{chính xác}} - n_{\text{gần đúng}}\right|}{n_{\text{chính xác}}} \times 100\% \tag{8}$$

Áp dụng (8), ta có bảng tính toán phần trăm sai số giữa nghiệm chính xãc và nghiệm gần đúng:

x	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
1	0.53%	0.105%	0.053%	0.0105%
2	0.01%	0.0094%	0.00041%	0.00007%
3	0.013%	0.0025%	0.0013%	0.00025%
4	0.0033%	0.00067%	0.00034%	0.000067%
5	0.00064%	0.00013%	0.000068%	0.000014%

Nhận xét

- Nếu độ dài bước h càng nhỏ, sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác càng nhỏ.
- Nói chung sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác sẽ tăng nếu giá trị x tăng.

Phương pháp Euler cải tiến

Trong phương pháp Euler cải tiến (thứ nhất), giá trị tiếp theo của nghiệm y_{n+1} được tính thông qua việc tính toán các giá trị trung gian $x_{n+\frac{1}{2}}$, $y_{n+\frac{1}{2}}$ và $f_{n+\frac{1}{2}}$:

Phương pháp Euler cải tiến thứ nhất

$$\begin{cases} x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n + \dfrac{h}{2} \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \dfrac{h}{2} f_n \\ f_{n+\frac{1}{2}} &= f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} f_n\right) \\ y_{n+1} &= y_n + h f_{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{9}$$

Ví dụ

Ví dụ 6.9 *(Trang 130)* Áp dụng phương pháp Euler cải tiến thứ nhất, giải phương trình vi phân sau:

$$y' = \frac{2y}{x} + x, y(1) = 1$$

trên đoạn $[1; 1.4]$ và độ dài bước $h = 0.1$.

Ví dụ: $y' = \dfrac{2y}{x} + x, y(1) = 1$

Giải

Phương trình đã cho có nghiệm gần đúng là $\varphi(x) = x^2 + x^2 \ln x$.

Đặt $f(x, y) = \dfrac{2y}{x} + x$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	$\varphi(x_n)$
0	1.0	1.0	1.0
1	1.1	1.324048	1.325325
2	1.2	1.699816	1.702543
3	1.3	2.12905	2.133396
4	1.4	2.613357	2.619486

Phương pháp Runge – Kutta

Xét bài toán Cauchy (3), (4), để giải bài toán này, xuất pháp từ giá trị y_n ta tìm được giá trị gần đúng y_{n+1} tại $x_{n+1} = x_n + h$ theo công thức:

Phương pháp Runge – Kutta (RK)

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{10}$$

trong đó

$$k_i = hf\left(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \tag{11}$$

Phương pháp Runge – Kutta

Công thức (10) và (11) xác định phương pháp Runge – Kutta tổng quát.

Các hệ số c_i, a_{ij}, b_i được chọn sao cho với m đủ lớn, hàm số $\varphi(h) = y(x_n + h) - y_n - \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$ thỏa mãn

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(m)}(0) = 0; \ \varphi^{(m+1)} \neq 0 \quad (12)$$

Khi đó sai số trong mỗi bước được đánh giá bởi:

$$R(h) = \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{(m+1)}, \ 0 < \xi < h \tag{13}$$

Từ (12), với $l = 0, \ 1, \ 2, \ldots, \ m$ ta rút ra:

$$y_n^{(l)} = \sum_{i=1}^{s} b_i k_i^{(l)}(0) \tag{14}$$

Phương pháp Runge – Kutta

Ta xét một số trường hợp đặc biệt

Với $s = 1$:

Theo (11), $\varphi(h) = y(x_n + h) - y(x_n) - b_1 h f(x_n, y_n)$.

Nên $\varphi'(h) = y'(x_n + h) - b_1 f(x_n, y_n) = (1 - b_1) f(x_n, y_n)$.

Ta thấy $\varphi'(h) = 0$ với mọi f khi và chỉ khi $b_1 = 1$. Từ đó, công thức Runge – Kutta khi $s = 1$ là:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \tag{15}$$

Rõ ràng (15) là công thức Euler.

Phương pháp Runge – Kutta

Với $s = 2$:

Theo (12) và (14), ta cũng có:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1) \\
\varphi(h) &= y(x_n + h) - y_n - b_1 k_1 - b_2 k_2 \\
y_n^{(l)} &= b_1 k_1^{(l)}(0) + b_2 k_2^{(l)}(0)
\end{aligned}
$$

Ta có: $k_1'(h) = f(x_n, y_n) \Rightarrow k_1'(0) = f(x_n, y_n)$.

$$k_2'(h) = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1) + h\left[\frac{\partial f}{\partial x} c_2 + \frac{\partial f}{\partial y} k_1'(h) a_{21}\right]$$

nên $k_2'(0) = f(x_n, y_n)$.

Do đó: $y'_n = b_1 k'_1(0) + b_2 k'_2(0)$, nghĩa là $b_1 + b_2 = 1$.

Tiếp tục: $k''_1(h) = 0$.

$$k''_2(h) = 2\left[\frac{\partial f}{\partial x}c_2 + \frac{\partial f}{\partial y}k'_1(h)a_{21}\right] + h\left[\frac{\partial f}{\partial x}c_2 + \frac{\partial f}{\partial y}k'_1(h)a_{21}\right]$$

$$\Rightarrow k''_2(0) = 2\left[\frac{\partial f}{\partial x}c_2 + \frac{\partial f}{\partial y}k'_1(h)a_{21}\right]$$

Do đó $\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y}y' = y''_n = 2b_2\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}c_2 + \frac{\partial f_n}{\partial y}f_n a_{21}\right)$ cho nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 & = 1 \\ b_2 c_2 & = \dfrac{1}{2} \\ a_{21} b_2 & = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Phương pháp Runge – Kutta

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm.

Với nghiệm $b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$, ta có công thức Runge – Kutta chính là công thức Euler cải tiến.

Với nghiệm $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = a_{21} = 1$, ta có công thức RK2:

Runge – Kutta 2 (RK2)

$$\begin{cases} Y_2 = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, Y_2)] \end{cases}$$

c) Với $s = 3$**:** Lập luận tương tự ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 = \dfrac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \dfrac{1}{3} \\ b_3c_2a_{32} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Một nghiệm của hệ phương trình thường dùng trong thực tế là:

$$b_1 = \frac{1}{6},\ b_2 = \frac{2}{3},\ b_3 = \frac{1}{6}.c_2 = a_{21} = \frac{1}{2},\ c_3 = 1, a_{31} = -1.a_{32} = 2$$

Phương pháp Runge – Kutta

d) Với $s = 4$**:** Hệ phương trình với các ẩn số là hệ số của công thức Runge – Kutta 4 (RK4) là:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 + b_3 + b_4 = 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \dfrac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \dfrac{1}{3} \\ b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 = \dfrac{1}{4} \\ b_3a_{32}c_2 + b_4a_{42}c_2 + b_4a_{43}c_3 = \dfrac{1}{6} \\ b_3c_3a_{32}c_2 + b_4c_4a_{42}c_2 + b_4c_4a_{43}c_3 = \dfrac{1}{8} \\ b_3a_{32}c_2^2 + b_4a_{42}c_2^2 + b_4a_{43}c_3^2 = \dfrac{1}{12} \\ b_4a_{43}a_{32}c_2 = \dfrac{1}{24} \end{cases}, \begin{cases} c_2 = a_{21} \\ c_3 = a_{31} + a_{32} \\ c_4 = a_{41} + a_{42} + a_4 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm, trong thực tế RK4 thông dụng có dạng sau:

$$\begin{cases} k_1 = hf\left(x_n.y_n\right) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right) y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

Công thức RK4 có ước lượng sai số là :

$$R_4(h) = \frac{4\varphi^{(5)}\left(\xi\right)}{5!} h^5.$$

Sơ đồ tính toán

<table>
<tr><th>n</th><th>x_n</th><th>y_n</th><th>$hf(x_n, y_n)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">0</td><td>x_0</td><td>y_0</td><td>${}^{(0)}k_1$</td></tr>
<tr><td>$x_0 + \dfrac{h}{2}$</td><td>$y_0 + \dfrac{{}^{(0)}k_1}{2}$</td><td>${}^{(0)}k_2$</td></tr>
<tr><td>$x_0 + \dfrac{h}{2}$</td><td>$y_0 + \dfrac{{}^{(0)}k_2}{2}$</td><td>${}^{(0)}k_3$</td></tr>
<tr><td>$x_0 + h$</td><td>$y_0 + {}^{(0)}k_3$</td><td>${}^{(0)}k_4$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_1 = y_0 + \dfrac{1}{6}\left({}^{(0)}k_1 + 2{}^{(0)}k_2 + 2{}^{(0)}k_3 + {}^{(0)}k_4\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x_1</td><td>y_1</td><td>${}^{(1)}k_1$</td></tr>
</table>

Giả sử $y(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy (3) – (4) và $y_m, y_{m-1}, \ldots, y_{m-k}$ là các nghiệm gần đúng của bài toán tại các điểm nút $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_{m-k}$, với $x_{m-i} = x_m - ih, i = 0, 1, \ldots, k$ và h là độ dài bước, nghĩa là $y(x_{m-i}) \approx y_{m-i}$.

Ký hiệu: $f_i = f(x_i, y_i), i = m, m-1, \ldots m-k$.

Phương pháp Adams

Gọi $P(x)$ là đa thức nội suy nhận các giá trị tại các mốc nội suy $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_{m-k}$, khi đó:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} f_{m-i} P_i(x)$$

Đổi biến số: $x - x_m = th$ thì $P_i(x)$ trở thành $Q_i(t)$, khi đó từ công thức

$$y\left(x_{m+1}\right) = y(x_m) + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

Phương pháp Adams

ta có thể tính

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P(x)\mathrm{d}x = y_m + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{m-i} \qquad (16)$$

trong đó $\beta_i = \int_0^1 Q_i(t)\mathrm{d}t$. (16) được gọi là công thức ngoại suy Adams. Nếu trong quá trình xây dựng đa thức nội suy, ta sử dụng cả giá trị f_{m+1} thì công thức xây dựng được công thức ngoại suy:

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{i=-1}^{k} \gamma_i f_{m-i} \qquad (17)$$

Công thức ngoại suy Adams

Giả sử trong công thức (16), ta xây dựng $P(x)$ là đa thức nội suy Newton cuối bảng (dạng lùi), nghĩa là:

$$P(x) = f_m + \frac{t}{1!}\Delta f_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{m-2} + \ldots + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f_{m-k}$$

Từ đó:

$$y_{m+1} = y_m + h\int_0^1 \left(f_m + \frac{t}{1!}\Delta f_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{m-2} + \ldots + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f_{m-k} \right) \mathrm{d}t$$

Vậy:

$$y_{m+1} = y_m + h\left(f_m + a_1\Delta f_{m-1} + a_2\Delta^2 f_{m-2} + \ldots + a_k\Delta^k f_{m-k}\right)$$
$$= y_m + h\sum_{i=0}^{k} a_i\Delta^i f_{m-i}$$

trong đó $a_i = (-1)^i \int\limits_0^1 \left(C^i_{-t}\right) \mathrm{d}t$

Ta có bảng giá trị một số các a_i:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{5257}{17280}$

Nếu $k = 1$:

$$y_{m+1} = y_m + h\left(f_m + a_1 \Delta f_{m-1}\right) = y_m + \frac{h}{2}\left(3f_m - f_{m-1}\right)$$

Nếu $k = 2$:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h\left(f_m + a_1 \Delta f_{m-1} + a_2 \Delta f_{m-2}\right) \\ &= y_m + \frac{h}{12}\left(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}\right) \end{aligned}$$

Nếu $k = 3$:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h\left(f_m + a_1 \Delta f_{m-1} + a_2 \Delta f_{m-2} + a_3 \Delta f_{m-3}\right) \\ &= y_m + \frac{h}{24}\left(55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}\right) \end{aligned}$$

Công thức nội suy Adams

Nếu bắt đầu mốc nội suy x_{m+1} thì

$$P(x) = f_{m+1} + \frac{t}{1!}\Delta f_m + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{m-1} + \ldots + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f_{m-k+1}$$

Do đó

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P(x)\mathrm{d}x \\ &= y_m + h\int_{-1}^{0}\Big(f_{m+1} + \frac{t}{1!}\Delta f_m + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{m-1} + \ldots + \\ &\quad + \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f_{m-k+1}\Big)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Công thức nội suy Adams

Vậy

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h(f_{m+1} + b_1\Delta f_m + b_2\Delta^2 f_{m-1} + \ldots + b_k\Delta^k f_{m-k+1} \\ &= y_m + h\sum_{i=0}^{k} b_i\Delta^i f_{m-i+1} \end{aligned}$$

trong đó $b_i = (-1)^i \int\limits_{-1}^{0} \left(C_{-i}^{i}\right) \mathrm{d}t$.

Ta có bảng giá trị một số các b_i:

i	0	1	2	3	4	5	6
b_i	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$

Công thức nội suy Adams

Nếu $k = 2$:

$$y_{m+1} = y_m + h(f_{m+1} + b_1 \Delta f_m + b_2 \Delta f_{m-1}) = y_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m$$

Nếu $k = 3$:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h(f_{m+1} + b_1 \Delta f_m + b_2 \Delta f_{m-1} + b_3 \Delta f_{m-2}) \\ &= y_m + \frac{h}{24}(9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2}) \end{aligned}$$

Nếu $k = 4$:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{720}(251f_{m+1} + 646f_m - 264f_{m-1} + 106f_{m-2} - 19f_{m-3}$$

Ví dụ

Ví dụ 6.13. *(Trang 143)* Bằng phương pháp ngoại suy Adams ứng với $k = 3$, giải gần đúng phương trình: $y' = f(x, y) = y - x^2$ biết $y(0) = 1$ và độ dài bước $h = 0,1$.

Ví dụ: $y' = f(x,y) = y - x^2$, $y(0) = 1$

Giải

Công thức ngoại suy Adams ứng với $k = 3$:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}(55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3})$$

nghĩa là:

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

trong đó các giá trị $f_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$ và $y_i \approx y(x_i)$ được tính bằng phương pháp RK4 với các $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$.

Ví dụ: $y' = f(x, y) = y - x^2$, $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 1 \\ f(0.1, 1.104829) &= 1.094829 \\ f(0.2, 1.218597) &= 1.178597 \\ f(0.3, 1.3402141) &= 1.250141 \end{aligned}$$

Vậy,

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\ &= 1.340141 + \frac{0.1}{24}\left[55(1.250141) - 59(1.178597) + 37(1.094829) - 9\right] \\ &= 1.468179 \end{aligned}$$

$\star$ Nghiệm chính xác của phương trình đã cho là $\varphi(x) = 2 + 2x + x^2 - e^x$

Công thức nội suy Adams

Ta có thể so sánh nghiệm gần đúng khi giải phương trình đã cho bằng phương pháp RK4 và phương pháp nội suy Adams với $k = 3$ với nghiệm chính xác của phương trình theo bảng sau:

i	x_i	Adams	RK4	$\varphi(x_i)$
4	0.4	1.468179116	1.468174786	1.468175302
5	0.5	1.601288165	1.601278076	1.601278729
6	0.6	1.737896991	1.737880409	1.7378812
7	0.7	1.876270711	1.876246365	1.876247293
8	0.8	2.014491614	2.014458009	2.014459072
9	0.9	2.150440205	2.150395695	2.150396889
10	1.0	2.281774162	2.281716852	2.281718172

Bài tập

Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp Euler, Euler cải tiến, nội suy Adams và ngoại suy Adams tương ứng với $k = 4$ và $k = 3$ biết các giá trị đầu tiên được tìm bằng phương pháp RK4.

$y' = x - y, y(0) = 1, h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

(Câu 7b, trang 146)

⋆ Phương pháp Euler

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.1	0.9	0.91	0.91
2	0.2	0.82	0.83805	0.8385
3	0.3	0.758	0.78243525	0.783675
4	0.4	0.7122	0.741603901	0.74388125
5	0.5	0.68098	0.714151531	0.717638188
6	0.6	0.662882	0.698807135	0.703612178
7	0.7	0.6565938	0.694420457	0.700601879
8	0.8	0.66093442	0.699950514	0.707525064
9	0.9	0.674840978	0.714455215	0.723406762
10	1.0	0.69735688	0.73708197	0.74736858

⋆ Phương pháp nội suy Adams

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.740640480	0.740640578
5	0.5	0.713061780	0.713061869
6	0.6	0.697623789	0.697623869
7	0.7	0.693171165	0.693171237
8	0.8	0.698658514	0.698658579
9	0.9	0.713139923	0.713139982
10	1.0	0.735759495	0.735759549

⋆ Phương pháp ngoại suy Adams

Ta có: $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.740646198	0.740640578
5	0.5	0.713066954	0.713061869
6	0.6	0.697628470	0.697623869
7	0.7	0.693175401	0.693171237
8	0.8	0.698662347	0.698658579
9	0.9	0.713143391	0.713139982
10	1.0	0.735762633	0.735759549