TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ
KHOA SƯ PHẠM
BỘ MÔN SƯ PHẠM TOÁN HỌC

Bài tập nhóm

GIẢI TÍCH SỐ

Nhóm 3

Nguyễn Ngọc Đăng Duy	B1700014
Lê Hữu Kiệt	B1700024
Phan Thanh Tâm	B1700038
Nguyễn Hiếu Thanh	B1700039

Cần Thơ, 2020

Chương 1
Số gần đúng và sai số

Bài 1. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ sau:

$$c = 1,3241;\ \Delta_c = 0,23.10^{-2}$$

Giải

Sai số tuyệt đối giới hạn: $\Delta_c = 0,23.10^{-2}$.

Sai số tương đối giới hạn: $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|a|} = 0,00173702893$.

Bài 2. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp

$$b = 0,2351;\ \Delta_b = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\Delta_b = 0,5.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_b \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0, 2, 3, 5 là các chữ số đáng tin; chữ số 1 là chữ số đáng nghi.

Bài 3. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp

$$c = 0,2164; \delta_c = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|c|} \Rightarrow \Delta_c = \delta_c.|c| = 0,5.10^{-3}.0,2164 = 0,0001082 = 0,1082.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_c \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0,2,1,6 là đáng tin; chữ số 4 là đáng nghi

Bài 4. Tìm sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của hàm số

$$y = (1+abc)^\alpha \text{ biết } a = 2,13; b = 4,39; c = 0,72$$

Giải

Ta có: $a = 2,13 \pm 0,5.10^{-2}$, $b = 4,39 \pm 0,5.10^{-2}$, $c = 0,72 \pm 0,5.10^{-2}$

Lại có: $\begin{cases} y'_a = \alpha.bc.(1+abc)^{\alpha-1} \\ y'_b = \alpha.ac.(1+abc)^{\alpha-1} \\ y'_c = \alpha.ab.(1+abc)^{\alpha-1} \end{cases}$

Sai số tuyệt đối giới hạn của hàm số là:

$$\begin{aligned} \Delta_y &= |y'_a|.\Delta_a + |y'_b|.\Delta_b + |y'c|.\Delta_c \\ &= 3,1608.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 9,3507.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 1,5336.\alpha.7,732504^{\alpha-1} \\ &= \alpha.7,732504^{\alpha-1}.14,0451 \\ &= \alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514 \end{aligned}.$$

Sai số tương đối giới hạn của hàm số là

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\alpha.7,732504^\alpha.1,816371514}{(1+2,13.4,39.0,72)^\alpha} = \alpha.1,816371514$$

Chương 2
Lý thuyết nội suy

Bài 1. Tìm đa thức nội suy Larange của hàm số $y = f(x)$ cho bằng bảng sau:

d)

x	321	322,8	324,2	325
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

Và tính gần đúng giá trị $f(323,5)$.

e)

x	-2	1	3	4	7
y	12	37	51	67	127

Và tính gần đúng giá trị $f(5,1)$.

Giải:

d) Ta có:

$$\begin{aligned} y_0.L_0(x) &= 2,50651 \cdot \frac{(x-322,8)(x-324,2)(x-325)}{(321-322,8)(321-324,2)(321-325)} \\ &= \frac{250651}{100000} \cdot \frac{-25}{576}\left(x^3 - \frac{4862}{5}x^2 + \frac{7879661}{25}x - 34053968\right) \\ &= \frac{1420849532687}{384000} - \frac{1973417683019}{57600000}x + \frac{6767577}{64000}x^2 - \frac{250651}{2304000}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_0.L_0(323,5) = -0,07996027$

$$\begin{aligned} y_1.L_1(x) &= 2,50893 \cdot \frac{(x-321)(x-324,2)(x-325)}{(322,8-321)(322,8-324,2)(322,8-325)} \\ &= -\frac{188572098741}{12320} + \frac{6247598101}{44000}x - \frac{1756251}{4000}x^2 + \frac{27877}{61600}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_1.L_1(323,5) = 1,18794034$

$$\begin{aligned} y_2.L_2(x) &= 2,51081 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-325)}{(324,2-321)(324,2-322,8)(324,2-325)} \\ &= \frac{845543137491}{35840} - \frac{56108317827}{256000}x + \frac{43437013}{64000}x^2 - \frac{251081}{358400}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_2.L_2(323,5) = 1,83897216$

$$\begin{aligned} y_3.L_3(x) &= 2,51188 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-324,2)}{(325-321)(325-322,8)(325-324,2)} \\ &= -\frac{26369413998039}{2200000} + \frac{490348427793}{4400000}x - \frac{690767}{2000}x^2 + \frac{62797}{176000}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_3.L_3(323,5) = -0,43708139$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0.L_0(x) + y_.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x) \\ &= \frac{6766686623}{369600000} - \frac{47439221}{316800000}x + \frac{3}{6400}x^2 - \frac{43}{88704000}x^3 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} L(323,5) &= y_0.L_0(323,5) + y_.L_1(323,5) + y_2.L_2(323,5) + y_3.L_3(323,5) \\ &= 2,50987084 \end{aligned}$$

Vậy giá trị gần đúng của $f(323,5)$ là $P(323,5) \approx 2,50987084$

e) Ta có:

$$\begin{aligned} y_0L_0(x) &= 12 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(-2-1)(-2-3)(-2-4)(-2-7)} \\ &= \frac{56}{45} - \frac{58}{27}x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{135}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1L_1(x) &= 37 \cdot \frac{(x+2)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1+2)(1-3)(1-4)(1-7)} \\ &= \frac{518}{9} - \frac{703}{54}x - \frac{407}{36}x^2 + \frac{37}{9}x^3 - \frac{37}{108}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2L_2(x) &= 51 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-4)(x-7)}{(3+2)(3-1)(3-4)(3-7)} \\ &= -\frac{357}{5} + \frac{255}{4}x + \frac{153}{8}x^2 - \frac{51}{4}x^3 + \frac{51}{40}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3L_3(x) &= 67 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-7)}{(4+2)(4-1)(4-3)(4-7)} \\ &= \frac{469}{9} - \frac{2747}{54}x - \frac{67}{6}x^2 + \frac{67}{6}x^3 - \frac{67}{54}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4L_4(x) &= 127 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-4)}{(7+2)(7-1)(7-3)(7-4)} \\ &= -\frac{127}{27} + \frac{1651}{324}x + \frac{127}{216}x^2 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{127}{648}x^4 \end{aligned}$$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0.L_0(x) + y_.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x) \\ &= \frac{4699}{135} + \frac{455}{162}x - \frac{89}{54}x^2 + \frac{61}{54}x^3 - \frac{79}{810}x^4 \end{aligned}$$

và giá trị gần đúng của $f(5,1)$ là $P(5,1) \approx 90,1281$.

Chương 3
Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

Bài 1. Bằng phương pháp hình thang và Simpson 1/3, với $n = 10$ để tính gần đúng và đánh giá sai số các tích phân sau:

b) $I = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

d) $I = \int_0^6 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

Giải

b) ⋆ *Công thức Simpson 1/3*

Ta có $h = \frac{\pi - 0}{10} = \frac{\pi}{10}$ Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$		
0	0	0		
1	$\frac{\pi}{10}$		0,3090	
2	$\frac{\pi}{5}$			0,5878
3	$\frac{3\pi}{10}$		0,8090	
4	$\frac{2\pi}{5}$			0,9511
5	$\frac{\pi}{2}$		1	
6	$\frac{3\pi}{5}$			0,9511
7	$\frac{7\pi}{10}$		0,8090	
8	$\frac{4\pi}{5}$			0,5878
9	$\frac{9\pi}{10}$		0,3090	
10	π	0		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{\pi}{30}.\left[0 + 4.3,2361 + 2.3,0777\right] \approx 2,000105435$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant \pi}\left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(\pi - 0)h^4 = \frac{1}{180}.\pi.\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 \approx 0,00017$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \frac{\pi - 0}{10} = \frac{\pi}{10}$

Ta được bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$	
0	0	
$\frac{\pi}{10}$		0,3090
$\frac{\pi}{5}$		0,5878
$\frac{3\pi}{10}$		0,8090
$\frac{2\pi}{5}$		0,9511
$\frac{\pi}{2}$		1
$\frac{3\pi}{5}$		0,9511
$\frac{7\pi}{10}$		0,8090
$\frac{4\pi}{5}$		0,5878
$\frac{9\pi}{10}$		0,3090
1	0	
	0	6,3138

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{\pi}{2.10}.(0 + 2.6,3138) \approx 1,9835$$

* Đánh giá sai số: Ta có $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |f''(x)| = 1$ và $\bar{I} = 1,98$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \frac{M}{12}.(\pi - 0).\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \approx 0,026$

và $|I_T - \bar{I}| = 3,5.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,0295.$

d) ⋆ *Công thức Simpson 1/3*

Ta có $h = \frac{6-0}{10} = \frac{3}{5}$

Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x^2+1}$		
0	0	1		
1	$0,6$		0,7353	
2	$1,2$			0,4098
3	$1,8$		0,2358	
4	$2,4$			0,1479
5	3		$0,1$	
6	$3,6$			0,0716
7	$4,2$		0,0536	
8	$4,8$			0,0416
9	$5,4$		0,0332	
10	6	0,0270		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{1}{5}.\left[1,0270 + 4.1,1579 + 2.0,6980\right] \approx 1,410973$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max_{0\leqslant x\leqslant 6}\left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(6-0)h^4 = \frac{24}{180}.6.\left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,10368$$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{6-0}{10} = \dfrac{3}{5}$ Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x^2+1}$	
0	0	1	
1	$0,6$		$\frac{25}{34}$
2	$1,2$		$\frac{25}{61}$
3	$1,8$		$\frac{25}{106}$
4	$2,4$		$\frac{25}{169}$
5	3		$\frac{1}{10}$
6	$3,6$		$\frac{25}{349}$
7	$4,2$		$\frac{25}{466}$
8	$4,8$		$\frac{25}{601}$
9	$5,4$		$\frac{25}{754}$
10	6	$\frac{1}{37}$	
		$\frac{38}{37}$	$\frac{11967477}{6543383}$

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{6-0}{2.10}.\left(\frac{38}{37} + 2.\frac{11967477}{6543383}\right) = 1,40547$$

* Đánh giá sai số Ta có $M = \max\limits_{0\leqslant 6}|f''(x)| = 2$ và $\bar{I} = 1,41$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12}.(6-0).\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 0,36$

và $|I_T - \bar{I}| = 4,53.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,364653.$

Bài 5: Tính gần đúng tích phân $I = \displaystyle\int_{-0,8}^{0,8} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$ bằng công thức Simpson với $n = 16$ và đánh giá sai số của kết quả vừa nhận được.

Giải

Ta có $h = \dfrac{0,8 - (-0,8)}{16} = 0,1.$

Ta lập được bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
0	-0,8	0,934411509		
1	-0,7		0,85582621	
2	-0,6			0,762860112
3	-0,5		0,656932407	
4	-0,4			0,539742953
5	-0,3		0,413235796	
6	-0,2			0,279557228
7	-0,1		0,141009326	
8	0,001			0,001414213
9	0,1		0,141009326	
10	0,2			0,279557228
11	0,3		0,413235796	
12	0,4			0,539742953
13	0,5		0,656932407	
14	0,6			0,762860112
15	0,7		0,85582621	
16	0,8	0,934411509		
		1,868823017	4,134007477	3,165734799

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{0,1}{3}.\left[1,868823017 + 4.4,134007477 + 2.3,165734799\right] \approx 0,824544084$$

* Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{-0,8\leqslant x\leqslant 0,8}\left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(0,8+0,8)h^4 = \frac{3,35366}{180}.1,6.\left(0,1\right)^4 \approx 1,98103.10^{-6}$$

Chương 4
Giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt

Bài 2. Dùng phương pháp lặp đơn, hãy tìm nghiệm của các phương trình: i) $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0; 0,5)$ j) $x = \ln x + 3$ với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4; 5)$

Giải

i) Đặt $f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$, ta có:

$$f'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{2}e^x < 0 \forall x \in (0; 0,5)$$
$$f(0) = \frac{1}{2}$$
$$f(0,5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.e^{\frac{1}{2}}$$

Từ đây ta có $f(0).f(0,5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng $(0; 0,5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(0; 0,5)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x = 1 - \sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Đặt $\varphi(x) = 1 - \sqrt{\frac{e^x}{2}}$, ta có:

$$\varphi'(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{8}}$$
$$\max_{x \in [0;0,5]} |\varphi'(x)| \approx 0,45397$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant 0,83140|x_n - x_{n-1}|$ Chọn $x = 0,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$0,83140\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	$0,25664$	$0,13023$
2	$0,19608$	$0,05035$
3	$0,22006$	$0,01994$
2	$0,21065$	$0,78210.10^{-2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0; 0,5)$ là $x \approx 0,21065$.

j)Đặt $f(x) = x - \ln x - 3$, ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 \forall x \in (4;5)$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f(4) = 1 - \ln 4$$
$$f(5) = 2 - \ln 5$$

Từ đây ta có $f(4).f(5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng $(4;5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(4;5)$

Đặt $\varphi(x) = \ln x + 3$, ta có:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}$$
$$\max_{x\in[4;5]} |\varphi'(x)| = 0,25$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|$

Chọn $x = 4,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$\frac{1}{3}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	$4,41099$	$0,10366$
2	$4,48410$	$0,02437$
3	$4,50054$	$0,54797.10^{-2}$
4	$4,50420$	$0,12198.10^{-2}$
5	$4,50500$	$0,27092.10^{-3}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4;5)$ là $x \approx 4,50500$.