TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ
KHOA SƯ PHẠM
BỘ MÔN SƯ PHẠM TOÁN HỌC

Bài tập nhóm

GIẢI TÍCH SỐ

Nhóm 3

Nguyễn Ngọc Đăng Duy	B1700014
Lê Hữu Kiệt	B1700024
Phan Thanh Tâm	B1700038
Nguyễn Hiếu Thanh	B1700039

Cần Thơ, 2020

Chương 1
Số gần đúng và sai số

Bài 1. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ sau:

$$c = 1,3241;\ \Delta_c = 0,23.10^{-2}$$

Giải

Sai số tuyệt đối giới hạn: $\Delta_c = 0,23.10^{-2}$.

Sai số tương đối giới hạn: $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|a|} = 0,00173702893$.

Bài 2. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp:

$$b = 0,2351;\ \Delta_b = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\Delta_b = 0,5.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_b \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0, 2, 3, 5 là các chữ số đáng tin; chữ số 1 là chữ số đáng nghi.

Bài 3. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp:

$$c = 0,2164; \delta_c = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|c|} \Rightarrow \Delta_c = \delta_c.|c| = 0,5.10^{-3}.0,2164 = 0,0001082 = 0,1082.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_c \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0,2,1,6 là đáng tin; chữ số 4 là đáng nghi

Bài 4. Tìm sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của hàm số:

$$y = (1 + abc)^{\alpha}$$

biết $a = 2,13;\ b = 4,39;\ c = 0,72$.

Giải

Ta có: $a = 2,13 \pm 0,5.10^{-2}$, $b = 4,39 \pm 0,5.10^{-2}$, $c = 0,72 \pm 0,5.10^{-2}$

Lại có: $\begin{cases} y'_a = \alpha.bc.(1+abc)^{\alpha-1} \\ y'_b = \alpha.ac.(1+abc)^{\alpha-1} \\ y'_c = \alpha.ab.(1+abc)^{\alpha-1} \end{cases}$.

Sai số tuyệt đối giới hạn của hàm số là:

$$
\begin{aligned}
\Delta_y &= |y'_a|\,.\Delta_a + |y'_b|\,.\Delta_b + |y'c|\,.\Delta_c \\
&= 3,1608.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 9,3507.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 1,5336.\alpha.7,732504^{\alpha-1} \\
&= \alpha.7,732504^{\alpha-1}.14,0451 \\
&= \alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514
\end{aligned}
$$

Sai số tương đối giới hạn của hàm số là

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514}{(1+2,13.4,39.0,72)^{\alpha}} = \alpha.1,816371514$$

Chương 2
Lý thuyết nội suy

Bài 1. Tìm đa thức nội suy Larange của hàm số $y = f(x)$ cho bằng bảng sau:

d)

x	321	322,8	324,2	325
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

và tính gần đúng giá trị $f(323,5)$.

e)

x	-2	1	3	4	7
y	12	37	51	67	127

và tính gần đúng giá trị $f(5,1)$.

Giải

d) Ta có:

$$\begin{aligned} y_0.L_0(x) &= 2,50651 \cdot \frac{(x-322,8)(x-324,2)(x-325)}{(321-322,8)(321-324,2)(321-325)} \\ &= \frac{250651}{100000} \cdot \frac{-25}{576}\left(x^3 - \frac{4862}{5}x^2 + \frac{7879661}{25}x - 34053968\right) \\ &= \frac{1420849532687}{384000} - \frac{1973417683019}{57600000}x + \frac{6767577}{64000}x^2 - \frac{250651}{2304000}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_0.L_0(323,5) = -0,07996027$

$$\begin{aligned} y_1.L_1(x) &= 2,50893 \cdot \frac{(x-321)(x-324,2)(x-325)}{(322,8-321)(322,8-324,2)(322,8-325)} \\ &= -\frac{188572098741}{12320} + \frac{6247598101}{44000}x - \frac{1756251}{4000}x^2 + \frac{27877}{61600}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_1.L_1(323,5) = 1,18794034$

$$\begin{aligned} y_2.L_2(x) &= 2,51081 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-325)}{(324,2-321)(324,2-322,8)(324,2-325)} \\ &= \frac{845543137491}{35840} - \frac{56108317827}{256000}x + \frac{43437013}{64000}x^2 - \frac{251081}{358400}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_2.L_2(323,5) = 1,83897216$

$$\begin{aligned} y_3.L_3(x) &= 2,51188 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-324,2)}{(325-321)(325-322,8)(325-324,2)} \\ &= -\frac{26369413998039}{2200000} + \frac{490348427793}{4400000}x - \frac{690767}{2000}x^2 + \frac{62797}{176000}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_3.L_3(323,5) = -0,43708139$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0.L_0(x) + y_.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x) \\ &= \frac{6766686623}{369600000} - \frac{47439221}{316800000}x + \frac{3}{6400}x^2 - \frac{43}{88704000}x^3 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} L(323,5) &= y_0.L_0(323,5) + y_.L_1(323,5) + y_2.L_2(323,5) + y_3.L_3(323,5) \\ &= 2,50987084 \end{aligned}$$

Vậy giá trị gần đúng của $f(323,5)$ là $P(323,5) \approx 2,50987084$

e) Ta có:

$$\begin{aligned} y_0L_0(x) &= 12 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(-2-1)(-2-3)(-2-4)(-2-7)} \\ &= \frac{56}{45} - \frac{58}{27}x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{135}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1L_1(x) &= 37 \cdot \frac{(x+2)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1+2)(1-3)(1-4)(1-7)} \\ &= \frac{518}{9} - \frac{703}{54}x - \frac{407}{36}x^2 + \frac{37}{9}x^3 - \frac{37}{108}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2L_2(x) &= 51 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-4)(x-7)}{(3+2)(3-1)(3-4)(3-7)} \\ &= -\frac{357}{5} + \frac{255}{4}x + \frac{153}{8}x^2 - \frac{51}{4}x^3 + \frac{51}{40}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3L_3(x) &= 67 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-7)}{(4+2)(4-1)(4-3)(4-7)} \\ &= \frac{469}{9} - \frac{2747}{54}x - \frac{67}{6}x^2 + \frac{67}{6}x^3 - \frac{67}{54}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4L_4(x) &= 127 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-4)}{(7+2)(7-1)(7-3)(7-4)} \\ &= -\frac{127}{27} + \frac{1651}{324}x + \frac{127}{216}x^2 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{127}{648}x^4 \end{aligned}$$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0.L_0(x) + y_.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x) \\ &= \frac{4699}{135} + \frac{455}{162}x - \frac{89}{54}x^2 + \frac{61}{54}x^3 - \frac{79}{810}x^4 \end{aligned}$$

và giá trị gần đúng của $f(5,1)$ là $P(5,1) \approx 90,1281$.

Bài 2. Tìm đa thức nội suy Newton của hàm số $y = f(x)$ được cho bằng bảng sau:

b)

x	$-0,35$	$-0,1$	$0,15$	$0,4$	$0,65$
y	$0,387322$	$0,762616$	$1,501553$	$2,956482$	$5,821162$

và tính gần đúng giá trị $f\,(0,55)$.

Giải

Ta có bảng tỉ sai phân như sau:

x_i	y_i	TSP cấp 1	TSP cấp 2	TSP cấp 3	TSP cấp 4
$-0,35$	$0,387322$				
		$1,501176$			
$-0,1$	$0,762616$		$2,909144$		
		$2,955748$		$3,758389$	
$0,15$	$1,501553$		$5,727936$		$3,641707$
		$5,819716$		$7,400096$	
$0,4$	$2,956482$		$11,278008$		
		$11,45872$			
$0,65$	$5,821162$				

Đa thức nội suy Newton:

$$\begin{aligned} f(x) = \ & 0,387323 + 1,501176(x+0,35) + 2,909144(x+035)(x+0,1)+ \\ & + 3,758389(x+0,35)(x+0,1)(x-0,15)+ \\ & + 3,641707(x+0,35)(x+0,1)(x-0,15)(x-0,4) \end{aligned}$$

Khi đó, ta tính được $f(0,55) = 4,447517528$.

Chương 3
Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

Bài 1. Bằng phương pháp hình thang và Simpson 1/3, với $n = 10$, tính gần đúng và đánh giá sai số các tích phân sau:

b) $I = \int\limits_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

d) $I = \int\limits_0^{6} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$

f) $I = \int\limits_2^{4} \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x$

j) $I = \int\limits_{0,1}^{1,1} \frac{1}{(1+4x)^2} \mathrm{d}x$

Giải

b) $\star$ *Công thức Simpson 1/3*

$h = \frac{\pi - 0}{10} = \frac{\pi}{10}$. Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$		
0	0	0		
1	$\frac{\pi}{10}$		0,3090	
2	$\frac{\pi}{5}$			0,5878
3	$\frac{3\pi}{10}$		0,8090	
4	$\frac{2\pi}{5}$			0,9511
5	$\frac{\pi}{2}$		1	
6	$\frac{3\pi}{5}$			0,9511
7	$\frac{7\pi}{10}$		0,8090	
8	$\frac{4\pi}{5}$			0,5878
9	$\frac{9\pi}{10}$		0,3090	
10	π	0		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{\pi}{30}.[0 + 4.3,2361 + 2.3,0777] \approx 2,000105435$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} \left| f^{(4)}(x) \right|}{180} (\pi - 0) h^4 = \frac{1}{180} . \pi . \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 \approx 0,00017$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{10}$

Ta được bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$	
0	0	
$\frac{\pi}{10}$		0,3090
$\frac{\pi}{5}$		0,5878
$\frac{3\pi}{10}$		0,8090
$\frac{2\pi}{5}$		0,9511
$\frac{\pi}{2}$		1
$\frac{3\pi}{5}$		0,9511
$\frac{7\pi}{10}$		0,8090
$\frac{4\pi}{5}$		0,5878
$\frac{9\pi}{10}$		0,3090
1	0	
	0	6,3138

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{\pi}{2.10} . (0 + 2.6,3138) \approx 1,9835$$

* Đánh giá sai số: Ta có $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |f''(x)| = 1$ và $\bar{I} = 1,98$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12} . (\pi - 0) . \left(\dfrac{\pi}{10} \right)^2 \approx 0,026$

và $|I_T - \bar{I}| = 3,5.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,0295.$

d) ⋆ *Công thức Simpson 1/3*

Ta có $h = \dfrac{6 - 0}{10} = \dfrac{3}{5}$

Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$		
0	0	1		
1	$0,6$		0,7353	
2	$1,2$			0,4098
3	$1,8$		0,2358	
4	$2,4$			0,1479
5	3		$0,1$	
6	$3,6$			0,0716
7	$4,2$		0,0536	
8	$4,8$			0,0416
9	$5,4$		0,0332	
10	6	0,0270		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{1}{5}.\left[1,0270 + 4.1,1579 + 2.0,6980\right] \approx 1,410973$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max_{0\leqslant x\leqslant 6}\left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(6-0)h^4 = \frac{24}{180}.6.\left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,10368$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{6-0}{10} = \dfrac{3}{5}$ Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$	
0	0	1	
1	$0,6$		$\dfrac{25}{34}$
2	$1,2$		$\dfrac{25}{61}$
3	$1,8$		$\dfrac{25}{106}$
4	$2,4$		$\dfrac{25}{169}$
5	3		$\dfrac{1}{10}$
6	$3,6$		$\dfrac{25}{349}$
7	$4,2$		$\dfrac{25}{466}$
8	$4,8$		$\dfrac{25}{601}$

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$	
9	$5,4$		$\dfrac{25}{754}$
10	6	$\dfrac{1}{37}$	
		$\dfrac{38}{37}$	$\dfrac{11967477}{6543383}$

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{6-0}{2.10}.(\frac{38}{37} + 2.\frac{11967477}{6543383}) = 1,40547$$

* Đánh giá sai số Ta có $M = \max\limits_{0 \leqslant 6} |f''(x)| = 2$ và $\bar{I} = 1,41$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12}.(6-0).\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 0,36$

và $|I_T - \bar{I}| = 4,53.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,364653.$

f) Ta có $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-2}{10} = 0,2$ và $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$	
$2,0$	1	
$2,2$		$\dfrac{25}{36}$
$2,4$		$\dfrac{25}{49}$
$2,6$		$\dfrac{25}{64}$
$2,6$		$\dfrac{25}{81}$
$3,0$		$\dfrac{1}{4}$
$3,2$		$\dfrac{25}{121}$
$3,4$		$\dfrac{25}{144}$
$3,6$		$\dfrac{25}{169}$
$3,8$		$\dfrac{25}{196}$

x_i	$y_i = f\left(x_i\right) = \dfrac{1}{\left(x_i - 1\right)^2}$	
$4,0$	$\dfrac{1}{9}$	
	$\dfrac{10}{9}$	$2,809618197$

Vậy theo công thức hình thang ta tính được giá trị gần đúng của tích phân là:

$$I \approx \int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x = \frac{4-2}{2\,(10)} \left(\frac{10}{9} + 2\,(2,809618197) \right) = 0,6730347505$$

Nếu làm tròn đến năm chữ số thập phân thì $I_T = 0,67303$.

Đánh giá sai số theo công thức tích phân, ta có:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}; \qquad f''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}$$

Do hàm f'' nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $M = \max\limits_{2 \leqslant x \leqslant 4} |f''(x)| = |f''(2)| = 6$.

Nên $|I - I_T| \leqslant \dfrac{6}{12}(4-2)\,(0,2)^2 = 0,04$.

Và $\left|I_T - \overline{I}\right| = 4,7505.10^{-6}$

Do đó $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_T| + \left|I_T - \overline{I}\right| = 0,04 + 4,7505.10^{-6}$.

⋆ *Áp dụng công thức Simpson 1/3*

Ta có bảng:

i	x_i	$f\left(x_i\right) = \dfrac{1}{\left(x_i - 1\right)^2}$		
0	$2,0$	1		
1	$2,2$		$\dfrac{25}{36}$	
2	$2,4$			$\dfrac{25}{49}$
3	$2,6$		$\dfrac{25}{64}$	
4	$2,8$			$\dfrac{25}{81}$
5	$3,0$		$\dfrac{1}{4}$	
6	$3,2$			$\dfrac{25}{121}$
7	$3,4$		$\dfrac{25}{144}$	

i	x_i	$f(x_i)=\dfrac{1}{(x_i-1)^2}$		
8	$3,6$			$\dfrac{25}{169}$
9	$3,8$		$\dfrac{25}{196}$	
10	$4,0$	$\dfrac{1}{9}$		
		$\dfrac{10}{9}$	$1,636231576$	$1,173386621$

Áp dụng công thức Simpson 1/3 ta tính gần đúng tích phân là:

$$I_S=\int\limits_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x\approx\frac{0,2}{3}\left[\frac{10}{9}+4\left(1,6366231576\right)+2\left(1,173386621\right)\right]=0,6668540438$$

Nếu lấy 5 chữ số thập phân, khi đó $\overline{I}=0,66685$. Nên $\left|I_S-\overline{I}\right|=4.0438\times 10^{-6}$

Đánh giá sai số theo công thức, ta có:

$$f^{(3)}(x)=\frac{24}{(x-1)^5};\qquad f^{(4)}(x)=\frac{120}{(x-1)^6}$$

Do $f^{(4)}(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $M=\max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4}\left|f^{(4)}(x)\right|=\left|f^{(4)}(2)\right|=120$

Do đó $|I-I_S|\leqslant\dfrac{120}{180}\times(4-2)\times(0,2)^4=0,05\,(3)$

Vậy $\left|I-\overline{I}\right|\leqslant|I-I_S|+\left|I_S-\overline{I}\right|=0,05\,(3)-4.0438\times 10^{-6}$

Bài 5. Tính gần đúng tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-0,8}^{0,8}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\mathrm{d}x$ bằng công thức Simpson với $n=16$ và đánh giá sai số của kết quả vừa nhận được.

Giải

Ta có $h=\dfrac{0,8-(-0,8)}{16}=0,1.$

Ta lập được bảng sau:

i	x_i	$y_i=f(x_i)=\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
0	$-0,8$	0,934411509		
1	$-0,7$		0,85582621	
2	$-0,6$			0,762860112
3	$-0,5$		0,656932407	
4	$-0,4$			0,539742953
5	$-0,3$		0,413235796	
6	$-0,2$			0,279557228

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
7	$-0,1$		0,141009326	
8	$0,001$			0,001414213
9	$0,1$		0,141009326	
10	$0,2$			0,279557228
11	$0,3$		0,413235796	
12	$0,4$			0,539742953
13	$0,5$		0,656932407	
14	$0,6$			0,762860112
15	$0,7$		0,85582621	
16	$0,8$	0,934411509		
		1,868823017	4,134007477	3,165734799

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{0,1}{3} \cdot [1,868823017 + 4.4,134007477 + 2.3,165734799] \approx 0,824544084$$

* Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{-0,8 \leqslant x \leqslant 0,8} \left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(0,8+0,8)h^4 = \frac{3,35366}{180}.1,6.\,(0,1)^4 \approx 1,98103.10^{-6}$$

j) Ta có $h = \dfrac{1,1-0,1}{10} = 0,1$ và $g(x) = \dfrac{1}{(1+4x)^2}$

Ta tìm được các đạo hàm của $g(x)$:

$$g'(x) = -\frac{8}{(1+4x)^3}; \quad g''(x) = \frac{96}{(1+4x)^4}; \quad g^{(3)(x)} = -\frac{1536}{(1+4x)^5}; \quad g^{(4)}(x) = \frac{30720}{(1+4x)^6}$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có bảng giá trị:

	x_i	$y_i = g(x_i) = \dfrac{1}{(1+4x_i)^2}$	
0	$0,1$	$\dfrac{25}{49}$	
1	$0,2$		$\dfrac{25}{81}$
2	0.3		$\dfrac{25}{121}$
3	$0,4$		$\dfrac{25}{169}$
4	$0,5$		$\dfrac{1}{9}$

	x_i	$y_i = g(x_i) = \dfrac{1}{(1+4x_i)^2}$	
5	$0,6$		$\dfrac{25}{289}$
6	$0,7$		$\dfrac{25}{361}$
7	$0,8$		$\dfrac{25}{441}$
8	$0,9$		$\dfrac{25}{529}$
9	$1,0$		$\dfrac{1}{25}$
10	$1,1$	$\dfrac{25}{729}$	
		$0,5444976344$	$1,03399924$

Vậy theo công thức hình thang, giá trị gần đúng của tích phân cần tìm là:

$$I_T = \int\limits_{0,1}^{1,1} g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{0,1}{2}\left[0,5444976344 + 2\,(1,03399924)\right] = 0,1306248057$$

Nếu làm tròn đến năm chữ số thập phân thì $\overline{I} = 0,13062$.

* Đánh giá sai số theo công thức tích phân:

Ta có $M = \max\limits_{0,1\leqslant x\leqslant 1,1} |g''(x)| = |g''\,(1,1)| = 0,1129005854$.

Nên $|I - I_T| \leqslant \dfrac{M}{12}\,(1,1-0,1)\,(0,1)^2 = 9,408382116.10^{-5}$.

và $\left|I_T - \overline{I}\right| = 4,8075.10^{-6}$.

Do đó $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_T| + \left|I_T - \overline{I}\right| \leqslant 9,408382116.10^{-5} + 4,8075.10^{-6}$.

Chương 4
Giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt

Bài 2. Dùng phương pháp lặp đơn, hãy tìm nghiệm của các phương trình:
c) $x - \sin x = 0,25$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân lý nghiệm $(1; 1,5)$.
f) $2^x - 5x - 3 = 0$ với sai số 10^{-4} trong khoảng phân ly nghiệm $(4; 5)$.
i) $(x-1)^2 = \dfrac{1}{2}e^x$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0; 0,5)$.
j) $x = \ln x + 3$ với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4; 5)$
Giải
c) Đặt $f(x) = x - \sin x - 0,25$. Ta có:

- $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; 1,5)$.
- $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $\forall x \in (1; 1,5)$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $(1; 1,5)$.
- $f(1) = 0,7325$, $f(1,5) = 1,2238$, suy ra $f(1)\, f(1,5) > 0$.

Từ đây ta suy ra hàm số vô nghiệm trên đoạn $(1; 1,5)$.
f) Đặt $f(x) = 2^x - 5x - 3$. Ta có:

- $f(x)$ liên tục trên khoảng $(4; 5)$.
- $f(4)\, f(5) < 0$.
- $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5 > 0, \forall x \in (4; 5)$.

Do đó: phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên khoảng $(4; 5)$.
Do $f'(x) > 0$ nên ta đặt $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$. Trong đó:

$$M \geq \max_{x \in (4;5)} |f'(x)| \approx 17,1807$$

Chọn $M = 17,1807$, suy ra $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{17,1807} = \dfrac{-2^x + 22,1807x + 3}{17,1807}$.
Ta có $\varphi'(x) = \dfrac{-2^x \ln 2 + 22,1807}{17,1807}$ và $\max\limits_{x \in (4;5)} |\varphi'(x)| < |\varphi'(4)| = 0,6455$.
Chọn $L = 0,6455$.
Chọn $x_0 = 4,7$, ta có xấp xỉ nghiệm trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi\left(x_{n-1}\right)$	$\left\|x_n - x*\right\| \leq 1,82087\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
1	$4,72956$	$0,05382$
2	$4,73641$	$0,01247$
3	$4,73791$	$0,02731$
4	$4,73822$	$0,00056$
5	$4,73829$	$0,00013$
6	$4,73831$	$0,00004$

Vậy $x^* \approx x_6 = 4,73831$.

i) Đặt $f(x) = (x-1)^2 - \dfrac{1}{2}e^x = 0$, ta có:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{2}e^x < 0 \forall x \in (0;0,5)\\
&f(0) = \frac{1}{2}\\
&f(0,5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Từ đây ta có $f(0).f(0,5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng $(0;0,5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(0;0,5)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x = 1 - \sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Đặt $\varphi(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{e^x}{2}}$, ta có:

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\sqrt{\frac{e^x}{8}}\\
\max_{x \in [0;0,5]} |\varphi'(x)| &\approx 0,45397
\end{aligned}
$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant 0,83140|x_n - x_{n-1}|$ Chọn $x = 0,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$0,83140\|x_n - x_{n-1}\|$
1	$0,25664$	$0,13023$
2	$0,19608$	$0,05035$
3	$0,22006$	$0,01994$
2	$0,21065$	$0,78210.10^{-2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0;0,5)$ là $x \approx 0,21065$.

j) Đặt $f(x) = x - \ln x - 3$, ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \in (4; 5)$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f(4) = 1 - \ln 4$$
$$f(5) = 2 - \ln 5$$

Từ đây ta có $f(4).f(5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng $(4; 5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(4; 5)$.

Đặt $\varphi(x) = \ln x + 3$, ta có:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}; \qquad \max_{x \in [4;5]} |\varphi'(x)| = 0,25$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|$

Chọn $x = 4,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$\frac{1}{3}\|x_n - x_{n-1}\|$
1	$4,41099$	$0,10366$
2	$4,48410$	$0,02437$
3	$4,50054$	$0,54797.10^{-2}$
4	$4,50420$	$0,12198.10^{-2}$
5	$4,50500$	$0,27092.10^{-3}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4; 5)$ là $x \approx 4,50500$.

Chương 5
Giải tích số trong đại số tuyến tính

Bài 3 Giải hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương pháp lặp đơn với sai số 10^{-3}:

d) $A = \begin{pmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 21,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 20,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 21,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 19,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 32,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & -2 & 18 & 4 \\ 22 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & 21 & -8 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 20 \\ 26 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Giải

d) Ta có bảng sau:

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\lvert a_{ii}\rvert$	10,9	11,2	9,8	21,1
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	4,2	5,2	4,9	4,7

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,110091743119266 & -0,192660550458716 & -0,0825688073394495 \\ -0,107142857142857 & 0 & -0,133928571428571 & -0,223214285714286 \\ -0,214285714285714 & -0,153061224489796 & 0 & -0,13265306122449 \\ -0,042654028436019 & -0,118483412322275 & -0,0616113744075829 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -0,642201834862385 \\ 0,473214285714286 \\ 1,05102040816327 \\ 1,16587677725118 \end{pmatrix}$$

Xét $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} \sum\limits_{j=1}^{4} \|b_{ij}\| = 0,5 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta có $\dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} = 1$ và chọn $x^{(0)} = g$, ta xây dựng dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ theo công thức $x^{(k+1)} =$

$Bx^{(k)} + g$, đồng thời đánh giá sai số của phương pháp, ta có kết quả sau:

k	$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$	$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = \dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
1	$\begin{pmatrix} -0,993054045828079 \\ 0,14101961129125 \\ 0,961547205531943 \\ 1,07244641736863 \end{pmatrix}$	0,350852210965694
2	$\begin{pmatrix} -0,931529765210858 \\ 0,211448928863767 \\ 1,09996976905335 \\ 1,1322838031197 \end{pmatrix}$	0,138422563521411
3	$\begin{pmatrix} -0,970892720408834 \\ 0,172961746149442 \\ 1,0680683846522 \\ 1,11278643444365 \end{pmatrix}$	0,0393629551979762
4	$\begin{pmatrix} -0,958899586619104 \\ 0,185803803696713 \\ 1,08498058457731 \\ 1,12099100393111 \end{pmatrix}$	0,0169121999251123
5	$\begin{pmatrix} -0,964249146384074 \\ 0,180422421182962 \\ 1,07935664502496 \\ 1,11791589378033 \end{pmatrix}$	0,00562393955235119
6	$\begin{pmatrix} -0,962319281135253 \\ 0,182435203006485 \\ 1,08173458303242 \\ 1,11912817726331 \end{pmatrix}$	0,00237793800745756
7	$\begin{pmatrix} -0,963099103441544 \\ 0,181639358897804 \\ 1,08085214851347 \\ 1,1186608714485 \end{pmatrix}$	0,000882434518947317

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x^* \approx x^{(7)}$ với sai số $\epsilon = 0,000882435 < 10^{-3}$.

e) Ta có bảng sau:

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\lvert a_{ii}\rvert$	20,9	21,2	19,8	32,1
$\sum_{j=1, j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	4,2	5,2	4,9	4,7

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,0574162679425837 & -0,100478468899522 & -0,0430622009569378 \\ -0,0566037735849057 & 0 & -0,0707547169811321 & -0,117924528301887 \\ -0,106060606060606 & -0,0757575757575758 & 0 & -0,0656565656565657 \\ -0,0280373831775701 & -0,0778816199376947 & -0,0404984423676012 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -0,334928229665072 \\ 0,25 \\ 0,52020202020202 \\ 0,766355140186916 \end{pmatrix}$$

Xét $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} \sum\limits_{j=1}^{4} \|b_{ij}\| = 0,247474747 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta có $\dfrac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} = 0,32885906$ và chọn $x^{(0)} = g$, ta xây dựng dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ theo công thức $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, đồng thời đánh giá sai số của phương pháp, ta có kết quả sau:

k	$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$	$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = \dfrac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
1	$\begin{pmatrix} -0,434552338210166 \\ 0,14177938654848 \\ 0,486469070709781 \\ 0,735207874779936 \end{pmatrix}$	0,0355893292558691
2	$\begin{pmatrix} -0,423608009552663 \\ 0,153478278907438 \\ 0,507278817838622 \\ 0,747795602682095 \end{pmatrix}$	0,00684347388800811
3	$\begin{pmatrix} -0,426912703089183 \\ 0,149901998962265 \\ 0,504405309000642 \\ 0,745734861312729 \end{pmatrix}$	0,00117609206250647
4	$\begin{pmatrix} -0,426329900614236 \\ 0,150535383345483 \\ 0,505162038299866 \\ 0,746222415379245 \end{pmatrix}$	0,000248857286321837

Vậy nghiệm của hệ phương trình $x^* \approx x^{(4)}$ với sai số là $0,000248857 < 10^{-3}$.

f) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\|a_i\|$	1	2	4	4
$\sum_{j=1,j\neq i}^{4} \|a_{ij}\|$	19	25	30	33

và

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$\|a_{jj}\|$	1	2	4	4
$\sum_{i=1,i\neq j}^{4} \|a_{ij}\|$	29	24	29	25

Do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 5 Giải gần đúng hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương phái Seidel với sai số 10^{-3}:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0,24 & -0,08 \\ 0,09 & 3 & -0,15 \\ 0,04 & -0,08 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -1 & 10 & -2 \\ -2 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 10 \\ 10 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 20 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 20 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & -0,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 1 & 0 & -0,25 \\ -0,25 & 0 & 1 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & -0,25 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$

Giải

a) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\|a_{ii}\|$	4	3	4
$\sum_{j=1,j\neq i}^{3} \|a_{ij}\|$	0,32	0,24	0,12

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,08 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.
Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,03 & 0 & 0 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$,$L = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
α_i	0,08	0,05	0
β_i	0	0,03	0,03
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,08	0,0515463917525773	0
λ	0,08		
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	0,0869565217391304		

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	0,0167304347826087
2	$\begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,1924 \\ 5,044648 \end{pmatrix}$	0,000926177391304343

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x^* \approx x^{(2)}$ với sai số là $0,000926177$

e) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\lvert a_{ii}\rvert$	10	10	10
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{3} \lvert a_{ij}\rvert$	3	3	3

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.

Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,3 \\ 2,6 \end{pmatrix}$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,3 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
α_i	0,3	0,2	0
β_i	0	0,1	0,3
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,3	0,222222222222222	0
λ	0,3		
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	0,428571428571429		

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,3 \\ 2,6 \end{pmatrix}$	0,258
2	$\begin{pmatrix} 0,82 \\ 1,902 \\ 2,9542 \end{pmatrix}$	0,06678
3	$\begin{pmatrix} 0,97582 \\ 1,988422 \\ 2,9940062 \end{pmatrix}$	0,00911357999999999
4	$\begin{pmatrix} 0,99962874622 \\ 1,999816470262 \\ 2,9999073962702 \end{pmatrix}$	0,00109016837999995
5	$\begin{pmatrix} 0,99995403367942 \\ 1,99997688262198 \\ 2,99998849499808 \end{pmatrix}$	0,000139408911180075

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x^* \approx x^{(5)}$ với sai số là 0,000139409.

f) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_{ii}\rvert$	2	2	5	2
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	13	12	27	24

và

	j=1	j=2	j=3	j=4
$\lvert a_{jj}\rvert$	2	2	5	2
$\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	13	25	22	16

Từ đây ta suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

g) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_{ii}\rvert$	1	1	1	1
$\sum_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	0,5	0,5	0,5	0,5

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,5 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.
Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
α_i	0,5	0,25	0,25	0
β_i	0	0,25	0,25	0,5
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,5	0,333333333333333	0,333333333333333	0
λ	0,5			
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	1			

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 47,75 \\ 59,4375 \\ 34,4375 \\ 48,46875 \end{pmatrix}$	64,4375
2	$\begin{pmatrix} 73,46875 \\ 80,484375 \\ 55,484375 \\ 58,9921875 \end{pmatrix}$	25,71875

k	$x^{(k)}$	Sai số
3	$\begin{pmatrix} 83,9921875 \\ 85,74609375 \\ 60,74609375 \\ 61,623046875 \end{pmatrix}$	10,5234375
4	$\begin{pmatrix} 86,623046875 \\ 87,0615234375 \\ 62,0615234375 \\ 62,28076171875 \end{pmatrix}$	2,630859375
5	$\begin{pmatrix} 87,28076171875 \\ 87,390380859375 \\ 62,390380859375 \\ 62,4451904296875 \end{pmatrix}$	0,65771484375
6	$\begin{pmatrix} 87,4451904296875 \\ 87,4725952148437 \\ 62,4725952148437 \\ 62,4862976074218 \end{pmatrix}$	0,1644287109375
7	$\begin{pmatrix} 87,4862976074218 \\ 87,4931488037109 \\ 62,4931488037109 \\ 62,4965744018554 \end{pmatrix}$	0,041107177734375
8	$\begin{pmatrix} 87,4965744018554 \\ 87,4982872009277 \\ 62,4982872009277 \\ 62,4991436004638 \end{pmatrix}$	0,0102767944335937
9	$\begin{pmatrix} 87,4991436004638 \\ 87,4995718002319 \\ 62,4995718002319 \\ 62,4997859001159 \end{pmatrix}$	0,00256919860839844
10	$\begin{pmatrix} 87,4997859001159 \\ 87,4998929500579 \\ 62,4998929500579 \\ 62,4999464750289 \end{pmatrix}$	0,000642299652099609

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x^* \approx x^{(10)}$ với sai số 0,0006423.