TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ
KHOA SƯ PHẠM
BỘ MÔN SƯ PHẠM TOÁN HỌC

Bài tập nhóm

GIẢI TÍCH SỐ

Nhóm 3

Nguyễn Ngọc Đăng Duy	B1700014
Lê Hữu Kiệt	B1700024
Phan Thanh Tâm	B1700038
Nguyễn Hiếu Thanh	B1700039

Cần Thơ, 2020

Chương 1
Số gần đúng và sai số

Bài 1. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ sau:

$$c = 1,3241;\ \Delta_c = 0,23.10^{-2}$$

Giải

Sai số tuyệt đối giới hạn: $\Delta_c = 0,23.10^{-2}$.

Sai số tương đối giới hạn: $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|a|} = 0,00173702893$.

Bài 2. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp:

$$b = 0,2351;\ \Delta_b = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\Delta_b = 0,5.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_b \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0, 2, 3, 5 là các chữ số đáng tin; chữ số 1 là chữ số đáng nghi.

Bài 3. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp:

$$c = 0,2164; \delta_c = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|c|} \Rightarrow \Delta_c = \delta_c.|c| = 0,5.10^{-3}.0,2164 = 0,0001082 = 0,1082.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_c \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0,2,1,6 là đáng tin; chữ số 4 là đáng nghi

Bài 4. Tìm sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của hàm số:

$$y = (1 + abc)^{\alpha}$$

biết $a = 2,13;\ b = 4,39;\ c = 0,72$.

Giải

Ta có: $a = 2,13 \pm 0,5.10^{-2}$, $b = 4,39 \pm 0,5.10^{-2}$, $c = 0,72 \pm 0,5.10^{-2}$

Lại có: $\begin{cases} y'_a = \alpha.bc.(1 + abc)^{\alpha - 1} \\ y'_b = \alpha.ac.(1 + abc)^{\alpha - 1} \\ y'_c = \alpha.ab.(1 + abc)^{\alpha - 1} \end{cases}$.

Sai số tuyệt đối giới hạn của hàm số là:

$$\begin{aligned}
\Delta_y &= |y'_a|\,.\Delta_a + |y'_b|\,.\Delta_b + |y'c|\,.\Delta_c \\
&= 3,1608.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 9,3507.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 1,5336.\alpha.7,732504^{\alpha-1} \\
&= \alpha.7,732504^{\alpha-1}.14,0451 \\
&= \alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514
\end{aligned}$$

Sai số tương đối giới hạn của hàm số là

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514}{(1+2,13.4,39.0,72)^{\alpha}} = \alpha.1,816371514$$

Chương 2
Lý thuyết nội suy

Câu 1. Tìm đa thức nội suy Larange của hàm số $y = f(x)$ cho bằng bảng sau:

d)

x	321	322,8	324,2	325
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

và tính gần đúng giá trị $f(323, 5)$.

e)

x	-2	1	3	4	7
y	12	37	51	67	127

và tính gần đúng giá trị $f(5, 1)$.

Giải

d) Ta có:

$$\begin{aligned} y_0.L_0(x) &= 2,50651 \cdot \frac{(x-322,8)(x-324,2)(x-325)}{(321-322,8)(321-324,2)(321-325)} \\ &= \frac{250651}{100000} \cdot \frac{-25}{576} \left(x^3 - \frac{4862}{5}x^2 + \frac{7879661}{25}x - 34053968 \right) \\ &= \frac{1420849532687}{384000} - \frac{1973417683019}{57600000}x + \frac{6767577}{64000}x^2 - \frac{250651}{2304000}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323, 5$, ta được $y_0.L_0(323, 5) = -0, 07996027$

$$\begin{aligned} y_1.L_1(x) &= 2,50893 \cdot \frac{(x-321)(x-324,2)(x-325)}{(322,8-321)(322,8-324,2)(322,8-325)} \\ &= -\frac{188572098741}{12320} + \frac{6247598101}{44000}x - \frac{1756251}{4000}x^2 + \frac{27877}{61600}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323, 5$, ta được $y_1.L_1(323, 5) = 1, 18794034$

$$\begin{aligned} y_2.L_2(x) &= 2,51081 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-325)}{(324,2-321)(324,2-322,8)(324,2-325)} \\ &= \frac{845543137491}{35840} - \frac{56108317827}{256000}x + \frac{43437013}{64000}x^2 - \frac{251081}{358400}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323, 5$, ta được $y_2.L_2(323, 5) = 1, 83897216$

$$\begin{aligned} y_3.L_3(x) &= 2,51188 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-324,2)}{(325-321)(325-322,8)(325-324,2)} \\ &= -\frac{26369413998039}{2200000} + \frac{490348427793}{4400000}x - \frac{690767}{2000}x^2 + \frac{62797}{176000}x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 323, 5$, ta được $y_3.L_3(323, 5) = -0, 43708139$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0.L_0(x) + y_.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x)\\ &= \frac{6766686623}{369600000} - \frac{47439221}{316800000}x + \frac{3}{6400}x^2 - \frac{43}{88704000}x^3\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}L(323,5) &= y_0.L_0(323,5) + y_.L_1(323,5) + y_2.L_2(323,5) + y_3.L_3(323,5)\\ &= 2,50987084\end{aligned}$$

Vậy giá trị gần đúng của $f(323,5)$ là $P(323,5) \approx 2,50987084$

e) Ta có:

$$\begin{aligned}y_0L_0(x) &= 12 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(-2-1)(-2-3)(-2-4)(-2-7)}\\ &= \frac{56}{45} - \frac{58}{27}x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{135}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1L_1(x) &= 37 \cdot \frac{(x+2)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1+2)(1-3)(1-4)(1-7)}\\ &= \frac{518}{9} - \frac{703}{54}x - \frac{407}{36}x^2 + \frac{37}{9}x^3 - \frac{37}{108}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2L_2(x) &= 51 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-4)(x-7)}{(3+2)(3-1)(3-4)(3-7)}\\ &= -\frac{357}{5} + \frac{255}{4}x + \frac{153}{8}x^2 - \frac{51}{4}x^3 + \frac{51}{40}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3L_3(x) &= 67 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-7)}{(4+2)(4-1)(4-3)(4-7)}\\ &= \frac{469}{9} - \frac{2747}{54}x - \frac{67}{6}x^2 + \frac{67}{6}x^3 - \frac{67}{54}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_4L_4(x) &= 127 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-4)}{(7+2)(7-1)(7-3)(7-4)}\\ &= -\frac{127}{27} + \frac{1651}{324}x + \frac{127}{216}x^2 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{127}{648}x^4\end{aligned}$$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0.L_0(x) + y_.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x)\\ &= \frac{4699}{135} + \frac{455}{162}x - \frac{89}{54}x^2 + \frac{61}{54}x^3 - \frac{79}{810}x^4\end{aligned}$$

và giá trị gần đúng của $f(5,1)$ là $P(5,1) \approx 90,1281$.

Câu 2b. Tìm đa thức nội suy Newton của hàm số $y = f(x)$ được cho bằng bảng sau:

x	$-0,35$	$-0,1$	$0,15$	$0,4$	$0,65$
y	$0,387322$	$0,762616$	$1,501553$	$2,956482$	$5,821162$

và tính gần đúng giá trị $f\,(0,55)$.

Giải

Ta có bảng tỉ sai phân như sau:

x_i	y_i	TSP cấp 1	TSP cấp 2	TSP cấp 3	TSP cấp 4
$-0,35$	$0,387322$				
		$1,501176$			
$-0,1$	$0,762616$		$2,909144$		
		$2,955748$		$3,758389$	
$0,15$	$1,501553$		$5,727936$		$3,641707$
		$5,819716$		$7,400096$	
$0,4$	$2,956482$		$11,278008$		
		$11,45872$			
$0,65$	$5,821162$				

Đa thức nội suy Newton:

$$\begin{aligned} f(x) = \;& 0,387323 + 1,501176(x+0,35) + 2,909144(x+035)(x+0,1)+ \\ & +3,758389(x+0,35)(x+0,1)(x-0,15)+ \\ & +3,641707(x+0,35)(x+0,1)(x-0,15)(x-0,4) \end{aligned}$$

Khi đó, ta tính được $f(0,55) = 4,447517528$.

Câu 3b. Tìm đa thức nội suy Newton tiến và lùi của hàm số $y = f(x)$ được cho bằng bảng sau:

x	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7
y	11,18	14,78	17,89	23,52	28,56

và tính gần đúng giá trị $f(2,37)$.

Giải

Ta có bảng sai phân:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1,9	11,18				
		3,6			
2,1	14,78		-0,49		
		3,11		3,01	
2,3	17,89		2,52		-6,12
		5,63		-3,11	
2,5	23,52		-0,59		
		5,04			

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2,7	28,56				

Do đó:

Đa thức nội suy Newton dạng tiến là:

$$P_t(x) = 11,18 + 18(x-1,9) - \frac{49}{8}(x-1,9)(x-2,1) + \frac{1505}{24}(x-1,9)(x-2,1)(x-2,3) - \frac{1275}{8}(x-1,9)(x-2,1)(x-2,3)(x-2,3)(x-2,5)$$

và *Đa thức nội suy Newton dạng lùi* là:

$$P_l(x) = 28,56 + 25,2(x-2,7) - \frac{59}{8}(x-2,7)(x-2,5) - \frac{1555}{24}(x-2,7)(x-2,5)(x-2,3) - \frac{1275}{8}(x-2,7)(x-2,5)(x-2,3)(x-2,1)$$

Khi đó ta tính được các giá trị:

$$f_t(2,37) \approx P_t(2,37) = 19,60382028 \text{ và } f_l(2,37) \approx P_l(2,37) = 19,63382028$$

Câu 5b. Tính gần đúng tổng sau:

$$S_n = 1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n+1)^2$$

biết S_n là một đa thức bậc ba.

Giải

Ta có bảng sau:

n	S_n	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		16		
1	17		33	
		49		18
2	66		51	
		100		
3	166			

Áp dụng công thức nội suy Newton dạng tiến ta tìm được:

$$S_n = 1 + 16n + \frac{33}{2}n(n-1) + 3n(n-1)(n-2)$$

Câu 8c. Cho bảng giá trị:

x	2	4	6	8	10	12
$f(x_i)$	7,32	8,24	9,2	10,19	11,01	12,05

Tìm hàm xấp xỉ bằng phương pháp bình phương bé nhất biết quan hệ giữa x và $y = f(x)$ là:

$$y = ax^b.$$

Giải

Ta có $y = ax^b \Leftrightarrow \ln y = \ln\left(ax^b\right) = \ln a + b\ln x$.

Đặt $Y = \ln y$, $X = lnx$, $A = b$, $B = \ln a$, ta có $Y = AX + B$.

Ta lập bảng:

	x_i	y_i	$X_i = \ln x_i$	$Y_i = \ln y_i$	X^2	XY
	2	7,32	0,693147	1,99061	0,480453	1,379785
	4	8,24	1,386294	2,109	1,921811	2,923694
	6	9,2	1,791759	2,219203	3,2104	3,976277
	8	10,19	2,079442	2,321407	4,324079	4,827231
	10	11,01	2,302585	2,398804	5,301898	5,52345
	12	12,05	2,484907	2,489065	6,174763	6,185095
$\sum$	42	58,01	10,738134	13,528089	21,413404	24,815532

Vậy hệ số A, B được xác định bởi hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 10,738134A + 6B = 13,528089 \\ 21,413404A + 10,738134B = 24,815532 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta nhận được: $\begin{cases} A = 0,275320 \\ B = 1,761945 \end{cases}$, từ đó: $\begin{cases} a = e^B = 5,823754 \\ b = A = 0,275320 \end{cases}$.

Vậy $y = 5,823754x^{0,275320}$.

Câu 9a. Cho bảng giá trị:

x_i	19	22	25	28	32	35
$f(x_i)$	0,66	0,367	0,223	0,14	0,084	0,06

Tìm hàm xấp xỉ bằng phương pháp bình phương bé nhất biết quan hệ giữa x và $y = f(x)$ là:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Giải

Ta có bảng số liệu sau:

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	x_i^3	x_i^4	$x_i^2y_i$
	19	0,66	361	12,54	6859	130321	238,26
	22	0,367	484	8,074	10648	234256	177,628
	25	0,223	625	5,575	15625	390625	139,375
	28	0,14	784	3,92	21952	614656	109,76
	32	0,084	1024	2,688	32768	1048576	86,016

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	x_i^3	x_i^4	$x_i^2y_i$
	35	0,06	1225	2,1	42875	1500625	73,5
$\sum$	161	1,534	4503	34,897	130727	3919059	824,539

a, b, c thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3919059a + 130727b + 4503c & = 824,539 \\ 130727a + 4503b + 161c & = 34,897 \\ 4503a + 161b + 6c & = 1,534 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & 3,202 \cdot 10^{-3} \\ b = & -0,207577 \\ c = & 3,422690 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = 3,202 \cdot 10^{-3}x^2 - 0,207577x + 3,422690$.

Câu 10e. Cho bảng giá trị:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)$	1,4	1,3	1,4	1,1	1,3	1,8	1,6	2,3

Tìm hàm xấp xỉ bằng phương pháp bình phương bé nhất biết quan hệ giữa x và $y = f(x)$ là:

$$y = \mathrm{e}^{ax+b}$$

Giải

Ta có $y = e^{ax+b} \Leftrightarrow \ln y = ax + b$.

Đặt $Y = \ln y$ ta được hàm $Y = ax + b$.

Ta có bảng số liệu sau:

x_i	y_i	$Y_i = \ln y_i$	x_i^2	x_iY_i
0	1,4	0,336472	0	0
1	1,3	0,262364	1	0,262364
2	1,4	0,336472	4	0,672944
3	1,1	0,09531	9	0,28593
4	1,3	0,262364	16	1,049456
5	1,8	0,587787	25	2,938935
6	1,6	0,470004	36	2,820024
7	2,3	0,832909	49	5,830363
$\sum$28	12,2	3,183682	140	13,860016

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 140a + 28b & = 13,86002 \\ 28a + 8b & = 3,183683 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 0,064694 \\ b & = 0,171533 \end{cases}.$$

Vậy $Y = 0,064694x + 0,171533$.

Từ đó ta có $y = \mathrm{e}^{0,064694x+0,171533}$.

Chương 3
Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

Bài 3. Bằng phương pháp hình thang và Simpson 1/3, với $n = 10$, tính gần đúng và đánh giá sai số các tích phân sau:

b) $I = \int\limits_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

f) $I = \int\limits_2^{4} \dfrac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x$

d) $I = \int\limits_0^{6} \dfrac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$

j) $I = \int\limits_{0,1}^{1,1} \dfrac{1}{(1+4x)^2} \mathrm{d}x$

Giải

b) $\star$ *Công thức Simpson 1/3*

$h = \dfrac{\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{10}$. Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$		
0	0	0		
1	$\frac{\pi}{10}$		0,3090	
2	$\frac{\pi}{5}$			0,5878
3	$\frac{3\pi}{10}$		0,8090	
4	$\frac{2\pi}{5}$			0,9511
5	$\frac{\pi}{2}$		1	
6	$\frac{3\pi}{5}$			0,9511
7	$\frac{7\pi}{10}$		0,8090	
8	$\frac{4\pi}{5}$			0,5878
9	$\frac{9\pi}{10}$		0,3090	
10	π	0		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{\pi}{30}.\left[0 + 4.3,2361 + 2.3,0777\right] \approx 2,000105435$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant \pi} \left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(\pi - 0)h^4 = \frac{1}{180}.\pi.\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 \approx 0,00017$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{10}$

Ta được bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$	
0	0	
$\frac{\pi}{10}$		0,3090
$\frac{\pi}{5}$		0,5878
$\frac{3\pi}{10}$		0,8090
$\frac{2\pi}{5}$		0,9511
$\frac{\pi}{2}$		1
$\frac{3\pi}{5}$		0,9511
$\frac{7\pi}{10}$		0,8090
$\frac{4\pi}{5}$		0,5878
$\frac{9\pi}{10}$		0,3090
1	0	
	0	6,3138

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{\pi}{2.10}.(0 + 2.6,3138) \approx 1,9835$$

* Đánh giá sai số: Ta có $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant \pi}|f''(x)| = 1$ và $\bar{I} = 1,98$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12}.(\pi - 0).\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^2 \approx 0,026$

và $|I_T - \bar{I}| = 3,5.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,0295.$

d) ⋆ *Công thức Simpson 1/3*

Ta có $h = \dfrac{6 - 0}{10} = \dfrac{3}{5}$

Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$		
0	0	1		
1	$0,6$		0,7353	
2	$1,2$			0,4098
3	$1,8$		0,2358	
4	$2,4$			0,1479
5	3		$0,1$	
6	$3,6$			0,0716
7	$4,2$		0,0536	
8	$4,8$			0,0416
9	$5,4$		0,0332	
10	6	0,0270		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{1}{5}.\left[1,0270 + 4.1,1579 + 2.0,6980\right] \approx 1,410973$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max_{0\leqslant x\leqslant 6}\left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(6-0)h^4 = \frac{24}{180}.6.\left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,10368$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{6-0}{10} = \dfrac{3}{5}$ Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$	
0	0	1	
1	$0,6$		$\dfrac{25}{34}$
2	$1,2$		$\dfrac{25}{61}$
3	$1,8$		$\dfrac{25}{106}$
4	$2,4$		$\dfrac{25}{169}$
5	3		$\dfrac{1}{10}$
6	$3,6$		$\dfrac{25}{349}$
7	$4,2$		$\dfrac{25}{466}$
8	$4,8$		$\dfrac{25}{601}$

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$	
9	$5,4$		$\dfrac{25}{754}$
10	6	$\dfrac{1}{37}$	
		$\dfrac{38}{37}$	$\dfrac{11967477}{6543383}$

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{6-0}{2.10}.(\frac{38}{37} + 2.\frac{11967477}{6543383}) = 1,40547$$

* Đánh giá sai số Ta có $M = \max\limits_{0 \leqslant 6} |f''(x)| = 2$ và $\bar{I} = 1,41$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12}.(6-0).\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 0,36$

và $|I_T - \bar{I}| = 4,53.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,364653.$

f) Ta có $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-2}{10} = 0,2$ và $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$	
$2,0$	1	
$2,2$		$\dfrac{25}{36}$
$2,4$		$\dfrac{25}{49}$
$2,6$		$\dfrac{25}{64}$
$2,6$		$\dfrac{25}{81}$
$3,0$		$\dfrac{1}{4}$
$3,2$		$\dfrac{25}{121}$
$3,4$		$\dfrac{25}{144}$
$3,6$		$\dfrac{25}{169}$
$3,8$		$\dfrac{25}{196}$

x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$	
$4,0$	$\dfrac{1}{9}$	
	$\dfrac{10}{9}$	$2,809618197$

Vậy theo công thức hình thang ta tính được giá trị gần đúng của tích phân là:

$$I \approx \int\limits_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \frac{4-2}{2(10)}\left(\frac{10}{9} + 2(2,809618197)\right) = 0,6730347505$$

Nếu làm tròn đến năm chữ số thập phân thì $I_T = 0,67303$.

Đánh giá sai số theo công thức tích phân, ta có:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}; \qquad f''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}$$

Do hàm f'' nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $M = \max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4}|f''(x)| = |f''(2)| = 6$.

Nên $|I - I_T| \leqslant \dfrac{6}{12}(4-2)(0,2)^2 = 0,04$.

Và $\left|I_T - \overline{I}\right| = 4,7505.10^{-6}$

Do đó $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_T| + \left|I_T - \overline{I}\right| = 0,04 + 4,7505.10^{-6}$.

$\star$ *Áp dụng công thức Simpson 1/3*

Ta có bảng:

i	x_i	$f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$		
0	$2,0$	1		
1	$2,2$		$\dfrac{25}{36}$	
2	$2,4$			$\dfrac{25}{49}$
3	$2,6$		$\dfrac{25}{64}$	
4	$2,8$			$\dfrac{25}{81}$
5	$3,0$		$\dfrac{1}{4}$	
6	$3,2$			$\dfrac{25}{121}$
7	$3,4$		$\dfrac{25}{144}$	

i	x_i	$f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$		
8	$3,6$			$\dfrac{25}{169}$
9	$3,8$		$\dfrac{25}{196}$	
10	$4,0$	$\dfrac{1}{9}$		
		$\dfrac{10}{9}$	$1,636231576$	$1,173386621$

Áp dụng công thức Simpson 1/3 ta tính gần đúng tích phân là:

$$I_S = \int\limits_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \approx \frac{0,2}{3}\left[\frac{10}{9} + 4\,(1,6366231576) + 2\,(1,173386621)\right] = 0,6668540438$$

Nếu lấy 5 chữ số thập phân, khi đó $\overline{I} = 0,66685$. Nên $\left|I_S - \overline{I}\right| = 4.0438 \times 10^{-6}$

Đánh giá sai số theo công thức, ta có:

$$f^{(3)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}; \qquad f^{(4)}(x) = \frac{120}{(x-1)^6}$$

Do $f^{(4)}(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $M = \max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4}\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(2)\right| = 120$

Do đó $|I - I_S| \leqslant \dfrac{120}{180} \times (4-2) \times (0,2)^4 = 0,05\,(3)$

Vậy $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_S| + \left|I_S - \overline{I}\right| = 0,05\,(3) - 4.0438 \times 10^{-6}$

Bài 5. Tính gần đúng tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-0,8}^{0,8} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\mathrm{d}x$ bằng công thức Simpson với $n = 16$ và đánh giá sai số của kết quả vừa nhận được.

Giải

Ta có $h = \dfrac{0,8-(-0,8)}{16} = 0,1$.

Ta lập được bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
0	$-0,8$	0,934411509		
1	$-0,7$		0,85582621	
2	$-0,6$			0,762860112
3	$-0,5$		0,656932407	
4	$-0,4$			0,539742953
5	$-0,3$		0,413235796	
6	$-0,2$			0,279557228

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
7	$-0,1$		0,141009326	
8	$0,001$			0,001414213
9	$0,1$		0,141009326	
10	$0,2$			0,279557228
11	$0,3$		0,413235796	
12	$0,4$			0,539742953
13	$0,5$		0,656932407	
14	$0,6$			0,762860112
15	$0,7$		0,85582621	
16	$0,8$	0,934411509		
		1,868823017	4,134007477	3,165734799

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{0,1}{3} \cdot [1,868823017 + 4.4,134007477 + 2.3,165734799] \approx 0,824544084$$

* Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{-0,8 \leqslant x \leqslant 0,8} \left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(0,8+0,8)h^4 = \frac{3,35366}{180}.1,6.\left(0,1\right)^4 \approx 1,98103.10^{-6}$$

j) Ta có $h = \dfrac{1,1-0,1}{10} = 0,1$ và $g(x) = \dfrac{1}{\left(1+4x\right)^2}$

Ta tìm được các đạo hàm của $g(x)$:

$$g'(x) = -\frac{8}{\left(1+4x\right)^3}; \quad g''(x) = \frac{96}{\left(1+4x\right)^4}; \quad g^{(3)(x)} = -\frac{1536}{\left(1+4x\right)^5}; \quad g^{(4)}(x) = \frac{30720}{\left(1+4x\right)^6}$$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có bảng giá trị:

	x_i	$y_i = g(x_i) = \dfrac{1}{(1+4x_i)^2}$	
0	$0,1$	$\dfrac{25}{49}$	
1	$0,2$		$\dfrac{25}{81}$
2	0.3		$\dfrac{25}{121}$
3	$0,4$		$\dfrac{25}{169}$
4	$0,5$		$\dfrac{1}{9}$

	x_i	$y_i = g(x_i) = \dfrac{1}{(1+4x_i)^2}$	
5	$0,6$		$\dfrac{25}{289}$
6	$0,7$		$\dfrac{25}{361}$
7	$0,8$		$\dfrac{25}{441}$
8	$0,9$		$\dfrac{25}{529}$
9	$1,0$		$\dfrac{1}{25}$
10	$1,1$	$\dfrac{25}{729}$	
		$0,5444976344$	$1,03399924$

Vậy theo công thức hình thang, giá trị gần đúng của tích phân cần tìm là:

$$I_T = \int_{0,1}^{1,1} g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{0,1}{2}\left[0,5444976344 + 2\left(1,03399924\right)\right] = 0,1306248057$$

Nếu làm tròn đến năm chữ số thập phân thì $\overline{I} = 0,13062$.

* Đánh giá sai số theo công thức tích phân:

Ta có $M = \max\limits_{0,1\leqslant x\leqslant 1,1} |g''(x)| = |g''(1,1)| = 0,1129005854$.

Nên $|I - I_T| \leqslant \dfrac{M}{12}(1,1-0,1)(0,1)^2 = 9,408382116.10^{-5}$.

và $\left|I_T - \overline{I}\right| = 4,8075.10^{-6}$.

Do đó $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_T| + \left|I_T - \overline{I}\right| \leqslant 9,408382116.10^{-5} + 4,8075.10^{-6}$.

Chương 4
Giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt

Bài 2. Dùng phương pháp lặp đơn, hãy tìm nghiệm của các phương trình:
c) $x - \sin x = 0,25$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân lý nghiệm $(1; 1,5)$.
f) $2^x - 5x - 3 = 0$ với sai số 10^{-4} trong khoảng phân ly nghiệm $(4; 5)$.
i) $(x-1)^2 = \dfrac{1}{2}e^x$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0; 0,5)$.
j) $x = \ln x + 3$ với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4; 5)$
Giải
c) Đặt $f(x) = x - \sin x - 0,25$. Ta có:

- $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; 1,5)$.
- $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $\forall x \in (1; 1,5)$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $(1; 1,5)$.
- $f(1) = 0,7325$, $f(1,5) = 1,2238$, suy ra $f(1)\, f(1,5) > 0$.

Từ đây ta suy ra hàm số vô nghiệm trên đoạn $(1; 1,5)$.
f) Đặt $f(x) = 2^x - 5x - 3$. Ta có:

- $f(x)$ liên tục trên khoảng $(4; 5)$.
- $f(4)\, f(5) < 0$.
- $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5 > 0, \forall x \in (4; 5)$.

Do đó: phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên khoảng $(4; 5)$.
Do $f'(x) > 0$ nên ta đặt $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$. Trong đó:

$$M \geq \max_{x \in (4;5)} |f'(x)| \approx 17,1807$$

Chọn $M = 17,1807$, suy ra $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{17,1807} = \dfrac{-2^x + 22,1807x + 3}{17,1807}$.
Ta có $\varphi'(x) = \dfrac{-2^x \ln 2 + 22,1807}{17,1807}$ và $\max\limits_{x \in (4;5)} |\varphi'(x)| < |\varphi'(4)| = 0,6455$.
Chọn $L = 0,6455$.
Chọn $x_0 = 4,7$, ta có xấp xỉ nghiệm trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi\left(x_{n-1}\right)$	$\left\|x_n - x*\right\| \leq 1,82087\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
1	$4,72956$	$0,05382$
2	$4,73641$	$0,01247$
3	$4,73791$	$0,02731$
4	$4,73822$	$0,00056$
5	$4,73829$	$0,00013$
6	$4,73831$	$0,00004$

Vậy $x^* \approx x_6 = 4,73831$.

i) Đặt $f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$, ta có:

$$f'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{2}e^x < 0 \forall x \in (0;0,5)$$
$$f(0) = \frac{1}{2}$$
$$f(0,5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.e^{\frac{1}{2}}$$

Từ đây ta có $f(0).f(0,5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng $(0;0,5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(0;0,5)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x = 1 - \sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Đặt $\varphi(x) = 1 - \sqrt{\frac{e^x}{2}}$, ta có:

$$\varphi'(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{8}}$$
$$\max_{x \in [0;0,5]} |\varphi'(x)| \approx 0,45397$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant 0,83140|x_n - x_{n-1}|$ Chọn $x = 0,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$0,83140\|x_n - x_{n-1}\|$
1	$0,25664$	$0,13023$
2	$0,19608$	$0,05035$
3	$0,22006$	$0,01994$
2	$0,21065$	$0,78210.10^{-2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0;0,5)$ là $x \approx 0,21065$.

j) Đặt $f(x) = x - \ln x - 3$, ta có:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0\ \forall x \in (4;5)\\
&f''(x) = -\frac{1}{x^2}\\
&f(4) = 1 - \ln 4\\
&f(5) = 2 - \ln 5
\end{aligned}$$

Từ đây ta có $f(4).f(5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng $(4;5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(4;5)$.

Đặt $\varphi(x) = \ln x + 3$, ta có:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}; \qquad \max_{x\in[4;5]} |\varphi'(x)| = 0,25$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|$

Chọn $x = 4,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$\frac{1}{3}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	$4,41099$	$0,10366$
2	$4,48410$	$0,02437$
3	$4,50054$	$0,54797.10^{-2}$
4	$4,50420$	$0,12198.10^{-2}$
5	$4,50500$	$0,27092.10^{-3}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4;5)$ là $x \approx 4,50500$.

Chương 5
Giải tích số trong đại số tuyến tính

Bài 3 Giải hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương pháp lặp đơn với sai số 10^{-3}:

d) $A = \begin{pmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 21,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 20,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 21,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 19,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 32,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & -2 & 18 & 4 \\ 22 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & 21 & -8 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 20 \\ 26 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Giải

d) Ta có bảng sau:

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\lvert a_{ii}\rvert$	10,9	11,2	9,8	21,1
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	4,2	5,2	4,9	4,7

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,110091743119266 & -0,192660550458716 & -0,0825688073394495 \\ -0,107142857142857 & 0 & -0,133928571428571 & -0,223214285714286 \\ -0,214285714285714 & -0,153061224489796 & 0 & -0,13265306122449 \\ -0,042654028436019 & -0,118483412322275 & -0,0616113744075829 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -0,642201834862385 \\ 0,473214285714286 \\ 1,05102040816327 \\ 1,16587677725118 \end{pmatrix}$$

Xét $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} \sum\limits_{j=1}^{4} \|b_{ij}\| = 0,5 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta có $\dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} = 1$ và chọn $x^{(0)} = g$, ta xây dựng dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ theo công thức $x^{(k+1)} =$

$Bx^{(k)} + g$, đồng thời đánh giá sai số của phương pháp, ta có kết quả sau:

k	$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$	$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = \dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
1	$\begin{pmatrix} -0,993054045828079 \\ 0,14101961129125 \\ 0,961547205531943 \\ 1,07244641736863 \end{pmatrix}$	0,350852210965694
2	$\begin{pmatrix} -0,931529765210858 \\ 0,211448928863767 \\ 1,09996976905335 \\ 1,1322838031197 \end{pmatrix}$	0,138422563521411
3	$\begin{pmatrix} -0,970892720408834 \\ 0,172961746149442 \\ 1,0680683846522 \\ 1,11278643444365 \end{pmatrix}$	0,0393629551979762
4	$\begin{pmatrix} -0,958899586619104 \\ 0,185803803696713 \\ 1,08498058457731 \\ 1,12099100393111 \end{pmatrix}$	0,0169121999251123
5	$\begin{pmatrix} -0,964249146384074 \\ 0,180422421182962 \\ 1,07935664502496 \\ 1,11791589378033 \end{pmatrix}$	0,00562393955235119
6	$\begin{pmatrix} -0,962319281135253 \\ 0,182435203006485 \\ 1,08173458303242 \\ 1,11912817726331 \end{pmatrix}$	0,00237793800745756
7	$\begin{pmatrix} -0,963099103441544 \\ 0,181639358897804 \\ 1,08085214851347 \\ 1,1186608714485 \end{pmatrix}$	0,000882434518947317

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x^* \approx x^{(7)}$ với sai số $\epsilon = 0,000882435 < 10^{-3}$.

e) Ta có bảng sau:

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\lvert a_{ii}\rvert$	20,9	21,2	19,8	32,1
$\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	4,2	5,2	4,9	4,7

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,0574162679425837 & -0,100478468899522 & -0,0430622009569378 \\ -0,0566037735849057 & 0 & -0,0707547169811321 & -0,117924528301887 \\ -0,106060606060606 & -0,0757575757575758 & 0 & -0,0656565656565657 \\ -0,0280373831775701 & -0,0778816199376947 & -0,0404984423676012 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -0,334928229665072 \\ 0,25 \\ 0,52020202020202 \\ 0,766355140186916 \end{pmatrix}$$

Xét $\|B\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4} \sum\limits_{j=1}^{4} \|b_{ij}\| = 0,247474747 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta có $\dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} = 0,32885906$ và chọn $x^{(0)} = g$, ta xây dựng dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ theo công thức $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, đồng thời đánh giá sai số của phương pháp, ta có kết quả sau:

k	$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$	$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = \dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
1	$\begin{pmatrix} -0,434552338210166 \\ 0,14177938654848 \\ 0,486469070709781 \\ 0,735207874779936 \end{pmatrix}$	0,0355893292558691
2	$\begin{pmatrix} -0,423608009552663 \\ 0,153478278907438 \\ 0,507278817838622 \\ 0,747795602682095 \end{pmatrix}$	0,00684347388800811
3	$\begin{pmatrix} -0,426912703089183 \\ 0,149901998962265 \\ 0,504405309000642 \\ 0,745734861312729 \end{pmatrix}$	0,00117609206250647
4	$\begin{pmatrix} -0,426329900614236 \\ 0,150535383345483 \\ 0,505162038299866 \\ 0,746222415379245 \end{pmatrix}$	0,000248857286321837

Vậy nghiệm của hệ phương trình $x^* \approx x^{(4)}$ với sai số là $0,000248857 < 10^{-3}$.

f) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\|a_i\|$	1	2	4	4
$\sum_{j=1,j\neq i}^{4} \|a_{ij}\|$	19	25	30	33

và

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$\|a_{jj}\|$	1	2	4	4
$\sum_{i=1,i\neq j}^{4} \|a_{ij}\|$	29	24	29	25

Do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 5 Giải gần đúng hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương phái Seidel với sai số 10^{-3}:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0,24 & -0,08 \\ 0,09 & 3 & -0,15 \\ 0,04 & -0,08 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -1 & 10 & -2 \\ -2 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 10 \\ 10 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 20 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 20 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & -0,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 1 & 0 & -0,25 \\ -0,25 & 0 & 1 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & -0,25 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$

Giải

a) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\|a_{ii}\|$	4	3	4
$\sum_{j=1,j\neq i}^{3} \|a_{ij}\|$	0,32	0,24	0,12

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,08 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.
Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,03 & 0 & 0 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
α_i	0,08	0,05	0
β_i	0	0,03	0,03
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,08	0,0515463917525773	0
λ	0,08		
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	0,0869565217391304		

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	0,0167304347826087
2	$\begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,1924 \\ 5,044648 \end{pmatrix}$	0,000926177391304343

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x^* \approx x^{(2)}$ với sai số là $0,000926177$

e) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\|a_{ii}\|$	10	10	10
$\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{3} \|a_{ij}\|$	3	3	3

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.

Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}, \ g = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,3 \\ 2,6 \end{pmatrix}$$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,3 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
α_i	0,3	0,2	0
β_i	0	0,1	0,3
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,3	0,222222222222222	0
λ	0,3		
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	0,428571428571429		

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,3 \\ 2,6 \end{pmatrix}$	0,258
2	$\begin{pmatrix} 0,82 \\ 1,902 \\ 2,9542 \end{pmatrix}$	0,06678
3	$\begin{pmatrix} 0,97582 \\ 1,988422 \\ 2,9940062 \end{pmatrix}$	0,00911357999999999
4	$\begin{pmatrix} 0,99962874622 \\ 1,999816470262 \\ 2,9999073962702 \end{pmatrix}$	0,00109016837999995
5	$\begin{pmatrix} 0,99995403367942 \\ 1,99997688262198 \\ 2,99998849499808 \end{pmatrix}$	0,000139408911180075

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x^* \approx x^{(5)}$ với sai số là 0,000139409.

f) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_{ii}\rvert$	2	2	5	2
$\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	13	12	27	24

và

	j=1	j=2	j=3	j=4
$\lvert a_{jj}\rvert$	2	2	5	2
$\displaystyle\sum_{i=1,i\neq j}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	13	25	22	16

Từ đây ta suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

g) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_{ii}\rvert$	1	1	1	1
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	0,5	0,5	0,5	0,5

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,5 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.
Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
α_i	0,5	0,25	0,25	0
β_i	0	0,25	0,25	0,5
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,5	0,333333333333333	0,333333333333333	0
λ	0,5			
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	1			

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 47,75 \\ 59,4375 \\ 34,4375 \\ 48,46875 \end{pmatrix}$	64,4375
2	$\begin{pmatrix} 73,46875 \\ 80,484375 \\ 55,484375 \\ 58,9921875 \end{pmatrix}$	25,71875

k	$x^{(k)}$	Sai số
3	$\begin{pmatrix} 83,9921875 \\ 85,74609375 \\ 60,74609375 \\ 61,623046875 \end{pmatrix}$	10,5234375
4	$\begin{pmatrix} 86,623046875 \\ 87,0615234375 \\ 62,0615234375 \\ 62,28076171875 \end{pmatrix}$	2,630859375
5	$\begin{pmatrix} 87,28076171875 \\ 87,390380859375 \\ 62,390380859375 \\ 62,4451904296875 \end{pmatrix}$	0,65771484375
6	$\begin{pmatrix} 87,4451904296875 \\ 87,4725952148437 \\ 62,4725952148437 \\ 62,4862976074218 \end{pmatrix}$	0,1644287109375
7	$\begin{pmatrix} 87,4862976074218 \\ 87,4931488037109 \\ 62,4931488037109 \\ 62,4965744018554 \end{pmatrix}$	0,041107177734375
8	$\begin{pmatrix} 87,4965744018554 \\ 87,4982872009277 \\ 62,4982872009277 \\ 62,4991436004638 \end{pmatrix}$	0,0102767944335937
9	$\begin{pmatrix} 87,4991436004638 \\ 87,4995718002319 \\ 62,4995718002319 \\ 62,4997859001159 \end{pmatrix}$	0,00256919860839844
10	$\begin{pmatrix} 87,4997859001159 \\ 87,4998929500579 \\ 62,4998929500579 \\ 62,4999464750289 \end{pmatrix}$	0,000642299652099609

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x^* \approx x^{(10)}$ với sai số 0,0006423.

Chương 6
Giải gần đúng phương trình vi phân thường

Câu 4. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp Euler:

a) $y' = 1 - y$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 0.3]$.

b) $y' = \dfrac{y - x}{1 + x}$, $y(0) = 1$, $h = 0.02$ trên đoạn $[0; 0.1]$.

c) $y' = 3x + \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

d) $y' = x + y + xy$, $y(0) = 1$, $h = 0.02$ trên đoạn $[0; 0.1]$.

e) $y' = 1 + \ln(x + y)$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

f) $y' = (y + x)^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$.

g) $y' = -5x^4y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 1]$.

Giải

c) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.05$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.05	1.05	1.051281	1.051313
2	0.1	1.102625	1.105444	1.105473
3	0.15	1.158256	1.162892	1.162879
4	0.2	1.217294	1.224049	1.223946

d) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.2$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.1	0.095	0.095
2	0.2	0.19	0.180975	0.18075
3	0.3	0.271	0.258782	0.258163

b) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.02$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.02	1.02	1.019802	1.019804
2	0.04	1.039608	1.039212	1.039218
3	0.06	1.058831	1.058237	1.058248
4	0.08	1.077677	1.076885	1.076904
5	0.1	1.096152	1.095162	1.09519

c) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.05$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.05	1.025	1.02875	1.02875
2	0.1	1.0575	1.065	1.065
3	0.15	1.0975	1.10875	1.10875
4	0.2	1.145	1.16	1.16

d) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.02$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.02	1.02	1.020602	1.020604
2	0.04	1.041208	1.042445	1.042443
3	0.06	1.063665	1.065572	1.065559
4	0.08	1.087415	1.09003	1.089998
5	0.1	1.112503	1.115867	1.115807

e) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.1	1.1	1.109531	1.109116
2	0.2	1.218232	1.237222	1.236081

f) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$ ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.1	1.1	1.121	1.122
2	0.2	1.244	1.302048	1.300921
3	0.3	1.452514	1.579223	1.567124
4	0.4	1.759644	2.022661	1.974635
5	0.5	2.22605	2.787806	2.628147
6	0.6	2.969185	4.291918	3.754367
7	0.7	4.243093	8.059989	5.924101

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
8	0.8	6.686511	24.054293	10.920429
9	0.9	12.291295	335.318823	26.489364
10	1.0	29.692322	3586457.107023	111.099159

g) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$ ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.2	1.0	0.9999	0.9992
2	0.4	0.9984	0.991815	0.985642
3	0.6	0.972882	0.931885	0.911874
4	0.8	0.850216	0.747801	0.709949
5	1.0	0.554129	0.48468	0.453194

Câu 5. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp Euler cải tiến:

a) $y' = \dfrac{y-x}{1+x}$, $y(0) = 1$, $h = 0.02$ trên đoạn $[0; 0.1]$.

b) $y' = 3x + \dfrac{1}{2}y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

c) $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

d) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 0.6]$.

Giải

a) (Câu 4b)

b) (Câu 4c)

c) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.05$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.05	1.05	1.051281	1.051313
2	0.1	1.102625	1.105444	1.105473
3	0.15	1.158256	1.162892	1.162879
4	0.2	1.217294	1.224049	1.223946

d) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.2$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.2	0.2	0.202	0.204
2	0.4	0.408	0.420737	0.424808
3	0.6	0.641293	0.67872	0.68398

Câu 6. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp RK4:

a) $y' = 2 + \sqrt{xy}$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 2]$

b) $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[1; 2]$

c) $y' = x - \sin y$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

d) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

e) $y' = x - \sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 1]$

Giải

a) $y' = 2 + \sqrt{xy}$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$.

Ta có sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	1.0	1.0	0.6
	1.1	1.3	0.6392
	1.1	1.3196	0.6410
	1.2	1.6410	0.6807
$y_1 = 1.640150501121759$			
1	1.2	1.6402	0.6806
	1.3	1.9804	0.7209
	1.3	2.0006	0.7225
	1.4	2.3627	0.7637
$y_2 = 2.3620215847729593$			
2	1.4	2.3620	0.7637
	1.5	2.7439	0.8057
	1.5	2.7649	0.8073
	1.6	3.1693	0.8504
$y_3 = 3.168716003302697$			
3	1.6	3.1687	0.8503
	1.7	3.5939	0.8944
	1.7	3.6159	0.8959
	1.8	4.0646	0.9410
$y_4 = 4.064004846121863$			
4	1.8	4.0640	0.9409
	1.9	4.5345	0.9870
	1.9	4.5575	0.9885
	2.0	5.0525	1.0358
$y_5 = 5.051980957085838$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là $y_5 = 5.051980957085838$.

b) $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[1; 2]$

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	1.0	1.0	0.0000
	1.1	1.0	-0.0182
	1.1	0.9909	-0.0162
	1.2	0.9838	-0.0296
$y_1 = 0.9836006941450569$			
1	1.2	0.9836	-0.0296
	1.3	0.9688	-0.0387
	1.3	0.9643	-0.0376
	1.4	0.9460	-0.0438
$y_2 = 0.9459390018738288$			
2	1.4	0.9459	-0.0438
	1.5	0.9240	-0.0476
	1.5	0.9222	-0.0471
	1.6	0.8988	-0.0492
$y_3 = 0.8988702115243877$			
3	1.6	0.8989	-0.0492
	1.7	0.8743	-0.0500
	1.7	0.8739	-0.0499
	1.8	0.8489	-0.0498
$y_4 = 0.849051617841853$			
4	1.8	0.8491	-0.0498
	1.9	0.8241	-0.0491
	1.9	0.8245	-0.0492
	2.0	0.7999	-0.0480
$y_5 = 0.7999961579105562$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là $y_5 = 0.7999961579105562$.

c) $y' = x - \sin y$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$.

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	0.0	0.0000	0.0000
	0.05	0.0000	0.0050
	0.05	0.0025	0.0048
	0.1	0.0048	0.0095
$y_1 = 0.004837500380164618$			
1	0.1	0.0048	0.0095
	0.15	0.0096	0.0140
	0.15	0.0119	0.0138
	0.2	0.0187	0.0181
$y_2 = 0.018730933533350227$			
	0.2	0.0187	0.0181

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
2	0.25	0.0278	0.0222
	0.25	0.0298	0.0220
	0.3	0.0407	0.0259
$y_3 = 0.040818909363427004$			
3	0.3	0.0408	0.0259
	0.35	0.0538	0.0296
	0.35	0.0556	0.0294
	0.4	0.0703	0.0330
$y_4 = 0.07032359540590269$			
4	0.4	0.0703	0.0330
	0.45	0.0868	0.0363
	0.45	0.0885	0.0362
	0.5	0.1065	0.0394
$y_5 = 0.10654526828749952$			
5	0.5	0.1065	0.0394
	0.55	0.1262	0.0424
	0.55	0.1278	0.0423
	0.6	0.1488	0.0452
$y_6 = 0.1488587139227904$			
6	0.6	0.1489	0.0452
	0.65	0.1714	0.0479
	0.65	0.1728	0.0478
	0.7	0.1967	0.0505
$y_7 = 0.19671114595560976$			
7	0.7	0.1967	0.0505
	0.75	0.2219	0.0530
	0.75	0.2232	0.0529
	0.8	0.2496	0.0553
$y_8 = 0.24962126239186969$			
8	0.8	0.2496	0.0553
	0.85	0.2773	0.0576
	0.85	0.2784	0.0575
	0.9	0.3071	0.0598
$y_9 = 0.3071790988049683$			
9	0.9	0.3072	0.0598
	0.95	0.3371	0.0619
	0.95	0.3381	0.0618
	1.0	0.3690	0.0639
$y_{10} = 0.36904642670522175$			
10	1.0	0.3690	0.0639
	1.05	0.4010	0.0660
	1.05	0.4020	0.0659
	1.1	0.4349	0.0679
$y_{11} = 0.43495756238415795$			

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
11	1.1	0.4350	0.0679
	1.15	0.4689	0.0698
	1.15	0.4699	0.0697
	1.2	0.5047	0.0716
$y_{12} = 0.5047205776597383$			
12	1.2	0.5047	0.0716
	1.25	0.5405	0.0735
	1.25	0.5415	0.0735
	1.3	0.5782	0.0754
$y_{13} = 0.5782190292422908$			
13	1.3	0.5782	0.0753
	1.35	0.6159	0.0772
	1.35	0.6168	0.0772
	1.4	0.6554	0.0791
$y_{14} = 0.6554144439285761$			
14	1.4	0.6554	0.0791
	1.45	0.6949	0.0810
	1.45	0.6959	0.0809
	1.5	0.7363	0.0828
$y_{15} = 0.736349914185467$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $y_{15} = 0.736349914185467$.

d) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$.

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	0. 0 000	1.0000	0.1000
	0.0500	1.0500	0.1105
	0.0500	1.0553	0.1116
	0.1000	1.1116	0.1246
$y_1 = 1.1114628561787105$			
1	0.1000	1.1115	0.1245
	0.1500	1.1737	0.1400
	0.1500	1.1815	0.1418
	0.2000	1.2533	0.1611
$y_2 = 1.2530151746035345$			
2	0.2000	1.2530	0.1610
	0.2500	1.3335	0.1841
	0.2500	1.3451	0.1872
	0.3000	1.4402	0.2164
$y_3 = 1.439665974547582$			
3	0.3000	1.4397	0.2163
	0.3500	1.5478	0.2518
	0.3500	1.5656	0.2574

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
	0.4000	1.6970	0.3040
$y_4 = 1.696097903722817$			
4	0.4000	1.6961	0.3037
	0.4500	1.8479	0.3617
	0.4500	1.8770	0.3726
	0.5000	2.0686	0.4529
$y_5 = 2.066961015450312$			
5	0.5000	2.0670	0.4522
	0.5500	2.2931	0.5561
	0.5500	2.3450	0.5802
	0.6000	2.6471	0.7367
$y_6 = 2.643860197079332$			
6	0.6000	2.6439	0.7350
	0.6500	3.0114	0.9491
	0.6500	3.1184	1.0147
	0.7000	3.6586	1.3875
$y_7 = 3.6522003587842087$			
7	0.7000	3.6522	1.3829
	0.7500	4.3436	1.9430
	0.7500	4.6237	2.1941
	0.8000	5.8463	3.4819
$y_8 = 5.842013335279946$			
8	0.8000	5.8420	3.4769
	0.8500	7.5805	5.8186
	0.8500	8.7513	7.7308
	0.9000	13.5728	18.5031
$y_9 = 14.021820076380461$			
9	0.9000	14.0218	19.7421
	0.9500	23.8929	57.1773
	0.9500	42.6105	181.6554
	1.0000	195.6772	3829.0565
$y_{10} = 735.0991433436242$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $y_{10} = 735.0991433436242$.

e) $y' = x - \sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$.

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	0.0000	1.0000	-0.2000
	0.1000	0.9000	-0.1697
	0.1000	0.9151	-0.1713
	0.2000	0.8287	-0.1421
$y_1 = 0.8293022416154283$			
	0.2000	0.8293	-0.1421

<table>
<tr><td>n</td><td>x_o</td><td>y_o</td><td>$hf(x_n, y_n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>0.3000</td><td>0.7582</td><td>-0.1142</td></tr>
<tr><td>0.3000</td><td>0.7722</td><td>-0.1158</td></tr>
<tr><td>0.4000</td><td>0.7135</td><td>-0.0889</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_2 = 0.71415419659681$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>0.4000</td><td>0.7142</td><td>-0.0890</td></tr>
<tr><td>0.5000</td><td>0.6696</td><td>-0.0637</td></tr>
<tr><td>0.5000</td><td>0.6823</td><td>-0.0652</td></tr>
<tr><td>0.6000</td><td>0.6489</td><td>-0.0411</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_3 = 0.6495093765790388$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>0.6000</td><td>0.6495</td><td>-0.0412</td></tr>
<tr><td>0.7000</td><td>0.6289</td><td>-0.0186</td></tr>
<tr><td>0.7000</td><td>0.6402</td><td>-0.0200</td></tr>
<tr><td>0.8000</td><td>0.6295</td><td>0.0013</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_4 = 0.6299872457446561$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td>0.8000</td><td>0.6300</td><td>0.0013</td></tr>
<tr><td>0.9000</td><td>0.6306</td><td>0.0212</td></tr>
<tr><td>0.9000</td><td>0.6406</td><td>0.0199</td></tr>
<tr><td>1.0000</td><td>0.6499</td><td>0.0388</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_5 = 0.6503593651753093$</td></tr>
</table>

Vậy ta có nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $y_5 = 0.6503593651753093$.

Câu 7. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp nội suy Adams và ngoại suy Adams tương ứng với $k = 4$ và $k = 3$ biết các giá trị đầu tiên được tìm bằng phương pháp RK4.

a) $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

b) $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

c) $y' = 1 - x\sqrt[3]{y}$, $y(0) = 1$, $h = 0.5$ trên đoạn $[0; 5]$

d) $y' = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 2]$

e) $y' = xe^{3x} - 2y$, $y(0) = 0$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 1]$

Giải

a) $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.704867563	0.704859905
5	0.5	0.651066638	0.651062961
6	0.6	0.601924692	0.601922792

i	x_i	Adams	RK4
7	0.7	0.556622667	0.556621625
8	0.8	0.514582197	0.514581597
9	0.9	0.475392441	0.475392079
10	1.0	0.438760084	0.438759854

$\star$ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.705130139	0.704859905
5	0.5	0.651205954	0.651062961
6	0.6	0.602004109	0.601922792
7	0.7	0.556670805	0.556621625
8	0.8	0.514613013	0.514581597
9	0.9	0.475413151	0.475392079
10	1.0	0.438774587	0.438759854

b) $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.740640480	0.740640578
5	0.5	0.713061780	0.713061869
6	0.6	0.697623789	0.697623869
7	0.7	0.693171165	0.693171237
8	0.8	0.698658514	0.698658579
9	0.9	0.713139923	0.713139982
10	1.0	0.735759495	0.735759549

$\star$ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta có: $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.740646198	0.740640578
5	0.5	0.713066954	0.713061869
6	0.6	0.697628470	0.697623869
7	0.7	0.693175401	0.693171237
8	0.8	0.698662347	0.698658579
9	0.9	0.713143391	0.713139982

i	x_i	Adams	RK4
10	1.0	0.735762633	0.735759549

d) $y' = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.2$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	2.127205481	2.127202685
5	1.0	2.640824775	2.640822693
6	1.2	3.179895380	3.179894170
7	1.4	3.732340217	3.732340073
8	1.6	4.283408341	4.283409498
9	1.8	4.815082947	4.815085695
10	2.0	5.305358312	5.305363001

$\star$ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	2.127289249	2.127202685
5	1.0	2.640927089	2.640822693
6	1.2	3.180020346	3.179894170
7	1.4	3.732492851	3.732340073
8	1.6	4.283594768	4.283409498
9	1.8	4.815310650	4.815085695
10	2.0	5.305636428	5.305363001

e) $y' = xe^{3x} - 2y$, $y(0) = 0$, $h = 0.2$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	1.332737617	1.332227617
5	1.0	3.222889913	3.221992603

$\star$ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	1.296385456	1.332227617
5	1.0	3.149614338	3.221992603