TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ
KHOA SƯ PHẠM
BỘ MÔN SƯ PHẠM TOÁN HỌC

Bài tập nhóm

GIẢI TÍCH SỐ

Nhóm 3

Nguyễn Ngọc Đăng Duy	B1700014
Lê Hữu Kiệt	B1700024
Phan Thanh Tâm	B1700038
Nguyễn Hiếu Thanh	B1700039

Cần Thơ, 2020

Chương 1
Số gần đúng và sai số

Bài 1. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ sau:

$$c = 1,3241;\ \Delta_c = 0,23.10^{-2}$$

Giải

Sai số tuyệt đối giới hạn: $\Delta_c = 0,23.10^{-2}$.

Sai số tương đối giới hạn: $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|a|} = 0,00173702893$.

Bài 2. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp:

$$b = 0,2351;\ \Delta_b = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\Delta_b = 0,5.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_b \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0, 2, 3, 5 là các chữ số đáng tin; chữ số 1 là chữ số đáng nghi.

Bài 3. Xác định các chữ số đáng tin và đáng nghi trong trường hợp:

$$c = 0,2164; \delta_c = 0,5.10^{-3}$$

Giải

Ta có $\delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|c|} \Rightarrow \Delta_c = \delta_c.|c| = 0,5.10^{-3}.0,2164 = 0,0001082 = 0,1082.10^{-3}$.

Dễ thấy $0,5.10^{-4} \leqslant \Delta_c \leqslant 0,5.10^{-3}$ nên các chữ số 0,2,1,6 là đáng tin; chữ số 4 là đáng nghi

Bài 4. Tìm sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của hàm số:

$$y = (1 + abc)^{\alpha}$$

biết $a = 2,13;\ b = 4,39;\ c = 0,72$.

Giải

Ta có: $a = 2,13 \pm 0,5.10^{-2}$, $b = 4,39 \pm 0,5.10^{-2}$, $c = 0,72 \pm 0,5.10^{-2}$

Lại có: $\begin{cases} y'_a = \alpha.bc.(1+abc)^{\alpha-1} \\ y'_b = \alpha.ac.(1+abc)^{\alpha-1} \\ y'_c = \alpha.ab.(1+abc)^{\alpha-1} \end{cases}$.

Sai số tuyệt đối giới hạn của hàm số là:

$$
\begin{aligned}
\Delta_y &= |y'_a|\,.\Delta_a + |y'_b|\,.\Delta_b + |y'c|\,.\Delta_c \\
&= 3,1608.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 9,3507.\alpha.7,732504^{\alpha-1} + 1,5336.\alpha.7,732504^{\alpha-1} \\
&= \alpha.7,732504^{\alpha-1}.14,0451 \\
&= \alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514
\end{aligned}
$$

Sai số tương đối giới hạn của hàm số là

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\alpha.7,732504^{\alpha}.1,816371514}{(1+2,13.4,39.0,72)^{\alpha}} = \alpha.1,816371514$$

Chương 2
Lý thuyết nội suy

Bài 1. Tìm đa thức nội suy Larange của hàm số $y = f(x)$ cho bằng bảng sau:

d)

x	321	322,8	324,2	325
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

và tính gần đúng giá trị $f(323,5)$.

e)

x	-2	1	3	4	7
y	12	37	51	67	127

và tính gần đúng giá trị $f(5,1)$.

Giải

d) Ta có:

$$\begin{aligned}
y_0.L_0(x) &= 2,50651 \cdot \frac{(x-322,8)(x-324,2)(x-325)}{(321-322,8)(321-324,2)(321-325)} \\
&= \frac{250651}{100000} \cdot \frac{-25}{576}\left(x^3 - \frac{4862}{5}x^2 + \frac{7879661}{25}x - 34053968\right) \\
&= \frac{1420849532687}{384000} - \frac{1973417683019}{57600000}x + \frac{6767577}{64000}x^2 - \frac{250651}{2304000}x^3
\end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_0.L_0(323,5) = -0,07996027$

$$\begin{aligned}
y_1.L_1(x) &= 2,50893 \cdot \frac{(x-321)(x-324,2)(x-325)}{(322,8-321)(322,8-324,2)(322,8-325)} \\
&= -\frac{188572098741}{12320} + \frac{6247598101}{44000}x - \frac{1756251}{4000}x^2 + \frac{27877}{61600}x^3
\end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_1.L_1(323,5) = 1,18794034$

$$\begin{aligned}
y_2.L_2(x) &= 2,51081 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-325)}{(324,2-321)(324,2-322,8)(324,2-325)} \\
&= \frac{8455431374 91}{35840} - \frac{56108317827}{256000}x + \frac{43437013}{64000}x^2 - \frac{251081}{358400}x^3
\end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_2.L_2(323,5) = 1,83897216$

$$\begin{aligned}
y_3.L_3(x) &= 2,51188 \cdot \frac{(x-321)(x-322,8)(x-324,2)}{(325-321)(325-322,8)(325-324,2)} \\
&= -\frac{26369413998039}{2200000} + \frac{490348427793}{4400000}x - \frac{690767}{2000}x^2 + \frac{62797}{176000}x^3
\end{aligned}$$

Thay $x = 323,5$, ta được $y_3.L_3(323,5) = -0,43708139$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0.L_0(x) + y_. L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x)\\ &= \frac{6766686623}{369600000} - \frac{47439221}{316800000}x + \frac{3}{6400}x^2 - \frac{43}{88704000}x^3\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}L(323,5) &= y_0.L_0(323,5) + y_. L_1(323,5) + y_2.L_2(323,5) + y_3.L_3(323,5)\\ &= 2,50987084\end{aligned}$$

Vậy giá trị gần đúng của $f(323,5)$ là $P(323,5) \approx 2,50987084$

e) Ta có:

$$\begin{aligned}y_0L_0(x) &= 12 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(-2-1)(-2-3)(-2-4)(-2-7)}\\ &= \frac{56}{45} - \frac{58}{27}x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{135}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1L_1(x) &= 37 \cdot \frac{(x+2)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1+2)(1-3)(1-4)(1-7)}\\ &= \frac{518}{9} - \frac{703}{54}x - \frac{407}{36}x^2 + \frac{37}{9}x^3 - \frac{37}{108}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2L_2(x) &= 51 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-4)(x-7)}{(3+2)(3-1)(3-4)(3-7)}\\ &= -\frac{357}{5} + \frac{255}{4}x + \frac{153}{8}x^2 - \frac{51}{4}x^3 + \frac{51}{40}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3L_3(x) &= 67 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-7)}{(4+2)(4-1)(4-3)(4-7)}\\ &= \frac{469}{9} - \frac{2747}{54}x - \frac{67}{6}x^2 + \frac{67}{6}x^3 - \frac{67}{54}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_4L_4(x) &= 127 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-4)}{(7+2)(7-1)(7-3)(7-4)}\\ &= -\frac{127}{27} + \frac{1651}{324}x + \frac{127}{216}x^2 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{127}{648}x^4\end{aligned}$$

Do đó ta có đa thức nội suy Larange có dạng:

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0.L_0(x) + y_. L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x)\\ &= \frac{4699}{135} + \frac{455}{162}x - \frac{89}{54}x^2 + \frac{61}{54}x^3 - \frac{79}{810}x^4\end{aligned}$$

và giá trị gần đúng của $f(5,1)$ là $P(5,1) \approx 90,1281$.

Bài 2. Tìm đa thức nội suy Newton của hàm số $y = f(x)$ được cho bằng bảng sau:

b)

x	$-0,35$	$-0,1$	$0,15$	$0,4$	$0,65$
y	$0,387322$	$0,762616$	$1,501553$	$2,956482$	$5,821162$

và tính gần đúng giá trị $f\,(0,55)$.

Giải

Ta có bảng tỉ sai phân như sau:

x_i	y_i	TSP cấp 1	TSP cấp 2	TSP cấp 3	TSP cấp 4
$-0,35$	$0,387322$				
		$1,501176$			
$-0,1$	$0,762616$		$2,909144$		
		$2,955748$		$3,758389$	
$0,15$	$1,501553$		$5,727936$		$3,641707$
		$5,819716$		$7,400096$	
$0,4$	$2,956482$		$11,278008$		
		$11,45872$			
$0,65$	$5,821162$				

Đa thức nội suy Newton:

$$\begin{aligned} f(x) = \ & 0,387323 + 1,501176(x+0,35) + 2,909144(x+035)(x+0,1)+ \\ & + 3,758389(x+0,35)(x+0,1)(x-0,15)+ \\ & + 3,641707(x+0,35)(x+0,1)(x-0,15)(x-0,4) \end{aligned}$$

Khi đó, ta tính được $f(0,55) = 4,447517528$.

Chương 3
Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

Bài 1. Bằng phương pháp hình thang và Simpson 1/3, với $n = 10$, tính gần đúng và đánh giá sai số các tích phân sau:

b) $I = \int\limits_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

d) $I = \int\limits_0^{6} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$

f) $I = \int\limits_2^{4} \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x$

j) $I = \int\limits_{0,1}^{1,1} \frac{1}{(1+4x)^2} \mathrm{d}x$

Giải

b) $\star$ *Công thức Simpson 1/3*

$h = \frac{\pi - 0}{10} = \frac{\pi}{10}$. Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$		
0	0	0		
1	$\frac{\pi}{10}$		0,3090	
2	$\frac{\pi}{5}$			0,5878
3	$\frac{3\pi}{10}$		0,8090	
4	$\frac{2\pi}{5}$			0,9511
5	$\frac{\pi}{2}$		1	
6	$\frac{3\pi}{5}$			0,9511
7	$\frac{7\pi}{10}$		0,8090	
8	$\frac{4\pi}{5}$			0,5878
9	$\frac{9\pi}{10}$		0,3090	
10	π	0		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{\pi}{30}.[0 + 4.3,2361 + 2.3,0777] \approx 2,000105435$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} \left| f^{(4)}(x) \right|}{180} (\pi - 0) h^4 = \frac{1}{180} . \pi . \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 \approx 0,00017$$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{10}$

Ta được bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \sin x$	
0	0	
$\frac{\pi}{10}$		0,3090
$\frac{\pi}{5}$		0,5878
$\frac{3\pi}{10}$		0,8090
$\frac{2\pi}{5}$		0,9511
$\frac{\pi}{2}$		1
$\frac{3\pi}{5}$		0,9511
$\frac{7\pi}{10}$		0,8090
$\frac{4\pi}{5}$		0,5878
$\frac{9\pi}{10}$		0,3090
1	0	
	0	6,3138

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{\pi}{2.10} . (0 + 2.6,3138) \approx 1,9835$$

* Đánh giá sai số: Ta có $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |f''(x)| = 1$ và $\bar{I} = 1,98$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12} . (\pi - 0) . \left(\dfrac{\pi}{10} \right)^2 \approx 0,026$

và $|I_T - \bar{I}| = 3,5.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,0295.$

d) $\star$ *Công thức Simpson 1/3*

Ta có $h = \dfrac{6 - 0}{10} = \dfrac{3}{5}$

Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$		
0	0	1		
1	$0,6$		0,7353	
2	$1,2$			0,4098
3	$1,8$		0,2358	
4	$2,4$			0,1479
5	3		$0,1$	
6	$3,6$			0,0716
7	$4,2$		0,0536	
8	$4,8$			0,0416
9	$5,4$		0,0332	
10	6	0,0270		

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{1}{5}.\left[1,0270 + 4.1,1579 + 2.0,6980\right] \approx 1,410973$$

Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max_{0\leqslant x\leqslant 6}\left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(6-0)h^4 = \frac{24}{180}.6.\left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,10368$$

⋆ *Công thức hình thang*

Ta có $h = \dfrac{6-0}{10} = \dfrac{3}{5}$ Ta có bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$	
0	0	1	
1	$0,6$		$\dfrac{25}{34}$
2	$1,2$		$\dfrac{25}{61}$
3	$1,8$		$\dfrac{25}{106}$
4	$2,4$		$\dfrac{25}{169}$
5	3		$\dfrac{1}{10}$
6	$3,6$		$\dfrac{25}{349}$
7	$4,2$		$\dfrac{25}{466}$
8	$4,8$		$\dfrac{25}{601}$

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x^2+1}$	
9	$5,4$		$\dfrac{25}{754}$
10	6	$\dfrac{1}{37}$	
		$\dfrac{38}{37}$	$\dfrac{11967477}{6543383}$

Do đó giá trị gần đúng của tích phân đã cho là:

$$I_T \approx \frac{6-0}{2.10}.(\frac{38}{37} + 2.\frac{11967477}{6543383}) = 1,40547$$

* Đánh giá sai số Ta có $M = \max\limits_{0 \leqslant 6} |f''(x)| = 2$ và $\bar{I} = 1,41$

nên $|I_T - \bar{I}| \leqslant \dfrac{M}{12}.(6-0).\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 0,36$

và $|I_T - \bar{I}| = 4,53.10^{-3}$

Do đó $|I - \bar{I}| \leqslant |I - I_T| + |I_T - \bar{I}| \leqslant 0,364653.$

f) Ta có $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-2}{10} = 0,2$ và $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có bảng sau:

x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$	
$2,0$	1	
$2,2$		$\dfrac{25}{36}$
$2,4$		$\dfrac{25}{49}$
$2,6$		$\dfrac{25}{64}$
$2,6$		$\dfrac{25}{81}$
$3,0$		$\dfrac{1}{4}$
$3,2$		$\dfrac{25}{121}$
$3,4$		$\dfrac{25}{144}$
$3,6$		$\dfrac{25}{169}$
$3,8$		$\dfrac{25}{196}$

x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$	
$4,0$	$\dfrac{1}{9}$	
	$\dfrac{10}{9}$	$2,809618197$

Vậy theo công thức hình thang ta tính được giá trị gần đúng của tích phân là:

$$I \approx \int\limits_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \frac{4-2}{2\,(10)}\left(\frac{10}{9} + 2\,(2,809618197)\right) = 0,6730347505$$

Nếu làm tròn đến năm chữ số thập phân thì $I_T = 0,67303$.

Đánh giá sai số theo công thức tích phân, ta có:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}; \qquad f''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}$$

Do hàm f'' nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $M = \max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4} |f''(x)| = |f''(2)| = 6$.

Nên $|I - I_T| \leqslant \dfrac{6}{12}(4-2)(0,2)^2 = 0,04$.

Và $\left|I_T - \overline{I}\right| = 4,7505.10^{-6}$

Do đó $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_T| + \left|I_T - \overline{I}\right| = 0,04 + 4,7505.10^{-6}$.

$\star$ *Áp dụng công thức Simpson 1/3*

Ta có bảng:

i	x_i	$f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i-1)^2}$		
0	$2,0$	1		
1	$2,2$		$\dfrac{25}{36}$	
2	$2,4$			$\dfrac{25}{49}$
3	$2,6$		$\dfrac{25}{64}$	
4	$2,8$			$\dfrac{25}{81}$
5	$3,0$		$\dfrac{1}{4}$	
6	$3,2$			$\dfrac{25}{121}$
7	$3,4$		$\dfrac{25}{144}$	

i	x_i	$f(x_i) = \dfrac{1}{(x_i - 1)^2}$		
8	$3,6$			$\dfrac{25}{169}$
9	$3,8$		$\dfrac{25}{196}$	
10	$4,0$	$\dfrac{1}{9}$		
		$\dfrac{10}{9}$	$1,636231576$	$1,173386621$

Áp dụng công thức Simpson 1/3 ta tính gần đúng tích phân là:

$$I_S = \int\limits_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \approx \frac{0,2}{3}\left[\frac{10}{9} + 4\,(1,6366231576) + 2\,(1,173386621)\right] = 0,6668540438$$

Nếu lấy 5 chữ số thập phân, khi đó $\overline{I} = 0,66685$. Nên $\left|I_S - \overline{I}\right| = 4.0438 \times 10^{-6}$

Đánh giá sai số theo công thức, ta có:

$$f^{(3)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{120}{(x-1)^6}$$

Do $f^{(4)}(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $M = \max\limits_{2\leqslant x\leqslant 4}\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(2)\right| = 120$

Do đó $|I - I_S| \leqslant \dfrac{120}{180} \times (4-2) \times (0,2)^4 = 0,05\,(3)$

Vậy $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_S| + \left|I_S - \overline{I}\right| = 0,05\,(3) - 4.0438 \times 10^{-6}$

Bài 5. Tính gần đúng tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-0,8}^{0,8} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\mathrm{d}x$ bằng công thức Simpson với $n = 16$ và đánh giá sai số của kết quả vừa nhận được.

Giải

Ta có $h = \dfrac{0,8 - (-0,8)}{16} = 0,1$.

Ta lập được bảng sau:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
0	$-0,8$	0,934411509		
1	$-0,7$		0,85582621	
2	$-0,6$			0,762860112
3	$-0,5$		0,656932407	
4	$-0,4$			0,539742953
5	$-0,3$		0,413235796	
6	$-0,2$			0,279557228

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$		
7	$-0,1$		0,141009326	
8	$0,001$			0,001414213
9	$0,1$		0,141009326	
10	$0,2$			0,279557228
11	$0,3$		0,413235796	
12	$0,4$			0,539742953
13	$0,5$		0,656932407	
14	$0,6$			0,762860112
15	$0,7$		0,85582621	
16	$0,8$	0,934411509		
		1,868823017	4,134007477	3,165734799

Theo công thức Simpson 1/3, ta có:

$$I_S \approx \frac{0,1}{3} \cdot [1,868823017 + 4.4,134007477 + 2.3,165734799] \approx 0,824544084$$

* Đánh giá sai số:

$$|I - I_S| \leqslant \frac{\max\limits_{-0,8\leqslant x\leqslant 0,8} \left|f^{(4)}(x)\right|}{180}(0,8+0,8)h^4 = \frac{3,35366}{180}.1,6.\left(0,1\right)^4 \approx 1,98103.10^{-6}$$

j) Ta có $h = \dfrac{1,1-0,1}{10} = 0,1$ và $g(x) = \dfrac{1}{\left(1+4x\right)^2}$

Ta tìm được các đạo hàm của $g(x)$:

$$g'(x) = -\frac{8}{\left(1+4x\right)^3}; \quad g''(x) = \frac{96}{\left(1+4x\right)^4}; \quad g^{(3)(x)} = -\frac{1536}{\left(1+4x\right)^5}; \quad g^{(4)}(x) = \frac{30720}{\left(1+4x\right)^6}$$

$\star$ *Công thức hình thang*

Ta có bảng giá trị:

	x_i	$y_i = g(x_i) = \dfrac{1}{(1+4x_i)^2}$	
0	$0,1$	$\dfrac{25}{49}$	
1	$0,2$		$\dfrac{25}{81}$
2	0.3		$\dfrac{25}{121}$
3	$0,4$		$\dfrac{25}{169}$
4	$0,5$		$\dfrac{1}{9}$

	x_i	$y_i = g(x_i) = \dfrac{1}{(1+4x_i)^2}$	
5	$0,6$		$\dfrac{25}{289}$
6	$0,7$		$\dfrac{25}{361}$
7	$0,8$		$\dfrac{25}{441}$
8	$0,9$		$\dfrac{25}{529}$
9	$1,0$		$\dfrac{1}{25}$
10	$1,1$	$\dfrac{25}{729}$	
		$0,5444976344$	$1,03399924$

Vậy theo công thức hình thang, giá trị gần đúng của tích phân cần tìm là:

$$I_T = \int\limits_{0,1}^{1,1} g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{0,1}{2}\left[0,5444976344 + 2\left(1,03399924\right)\right] = 0,1306248057$$

Nếu làm tròn đến năm chữ số thập phân thì $\overline{I} = 0,13062$.

* Đánh giá sai số theo công thức tích phân:

Ta có $M = \max\limits_{0,1 \leqslant x \leqslant 1,1} |g''(x)| = |g''\left(1,1\right)| = 0,1129005854$.

Nên $|I - I_T| \leqslant \dfrac{M}{12}\left(1,1 - 0,1\right)\left(0,1\right)^2 = 9,408382116.10^{-5}$.

và $\left|I_T - \overline{I}\right| = 4,8075.10^{-6}$.

Do đó $\left|I - \overline{I}\right| \leqslant |I - I_T| + \left|I_T - \overline{I}\right| \leqslant 9,408382116.10^{-5} + 4,8075.10^{-6}$.

Chương 4
Giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt

Bài 2. Dùng phương pháp lặp đơn, hãy tìm nghiệm của các phương trình:
c) $x - \sin x = 0,25$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân lý nghiệm $(1;1,5)$.
f) $2^x - 5x - 3 = 0$ với sai số 10^{-4} trong khoảng phân ly nghiệm $(4;5)$.
i) $(x-1)^2 = \dfrac{1}{2}e^x$ với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0;0,5)$.
j) $x = \ln x + 3$ với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4;5)$

Giải

c) Đặt $f(x) = x - \sin x - 0,25$. Ta có:

- $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1;1,5)$.
- $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $\forall x \in (1;1,5)$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $(1;1,5)$.
- $f(1) = 0,7325$, $f(1,5) = 1,2238$, suy ra $f(1)\,f(1,5) > 0$.

Từ đây ta suy ra hàm số vô nghiệm trên đoạn $(1;1,5)$.

f) Đặt $f(x) = 2^x - 5x - 3$. Ta có:

- $f(x)$ liên tục trên khoảng $(4;5)$.
- $f(4)\,f(5) < 0$.
- $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5 > 0, \forall x \in (4;5)$.

Do đó: phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên khoảng $(4;5)$.

Do $f'(x) > 0$ nên ta đặt $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$. Trong đó:

$$M \geq \max_{x\in(4;5)} |f'(x)| \approx 17,1807$$

Chọn $M = 17,1807$, suy ra $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{17,1807} = \dfrac{-2^x + 22,1807x + 3}{17,1807}$.

Ta có $\varphi'(x) = \dfrac{-2^x \ln 2 + 22,1807}{17,1807}$ và $\max\limits_{x\in(4;5)} |\varphi'(x)| < |\varphi'(4)| = 0,6455$.

Chọn $L = 0,6455$.

Chọn $x_0 = 4,7$, ta có xấp xỉ nghiệm trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi\left(x_{n-1}\right)$	$\left\|x_n - x*\right\| \leq 1,82087 \left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
1	$4,72956$	$0,05382$
2	$4,73641$	$0,01247$
3	$4,73791$	$0,02731$
4	$4,73822$	$0,00056$
5	$4,73829$	$0,00013$
6	$4,73831$	$0,00004$

Vậy $x^* \approx x_6 = 4,73831$.

i) Đặt $f(x) = (x-1)^2 - \dfrac{1}{2}e^x = 0$, ta có:

$$f'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{2}e^x < 0 \forall x \in (0;0,5)$$
$$f(0) = \frac{1}{2}$$
$$f(0,5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.e^{\frac{1}{2}}$$

Từ đây ta có $f(0).f(0,5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng $(0;0,5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(0;0,5)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x = 1 - \sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Đặt $\varphi(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{e^x}{2}}$, ta có:

$$\varphi'(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{8}}$$
$$\max_{x \in [0;0,5]} |\varphi'(x)| \approx 0,45397$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant 0,83140|x_n - x_{n-1}|$ Chọn $x = 0,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$0,83140\|x_n - x_{n-1}\|$
1	$0,25664$	$0,13023$
2	$0,19608$	$0,05035$
3	$0,22006$	$0,01994$
2	$0,21065$	$0,78210.10^{-2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-2} trong khoảng phân ly nghiệm $(0;0,5)$ là $x \approx 0,21065$.

j) Đặt $f(x) = x - \ln x - 3$, ta có:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \in (4;5) \\
&f''(x) = -\frac{1}{x^2} \\
&f(4) = 1 - \ln 4 \\
&f(5) = 2 - \ln 5
\end{aligned}$$

Từ đây ta có $f(4).f(5) < 0$ và $f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng $(4;5)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(4;5)$.

Đặt $\varphi(x) = \ln x + 3$, ta có:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}; \qquad \max_{x \in [4;5]} |\varphi'(x)| = 0,25$$

Do đó $|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|$

Chọn $x = 4,1$, ta có xấp xỉ nghiệm của phương trình được cho trong bảng sau:

n	$x_n = \varphi(x_{n-1})$	$\frac{1}{3}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	$4,41099$	$0,10366$
2	$4,48410$	$0,02437$
3	$4,50054$	$0,54797.10^{-2}$
4	$4,50420$	$0,12198.10^{-2}$
5	$4,50500$	$0,27092.10^{-3}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho với sai số 10^{-3} trong khoảng phân ly nghiệm $(4;5)$ là $x \approx 4,50500$.

Chương 5
Giải tích số trong đại số tuyến tính

Bài 3 Giải hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương pháp lặp đơn với sai số 10^{-3}:

d) $A = \begin{pmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 21,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 20,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 21,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 19,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 32,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & -2 & 18 & 4 \\ 22 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & 21 & -8 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 20 \\ 26 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Giải

d) Ta có bảng sau:

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\lvert a_{ii}\rvert$	10,9	11,2	9,8	21,1
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	4,2	5,2	4,9	4,7

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,110091743119266 & -0,192660550458716 & -0,0825688073394495 \\ -0,107142857142857 & 0 & -0,133928571428571 & -0,223214285714286 \\ -0,214285714285714 & -0,153061224489796 & 0 & -0,13265306122449 \\ -0,042654028436019 & -0,118483412322275 & -0,0616113744075829 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -0,642201834862385 \\ 0,473214285714286 \\ 1,05102040816327 \\ 1,16587677725118 \end{pmatrix}$$

Xét $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} \sum\limits_{j=1}^{4} \|b_{ij}\| = 0,5 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta có $\dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} = 1$ và chọn $x^{(0)} = g$, ta xây dựng dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ theo công thức $x^{(k+1)} =$

$Bx^{(k)} + g$, đồng thời đánh giá sai số của phương pháp, ta có kết quả sau:

k	$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$	$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = \dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
1	$\begin{pmatrix} -0,993054045828079 \\ 0,14101961129125 \\ 0,961547205531943 \\ 1,07244641736863 \end{pmatrix}$	0,350852210965694
2	$\begin{pmatrix} -0,931529765210858 \\ 0,211448928863767 \\ 1,09996976905335 \\ 1,1322838031197 \end{pmatrix}$	0,138422563521411
3	$\begin{pmatrix} -0,970892720408834 \\ 0,172961746149442 \\ 1,0680683846522 \\ 1,11278643444365 \end{pmatrix}$	0,0393629551979762
4	$\begin{pmatrix} -0,958899586619104 \\ 0,185803803696713 \\ 1,08498058457731 \\ 1,12099100393111 \end{pmatrix}$	0,0169121999251123
5	$\begin{pmatrix} -0,964249146384074 \\ 0,180422421182962 \\ 1,07935664502496 \\ 1,11791589378033 \end{pmatrix}$	0,00562393955235119
6	$\begin{pmatrix} -0,962319281135253 \\ 0,182435203006485 \\ 1,08173458303242 \\ 1,11912817726331 \end{pmatrix}$	0,00237793800745756
7	$\begin{pmatrix} -0,963099103441544 \\ 0,181639358897804 \\ 1,08085214851347 \\ 1,1186608714485 \end{pmatrix}$	0,000882434518947317

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x^* \approx x^{(7)}$ với sai số $\epsilon = 0,000882435 < 10^{-3}$.

e) Ta có bảng sau:

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\|a_{ii}\|$	20,9	21,2	19,8	32,1
$\sum_{j=1, j\neq i}^{4} \|a_{ij}\|$	4,2	5,2	4,9	4,7

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,0574162679425837 & -0,100478468899522 & -0,0430622009569378 \\ -0,0566037735849057 & 0 & -0,0707547169811321 & -0,117924528301887 \\ -0,106060606060606 & -0,0757575757575758 & 0 & -0,0656565656565657 \\ -0,0280373831775701 & -0,0778816199376947 & -0,0404984423676012 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -0,334928229665072 \\ 0,25 \\ 0,52020202020202 \\ 0,766355140186916 \end{pmatrix}$$

Xét $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} \sum\limits_{j=1}^{4} \|b_{ij}\| = 0,247474747 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta có $\dfrac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} = 0,32885906$ và chọn $x^{(0)} = g$, ta xây dựng dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ theo công thức $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, đồng thời đánh giá sai số của phương pháp, ta có kết quả sau:

k	$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$	$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = \dfrac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
1	$\begin{pmatrix} -0,434552338210166 \\ 0,14177938654848 \\ 0,486469070709781 \\ 0,735207874779936 \end{pmatrix}$	0,0355893292558691
2	$\begin{pmatrix} -0,423608009552663 \\ 0,153478278907438 \\ 0,507278817838622 \\ 0,747795602682095 \end{pmatrix}$	0,00684347388800811
3	$\begin{pmatrix} -0,426912703089183 \\ 0,149901998962265 \\ 0,504405309000642 \\ 0,745734861312729 \end{pmatrix}$	0,00117609206250647
4	$\begin{pmatrix} -0,426329900614236 \\ 0,150535383345483 \\ 0,505162038299866 \\ 0,746222415379245 \end{pmatrix}$	0,000248857286321837

Vậy nghiệm của hệ phương trình $x^* \approx x^{(4)}$ với sai số là $0,000248857 < 10^{-3}$.

f) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_i\rvert$	1	2	4	4
$\sum_{j=1,j\neq i}^{4}\lvert a_{ij}\rvert$	19	25	30	33

và

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$\lvert a_{jj}\rvert$	1	2	4	4
$\sum_{i=1,i\neq j}^{4}\lvert a_{ij}\rvert$	29	24	29	25

Do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 5 Giải gần đúng hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương phái Seidel với sai số 10^{-3}:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0,24 & -0,08 \\ 0,09 & 3 & -0,15 \\ 0,04 & -0,08 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -1 & 10 & -2 \\ -2 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 10 \\ 10 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 20 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 20 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & -0,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 1 & 0 & -0,25 \\ -0,25 & 0 & 1 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & -0,25 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$

Giải

a) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\lvert a_{ii}\rvert$	4	3	4
$\sum_{j=1,j\neq i}^{3}\lvert a_{ij}\rvert$	0,32	0,24	0,12

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,08 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.
Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,03 & 0 & 0 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$,$L = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
α_i	0,08	0,05	0
β_i	0	0,03	0,03
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,08	0,0515463917525773	0
λ	0,08		
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	0,0869565217391304		

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	0,0167304347826087
2	$\begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,1924 \\ 5,044648 \end{pmatrix}$	0,000926177391304343

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x^* \approx x^{(2)}$ với sai số là $0,000926177$

e) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\|a_{ii}\|$	10	10	10
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{3} \|a_{ij}\|$	3	3	3

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$. Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,3 \\ 2,6 \end{pmatrix}$$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,3 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.

Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
α_i	0,3	0,2	0
β_i	0	0,1	0,3
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,3	0,222222222222222	0
λ	0,3		
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	0,428571428571429		

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix}0,3\\1,3\\2,6\end{pmatrix}$	0,258
2	$\begin{pmatrix}0,82\\1,902\\2,9542\end{pmatrix}$	0,06678
3	$\begin{pmatrix}0,97582\\1,988422\\2,9940062\end{pmatrix}$	0,00911357999999999
4	$\begin{pmatrix}0,99962874622\\1,999816470262\\2,9999073962702\end{pmatrix}$	0,00109016837999995
5	$\begin{pmatrix}0,99995403367942\\1,99997688262198\\2,99998849499808\end{pmatrix}$	0,000139408911180075

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x^* \approx x^{(5)}$ với sai số là 0,000139409.

f) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_{ii}\rvert$	2	2	5	2
$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	13	12	27	24

và

	j=1	j=2	j=3	j=4
$\lvert a_{jj}\rvert$	2	2	5	2
$\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	13	25	22	16

Từ đây ta suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

g) Ta có bảng sau:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\lvert a_{ii}\rvert$	1	1	1	1
$\sum_{j=1,j\neq i}^{4} \lvert a_{ij}\rvert$	0,5	0,5	0,5	0,5

Từ đây suy ra hệ phương trình $Ax = b$ có thể đưa về dạng $x = Bx + g$ sao cho $\|B\|_\infty < 1$.
Ta tìm được ma trận B và g như sau:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Ta có $\|B\|_\infty = 0,5 < 1$ nên ma trận B thỏa điều kiện hội tụ.
Ta lần lượt có các ma trận U và L như sau:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta tiếp tục có:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
α_i	0,5	0,25	0,25	0
β_i	0	0,25	0,25	0,5
$\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$	0,5	0,333333333333333	0,333333333333333	0
λ	0,5			
$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$	1			

Chọn $x^{(0)} = g$, và áp dụng công thức Seidel tính $x^{(k+1)} = (I-U)^{-1}(Lx^{(k)} + g)$ ta có được kết quả trong bảng sau:

k	$x^{(k)}$	Sai số
1	$\begin{pmatrix} 47,75 \\ 59,4375 \\ 34,4375 \\ 48,46875 \end{pmatrix}$	64,4375
2	$\begin{pmatrix} 73,46875 \\ 80,484375 \\ 55,484375 \\ 58,9921875 \end{pmatrix}$	25,71875

k	$x^{(k)}$	Sai số
3	$\begin{pmatrix} 83,9921875 \\ 85,74609375 \\ 60,74609375 \\ 61,623046875 \end{pmatrix}$	10,5234375
4	$\begin{pmatrix} 86,623046875 \\ 87,0615234375 \\ 62,0615234375 \\ 62,28076171875 \end{pmatrix}$	2,630859375
5	$\begin{pmatrix} 87,28076171875 \\ 87,390380859375 \\ 62,390380859375 \\ 62,4451904296875 \end{pmatrix}$	0,65771484375
6	$\begin{pmatrix} 87,4451904296875 \\ 87,4725952148437 \\ 62,4725952148437 \\ 62,4862976074218 \end{pmatrix}$	0,1644287109375
7	$\begin{pmatrix} 87,4862976074218 \\ 87,4931488037109 \\ 62,4931488037109 \\ 62,4965744018554 \end{pmatrix}$	0,041107177734375
8	$\begin{pmatrix} 87,4965744018554 \\ 87,4982872009277 \\ 62,4982872009277 \\ 62,4991436004638 \end{pmatrix}$	0,0102767944335937
9	$\begin{pmatrix} 87,4991436004638 \\ 87,4995718002319 \\ 62,4995718002319 \\ 62,4997859001159 \end{pmatrix}$	0,00256919860839844
10	$\begin{pmatrix} 87,4997859001159 \\ 87,4998929500579 \\ 62,4998929500579 \\ 62,4999464750289 \end{pmatrix}$	0,000642299652099609

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x^* \approx x^{(10)}$ với sai số 0,0006423.

Chương 6
Giải gần đúng phương trình vi phân thường

Câu 4. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp Euler:

a) $y' = 1 - y$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 0.3]$.

b) $y' = \dfrac{y - x}{1 + x}$, $y(0) = 1$, $h = 0.02$ trên đoạn $[0; 0.1]$.

c) $y' = 3x + \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

d) $y' = x + y + xy$, $y(0) = 1$, $h = 0.02$ trên đoạn $[0; 0.1]$.

e) $y' = 1 + \ln(x + y)$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

f) $y' = (y + x)^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$.

g) $y' = -5x^4y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 1]$.

Giải

c) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.05$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.05	1.05	1.051281	1.051313
2	0.1	1.102625	1.105444	1.105473
3	0.15	1.158256	1.162892	1.162879
4	0.2	1.217294	1.224049	1.223946

d) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.2$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.1	0.095	0.095
2	0.2	0.19	0.180975	0.18075
3	0.3	0.271	0.258782	0.258163

b) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.02$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.02	1.02	1.019802	1.019804
2	0.04	1.039608	1.039212	1.039218
3	0.06	1.058831	1.058237	1.058248
4	0.08	1.077677	1.076885	1.076904
5	0.1	1.096152	1.095162	1.09519

c) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.05$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.05	1.025	1.02875	1.02875
2	0.1	1.0575	1.065	1.065
3	0.15	1.0975	1.10875	1.10875
4	0.2	1.145	1.16	1.16

d) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.02$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.02	1.02	1.020602	1.020604
2	0.04	1.041208	1.042445	1.042443
3	0.06	1.063665	1.065572	1.065559
4	0.08	1.087415	1.09003	1.089998
5	0.1	1.112503	1.115867	1.115807

e) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.1	1.1	1.109531	1.109116
2	0.2	1.218232	1.237222	1.236081

f) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$ ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.1	1.1	1.121	1.122
2	0.2	1.244	1.302048	1.300921
3	0.3	1.452514	1.579223	1.567124
4	0.4	1.759644	2.022661	1.974635
5	0.5	2.22605	2.787806	2.628147
6	0.6	2.969185	4.291918	3.754367
7	0.7	4.243093	8.059989	5.924101

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
8	0.8	6.686511	24.054293	10.920429
9	0.9	12.291295	335.318823	26.489364
10	1.0	29.692322	3586457.107023	111.099159

g) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$ ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.2	1.0	0.9999	0.9992
2	0.4	0.9984	0.991815	0.985642
3	0.6	0.972882	0.931885	0.911874
4	0.8	0.850216	0.747801	0.709949
5	1.0	0.554129	0.48468	0.453194

Câu 5. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp Euler cải tiến:

a) $y' = \dfrac{y-x}{1+x}$, $y(0) = 1$, $h = 0.02$ trên đoạn $[0; 0.1]$.

b) $y' = 3x + \dfrac{1}{2}y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

c) $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$ trên đoạn $[0; 0.2]$.

d) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 0.6]$.

Giải

a) (Câu 4b)

b) (Câu 4c)

c) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.05$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.05	1.05	1.051281	1.051313
2	0.1	1.102625	1.105444	1.105473
3	0.15	1.158256	1.162892	1.162879
4	0.2	1.217294	1.224049	1.223946

d) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.2$, ta có bảng giá trị:

n	x_n	y_n	y_n (Euler cải tiến 1)	y_n(Euler cải tiến 2)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.2	0.2	0.202	0.204
2	0.4	0.408	0.420737	0.424808
3	0.6	0.641293	0.67872	0.68398

Câu 6. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp RK4:

a) $y' = 2 + \sqrt{xy}$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 2]$

b) $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[1; 2]$

c) $y' = x - \sin y$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

d) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

e) $y' = x - \sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 1]$

Giải

a) $y' = 2 + \sqrt{xy}$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$.

Ta có sơ đồ tính toán như sau:

<table>
<tr><th>n</th><th>x_o</th><th>y_o</th><th>$hf(x_n, y_n)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">0</td><td>1.0</td><td>1.0</td><td>0.6</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>1.3</td><td>0.6392</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>1.3196</td><td>0.6410</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>1.6410</td><td>0.6807</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_1 = 1.640150501121759$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td>1.2</td><td>1.6402</td><td>0.6806</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>1.9804</td><td>0.7209</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>2.0006</td><td>0.7225</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>2.3627</td><td>0.7637</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_2 = 2.3620215847729593$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>1.4</td><td>2.3620</td><td>0.7637</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>2.7439</td><td>0.8057</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>2.7649</td><td>0.8073</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>3.1693</td><td>0.8504</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_3 = 3.168716003302697$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>1.6</td><td>3.1687</td><td>0.8503</td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>3.5939</td><td>0.8944</td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>3.6159</td><td>0.8959</td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>4.0646</td><td>0.9410</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_4 = 4.064004846121863$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td>1.8</td><td>4.0640</td><td>0.9409</td></tr>
<tr><td>1.9</td><td>4.5345</td><td>0.9870</td></tr>
<tr><td>1.9</td><td>4.5575</td><td>0.9885</td></tr>
<tr><td>2.0</td><td>5.0525</td><td>1.0358</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_5 = 5.051980957085838$</td></tr>
</table>

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là $y_5 = 5.051980957085838$.

b) $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $h = 0.2$ trên đoạn $[1; 2]$

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	1.0	1.0	0.0000
	1.1	1.0	-0.0182
	1.1	0.9909	-0.0162
	1.2	0.9838	-0.0296
$y_1 = 0.9836006941450569$			
1	1.2	0.9836	-0.0296
	1.3	0.9688	-0.0387
	1.3	0.9643	-0.0376
	1.4	0.9460	-0.0438
$y_2 = 0.9459390018738288$			
2	1.4	0.9459	-0.0438
	1.5	0.9240	-0.0476
	1.5	0.9222	-0.0471
	1.6	0.8988	-0.0492
$y_3 = 0.8988702115243877$			
3	1.6	0.8989	-0.0492
	1.7	0.8743	-0.0500
	1.7	0.8739	-0.0499
	1.8	0.8489	-0.0498
$y_4 = 0.849051617841853$			
4	1.8	0.8491	-0.0498
	1.9	0.8241	-0.0491
	1.9	0.8245	-0.0492
	2.0	0.7999	-0.0480
$y_5 = 0.7999961579105562$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là $y_5 = 0.7999961579105562$.

c) $y' = x - \sin y$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$.

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	0.0	0.0000	0.0000
	0.05	0.0000	0.0050
	0.05	0.0025	0.0048
	0.1	0.0048	0.0095
$y_1 = 0.004837500380164618$			
1	0.1	0.0048	0.0095
	0.15	0.0096	0.0140
	0.15	0.0119	0.0138
	0.2	0.0187	0.0181
$y_2 = 0.018730933533350227$			
	0.2	0.0187	0.0181

2

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
	0.25	0.0278	0.0222
	0.25	0.0298	0.0220
	0.3	0.0407	0.0259
$y_3 = 0.040818909363427004$			
3	0.3	0.0408	0.0259
	0.35	0.0538	0.0296
	0.35	0.0556	0.0294
	0.4	0.0703	0.0330
$y_4 = 0.07032359540590269$			
4	0.4	0.0703	0.0330
	0.45	0.0868	0.0363
	0.45	0.0885	0.0362
	0.5	0.1065	0.0394
$y_5 = 0.10654526828749952$			
5	0.5	0.1065	0.0394
	0.55	0.1262	0.0424
	0.55	0.1278	0.0423
	0.6	0.1488	0.0452
$y_6 = 0.1488587139227904$			
6	0.6	0.1489	0.0452
	0.65	0.1714	0.0479
	0.65	0.1728	0.0478
	0.7	0.1967	0.0505
$y_7 = 0.19671114595560976$			
7	0.7	0.1967	0.0505
	0.75	0.2219	0.0530
	0.75	0.2232	0.0529
	0.8	0.2496	0.0553
$y_8 = 0.24962126239186969$			
8	0.8	0.2496	0.0553
	0.85	0.2773	0.0576
	0.85	0.2784	0.0575
	0.9	0.3071	0.0598
$y_9 = 0.3071790988049683$			
9	0.9	0.3072	0.0598
	0.95	0.3371	0.0619
	0.95	0.3381	0.0618
	1.0	0.3690	0.0639
$y_{10} = 0.36904642670522175$			
10	1.0	0.3690	0.0639
	1.05	0.4010	0.0660
	1.05	0.4020	0.0659
	1.1	0.4349	0.0679
$y_{11} = 0.43495756238415795$			

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
11	1.1	0.4350	0.0679
	1.15	0.4689	0.0698
	1.15	0.4699	0.0697
	1.2	0.5047	0.0716
$y_{12} = 0.5047205776597383$			
12	1.2	0.5047	0.0716
	1.25	0.5405	0.0735
	1.25	0.5415	0.0735
	1.3	0.5782	0.0754
$y_{13} = 0.5782190292422908$			
13	1.3	0.5782	0.0753
	1.35	0.6159	0.0772
	1.35	0.6168	0.0772
	1.4	0.6554	0.0791
$y_{14} = 0.6554144439285761$			
14	1.4	0.6554	0.0791
	1.45	0.6949	0.0810
	1.45	0.6959	0.0809
	1.5	0.7363	0.0828
$y_{15} = 0.736349914185467$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $y_{15} = 0.736349914185467$.

d) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$.

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	0. 0 000	1.0000	0.1000
	0.0500	1.0500	0.1105
	0.0500	1.0553	0.1116
	0.1000	1.1116	0.1246
$y_1 = 1.1114628561787105$			
1	0.1000	1.1115	0.1245
	0.1500	1.1737	0.1400
	0.1500	1.1815	0.1418
	0.2000	1.2533	0.1611
$y_2 = 1.2530151746035345$			
2	0.2000	1.2530	0.1610
	0.2500	1.3335	0.1841
	0.2500	1.3451	0.1872
	0.3000	1.4402	0.2164
$y_3 = 1.439665974547582$			
3	0.3000	1.4397	0.2163
	0.3500	1.5478	0.2518
	0.3500	1.5656	0.2574

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
	0.4000	1.6970	0.3040
$y_4 = 1.696097903722817$			
4	0.4000	1.6961	0.3037
	0.4500	1.8479	0.3617
	0.4500	1.8770	0.3726
	0.5000	2.0686	0.4529
$y_5 = 2.066961015450312$			
5	0.5000	2.0670	0.4522
	0.5500	2.2931	0.5561
	0.5500	2.3450	0.5802
	0.6000	2.6471	0.7367
$y_6 = 2.643860197079332$			
6	0.6000	2.6439	0.7350
	0.6500	3.0114	0.9491
	0.6500	3.1184	1.0147
	0.7000	3.6586	1.3875
$y_7 = 3.6522003587842087$			
7	0.7000	3.6522	1.3829
	0.7500	4.3436	1.9430
	0.7500	4.6237	2.1941
	0.8000	5.8463	3.4819
$y_8 = 5.842013335279946$			
8	0.8000	5.8420	3.4769
	0.8500	7.5805	5.8186
	0.8500	8.7513	7.7308
	0.9000	13.5728	18.5031
$y_9 = 14.021820076380461$			
9	0.9000	14.0218	19.7421
	0.9500	23.8929	57.1773
	0.9500	42.6105	181.6554
	1.0000	195.6772	3829.0565
$y_{10} = 735.0991433436242$			

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $y_{10} = 735.0991433436242$.

e) $y' = x - \sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$.

Ta lập được sơ đồ tính toán như sau:

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
0	0.0000	1.0000	-0.2000
	0.1000	0.9000	-0.1697
	0.1000	0.9151	-0.1713
	0.2000	0.8287	-0.1421
$y_1 = 0.8293022416154283$			
1	0.2000	0.8293	-0.1421

n	x_o	y_o	$hf(x_n, y_n)$
	0.3000	0.7582	-0.1142
	0.3000	0.7722	-0.1158
	0.4000	0.7135	-0.0889
$y_2 = 0.71415419659681$			
14	0.4000	0.7142	-0.0890
	0.5000	0.6696	-0.0637
	0.5000	0.6823	-0.0652
	0.6000	0.6489	-0.0411
$y_3 = 0.6495093765790388$			
3	0.6000	0.6495	-0.0412
	0.7000	0.6289	-0.0186
	0.7000	0.6402	-0.0200
	0.8000	0.6295	0.0013
$y_4 = 0.6299872457446561$			
4	0.8000	0.6300	0.0013
	0.9000	0.6306	0.0212
	0.9000	0.6406	0.0199
	1.0000	0.6499	0.0388
$y_5 = 0.6503593651753093$			

Vậy ta có nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $y_5 = 0.6503593651753093$.

Câu 7. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau bằng phương pháp nội suy Adams và ngoại suy Adams tương ứng với $k = 4$ và $k = 3$ biết các giá trị đầu tiên được tìm bằng phương pháp RK4.

a) $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

b) $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ trên đoạn $[0; 1]$

c) $y' = 1 - x\sqrt[3]{y}$, $y(0) = 1$, $h = 0.5$ trên đoạn $[0; 5]$

d) $y' = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 2]$

e) $y' = xe^{3x} - 2y$, $y(0) = 0$, $h = 0.2$ trên đoạn $[0; 1]$

Giải

a) $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.704867563	0.704859905
5	0.5	0.651066638	0.651062961
6	0.6	0.601924692	0.601922792

i	x_i	Adams	RK4
7	0.7	0.556622667	0.556621625
8	0.8	0.514582197	0.514581597
9	0.9	0.475392441	0.475392079
10	1.0	0.438760084	0.438759854

⋆ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.705130139	0.704859905
5	0.5	0.651205954	0.651062961
6	0.6	0.602004109	0.601922792
7	0.7	0.556670805	0.556621625
8	0.8	0.514613013	0.514581597
9	0.9	0.475413151	0.475392079
10	1.0	0.438774587	0.438759854

b) $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

⋆ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.740640480	0.740640578
5	0.5	0.713061780	0.713061869
6	0.6	0.697623789	0.697623869
7	0.7	0.693171165	0.693171237
8	0.8	0.698658514	0.698658579
9	0.9	0.713139923	0.713139982
10	1.0	0.735759495	0.735759549

⋆ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta có: $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.4	0.740646198	0.740640578
5	0.5	0.713066954	0.713061869
6	0.6	0.697628470	0.697623869
7	0.7	0.693175401	0.693171237
8	0.8	0.698662347	0.698658579
9	0.9	0.713143391	0.713139982

i	x_i	Adams	RK4
10	1.0	0.735762633	0.735759549

d) $y' = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.2$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	2.127205481	2.127202685
5	1.0	2.640824775	2.640822693
6	1.2	3.179895380	3.179894170
7	1.4	3.732340217	3.732340073
8	1.6	4.283408341	4.283409498
9	1.8	4.815082947	4.815085695
10	2.0	5.305358312	5.305363001

$\star$ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	2.127289249	2.127202685
5	1.0	2.640927089	2.640822693
6	1.2	3.180020346	3.179894170
7	1.4	3.732492851	3.732340073
8	1.6	4.283594768	4.283409498
9	1.8	4.815310650	4.815085695
10	2.0	5.305636428	5.305363001

e) $y' = xe^{3x} - 2y$, $y(0) = 0$, $h = 0.2$

$\star$ *Phương pháp nội suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp nội suy Adams với $k = 4$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	1.332737617	1.332227617
5	1.0	3.222889913	3.221992603

$\star$ *Phương pháp ngoại suy Adams*

Ta lập được bảng tính toán nghiệm gần đúng theo phương pháp ngoại suy Adams với $k = 3$ như sau:

i	x_i	Adams	RK4
4	0.8	1.296385456	1.332227617
5	1.0	3.149614338	3.221992603