

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ  
KHOA SƯ PHẠM  
BỘ MÔN SƯ PHẠM TOÁN HỌC



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG  
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

**Nhóm 3**

Nguyễn Ngọc Đăng Duy	B1700014
Lê Hữu Kiệt	B1700024
Phan Thanh Tâm	B1700038
Nguyễn Hiếu Thanh	B1700039

Cần Thơ, 2020

# Mục lục

<b>1 Kiến thức chuẩn bị</b>	<b>1</b>
1.1 Một số khái niệm về phương trình vi phân thường . . . . .	1
1.2 Phương pháp Euler và Euler cải tiến . . . . .	2
1.2.1 Phương pháp Euler . . . . .	2
1.2.2 Phương pháp Euler cải tiến thứ nhất . . . . .	4
1.2.3 Phương pháp Euler cải tiến thứ hai . . . . .	5
1.3 Phương pháp Runge – Kutta . . . . .	7
1.3.1 Nội dung phương pháp . . . . .	7
1.3.2 Sơ đồ tính toán . . . . .	10
1.4 Phương pháp Adams . . . . .	10
1.4.1 Công thức ngoại suy Adams . . . . .	11
1.4.2 Công thức nội suy Adams . . . . .	12
<b>2 Bài tập &amp; Ứng dụng</b>	<b>14</b>
<b>3 Xây dựng Code tính toán</b>	<b>20</b>
3.1 Phương pháp Euler và Euler cải tiến . . . . .	20
3.2 Phương pháp Runge – Kutta 4 . . . . .	21
3.3 Phương pháp Adams . . . . .	23
3.3.1 Công thức nội suy . . . . .	23
3.3.2 Công thức ngoại suy . . . . .	25

# Chương 1

## Kiến thức chuẩn bị

### 1.1 Một số khái niệm về phương trình vi phân thường

Phương trình vi phân được nghiên cứu rộng rãi trong toán học thuần túy và ứng dụng, vật lý, các ngành kỹ thuật, ... và đóng một vai trò cực kỳ quan trọng. Song trong thực tế, việc tìm ra công thức của hàm, hay nghiệm chính xác của phương trình cụ thể gặp nhiều khó khăn, đồng thời, người ta cũng chỉ quan tâm tới giá trị của hàm số tại các giá trị cụ thể của các biến độc lập. Tuy nhiên, có nhiều bài toán mà việc tìm ra giá trị chính xác của hàm số tại một điểm nào đó thì không khả thi, khi đó, việc tìm được một giá trị xấp xỉ giá trị chính xác là phương án tối ưu.

Đó là mục tiêu của chương *Giải gần đúng phương trình vi phân thường*.

**Định nghĩa 1.1.** Phương trình vi phân thường cấp  $n$  là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.1)$$

trong đó  $x$  là biến số độc lập,  $y = y(x)$  là hàm số phải tìm và  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$  là các đạo hàm của hàm số  $y = y(x)$ .

- **Cấp** của phương trình là cấp của đạo hàm cao nhất có mặt trong phương trình.
- **Nghiệm** của phương trình là mọi hàm số  $y = y(x)$  thỏa mãn phương trình (1.1).
- **Giải** phương trình vi phân thường là tiến hành tìm tất cả các nghiệm của phương trình vi phân đó.

**Định nghĩa 1.2.** Xét phương trình vi phân cấp  $n$  có dạng:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (1.2)$$

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân (1.2) là tìm hàm  $y = y(x)$  thỏa mãn phương trình (1.2) và các điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1 là bài toán tìm nghiệm  $y = y(x)$  của phương trình

$$y' = f(x, y) \quad (1.3)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.4)$$

Phương trình vi phân (1.3) tương đương với phương trình tích phân:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (1.5)$$

theo nghĩa mọi nghiệm của phương trình (1.3) là nghiệm liên tục của (1.5) và ngược lại.

Báo cáo này sẽ trình bày ba phương pháp sau:

- Phương pháp Euler và Euler cải tiến, gồm 3 phương pháp: Phương pháp Euler, Phương pháp Euler cải tiến thứ nhất và Phương pháp cải tiến thứ hai.
- Phương pháp Runge – Kutta.
- Phương pháp Adams, gồm 2 phương pháp: Công thức nội suy Adams và Công thức ngoại suy Adams.

## 1.2 Phương pháp Euler và Euler cải tiến

### 1.2.1 Phương pháp Euler

Xét bài toán Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.6)$$

Giả sử hàm  $f$  thỏa mãn điều kiện  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$  và  $\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M$  trong hình chữ nhật:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \right\}$$

Giả sử  $x_0$  là giá trị ban đầu và  $h$  là số dương cho trước đủ nhỏ với  $x_i = x_0 + ih$ , với  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $h$  được gọi là độ dài bước.

(1.6) tương đương với  $dy = f(x, y) dx$ , lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \text{ hay } y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx$$

Giả sử  $f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$  với  $x_0 \leq x \leq x_1$ , khi đó:

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \text{ hay } y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Tương tự, với  $x_1 \leq x \leq x_2$ , ta có  $y_2 \approx y_1 + hf(x_1, y_1)$ . Từ đó, ta có công thức tổng quát:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Công thức (1.7) được gọi là phương pháp Euler.

**Ví dụ 1.1.** Bằng phương pháp Euler, giải phương trình gần đúng phương trình:

$$y' = 2xy + e^{x^2}, \quad y(0) = 1$$

trong đoạn  $[0; 1, 5]$ , so sánh với nghiệm chính xác  $\varphi(x) = (x + 1)e^{x^2}$  của phương trình.

### Giải

Với  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , chọn  $h = 0.25$ .

Áp dụng công thức (1.7), ta có bảng giá trị:

$n$	$x_n$	$y_n$	$\varphi(x_n)$
0	0.0	1.0	1.0
1	0.25	1.25	1.3306
2	0.5	1.6724	1.926
3	0.75	2.4115	3.0713
4	1.0	3.7545	5.4366
5	1.25	6.3114	10.7341
6	1.5	11.4487	23.7193

Nếu ta chọn  $h = 0.1$ , ta cũng có bảng giá trị:

$n$	$x_n$	$y_n$	$\varphi(x_n)$	$n$	$x_n$	$y_n$	$\varphi(x_n)$
0	0.0	1.0	1.0	8	0.8	3.0338	3.4137
1	0.1	1.1	1.1111	9	0.9	3.7088	4.271
2	0.2	1.223	1.249	10	1.0	4.6012	5.4366
3	0.3	1.376	1.4224	11	1.1	5.7933	7.0423
4	0.4	1.568	1.6429	12	1.2	7.4031	9.2855
5	0.5	1.8108	1.926	13	1.3	9.602	12.4648
6	0.6	2.1203	2.2933	14	1.4	12.6404	17.0384
7	0.7	2.518	2.7749	15	1.5	16.8897	23.7193

**Ví dụ 1.2.** Bằng phương pháp Euler, giải gần đúng phương trình vi phân:

$$y' + 2y = 2 - e^{-4x}, \quad y(0) = 1$$

với  $h = 0.1$  cho trước.

### Giải

Phương trình vi phân đã cho có nghiệm chính xác là:

$$y = 1 + \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Phương trình vi phân đã cho tương đương với:  $y' = 2 - e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2y$ .

Với  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  và  $h = 0.1$ . Khi đó ta có bảng giá trị:

$n$	$x_n$	$y_n$	$\varphi(x_n)$
0	0.0	1.0	1.0
1	0.1	0.9	0.925795
2	0.2	0.852968	0.889504
3	0.3	0.837441	0.876191
4	0.4	0.839834	0.876284
5	0.5	0.851677	0.883728

Nếu ta thay đổi độ dài bước lần lượt là  $h = 0.05$ ,  $h = 0.01$ ,  $h = 0.005$  và  $h = 0.001$ , ta có bảng giá trị của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác tại các thời điểm  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ ,  $x = 4$  và  $x = 5$  là:

$x$	Nghiệm chính xác	Nghiệm gần đúng			
		$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
1	0.9414902	0.9364698	0.9404994	0.9409957	0.9413914
2	0.9910099	0.9911126	0.9910193	0.9910139	0.9910106
3	0.9987637	0.9988982	0.9987890	0.9987763	0.9987662
4	0.9998323	0.9998657	0.9998390	0.9998357	0.9998330
5	0.9999773	0.9999837	0.9999786	0.9999780	0.9999774

Phần trăm sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng được xác định bởi:

$$P = \frac{|n_{\text{exact}} - n_{\text{approx}}|}{n_{\text{exact}}} \times 100\% \quad (1.8)$$

Áp dụng (1.8), ta có bảng tính toán phần trăm sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng:

$x$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
1	0.53%	0.105%	0.053%	0.0105%
2	0.01%	0.0094%	0.00041%	0.00007%
3	0.013%	0.0025%	0.0013%	0.00025%
4	0.0033%	0.00067%	0.00034%	0.000067%
5	0.00064%	0.00013%	0.000068%	0.000014%

### Nhận xét 1.1.

- Nếu độ dài bước  $h$  càng nhỏ, sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác càng nhỏ.
- Nói chung sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác sẽ tăng nếu giá trị  $x$  tăng.

### 1.2.2 Phương pháp Euler cải tiến thứ nhất

Phương pháp Euler cải tiến thứ nhất là một phương pháp hiện trong đó giá trị tiếp theo của nghiệm,  $y_{n+1}$  được thực hiện thông qua việc tính toán các giá trị trung gian:

$$\begin{cases} x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n + \frac{h}{2} \\ f_{n+\frac{1}{2}} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n\right) \\ y_{n+1} &= y_n + hf_{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.9)$$

**Ví dụ 1.3.** Áp dụng phương pháp Euler cải tiến thứ nhất, giải phương trình vi phân sau:

$$y' = \frac{2y}{x} + x, \quad y(1) = 1 \quad (1.10)$$

trên đoạn  $[1; 1.4]$  và độ dài bước  $h = 0.1$ .

**Giải**

Phương trình đã cho có nghiệm gần đúng là  $\varphi(x) = x^2 + x^2 \ln x$ .

Đặt  $f(x, y) = \frac{2y}{x} + x$ , ta có bảng giá trị:

$n$	$x_n$	$y_n$	$\varphi(x_n)$
0	1.0	1.0	1.0
1	1.1	1.324048	1.325325
2	1.2	1.699816	1.702543
3	1.3	2.12905	2.133396
4	1.4	2.613357	2.619486

### 1.2.3 Phương pháp Euler cải tiến thứ hai

Từ (1.7) ta có:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Thay số hạng thứ hai  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$  bởi  $f(x_n, y_n)$ , ta được:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Tuy nhiên giá trị  $y_{n+1}$  bên vế phải cũng là giá trị cần tính, vì vậy ta tính  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$  với  $y_{n+1}$  được tính bởi phương pháp Euler (1.7). Khi đó ta có một phương pháp mới gọi là phương pháp Euler cải tiến thứ hai.

Để thực hiện việc tính giá trị  $y_{n+1}$  khi biết  $y_n$  ta thực hiện các bước tính toán:

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \end{cases} \quad (1.11)$$

**Ví dụ 1.4.** Áp dụng phương pháp Euler và Euler cải tiến thứ hai, giải phương trình vi phân sau:

$$y' = y - x, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

trên đoạn  $[0, 1]$  với độ dài bước  $h = 0.1$ .

### Giải

Phương trình đã cho có nghiệm gần đúng của phương trình vi phân đã cho có là  $\varphi(x) = x + 1 - \frac{1}{2}e^x$ .

Với  $h = 0.1$  và  $x_n = x_0 + nh = nh$ .

Theo (1.7) nghiệm gần đúng của phương trình đã cho được tính theo phương pháp Euler:

$$\begin{cases} y_0 &= y(0) = 1 \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1(y_n - x_n) = 1.1y_n - 0.1x_n \end{cases}$$

Theo (1.11) nghiệm gần đúng của phương trình đã cho được tính theo phương pháp Euler cải tiến:

$$\begin{cases} y_0 &= y(0) = 1 \\ \tilde{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1(y_n - x_n) = 1.1y_n - 0.1x_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})] = y_n + \frac{0.1}{2}[(y_n - x_n) + (\tilde{y}_{n+1} - x_n)] \\ &= y_n + \frac{0.1}{2}[(y_n - x_n) + (1.1y_n - 0.1x_n - x_n)] = 1.06y_n - 0.105x_n \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng nghiệm giá trị theo hai phương pháp:

$n$	$x_n$	$\tilde{y}_n$	$y_n$ (Euler cải tiến)	$\varphi(x_n)$
0	0.0	0.5	0.5	0.5
1	0.1	0.55	0.5475	0.547415
2	0.2	0.595	0.589625	0.589299
3	0.3	0.6345	0.625831	0.625071
4	0.4	0.66795	0.65552	0.654088
5	0.5	0.694745	0.678034	0.675639
6	0.6	0.71422	0.692646	0.688941
7	0.7	0.725641	0.698561	0.693124
8	0.8	0.728206	0.694899	0.68723
9	0.9	0.721026	0.680695	0.670198
10	1.0	0.703129	0.654886	0.640859

Qua bảng giá trị, ta thấy phương pháp Euler cải tiến cho nghiệm tốt hơn phương pháp Euler.

**Ví dụ 1.5.** Sử dụng phương pháp Euler và Euler cải tiến, giải gần đúng phương trình

$$y' = \frac{y^2 - x}{1 + x}$$

trên đoạn  $[0; 0.2]$ , với  $y(0) = 1$  và  $h = 0.02$ .

### Giải

Với  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  và  $h = 0.02$ , ta có bảng giá trị:



$n$	$x_n$	$y_n$	$y_n$ (Euler cải tiến 1)	$y_n$ (Euler cải tiến 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.02	1.02	1.020002	1.020004
2	0.04	1.040008	1.04002	1.040023
3	0.06	1.060039	1.060069	1.060074
4	0.08	1.080108	1.080164	1.080171
5	0.1	1.100231	1.100322	1.100329
6	0.12	1.120422	1.120557	1.120564
7	0.14	1.140696	1.140884	1.140889
8	0.16	1.161068	1.161318	1.161321
9	0.18	1.181552	1.181875	1.181874
10	0.2	1.202163	1.202569	1.202563

## 1.3 Phương pháp Runge – Kutta

### 1.3.1 Nội dung phương pháp

Xét bài toán Cauchy (1.3), (1.4), để giải bài toán này, xuất phát từ giá trị  $y_n$  ta tìm được giá trị gần đúng  $y_{n+1}$  tại  $x_{n+1} = x_n + h$  theo công thức:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (1.12)$$

trong đó

$$k_i = hf \left( x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad (1.13)$$

Công thức (1.12) và (1.13) xác định phương pháp Runge – Kutta tổng quát.

Các hệ số  $c_i, a_{ij}, b_i$  được chọn sao cho với  $m$  đủ lớn, hàm số  $\varphi(h) = y(x_n + h) - y_n - \sum_{i=1}^s b_i k_i$  thỏa mãn

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(m)}(0) = 0; \quad \varphi^{(m+1)} \neq 0 \quad (1.14)$$

Khi đó sai số trong mỗi bước được đánh giá bởi:

$$R(h) = \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{(m+1)}, \quad 0 < \xi < h \quad (1.15)$$

Từ (1.14), với  $l = 0, 1, 2, \dots, m$  ta rút ra:

$$y_n^{(l)} = \sum_{i=1}^s b_i k_i^{(l)}(0) \quad (1.16)$$

Ta xét một số trường hợp đặc biệt:

a) Với  $s = 1$ :

Theo (1.13),  $\varphi(h) = y(x_n + h) - y(x_n) - b_1 h f(x_n, y_n)$ .

Nên  $\varphi'(h) = y'(x_n + h) - b_1 f(x_n, y_n) = (1 - b_1) f(x_n, y_n)$ .

Ta thấy  $\varphi'(h) = 0$  với mọi  $f$  khi và chỉ khi  $b_1 = 1$ . Từ đó, công thức Runge – Kutta khi  $s = 1$  là:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (1.17)$$

Rõ ràng (1.17) là công thức Euler.

b) Với  $s = 2$ :

Theo (1.14) và (1.16), ta cũng có:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1) \\ \varphi(h) &= y(x_n + h) - y_n - b_1 k_1 - b_2 k_2 \\ y_n^{(l)} &= b_1 k_1^{(l)}(0) + b_2 k_2^{(l)}(0) \end{aligned}$$

Ta có:  $k_1'(h) = f(x_n, y_n) \Rightarrow k_1'(0) = f(x_n, y_n)$ .

$$k_2'(h) = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1) + h \left[ \frac{\partial f}{\partial x} c_2 + \frac{\partial f}{\partial y} k_1'(h) a_{21} \right]$$

nên  $k_2'(0) = f(x_n, y_n)$ .

Do đó:  $y_n' = b_1 k_1'(0) + b_2 k_2'(0)$ , nghĩa là  $b_1 + b_2 = 1$ .

Tiếp tục:  $k_1''(h) = 0$ .

$$\begin{aligned} k_2''(h) &= 2 \left[ \frac{\partial f}{\partial x} c_2 + \frac{\partial f}{\partial y} k_1'(h) a_{21} \right] + h \left[ \frac{\partial f}{\partial x} c_2 + \frac{\partial f}{\partial y} k_1'(h) a_{21} \right] \\ \Rightarrow k_2''(0) &= 2 \left[ \frac{\partial f}{\partial x} c_2 + \frac{\partial f}{\partial y} k_1'(0) a_{21} \right] \end{aligned}$$

Do đó  $\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} y' = y_n'' = 2b_2 \left( \frac{\partial f_n}{\partial x} c_2 + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n a_{21} \right)$  cho nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 &= 1 \\ b_2 c_2 &= \frac{1}{2} \\ a_{21} b_2 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm.

Với nghiệm  $b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$ , ta có công thức Runge – Kutta chính là công thức Euler cải tiến.

Với nghiệm  $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = a_{21} = 1$ , ta có công thức Runge – Kutta 2 (RK2):

$$\begin{cases} Y_2 = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, Y_2)] \end{cases}$$

c) Với  $s = 3$ :

Lập luận tương tự ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3} \\ b_3c_2a_{32} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Một nghiệm của hệ phương trình thường dùng trong thực tế là:

$$b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = \frac{1}{6}, c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}, c_3 = 1, a_{31} = -1, a_{32} = 2$$

d) Với  $s = 4$ :

Hệ phương trình với các ẩn số là hệ số của công thức Runge – Kutta 4 (RK4) là:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \frac{1}{3} \\ b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 = \frac{1}{4} \\ b_3a_{32}c_2 + b_4a_{42}c_2 + b_4a_{43}c_3 = \frac{1}{6} \\ b_3c_3a_{32}c_2 + b_4c_4a_{42}c_2 + b_4c_4a_{43}c_3 = \frac{1}{8} \\ b_3a_{32}c_2^2 + b_4a_{42}c_2^2 + b_4a_{43}c_3^2 = \frac{1}{12} \\ b_4a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{24} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} c_2 = a_{21} \\ c_3 = a_{31} + a_{32} \\ c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm, trong thực tế RK4 thông dụng có dạng sau:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Công thức RK4 có ước lượng sai số là :  $R_4(h) = \frac{4\varphi^{(5)}(\xi)}{5!}h^5$ .

### 1.3.2 Sơ đồ tính toán

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$
0	$x_0$	$y_0$	$^{(0)}k_1$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{^{(0)}k_1}{2}$	$^{(0)}k_2$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{^{(0)}k_2}{2}$	$^{(0)}k_3$
	$x_0 + h$	$y_0 + ^{(0)}k_3$	$^{(0)}k_4$
$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (^{(0)}k_1 + 2^{(0)}k_2 + 2^{(0)}k_3 + ^{(0)}k_4)$			
1	$x_1$	$y_1$	$^{(1)}k_1$

## 1.4 Phương pháp Adams

Giả sử  $y(x)$  là nghiệm của bài toán Cauchy (1.3) – (1.4) và  $y_m, y_{m-1}, \dots, y_{m-k}$  là các nghiệm gần đúng của bài toán tại các điểm nút  $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ , với  $x_{m-i} = x_m - ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  và  $h$  là độ dài bước, nghĩa là  $y(x_{m-i}) \approx y_{m-i}$ .

Ký hiệu:  $f_i = f(x_i, y_i)$ ,  $i = m, m-1, \dots, m-k$ .

Gọi  $P(x)$  là đa thức nội suy nhận các giá trị tại các mốc nội suy  $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ , khi đó:

$$P(x) = \sum_{i=0}^k f_{m-i} P_i(x)$$

Đổi biến số:  $x - x_m = th$  thì  $P_i(x)$  trở thành  $Q_i(t)$ , khi đó từ công thức

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) dx$$

ta có thể tính

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P(x) dx = y_m + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i} \quad (1.18)$$

trong đó  $\beta_i = \int_0^1 Q_i(t) dt$ .

(1.18) được gọi là công thức ngoại suy Adams. Nếu trong quá trình xây dựng đa thức nội suy, ta sử dụng cả giá trị  $f_{m+1}$  thì công thức xây dựng được:

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=-1}^k \gamma_i f_{m-i} \quad (1.19)$$

(1.19) được gọi là công thức nội suy Adams.

### 1.4.1 Công thức ngoại suy Adams

Giả sử trong công thức (1.18), ta xây dựng  $P(x)$  là đa thức nội suy Newton cuối bảng (dạng lùi), nghĩa là:

$$P(x) = f_m + \frac{t}{1!} \Delta f_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{m-2} + \dots + \frac{t(t+1)(t+2) \dots (t+k-1)}{k!} \Delta^k f_{m-k}$$

Từ đó

$$y_{m+1} = y_m + h \int_0^1 \left( f_m + \frac{t}{1!} \Delta f_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{m-2} + \dots + \frac{t(t+1)(t+2) \dots (t+k-1)}{k!} \Delta^k f_{m-k} \right) dt$$

Vậy

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h (f_m + a_1 \Delta f_{m-1} + a_2 \Delta^2 f_{m-2} + \dots + a_k \Delta^k f_{m-k}) \\ &= y_m + h \sum_{i=0}^k a_i \Delta^i f_{m-i} \end{aligned}$$

trong đó  $a_i = (-1)^i \int_0^1 (C_{-t}^i) dt$

Ta có bảng giá trị một số các  $a_i$ :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_i$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{5257}{17280}$

- Nếu  $k = 1$ :

$$y_{m+1} = y_m + h(f_m + a_1 \Delta f_{m-1}) = y_m + \frac{h}{2}(3f_m - f_{m-1})$$

- Nếu  $k = 2$ :

$$y_{m+1} = y_m + h(f_m + a_1 \Delta f_{m-1} + a_2 \Delta^2 f_{m-2}) = y_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2})$$

- Nếu  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h(f_m + a_1 \Delta f_{m-1} + a_2 \Delta^2 f_{m-2} + a_3 \Delta^3 f_{m-3}) \\ &= y_m + \frac{h}{24}(55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}) \end{aligned}$$

### 1.4.2 Công thức nội suy Adams

Nếu bắt đầu mốc nội suy  $x_{m+1}$  thì

$$P(x) = f_{m+1} + \frac{t}{1!}\Delta f_m + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f_{m-k+1}$$

Do đó

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P(x)dx \\ &= y_m + h \int_{-1}^0 \left( f_{m+1} + \frac{t}{1!}\Delta f_m + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f_{m-k+1} \right) dt \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h(f_{m+1} + b_1\Delta f_m + b_2\Delta^2 f_{m-1} + \dots + b_k\Delta^k f_{m-k+1}) \\ &= y_m + h \sum_{i=0}^k b_i \Delta^i f_{m-i+1} \end{aligned}$$

trong đó  $b_i = (-1)^i \int_{-1}^0 (C_{-i}^i) dt$ .

Ta có bảng giá trị một số các  $b_i$ :

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$b_i$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$

Nếu  $k = 2$ :

$$y_{m+1} = y_m + h(f_{m+1} + b_1\Delta f_m + b_2\Delta^2 f_{m-1}) = y_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1})$$

Nếu  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h(f_{m+1} + b_1\Delta f_m + b_2\Delta^2 f_{m-1} + b_3\Delta^3 f_{m-2}) \\ &= y_m + \frac{h}{24}(9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2}) \end{aligned}$$

Nếu  $k = 4$ :

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{720}(251f_{m+1} + 646f_m - 264f_{m-1} + 106f_{m-2} - 19f_{m-3})$$

**Ví dụ 1.6.** Bằng phương pháp ngoại suy Adams ứng với  $k = 3$ , giải gần đúng phương trình:  $y' = f(x, y) = y - x^2$  biết  $y(0) = 1$  và độ dài bước  $h = 0, 1$ .

## Giải

Công thức ngoại suy Adams ứng với  $k = 3$ :

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}(55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3})$$

nghĩa là:

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

trong đó các giá trị  $f_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  và  $y_i \approx y(x_i)$  được tính bằng phương pháp RK4 với các  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.1$ ,  $x_2 = 0.2$ ,  $x_3 = 0.3$ .

$$f(0, 1) = 1$$

$$f(0.1, 1.104829) = 1.094829$$

$$f(0.2, 1.218597) = 1.178597$$

$$f(0.3, 1.3402141) = 1.250141$$

Vậy,

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\ &= 1.340141 + \frac{0.1}{24}[55(1.250141) - 59(1.178597) + 37(1.094829) - 9] \\ &= 1.468179 \end{aligned}$$

Nghiệm chính xác của phương trình đã cho là  $\varphi(x) = 2 + 2x + x^2 - e^x$ . Ta có thể so sánh nghiệm gần đúng khi giải phương trình đã cho bằng phương pháp RK4 và phương pháp nội suy Adams với  $k = 3$  với nghiệm chính xác của phương trình theo bảng sau:

$i$	$x_i$	Adams	RK4	$\varphi(x_i)$
4	0.4	1.468179116	1.468174786	1.468175302
5	0.5	1.601288165	1.601278076	1.601278729
6	0.6	1.737896991	1.737880409	1.7378812
7	0.7	1.876270711	1.876246365	1.876247293
8	0.8	2.014491614	2.014458009	2.014459072
9	0.9	2.150440205	2.150395695	2.150396889
10	1.0	2.281774162	2.281716852	2.281718172

# Chương 2

## Bài tập & Ứng dụng

**Câu 1.** Bằng các phương pháp Euler, Euler cải tiến, Runge – Kutta 4, Adams, tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$y' = y - x^2 + 1$$

trên đoạn  $[0; 1]$  với  $h = 0.1$ , biết  $y(0) = 0.5$ . So sánh với nghiệm chính xác  $\varphi(x) = (x + 1)^2 - 0.5e^x$ .

**Giải**

★ Phương pháp Euler, Euler cải tiến 1 (Euler 1) và Euler cải tiến 2 (Euler 2):

$n$	$x_n$	$y_n$ (Euler)	Sai số	$y_n$ (Euler 1)	Sai số	$y_n$ (Euler 2)	Sai số	$\varphi(x_n)$
0	0.0	0.5	0.0%	0.5	0.0%	0.5	0.0%	0.5
1	0.1	0.65	1.13%	0.65725	0.03%	0.657	0.06%	0.657415
2	0.2	0.814	1.84%	0.828961	0.04%	0.82805	0.15%	0.829299
3	0.3	0.9914	2.33%	1.014552	0.05%	1.012523	0.25%	1.015071
4	0.4	1.18154	2.68%	1.21338	0.06%	1.209726	0.36%	1.214088
5	0.5	1.383694	2.94%	1.424735	0.06%	1.418897	0.47%	1.425639
6	0.6	1.597063	3.15%	1.647832	0.07%	1.639195	0.59%	1.648941
7	0.7	1.82077	3.31%	1.881805	0.07%	1.869693	0.71%	1.883124
8	0.8	2.053847	3.45%	2.125694	0.07%	2.10937	0.84%	2.12723
9	0.9	2.295231	3.57%	2.378442	0.07%	2.3571	0.97%	2.380198
10	1.0	2.543755	3.68%	2.638878	0.08%	2.611643	1.11%	2.640859

★ Phương pháp Runge – Kutta 4:

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$	$\varphi(x_n)$	Sai số
0	0.0	0.5	0.15		
	0.05	0.575	0.1573		
	0.05	0.5786	0.1576		
	0.1	0.6576	0.1648		
$y_1 = 0.657414375$				0.657414541	0.00002525%
1	0.1	0.6574	0.1647		
	0.15	0.7398	0.1717		
	0.15	0.7433	0.1721		
	0.2	0.8295	0.1789		
$y_2 = 0.829298276$				0.829298621	0.0000416%
2	0.2	0.8293	0.1789		
	0.25	0.9188	0.1856		
	0.25	0.9221	0.186		



$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$	$\varphi(x_n)$	Sai số
	0.3	1.0153	0.1925		
$y_3 = 1.015070058$				1.015070596	0.000053%
3	0.3	1.0151	0.1925		
	0.35	1.1113	0.1989		
	0.35	1.1145	0.1992		
	0.4	1.2143	0.2054		
$y_4 = 1.214086906$				1.214087651	0.00006136%
4	0.4	1.2141	0.2054		
	0.45	1.3168	0.2114		
	0.45	1.3198	0.2117		
	0.5	1.4258	0.2176		
$y_5 = 1.425638396$				1.425639365	0.00006797%
5	0.5	1.4256	0.2176		
	0.55	1.5344	0.2232		
	0.55	1.5372	0.2235		
	0.6	1.6491	0.2289		
$y_6 = 1.648939390$				1.6489406	0.00007338%
6	0.6	1.6489	0.2289		
	0.65	1.7634	0.2341		
	0.65	1.766	0.2343		
	0.7	1.8833	0.2393		
$y_7 = 1.883122179$				1.883123646	0.0000779%
7	0.7	1.8831	0.2393		
	0.75	2.0028	0.244		
	0.75	2.0051	0.2443		
	0.8	2.1274	0.2487		
$y_8 = 2.127227791$				2.127229536	0.00008203%
8	0.8	2.1272	0.2487		
	0.85	2.2516	0.2529		
	0.85	2.2537	0.2531		
	0.9	2.3803	0.257		
$y_9 = 2.380196402$				2.380198444	0.00008579%
9	0.9	2.3802	0.257		
	0.95	2.5087	0.2606		
	0.95	2.5105	0.2608		
	1.0	2.641	0.2641		
$y_{10} = 2.64085672$				2.640859086	0.00008959%

★ Phương pháp Adams:

i	$x_i$	Nội suy	Sai số	Ngoại suy	Sai số	RK4	$\varphi(x)$
4	0.4	1.214087	0.00000079%	1.214089	0.00000096%	1.214087	1.214088
5	0.5	1.425639	0.00000034%	1.425641	0.00000132%	1.425638	1.425639
6	0.6	1.648940	0.0000009%	1.648942	0.00000067%	1.648939	1.648941

i	$x_i$	Nội suy	Sai số	Ngoại suy	Sai số	RK4	$\varphi(x)$
7	0.7	1.883122	0.00000091%	1.883125	0.00000062%	1.883122	1.883124
8	0.8	2.127228	0.00000099%	2.127231	0.0000005%	2.127228	2.127230
9	0.9	2.380196	0.00000063%	2.380200	0.00000084%	2.380196	2.380198
10	1.0	2.640857	0.00000083%	2.640861	0.00000064%	2.640857	2.640859

**Câu 2.** Bằng các phương pháp Euler, Euler cải tiến, Runge – Kutta 4, Adams, tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

trên đoạn  $[0; 1]$ , với  $y(0) = 1$  và  $h = 0.2$ .

**Giải**

★ Phương pháp Euler:

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_n$ (Euler 1)	$y_n$ (Euler 2)
0	0.0	1.0	1.0	1.0
1	0.2	1.2	1.18363636	1.18666667
2	0.4	1.37333333	1.34265567	1.35070637
3	0.6	1.53149515	1.48501361	1.50134346
4	0.8	1.68108457	1.61522499	1.64448119
5	1.0	1.82694818	1.73618226	1.78485683

★ Phương pháp Runge – Kutta 4:

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$
0	0	1	0.2
	0.1	1.1	0.1836
	0.1	1.0918	0.1817
	0.2	1.1817	0.1686
$y_1 = 1.183229287445307$			
1	0.2	1.1832	0.169
	0.3	1.2677	0.1589
	0.3	1.2627	0.1575
	0.4	1.3407	0.1488
$y_2 = 1.3416669298526065$			
2	0.4	1.3417	0.1491
	0.5	1.4162	0.142
	0.5	1.4127	0.141
	0.6	1.4826	0.1347
$y_3 = 1.4832814583502616$			
3	0.6	1.4833	0.1349
	0.7	1.5507	0.1296
	0.7	1.5481	0.1287
	0.8	1.612	0.1239
$y_4 = 1.6125140416775265$			

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$
4	0.8	1.6125	0.1241
	0.9	1.6745	0.1199
	0.9	1.6725	0.1192
	1	1.7318	0.1154
$y_5 = 1.7321418826911932$			

★ Phương pháp Adams

$i$	$x_i$	Nội suy	Ngoại suy	RK4
4	0.8	1.612467	1.611428559	1.612514042
5	1	1.732124625	1.731735132	1.732141883

**Câu 3.** Tốc độ tăng kích thước của một khối u trong cơ thể được mô tả bởi phương trình:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}(\ln 1,2875 - \ln V)V$$

với  $t$  là thời gian đo bằng ngày. Giả sử một bệnh nhân có kích thước khối u ban đầu là  $1\text{mm}^3$ . Tính kích thước khối u đo sau 1 tuần, với độ dài bước là  $h = 0,5$ .

**Giải**

Theo giả thiết ta có:  $V_t' = \frac{2}{3}(\ln 1,2875 - \ln V)V$ ,  $V(t_0) = 1\text{mm}^3$ . Áp dụng công thức RK4 với độ dài bước  $h = 0,5$  ta có được bảng giá trị sau:

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$
0	0.0	1.0	0.0842
	0.25	1.0421	0.0735
	0.25	1.0367	0.0749
	0.5	1.0749	0.0647
$y_1 = 1.0742563276967483$			
1	0.5	1.0743	0.0648
	0.75	1.1067	0.0558
	0.75	1.1022	0.0571
	1.0	1.1314	0.0488
$y_2 = 1.1308318300411933$			
2	1.0	1.1308	0.0489
	1.25	1.1553	0.0417
	1.25	1.1517	0.0428
	1.5	1.1736	0.0362
$y_3 = 1.1731941950881215$			
3	1.5	1.1732	0.0364
	1.75	1.1914	0.0308
	1.75	1.1886	0.0317
	2.0	1.2049	0.0266
$y_4 = 1.2045215004349776$			
	2.0	1.2045	0.0267

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$
4	2.25	1.2179	0.0226
	2.25	1.2158	0.0232
	2.5	1.2277	0.0194
$y_5 = 1.2274823599902247$			
5	2.5	1.2275	0.0195
	2.75	1.2372	0.0164
	2.75	1.2357	0.0169
	3.0	1.2444	0.0141
$y_6 = 1.2442037988147636$			
6	3.0	1.2442	0.0142
	3.25	1.2513	0.0119
	3.25	1.2502	0.0123
	3.5	1.2565	0.0102
$y_7 = 1.2563255929690706$			
7	3.5	1.2563	0.0103
	3.75	1.2615	0.0086
	3.75	1.2606	0.0089
	4.0	1.2652	0.0074
$y_8 = 1.265084145778265$			
8	4.0	1.2651	0.0074
	4.25	1.2688	0.0062
	4.25	1.2682	0.0064
	4.5	1.2715	0.0053
$y_9 = 1.2713977093544433$			
9	4.5	1.2714	0.0053
	4.75	1.2741	0.0045
	4.75	1.2736	0.0046
	5.0	1.276	0.0038
$y_{10} = 1.275941135586157$			
10	5.0	1.2759	0.0038
	5.25	1.2779	0.0032
	5.25	1.2775	0.0033
	5.5	1.2792	0.0027
$y_{11} = 1.2792067652198376$			
11	5.5	1.2792	0.0028
	5.75	1.2806	0.0023
	5.75	1.2804	0.0024
	6.0	1.2816	0.002
$y_{12} = 1.2815519324774327$			
12	6.0	1.2816	0.002
	6.25	1.2825	0.0016
	6.25	1.2824	0.0017
	6.5	1.2833	0.0014
$y_{13} = 1.2832350362085005$			

$n$	$x_n$	$y_n$	$hf(x_n, y_n)$
13	6.5	1.2832	0.0014
	6.75	1.2839	0.0012
	6.75	1.2838	0.0012
	7.0	1.2845	0.001
$y_{14} = 1.2844424457023882$			

Vậy sau một tuần, khối u có kích thước khoảng  $1.2844\text{mm}^3$ .

# Chương 3

## Xây dựng Code tính toán

### 3.1 Phương pháp Euler và Euler cải tiến

- Ngôn ngữ xây dựng: **Swift**.
- Các khai báo ban đầu:
  - `from` và `to`: Đoạn tìm nghiệm.
  - `x_0` và `y_0`: Giá trị  $x_0$  và  $y_0 = f(x_0)$  cho trước.
  - `h`: Giá trị bước chạy  $h$ .
  - `f()`: Hàm số  $f(x, y)$  cho trước.
  - `phi()`: Nghiệm chính xác  $\varphi(x)$  dùng để so sánh (nếu có).

```
1  import Foundation
2
3  let from: Double = 0.0
4  let to: Double = 1.5
5  let x_0: Double = 0
6  let y_0: Double = 1
7  let h: Double = 0.25
8
9  // Extension for number processing
10 extension Double {
11     func roundToDecimal(_ fractionDigits: Int = 9) -> Double {
12         let multiplier = pow(10, Double(fractionDigits))
13         return Darwin.round(self*multiplier)/multiplier
14     }
15 }
16
17 // Declare f() and phi()
18 func f(_ x: Double, _ y: Double) -> Double {
19     return 2*x*y + exp(pow(x, 2))
20 } // f_n(x, y) = 2xy + e^(x^2)
21 func f_mid(_ x: Double, _ y: Double) -> Double {
22     return f(x + h/2.0, y + (h/2.0)*f(x, y))
23 } // f_{n + 1/2}(x, y), Don't touch this!
24 func phi(_ x: Double) -> Double {
25     return (x + 1)*exp(pow(x, 2))
26 } // varphi(x) = (x + 1)e^(x^2)
27
28 let numOfStep = Int( ((to - from)/h).roundToDecimal(0) )
29
30 let TAB = "\t"
31
```

```

32  var phix = [Double](repeating: 0.0, count: numOfStep + 1)
33  var x = phix, y = phix, y_1 = phix, y_2 = phix
34
35  x[0] = x_0
36  y[0] = y_0
37  y_1[0] = y_0
38  y_2[0] = y_0
39  phix[0] = phi(x[0])
40
41  print("EULER")
42  print(
43      "n" + TAB +
44      "x_n" + TAB +
45      "y_n" + TAB +
46      "y_n (Euler CT 1)" + TAB +
47      "y_n (Euler CT 2)" + TAB +
48      "phi(x_n)"
49  )
50  for n in 0...numOfStep {
51      if n > 0 {
52          x[n] = from + Double(n)*h
53          y[n] = y[n - 1] + h*f(x[n - 1], y[n - 1])
54          y_1[n] = y_1[n - 1] + h*f_mid(x[n - 1], y_1[n - 1])
55          y_2[n] = y_2[n - 1] + (h/2.0)*(f(x[n - 1], y_2[n - 1]) + f(x[n], y
[n]))
56          phix[n] = phi(x[n])
57      }
58      print(
59          String(n) + TAB +
60          String(x[n].roundToDecimal()) + TAB +
61          String(y[n].roundToDecimal()) + TAB +
62          String(y_1[n].roundToDecimal()) + TAB +
63          String(y_2[n].roundToDecimal()) + TAB +
64          String(phix[n].roundToDecimal())
65      )
66  }

```

Kết quả tính nghiệm gần đúng cho phương trình  $y' = 2xy + e^{x^2}$  trong đoạn  $[0; 1.5]$ , với  $y(0) = 1$ ,  $h = 0.25$  và nghiệm chính xác  $\varphi(x) = (x + 1)e^{x^2}$ : (\*)

1	EULER					
2	n	x_n	y_n	y_n (Euler CT1)	y_n (Euler CT2)	phi(x_n)
3	0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	1	0.25	1.25	1.324249427	1.336186807	1.330618074
5	2	0.5	1.672373615	1.900762068	1.922310169	1.926038125
6	3	0.75	2.411473373	2.988632024	2.994635207	3.07134565
7	4	1.0	3.754539552	5.174883786	5.053931257	5.436563657
8	5	1.25	6.311379784	9.890930104	9.22584713	10.734149659
9	6	1.5	11.448675445	20.881810717	18.184486277	23.719339591

## 3.2 Phương pháp Runge – Kutta 4

- Ngôn ngữ xây dựng: **Python**.

- Các khai báo ban đầu được ghi chú như bên dưới.

```

1  import math
2
3  # Moc dau cua x
4  x0 = 0
5
6  # Gia tri y tai moc dau
7  y0 = 1
8
9  # Moc cuoi cua doan can tinh
10 xn = 1.5
11
12 # Buoc chay
13 h = 0.25
14
15 yn = 0
16 n = int((xn - x0)/h)
17
18 # Ham f(x, y)
19 def f(x, y):
20     return 2*x*y + math.exp(pow(x, 2))
21
22 # Tinh k
23 def k(x, y):
24     return (h*f(x, y))
25
26 # So do RK4
27 def RK4(x0, y0, xn, h):
28     for i in range(n):
29         k1 = k(x0, y0)
30         k2 = k(x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k1)
31         k3 = k(x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k2)
32         k4 = k(x0 + h, y0 + k3)
33         yn = y0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
34         print('%.4f\t%.4f\t%.4f'% (x0, y0, k1))
35         print('%.4f\t%.4f\t%.4f'% (x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k1, k2))
36         print('%.4f\t%.4f\t%.4f'% (x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k2, k3))
37         print('%.4f\t%.4f\t%.4f'% (x0 + h, y0 + k3, k4))
38         print('y', i + 1, '=', yn)
39         print('-----')
40         y0 = yn
41         x0 = x0+h
42
43 print('RUNGE -- KUTTA 4')
44 print('-----')
45 print('x0\ty0\thf(xn, yn)')
46 print('-----')
47 print(RK4(x0, y0, xn, h))

```

Kết quả tính nghiệm gần đúng cho phương trình (\*):

```

1  RUNGE -- KUTTA 4
2  -----
3  x0          y0          hf(xn, yn)
4  -----

```



```

5      0.0000      1.0000      0.2500
6      0.1250      1.1250      0.3242
7      0.1250      1.1621      0.3266
8      0.2500      1.3266      0.4319
9      y 1 = 1.3305971879551572
10     -----
11     0.2500      1.3306      0.4324
12     0.3750      1.5468      0.5778
13     0.3750      1.6195      0.5914
14     0.5000      1.9220      0.8015
15     y 2 = 1.9259826024278124
16     -----
17     0.5000      1.9260      0.8025
18     0.6250      2.3272      1.0967
19     0.6250      2.4744      1.1427
20     0.7500      3.0687      1.5895
21     y 3 = 3.0711359613687614
22     -----
23     0.7500      3.0711      1.5904
24     0.8750      3.8664      2.2291
25     0.8750      4.1857      2.3688
26     1.0000      5.4400      3.3996
27     y 4 = 5.435447936938942
28     -----
29     1.0000      5.4354      3.3973
30     1.1250      7.1341      4.8993
31     1.1250      7.8851      5.3217
32     1.2500      10.7571     7.9159
33     y 5 = 10.727957770117296
34     -----
35     1.2500      10.7280      7.8977
36     1.3750      14.6768      11.7462
37     1.3750      16.6010      13.0691
38     1.5000      23.7971      20.2197
39     y 6 = 23.685940908673885
40     -----

```

## 3.3 Phương pháp Adams

- Ngôn ngữ xây dựng: **Python**.
- Các khai báo ban đầu tương tự phần trên.

### 3.3.1 Công thức nội suy

```

1      import math
2
3      # Moc dau cua x
4      x0 = 0
5
6      # Gia tri y tai moc dau

```

```

7  y0 = 1
8
9  # Moc cuoi cua doan can tinh
10 xn = 1.5
11
12 # Buoc chay
13 h = 0.25
14
15 yn = 0
16 n = int((xn - x0)/h)
17
18 RKE = [y0]
19 yad = 0
20
21 # Ham f
22 def f(x, y):
23     return 2*x*y + math.exp(pow(x, 2))
24
25 # Tinh k
26 def k(x, y):
27     return (h*f(x, y))
28
29 # So do RK4
30 def RK4(x0, y0, xn, h):
31     for i in range(n):
32         k1 = k(x0, y0)
33         k2 = k(x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k1)
34         k3 = k(x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k2)
35         k4 = k(x0 + h, y0 + k3)
36         yn = y0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
37         RKE.append(yn)
38         y0 = yn
39         x0 = x0 + h
40     return RKE
41
42 # Adam noi
43 def adams(h, RKE, yad):
44     for i in range(3, n):
45         yad = RKE[i] + (h/720)*(251*f((i + 1)*h, RKE[i + 1]) + 646*f(i*h,
46             RKE[i]) - 264*f((i - 1)*h, RKE[i - 1]) + 106*f((i - 2)*h, RKE[i - 2])
47             - 19*f((i - 3)*h, RKE[i - 3]))
48         print('%.0f\t%.1f\t%.9f\t%.9f'%(i + 1, (i + 1)*h, yad, RKE[i +
49             1]))
50
51 # Tinh RK4
52 RK4(x0, y0, xn, h)
53
54 print('ADAMS NOI SUY')
55 print('-----')
56 print('i\txi\tAdams noi\tRK4')
57 print('-----')
58 print(adams(h, RKE, yad))

```

Kết quả tính nghiệm gần đúng cho phương trình (\*):

```

1  ADAMS NOI SUY
2  -----

```

3	i	xi	Adams noi	RK4
4	-----			
5	4	1.0	5.445266380	5.435447937
6	5	1.2	10.760360033	10.727957770
7	6	1.5	23.800976513	23.685940909

### 3.3.2 Công thức ngoại suy

```

1  import math
2
3  # Moc dau cua x
4  x0 = 0
5
6  # Gia tri y tai moc dau
7  y0 = 1
8
9  # Moc cuoi cua doan can tinh
10 xn = 1.5
11
12 # Buoc chay
13 h = 0.25
14
15 yn = 0
16 n = int((xn - x0)/h)
17
18 RKE = [y0]
19 yad = 0
20
21 # Ham f
22 def f(x, y):
23     return 2*x*y + math.exp(pow(x, 2))
24
25 # Tinh k
26 def k(x, y):
27     return (h*f(x, y))
28
29 # So do RK4
30 def RK4(x0, y0, xn, h):
31     for i in range(n):
32         k1 = k(x0, y0)
33         k2 = k(x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k1)
34         k3 = k(x0 + (0.5)*h, y0 + (0.5)*k2)
35         k4 = k(x0 + h, y0 + k3)
36         yn = y0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
37         RKE.append(yn)
38         y0 = yn
39         x0 = x0 + h
40     return RKE
41
42 # Adam ngoai
43 def adams(h, RKE, yad):
44     for i in range(3, n):
45         yad = RKE[i] + (h/24)*(55*f(i*h, RKE[i]) - 59*f((i - 1)*h, RKE[i -
46 1])) + 37*f((i - 2)*h, RKE[i - 2]) - 9*f((i - 3)*h, RKE[i - 3]))

```

```

45     print('%.0f\t%.1f\t%.9f\t%.9f'% (i + 1, (i + 1)*h, yad, RKE[i +
1]))
46
47     # Tinh RK4
48     RK4(x0, y0, xn, h)
49
50     print('ADAMS NGOAI SUY')
51     print('-----')
52     print('i\txi\tAdams ngoai\tRK4')
53     print('-----')
54     print(adams(h, RKE, yad))

```

Kết quả tính nghiệm gần đúng cho phương trình (\*):

1	ADAMS NGOAI SUY			
2	-----			
3	i	xi	Adams ngoai	RK4
4	-----			
5	4	1.0	5.316017136	5.435447937
6	5	1.2	10.386106015	10.727957770
7	6	1.5	22.626062249	23.685940909

# Tài liệu tham khảo

- [1] Anh, P. K. (2005). *Giải tích số*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [2] Đinh, T. V (1999). *Phương pháp tính*. NXB Giáo dục.
- [3] Hương, N. T., Anh, L. Q. (2016). *Giáo trình Giải tích số*. NXB Đại học Cần Thơ.