

Einkaufsoptimierung informatiCup 2012 Aufgabe 1

Kai Fabian

Hasso-Plattner-Institut, IT-Systems Engineering, 3. Semester

`kai.fabian@student.hpi.uni-potsdam.de`

Dominik Moritz

Hasso-Plattner-Institut, IT-Systems Engineering, 3. Semester

`dominik.moritz@student.hpi.uni-potsdam.de`

Matthias Springer

Hasso-Plattner-Institut, IT-Systems Engineering, 3. Semester

`matthias.springer@student.hpi.uni-potsdam.de`

Malte Swart

Hasso-Plattner-Institut, IT-Systems Engineering, 3. Semester

`malte.swart@student.hpi.uni-potsdam.de`

15. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Ein NP-schweres Problem

2

1 Ein NP-schweres Problem

Bei dem vorliegenden Problem handelt es sich um NP-schweres Problem. Das ist deshalb interessant, weil es somit nahezu ausgeschlossen ist, einen Algorithmus zu finden, der die optimale Lösung des Problems effizient (in polynomieller Zeit) berechnet. Durch polynomielle Reduktion des *Travelling Salesman Problems* (TSP) auf das vorliegende Problem kann die NP-Schwierigkeit gezeigt werden.

Beim TSP geht man von einem ungerichteten, gewichteten Graphen aus, wobei die Knoten des Graphen Städte und die Kanten des Graphen Verkehrswege zwischen den Städten repräsentieren. Das Gewicht einer Kante gibt Aufschluss über die Länge des Weges zwischen zwei Städten. Nun soll eine Rundreise, also ein Pfad mit dem gleichen Start- und Endknoten, mit dem kleinstmöglichen Reiseweg gesucht werden, wobei alle Städte einmal besucht werden müssen.

Das TSP lässt sich auf das Problem der Einkaufsplanung reduzieren, indem man den Graphen ohne Veränderung übernimmt¹. Wenn $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ die Menge der Städte ist, erzeugen wir für jede Stadt s_i einen Artikel a_i , den es nur in dieser Stadt zu kaufen gibt. Für die letzte Stadt s_n gibt es keinen Artikel, denn das soll unser Start- und Endpunkt sein, an dem die Reise beginnt. Der Preis der Artikel spielt keine Rolle, solange er endlich ist, also setzen wir ihn einfach auf 0.

Jeder Artikel soll nun einmal eingekauft werden. Durch die Lösung des Einkaufsplanungsproblems erhalten wir eine optimale Lösung des TSP, denn es werden die Gesamtkosten minimiert, die in diesem Fall nur aus den Reisekosten bestehen. Die Reisekosten aber ist die Länge der Rundreise. Um jeden Artikel einzukaufen, muss des weiteren jede Stadt einmal besucht werden. Als Ergebnis erhalten wir u.a. die Reihenfolge, in der die Städte besucht werden sollen, was der Lösung des TSP entspricht. Die Transformation des Problems ist trivialerweise in polynomieller Zeit möglich, denn es muss lediglich für jede Stadt ein Artikel erstellt werden (linearer Zeitaufwand).

Um zu zeigen, dass es sich außerdem um ein NP-vollständiges Problem handelt, muss nachgewiesen werden, dass das Problem in der Menge NP enthalten ist. Es muss also gezeigt werden, dass eine Lösung in polynomieller Zeit verifiziert werden kann. An dieser Stelle soll nur das Entscheidungsproblem betrachtet werden: Gibt es eine Lösung des Einkaufsplanungsproblems, deren Gesamtkosten unter dem Betrag n liegen? Eine mögliche Lösung kann durch Aufsummieren der Reisekosten zwischen den Einkaufsläden² und dem Addieren der Artikelpreise bei den entsprechenden Einkaufsläden in polynomieller Zeit³ verifiziert werden. Somit handelt es sich um ein NP-schweres Problem, das selbst

¹Einkaufsgeschäfte sind Städte.

²Die Reisekosten ergeben sich aus den Kantengewichten.

³Wie man sich leicht überlegen kann, macht es keinen Sinn, eine Kante mehr als zweimal zu benutzen.

in NP liegt, also folglich um ein NP-vollständiges Problem.

2 Pre- und Postprocessing

Um die Implementierung unserer Algorithmen zu verbessern und den Zustandsraum zu verkleinern, wird vor der Ausführung ein Preprocessing-Schritt und nach der Ausführung ein Postprocessing-Schritt durchgeführt.

2.1 Preprocessing

Als Eingabe erhält das Programm u.a. eine Adjazenzmatrix eines gewichteten, ungerichteten Graphen, in dem die Geschäfte auf Knoten und die Wege zwischen den Geschäften auf Kanten abgebildet werden. Das Gewicht einer Kante ist der Abstand zwischen zwei Geschäften bzw. die Kosten, die bei der Fahrt entstehen. Es ist auch möglich, dass zwischen Geschäften gar keine Verbindung existiert, was entweder bedeutet, dass das Geschäft nur über ein anderes Geschäft erreichbar ist, oder dass der Graph nicht verbunden ist.

Falls der Graph nicht zusammenhängend ist, können die Knoten, die nicht vom Start- und Endknoten aus erreichbar sind, einfach verworfen werden. Diese sind dann nämlich nicht relevant für die Berechnung, weil sie in keiner validen Lösung auftauchen können. Sie würden den Suchraum nur unnötig vergrößern. Nicht erreichbare Knoten können mit einer Tiefensuche in linearer Zeit⁴ gefunden und gelöscht werden.

Die eigentlichen Algorithmen entscheiden nur, ob und in welcher Reihenfolge bestimmte Knoten angesteuert werden sollen. Es wird also nicht direkt betrachtet, welchen Preis die Einkaufsartikel haben. Die Lösung, die ein Algorithmus generiert, ist nur eine Liste mit den anzusteuern Knoten. Welche Artikel bei welchem Geschäft gekauft werden, muss nicht gespeichert werden. Dazu geht man einfach alle Artikel durch und wählt für jeden Artikel das Geschäft unter den besuchten Geschäften aus, das den Artikel zum niedrigsten Preis anbietet.

Eine solche Rundreise kann aber sehr groß sein, da es passieren kann, dass ein Geschäft mehrmals besucht werden muss⁵. Durch eine Optimierung im Preprocessing kann der Suchraum aber stark verkleinert werden.

Dazu wird der Graph in einen vollständigen Graphen umgewandelt. Jeder Knoten ist dann von jedem anderen Knoten aus direkt erreichbar. Als Kantengewicht einer hinzugefügten Kante wählt man den minimalen Abstand zwischen den beiden betroffenen Knoten. In einem solchen Graphen muss kein Knoten mehr als einmal besucht werden. Um einen Artikel in einem bestimmten Geschäft zu kaufen, reicht es aus, den Knoten ein einziges Mal zu besuchen. Von diesem Knoten aus ist aber jeder andere Knoten direkt

⁴ $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, wobei $|V|$ die Anzahl der Knoten und $|E|$ die Anzahl der Kanten ist.

⁵Man denke z.B. an einen Fall, wo ein Geschäft A nur über ein einziges anderes Geschäft B erreichbar ist. Dann muss man dieses Geschäft B mindestens zweimal besuchen, einmal um zu A zu gelangen und einmal um A wieder zu verlassen. Analog lassen sich Fälle konstruieren, bei denen ein Geschäft beliebig oft besucht werden muss.

erreichbar. Man steuert nun also nur Geschäfte an, in denen man auch etwas kaufen will. Fälle, in denen man einen Knoten nur ansteuert, um einen anderen Knoten zu erreichen, gibt es nicht mehr.

Der Suchraum kann durch diese Optimierung verkleinert werden, da nur noch zyklentreie Rundreisen⁶ betrachtet werden. Ein Algorithmus muss nur noch entscheiden, welche Geschäfte er überhaupt besuchen will und dann eine optimale TSP-Rundreise finden.

2.2 Implementierung des Preprocessing

Um den Graphen in einen vollständigen Graphen zu überführen, wird zunächst mit dem Floyd-Warshall Algorithmus der kürzeste Weg zwischen allen Paaren von Knoten berechnet⁷. Es wird sowohl die Länge als auch der eigentliche Weg gespeichert. Die Adjazenzmatrix des Graphen kann nun mit den berechneten Längen vervollständigt werden.

2.3 Postprocessing

Die generierte Lösung eines Algorithmus kann Kanten benutzen, die im vollständigen Graphen zwar enthalten sind, nicht aber im ursprünglichen Graphen. Solche Kanten müssen im Postprocessing identifiziert werden und durch den kürzesten Pfad zwischen den beiden betroffenen Knoten ersetzt werden. Das ist mit wenig Aufwand möglich, weil während der Berechnung der minimalen Pfade im Floyd-Warshall Algorithmus auch die Knoten, aus denen ein Pfad besteht, gespeichert wurden.

Die grafische Oberfläche zeigt Zwischenlösungen der Algorithmen an. Kanten, die nur im vollständigen Graphen existieren, nicht aber im originalen Graphen, sind gestrichelt eingezeichnet. Die endgültige Lösung enthält keine solchen Kanten mehr. Stattdessen kann es sein, dass Knoten dort mehrmals besucht werden.

⁶Eine Rundreise ist natürlich auch ein Zyklus, aber dieser Zyklus zählt hier nicht.

⁷Laufzeit $\mathcal{O}(|V|^3)$ bei $|V|$ Geschäften.